POST HBO-OPLEIDINGEN

Betonconstructeur BV
Staalconstructeur BmS

Professional master of structural engineering

Toegepaste Mechanica

Wringing

Docent : dr ir P.C.J. Hoogenboom

TENTAMEN 1e en 2e JAAR
duur : 60 minuten

WAARSCHUWING	*: Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam !*
OPMERKING	*: Al het studiemateriaal en aantekeningen mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd*

POST HBO

24 juni 2003

Vraagstuk 1

(35 minuten, 6 punten)

Een betonnen boorplatform heeft een centrale schacht met een normaaldoorsnede volgens figuur 1. De dikte van elke wand is t. Voor het bepalen van de wringeigenschappen wordt gebruik gemaakt van de zeepvliesanalogie. We gebruiken rotatiesymmetrie waardoor slechts twee cellen in de berekening worden betrokken. A_1 en A_2 zijn de doorsnede-oppervlakken van deze cellen. O_1 en O_2 zijn de omtrekken van deze cellen. Er geldt dat

$$A_1 = \pi R^2$$
$$A_2 = (4-\pi)R^2$$
$$O_1 = 2\pi R$$
$$O_2 = 2\pi R\,.$$

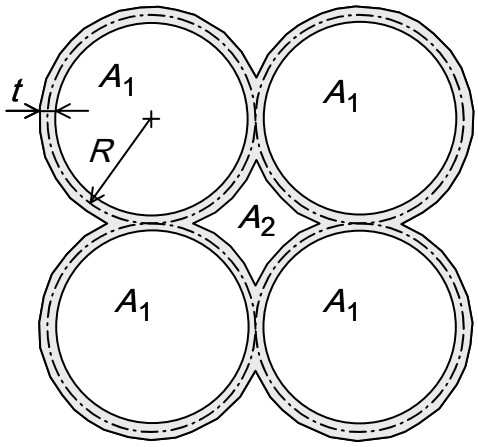
a) Stel de vergelijkingen op waaruit de verplaatsingen w_1 en w_2 van de zwevende plaatjes kunnen worden opgelost. U hoeft de vergelijkingen niet op te lossen.

De oplossing van de vergelijkingen is

$$w_1 = \frac{pRt}{S}\frac{3\pi+4}{6\pi}$$
$$w_2 = \frac{pRt}{S}\frac{8}{3\pi}\,.$$

b) Bereken de wringstijfheid van de doorsnede.

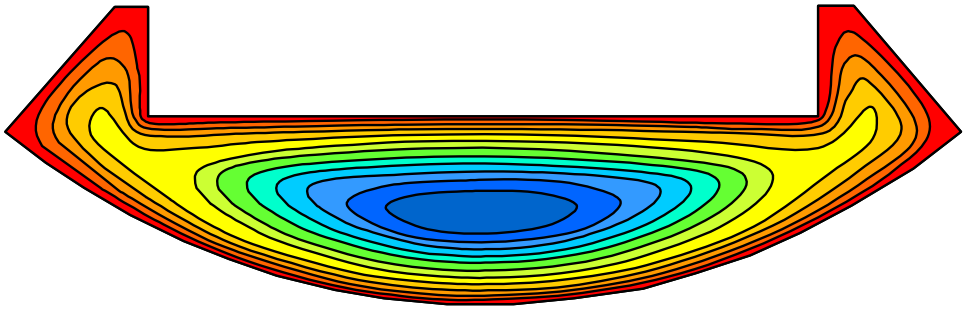
c) Bereken de schuifspanningen in de wanden. Schets de doorsnede en teken hierin de schuifspanningen in de goede richting.



Figuur 1. Normaaldoorsnede van een schacht

Vraagstuk 2
(10 minuten, 2 punten)

We beschouwen de trogligger van figuur 2. Afgebeeld is de ϕ-heuvel van de normaaldoorsnede. Beschrijf kort hoe de grootte en richting van de wringspanning uit deze figuur kan worden afgelezen. Schets de doorsnede en teken hierin de plaatsen waar de grootste wringspanningen optreden en hun richtingen.



Figuur 2. ϕ-heuvel van een trogligger

Vraagstuk 3
(15 minuten, 2 punten)

Het wringtraagheidsmoment I_w hangt niet af van de glijdingsmodulus G de specifieke verwringing θ of het wringmoment M_w. Bewijs dit met behulp van de differentiaalvergelijking van de welvingsfunctie ψ.

Uitwerking Vraagstuk 1

a) We nemen aan dat plaat 2 hoger zweeft dan plaat 1.

Verticaal evenwicht van plaat 1: $p A_1 - S\frac{w_1}{t}\frac{3}{4}O_1 + S\frac{w_2 - w_1}{t}\frac{1}{4}O_1 = 0$

Verticaal evenwicht van plaat 2: $p A_2 - S\frac{w_2 - w_1}{t}O_2 = 0$

Dit kunnen we uitwerken tot

$$p\pi R^2 - S\frac{w_1}{t}\frac{3}{4}2\pi R + S\frac{w_2 - w_1}{t}\frac{1}{4}2\pi R = 0$$

$$p(4-\pi)R^2 - S\frac{w_2 - w_1}{t}2\pi R = 0$$

De oplossing van deze vergelijkingen is gegeven in het vraagstuk.

$$w_1 = \frac{pRt}{S}\frac{3\pi + 4}{6\pi}$$

$$w_2 = \frac{pRt}{S}\frac{8}{3\pi}$$

b) Van het zeepvlies gaan we naar de ϕ-heuvel met de volgende substituties

$$w = \phi \qquad p = 2\theta \qquad S = \frac{1}{G}.$$

$$\phi_1 = 2\theta G Rt\frac{3\pi + 4}{6\pi}$$

$$\phi_2 = 2\theta G Rt\frac{8}{3\pi}$$

Het wringmoment is twee maal de inhoud van de ϕ-heuvel.

$$\begin{aligned} M_w &= 2(4\phi_1 A_1 + \phi_2 A_2) \\ &= 2\left(4 \times 2\theta G Rt\frac{3\pi + 4}{6\pi}\pi R^2 + 2\theta G Rt\frac{8}{3\pi}(4-\pi)R^2\right) \\ &= G R^3 t\theta\left(8\pi + \frac{128}{3\pi}\right) \end{aligned}$$

Voor een draadmodel van de schacht geldt:

$$M_w = G I_w \theta$$

Dus de wringstijfheid is

$$\boxed{GI_w = GR^3 t\left(8\pi + \frac{128}{3\pi}\right)}.$$

c) De schuifspanning is de helling van ϕ–heuvel. We herschrijven eerst de uitdrukking voor het wringmoment

$$GRt\theta = \frac{3\pi}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{R^2}$$

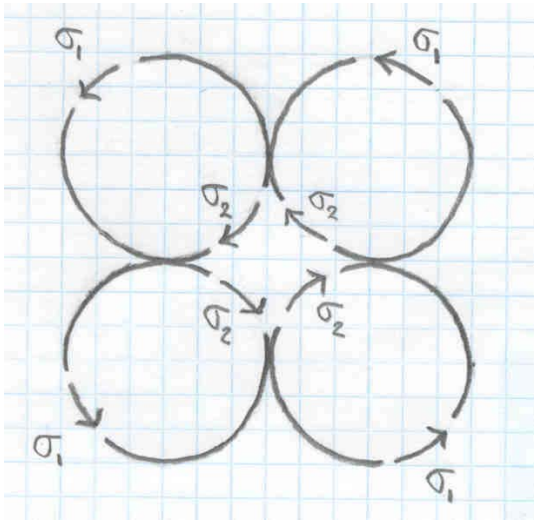
en drukken ϕ_1 en ϕ_2 uit in het wringmoment.

$$\phi_1 = 2\frac{3\pi}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{R^2}\frac{3\pi + 4}{6\pi} = \frac{3\pi + 4}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{R^2}$$
$$\phi_2 = 2\frac{3\pi}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{R^2}\frac{8}{3\pi} = \frac{16}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{R^2}$$

De schuifspanningen worden nu

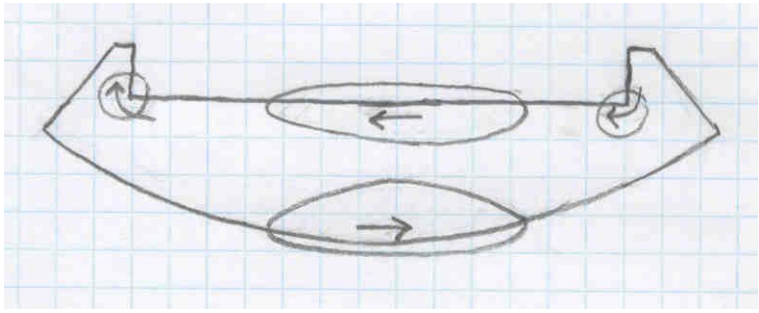
$$\sigma_1 = \frac{\phi_1}{t} \qquad \boxed{\sigma_1 = \frac{3\pi + 4}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{tR^2}}$$

$$\sigma_2 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t} = \frac{\dfrac{16}{24\pi^2 + 128}\dfrac{M_w}{R^2} - \dfrac{3\pi + 4}{24\pi^2 + 128}\dfrac{M_w}{R^2}}{t} \qquad \boxed{\sigma_2 = \frac{12 - 3\pi}{24\pi^2 + 128}\frac{M_w}{tR^2}}.$$



Uitwerking Vraagstuk 2

De grootte van de wringspanning is omgekeerd evenredig met de afstand tussen de hoogtelijnen. De richting van de wringspanning is gelijk aan de richting van hoogtelijnen.



Uitwerking Vraagstuk 3

De uitdrukkingen voor de spanning luiden

$$\sigma_{xz} = G(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y)\theta$$
$$\sigma_{xy} = G(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z)\theta\,.$$

Substitutie hiervan in de uitdrukking voor het wringmoment geeft

$$\begin{aligned} M_w &= \int_A (y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy}dA \\ &= \int_A (yG(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y)\theta - zG(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z)\theta)dA \\ &= G\theta \int_A (y\frac{\partial \psi}{\partial z} - z\frac{\partial \psi}{\partial y} + y^2 + z^2)dA\,. \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we het wringtraagheidsmoment schrijven als

$$\begin{aligned} I_w &= \frac{M_w}{G\theta} \\ &= \int_A (y\frac{\partial \psi}{\partial z} - z\frac{\partial \psi}{\partial y} + y^2 + z^2)dA\,. \end{aligned}$$

Uit de differentiaalvergelijking van ψ blijkt dat deze alleen afhangt van y, z en van de vorm van de doorsnede. De hierboven gevonden uitdrukking voor I_w is dus een integraal van een functie van y en z over de doorsnede. Derhalve hangt het resultaat I_w alleen van af van de vorm van de doorsnede. Q.E.D.