Tentamen wringing

19 mei 2026
16:00 – 17:30 uur

P.C.J. Hoogenboom

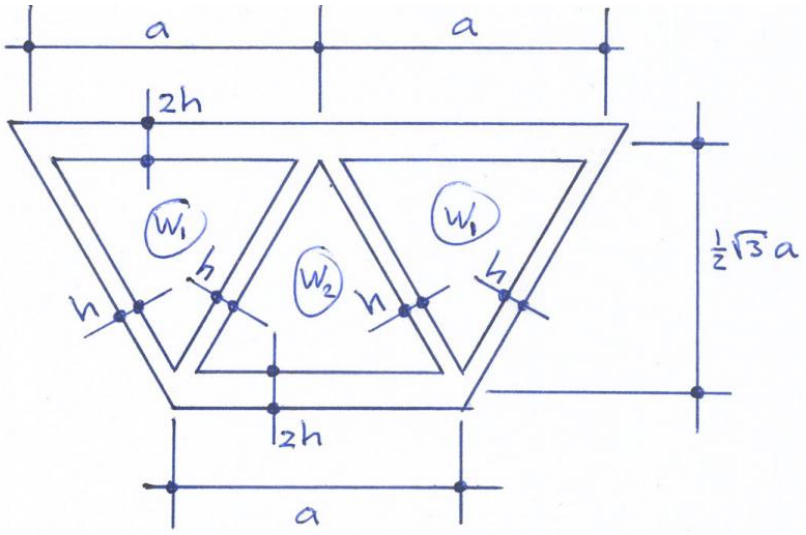
Dit tentamen bestaat uit 3 bladzijden.

Alle studiemateriaal en aantekeningen mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd. Ook dictaat, boeken, rekenmachine, oude tentamens, laptopcomputer, tablet, software mogen worden gebruikt.

Het is niet toegestaan om een telefoon of een smart-watch te gebruiken. Het is ook niet toegestaan om internet te gebruiken.

Vraagstuk 1 (40 minuten, 5 punten)

Een ligger heeft drie cellen (fig. 1). In dit vraagstuk bepalen we de wringeigenschappen van deze ligger met de membraananalogie.



Figuur 1. Dwarsdoorsnede van de ligger

a) Stel de vergelijkingen op van de zwevende plaatjes w_1 en w_2.
(U hoeft de vergelijkingen niet op te lossen.)

De oplossing van de vergelijkingen is $w_1 = \frac{7}{34}\sqrt{3}\frac{pah}{S}$, $w_2 = \frac{9}{34}\sqrt{3}\frac{pah}{S}$

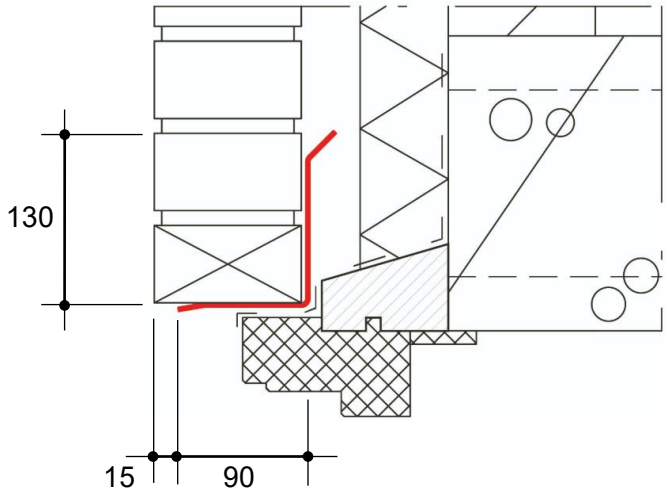
b) Bereken het wringtraagheidsmoment I_w van de doorsnede.

c) Bereken de grootste spanning die optreedt. Schets de doorsnede en teken hierin de richtingen van de schuifspanningen. Geef aan waar de grootste schuifspanning optreedt.

d) Controleer de berekening met de formules van Bredt.
Wordt het wringtraagheidsmoment onderschat of overschat met Bredt?
Wordt de grootste schuifspanning onderschat of overschat met Bredt?

Vraagstuk 2 (25 minuten, 2.5 punten)

Een gegalvaniseerd stalen latei draagt een metselwerk buitenspouwblad. De latei bestaat uit 3 mm dik plaatstaal. De overspanning is 2,6 m. De uiteinden van de latei zijn ingemetseld. De belasting bestaat uit 8 lagen waalformaat metselwerk (voegen nog niet hard) met een eigengewicht van 0.8 kN/m (fig. 2). Door de belasting buigt de latei en roteert de middendoorsnede. Veiligheidsfactoren zijn al verwerkt in de waarden (rekenwaarden).



Figuur 2. Dwarsdoorsnede van een stalen latei met belasting door metselwerk [Vebo website]

a) Bereken het grootste wringend moment in de latei.

b) Wat is de grootste schuifspanning in de latei ten gevolge van het wringend moment?

c) Wat is de grootste buigspanning in de latei?

d) Is de spanning te groot? Verklaar uw antwoord.

Vraagstuk 3 (25 minuten, 2.5 punten)

a) Wat is de relatie tussen “Prandtl” en “wringspanningen” ? Verklaar elke stap.

b) Een ronde buis heeft een diameter van 120 mm en een wanddikte van 1 mm. De buis wordt belast door een wringend moment van 1.5 kNm. De vloeispanning is 300 N/mm^2. De elasticiteits-modulus is $2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2. De dwarscontractiecoëfficiënt is 0.35. Veiligheidsfactoren zijn al verwerkt in de waarden (rekenwaarden).

Bezwijkt de buis? Verklaar uw antwoord.

```
# 1a - Vergelijkingen
# aangenomen dat w2 > w1

A:= a * 1/2*sqrt(3)*a /2:
eq1:= p*A = a*S*w1/h + a*S*w1/(2*h) - a*S*(w2-w1)/h:
eq2:= p*A = a*S*w2/(2*h) + a*S*(w2-w1)/h + a*S*(w2-w1)/h:
Opl:=(solve({eq1,eq2},{w1,w2})); assign(Opl):
```

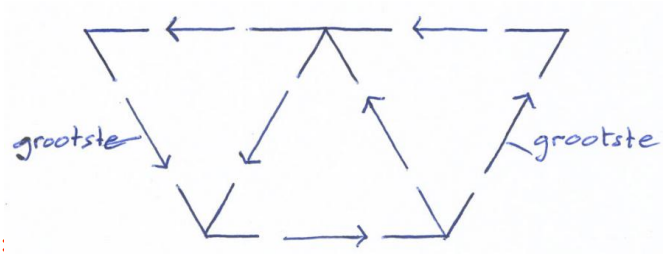
$$Opl := \left\{ w1 = \frac{7}{34}\,\frac{p\,a\,\sqrt{3}\,h}{S},\ w2 = \frac{9}{34}\,\frac{p\,a\,\sqrt{3}\,h}{S} \right\}$$

```
# 1b - Wringstijfheid
S:=1/G: p:=2*theta:
phi1:=w1: phi2:=w2:
Mw:=2*(phi1*A + phi2*A + phi1*A);
```

$$Mw := \frac{69}{34}\,a^3\,G\,\theta\,h$$

```
Iw:=simplify(Mw/theta/G);
```

$$Iw := \frac{69}{34}\,a^3\,h$$




```
# 1c - Grootste spanning
Mw:='Mw':
theta:=solve(Mw = 69/34*a^3*G*theta*h,theta):
tau_max:=phi1/h;
```

$$tau_max := \frac{14}{69}\,\frac{Mw\,\sqrt{3}}{a^2\,h}$$

```
# 1d - Bredt: De inwendige wanden worden weggelaten.
Ab:=3*A:
Iw_Bredt:= 4*Ab^2/( 2*a/h + 3*a/(2*h) );
```

$$Iw_Bredt := \frac{27}{14}\,a^3\,h$$

```
tau_max_Bredt:=Mw/(2*Ab*h);
```

$$tau_max_Bredt := \frac{2}{9}\,\frac{Mw\,\sqrt{3}}{a^2\,h}$$

```
verschil:=(Iw_Bredt - Iw)/Iw*100.; # 5% onderschat
```

$$verschil := -4.968944099$$

```
verschil:=(tau_max_Bredt - tau_max)/tau_max*100.; # 10% overschat
```

$$verschil := 9.523809524$$

```
# 2a Wringend moment
h:=3*mm: q:=0.8*kN/m: l:=2.6*m:
kN:=1000*N: m:=1000*mm:
e:=100*mm/2 + 5*mm: # Dwarskrachtencentrum in snijpunt van lijf en flens
mx:=q*e:
Mw:=mx*l/2; # Ter plaatse van beide opleggingen
```

$$Mw := 57200.00000\ N\,mm$$

```
# 2b Wringspanning
Iw:= 1/3*(90*mm+130*mm)*h^3;
```

$$Iw := 1980\ mm^4$$

```
tau:= Mw*h/Iw;
```

$$\tau := \frac{86.66666667\ N}{mm^2}$$

```
# 2c Buigspanning
A:=(90*mm+130*mm)*h:
s:=130.*mm*h *65*mm / A; # Zwaartepunt t.o.v. onderkant latei
```

$$s := 38.40909091\ mm$$

```
Ib:=1/12*90*mm*h^3 + 90*mm*h *s^2 + 1/12*h*(130*mm)^3 + 130*mm*h* (65*mm-s)^2:
M:=1/8*q*l^2:
sigma:=-M*(130*mm-s)/Ib; # Spanning is boven het grootst
```

$$\sigma := -\frac{50.60386832\ N}{mm^2}$$

```
# Extra: Schuifspanning door dwarskracht bij oplegging
V:= q*1/2*l: tauV:=3/2*V/(130*mm*h);
```

$$tauV := \frac{4.000000000\ N}{mm^2}$$

```
# 2d Okay?
assume(mm>0): assume(N>0):
sigma_VM:=sqrt(3.*(tau + tauV)^2); # Bij de oplegging < vloeispanning van staal
```

$$sigma_VM := \frac{157.0392732\ N\sim}{mm\sim^2}$$

```
# 3a Prandtl
# Prandtl heeft de membraan-analogy ondekt.
# De membraan-analogy is dat een zeepvlies dezelfde vorm heeft als de phi-heuvel.
# De helling van de phi-heuvel in een richting is de wringspanning loodrecht op die richting.

# 3b Buis
d:=120.*mm: h:=1*mm: Mw:=1.5*kN*m: fy:=300*N/mm^2: E:=2.1e5*N/mm^2: nu:=0.35:
m:=1000*mm: kN:=1000*N: assume(mm>0):

r:=d/2:
Iw:=3.14/2*(r^4-(r-h)^4):
tau:=r*Mw/Iw:
sigmaVM:=sqrt(3.)*tau; # sigma < fy: bezwijkt niet
```

$$sigmaVM := \frac{117.8316417\ N}{mm^{\sim 2}}$$

```
Mplooi:=2*3.14*E*sqrt(r*h^5)/(3*sqrt(2.)(1-nu^2)^(3/4));
```

$$Mplooi := 2.625711828 \times 10^{6}\ mm \sim N$$

```
Mw; # Mw < Mplooi: bezwijkt niet
```

$$1.5000000 \times 10^{6}\ mm \sim N$$

