6. WRINGING VAN STAVEN

6.1. Probleemstelling

In de opleiding tot civiel ingenieur wordt de student grondig ingeleid in het gedrag van staafconstructies. Hij leert de basisgevallen *extensie*, *buiging*, *afschuiving* en *wringing* kennen en combinaties daarvan.
Bij elk basisgeval spreken we over twee uitwendige grootheden, te weten een specifieke vervorming en een daarmee corresponderende gegeneraliseerde spanningsresultante. Bij het geval extensie zijn dat ε en N, bij buiging κ en M, bij afschuiving γ en Q en bij wringing θ en M_w.

In elk van de vier basisgevallen zijn steeds twee gegevens van belang voor een constructeur. Ten eerste moet hij de *stijfheid* weten, dat is de relatie tussen de specifieke vervorming, en de ermee corresponderende spanningsresultante. Deze is voor de verschillende gevallen:

extensie : $N = EA\ \varepsilon$
buiging : $M = EI\ \kappa$
afschuiving : $Q = GA_a\ \gamma$
wringing : $M_w = GI_w\ \theta$

Hierin is EA de rekstijfheid, EI de buigstijfheid, GA_a de stijfheid tegen afschuiving, en GI_w de wringstijfheid (ook torsiestijfheid genoemd). De grootheid E is de elasticiteitsmodulus van het materiaal en G de glijdingsmodulus. De grootheden A, I, A_a en I_w worden bepaald door de vorm van de staafdoorsnede. Hiervan is A de oppervlakte van de doorsnede en I het buigtraagheidsmoment. De grootheid A_a is de in rekening te brengen doorsnede bij afschuiving; alleen voor cirkelvormige doorsneden is deze gelijk aan A. De grootheid I_w wordt het wringtraagheidsmoment genoemd.
In de opleiding wordt veel aandacht besteed aan de bepaling van A en I (colleges b10 en b11), en in iets mindere mate aan A_a (college b13). Daarmee vergeleken blijft de behandeling van het torsieprobleem maar summier. Alleen voor een beperkt aantal eenvoudige gevallen wordt in de colleges b10, b11 en b13 een oplossing aangereikt, maar een algemeen geldige behandeling is nog niet geboden.

We zeiden dat nog een tweede gegeven in elk basisgeval van belang is voor de constructeur. Dat is de vraag van de *spanningsverdeling* over de doorsnede. Bij extensie is de spanning constant, bij buiging verloopt deze lineair, en voor afschuiving volgt het verloop via een evenwichtsbeschouwing uit het spanningsverloop bij buiging. De spanningsverdeling bij wringing is echter alleen voor de eerder genoemde eenvoudige bijzondere gevallen aangegeven. Een algemeen geldende procedure is nog niet behandeld. Samengevat is voor de spanningsberekening het volgende bekend:

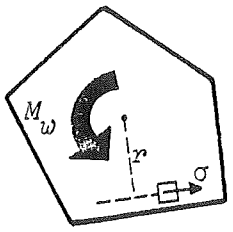
extensie : $N = \sigma A$
buiging : $M = \sigma W$
afschuiving: $Q = \sigma \frac{bI}{S}$
wringing : $M_w = ?$

Hierin is A de oppervlakte van de doorsnede, W het weerstandsmoment, I het buigtraagheidsmoment, b de breedte waarover de schuifspanning σ werkt en S het statisch moment van een deel van de doorsnede.

Het stijfheidsprobleem en de vraag van de spanningsverdeling is in fig. 6.1 schetsmatig weergegeven. Bij torsie kun je in het algemeen niet verder komen dan de vaststelling dat het wringend moment M_w moet worden bepaald uit een integratie over de doorsnede van het product van de schuifspanning σ en de arm r.

We sluiten deze probleemstelling af met het noemen van de drie eenvoudige bijzondere wringgevallen, waarvoor eerder in de opleiding reeds een oplossing werd aangegeven. Het betreft steeds prismatische staven. In college b10 is de cirkelvormige doorsnede besproken, in college b11 de stripvormige doorsnede, en in college b13 de dunwandige holle doorsnede. Voor het wringtraagheidsmoment I_w en de maximaal optredende schuifspanning zijn de waarden gevonden die in figuur 6.2 zijn aangegeven.

De werkwijze die we zullen volgen is in fig. 6.4 beknopt weergegeven. Het wringend moment M_w is per definitie gelijk aan het product van GI_w en de specifieke verwringing θ. Maar M_w is ook gelijk aan de integraal van de schuifspanning σ maal de arm r over de oppervlakte A van de doorsnede. Hieruit volgt een recept voor de berekening van GI_w. Er wordt een waarde voor θ aangenomen. Bij deze aangenomen vervorming worden de spanningen σ bepaald. Het in de doorsnede aanwezige wringende moment is dan te bepalen door de integraal voor $r\sigma$ te berekenen. Omdat de wringstijfheid GI_w gelijk is aan het moment bij $\theta=1$, is daarmee het wringtraagheidsmoment ook bekend (zie fig. 6.4). Tegelijk is bepaald welke spanningsverdeling bij een moment optreedt, zodat de grootste maximale schuifspanning vastligt, alsmede de plaats in de doorsnede waar deze optreedt.



$$M_w = GI_w\,\theta$$

$$M_w = \iint_A r\sigma\, dA$$

$$GI_w\theta = \iint_A r\sigma\, dA$$

RECEPT

. *vindt* σ *bij gegeven* θ

. $GI_w = \frac{1}{\theta} \iint_A r\sigma \; dA$

Fig. 6.4 Het probleem van de wringstijfheid is geformuleerd als een spanningsvraagstuk bij een opgelegde vervorming θ.

6.2. Basisvergelijkingen en randvoorwaarden

De theorie voor wringing is in 1855 door De Saint-Venant gepubliceerd. Deze theorie is correct als aan de uiteinden van de staaf aan bepaalde voorwaarden is voldaan. Deze zijn dat de wringende momenten moeten aangrijpen via een bepaalde verdeling van schuifspanningen over de doorsnede, en dat geen normaalspanningen in axiale richting optreden aan de uiteinden (een dynamische randvoorwaarde).

Constitutieve vergelijkingen zie (5.5)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ symm & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ symm & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (6.2)$$

Evenwichtsvergelijkingen zie (5.6)

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + P_x &= 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} + P_y &= 0 \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + P_z &= 0 \end{aligned} \qquad (6.3)$$

In het geval van wringing zijn de volumekrachten P_x, P_y en P_z afwezig. De Saint-Venant is er in geslaagd een verplaatsingsveld aan te geven, dat voldoet aan de benodigde vrijheid tot verplaatsen aan de uiteinden, en waaruit een spanningsveld volgt dat kan voldoen aan alle te stellen eisen voor evenwicht over het volume, langs de omtrek van de staaf en aan de uiteinden van de staaf. In de elasticiteitstheorie kan maar één unieke oplossing bestaan, die in evenwicht is met de uitwendige belasting en voldoet aan de randvoorwaarden. De oplossing van De Saint-Venant moet dus de juiste oplossing zijn.
We zullen het bedoelde verplaatsingsveld nu beschrijven. De Saint-Venant heeft gesteld dat bij wringing de vorm van de doorsnede niet verandert door deformaties. Voor wat betreft de verplaatsingen u_y en u_z in het vlak van de doorsnede, komt het verplaatsingsveld neer op een rotatie als onvervormd lichaam om de x-as. We duiden deze rotatie hier aan (in aansluiting bij par. 2.5) met het symbool φ. Deze φ komt overeen met de in hoofdstuk 5 besproken rotatie ω_{yz}. Voor de verplaatsing u_x wordt gesteld dat deze ongelijk nul kan zijn en een bepaalde verdeling over de doorsnede mag hebben. Deze verdeling is echter voor alle doorsneden dezelfde.

In deze figuur is schetsmatig aangegeven hoe de schuifspanning kan verlopen. Langs de zijden *AB* en *CD* moet σ_{xy} nul zijn in *A* en *B* en in *C* en *D* , maar tussen deze punten mag de schuifspanning aangroeien. Hetzelfde geldt voor de afschuifhoek γ_{xy}, waardoor het aanvankelijk rechthoekige zijvlak *ABEF* kan deformeren tot *A'B'E'F'* als is geschetst. Hetzelfde geldt voor de andere zijvlakken. Dit maakt aannemelijk dat er sprake zal zijn van een gewelfde doorsnede.

Na de kwalitatieve beschrijving van het verplaatsingsveld, zullen we nu een kwantitatieve formulering geven. De verplaatsingen u_y en u_z in een punt x,y,z van de doorsnede als gevolg van de rotatie φ luiden (zie fig. 6.7)

$$u_y = - z\varphi$$
$$u_z = \quad y\varphi$$

Hierin hangt φ af van de specifieke verwringing θ volgens

$$\varphi = x\theta$$

als wordt uitgegaan van $\varphi=0$ in het vlak $x=0$. Voor de verplaatsingen u_y en u_z wordt dus gevonden

$$u_y = - xz\ \theta$$
$$u_z = \quad xy\ \theta \qquad (6.4a)$$

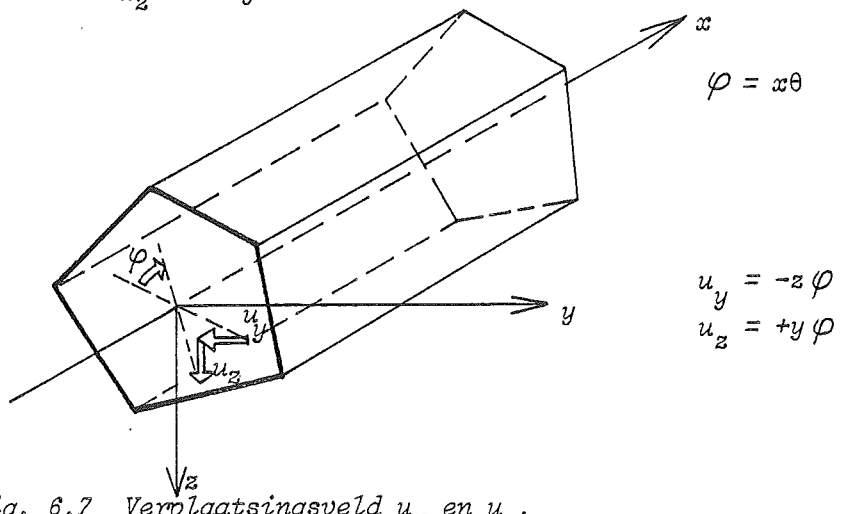
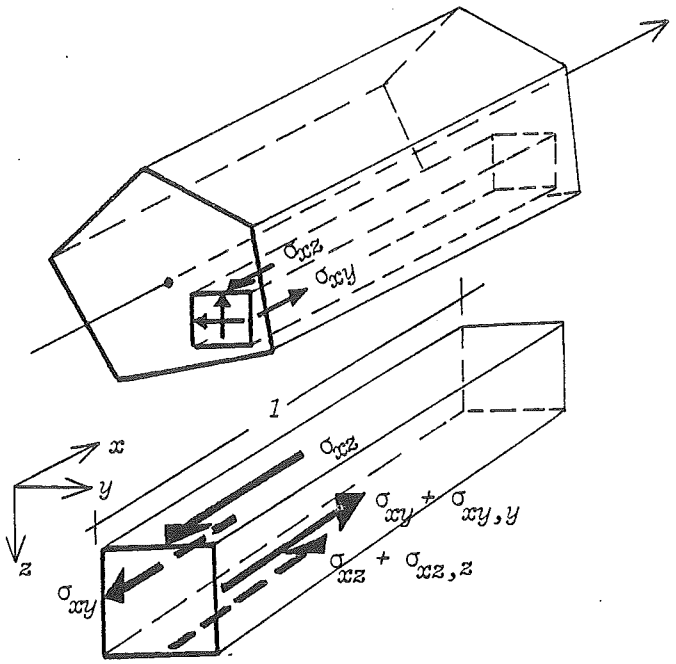


Fig. 6.7 Verplaatsingsveld u_x en u_y.

De welvingsverplaatsing u_x is onafhankelijk van x, en zal lineair toenemen met de specifieke verwringing θ. We kunnen daarom schrijven

$$u_x = \psi(y,z)\ \theta \qquad (6.4b)$$

Hierin geeft de *welvingsfunctie* $\psi(y,z)$ de verdeling van de plaatsingen over de doorsnede aan als $\theta=1$.



$$\sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} = 0$$

Fig. 6.8 Interpretatie van de evenwichtsvergelijking.

Samengevat reduceren de kinematische vergelijkingen, constitutieve vergelijkingen en evenwichtsvergelijkingen van een algemene drie-dimensionale spanningstoestand in het bijzondere geval van De Saint-Venantse wringing tot:

kinematische vergelijkingen

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= (\psi_{,z} + y)\theta \\ \gamma_{xy} &= (\psi_{,y} - z)\theta \end{aligned} \qquad (6.8)$$

constitutieve vergelijkingen

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= G\,\gamma_{zx} \qquad \text{of:} \quad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\,\sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} &= G\,\gamma_{xy} \qquad\qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\,\sigma_{xy} \end{aligned} \qquad (6.9)$$

evenwichtsvergelijking

$$\sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} = 0 \qquad (6.10)$$

Dynamische randvoorwaarden.

Met de twee schuifspanningen σ_{zx} en σ_{xy} kan ook worden voldaan aan de dynamische randvoorwaarden langs de omtrek van de staaf. Zoals fig. 6.10 laat zien zouden in het algemeen op de buitenomtrek kunnen voorkomen een normaalspanning σ_{nn} en schuifspanningen σ_{ns} en σ_{nx}. De spanningen σ_{nn} en σ_{ns} volgen

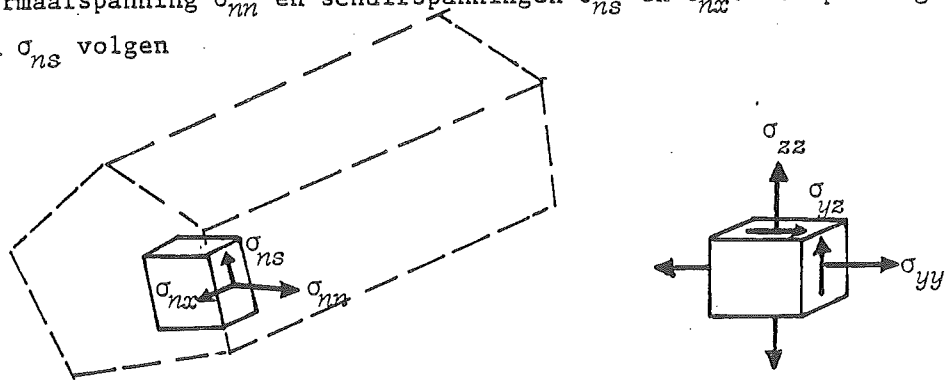


Fig. 6.10 De spanningen die volgen uit het verplaatsingsveld van De Saint-Venant kunnen voldoen aan de eis dat de spanningen σ_{nn}, σ_{ns} en σ_{nx} langs de buitenomtrek nul zijn

uit een transformatie van de spanningen σ_{yy}, σ_{zz} en σ_{yz}. Omdat deze alle nul zijn, zullen ook σ_{nn} en σ_{ns} nul zijn. De schuifspanning σ_{nx} is gelijk aan σ_{xn} in het vlak van de doorsnede. Deze σ_{xn} kan worden gevormd door in dit vlak de schuifspanning σ_{xy} en σ_{xz} te transformeren naar twee schuifspanningen σ_{xs} en σ_{xn} waarvan de eerste gericht is parallel aan de omtrek en de tweede er loodrecht op. Deze laatste σ_{xn} moet nul zijn omdat σ_{nx} niet kan optreden langs het buitenoppervlak. Dit kan worden gerealiseerd door dit als een randvoorwaarde ten aanzien van σ_{xn} en σ_{xs} op te vatten.

Oplossingsstrategieën

Nu we de drie sets basisvergelijkingen hebben vastgesteld, kunnen we overgaan tot het oplossen van deze vergelijkingen. Dit kan weer volgens de strategie van de verplaatsingsmethode en van de krachtenmethode.

Randvoorwaarde

Om de differentiaalvergelijking (6.12) te kunnen oplossen, moet de randvoorwaarde

$$\sigma_{xn} = 0$$

worden herleid tot een eis ten aanzien van ψ. Dit kan als volgt;
Dat σ_{xn} nul is, betekent ook dat γ_{xn} nul is. Voor deze vervorming geldt

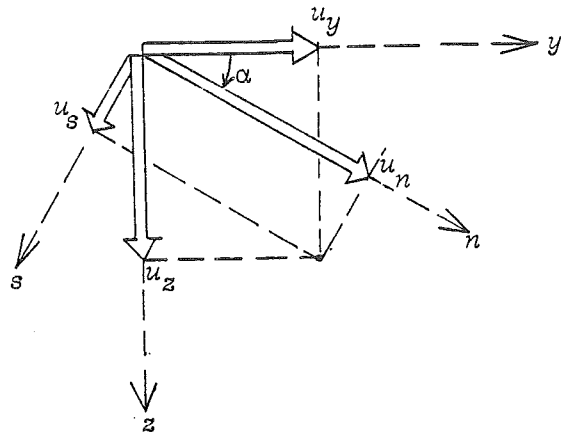
$$\gamma_{xn} = u_{x,n} + u_{n,x}$$

De verplaatsing u_n die in deze uitdrukking voorkomt kan met behulp van een eenvoudige transformatieregel in u_y en u_z worden uitgedrukt, zoals fig. 6.11 laat zien. Met

$$u_n = \cos\alpha\, u_y + \sin\alpha\, u_z$$

gaat de uitdrukking voor γ_{xn} over in

$$\gamma_{xn} = u_{x,n} + \cos\alpha\, u_{y,x} + \sin\alpha\, u_{z,x}$$



$$u_n = \cos\alpha\, u_y + \sin\alpha\, u_z$$
$$u_s = -\sin\alpha\, u_y + \cos\alpha\, u_z$$

Fig. 6.11 Transformatie van verplaatsingen in het vlak van de doorsnede.

Als laatste bewerking substitueren we in de uitdrukking voor γ_{xn} de waarden van u_x, u_y en u_z volgens (6.4)

$$u_x = \psi\,\theta$$

$$u_y = -xz\,\theta$$

$$u_z = xy\,\theta$$

en we eisen dat γ_{xn} nul is. Dit levert

$$(\psi_{,n} - z\cos\alpha + y\sin\alpha)\,\theta = 0$$

of wel, anders geschreven, een voorwaarde voor de helling van ψ loodrecht op de rand:

Om de statisch onbepaalde ϕ te kunnen bepalen, moeten we een compatibiliteitsvoorwaarde opstellen. We vinden deze voorwaarde door de vrijheidsgraad ψ te elimineren uit de twee kinematische vergelijkingen

$$\gamma_{zx} = (\psi_{,z} + y)\ \theta \cdot$$

$$\gamma_{xy} \quad (\psi_{,y} - z)\ \theta$$

Dit kan worden gedaan door de eerste vergelijking naar y te differentiëren en de tweede naar z, en de tweede vervolgens af te trekken van de eerste. Het resultaat daarvan is

$$\gamma_{xz,y} - \gamma_{xy,z} = 2\theta \tag{6.15}$$

De vervormingen γ_{xz} en γ_{xy} zijn blijkbaar niet vrij elke waarde onafhankelijk van elkaar in te nemen, maar ze zijn onderling gekoppeld. Men kan dat fysisch interpreteren aan de hand van fig. 6.12. In een horizontale schil uit de staaf worden door de schuifspanningen σ_{xy} afschuifhoeken γ_{xy} veroorzaakt. De aanvankelijk rechthoekige schil deformeert daardoor. Evenzo vervormt een vertikale rechthoekige schil onder invloed van de schuifspanningen σ_{xz} omdat hierin afschuifhoeken γ_{xz} optreden. Al de horizontale en vertikale schillen moeten blijven passen zodanig dat een continu gewelfd doorsnedeoppervlak gehandhaafd blijft. Dat betekent dat er een relatie moet zijn tussen de vervormingen γ_{xy} en γ_{xz}.

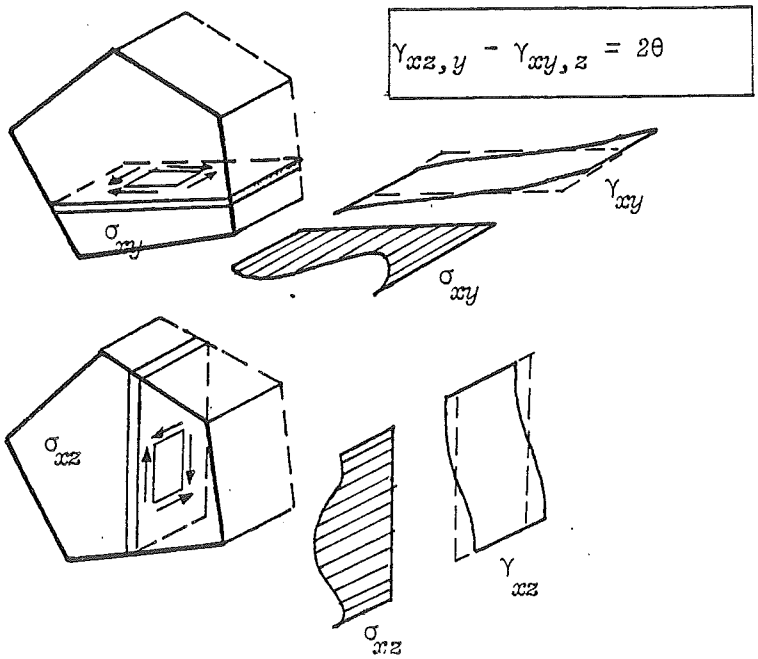
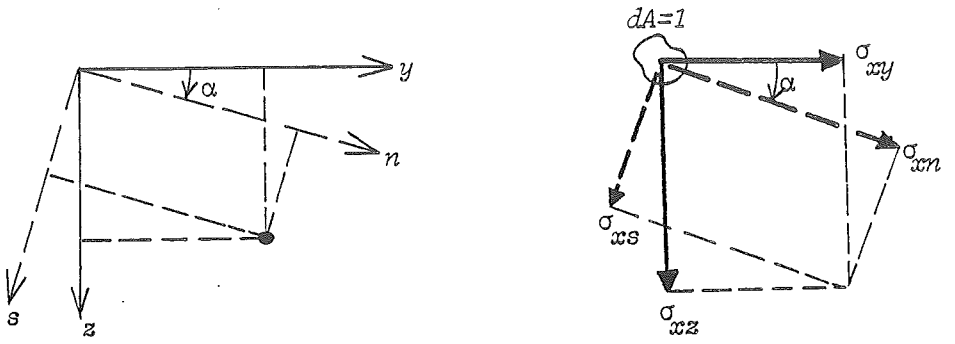


Fig. 6.12 De vervormingen γ_{xy} en γ_{xz} moeten compatibel zijn.



$$n = \cos\alpha\, y + \sin\alpha\, z$$
$$s = -\sin\alpha\, y + \cos\alpha\, z$$

$$\sigma_{xn} = \cos\alpha\, \sigma_{xy} + \sin\alpha\, \sigma_{xz}$$
$$\sigma_{xs} = -\sin\alpha\, \sigma_{xy} + \cos\alpha\, \sigma_{xz}$$

Fig. 6.13 Transformaties van coördinaten en schuifspanningen in de doorsnede.

In fig. 6.13 is getoond dat de coördinaten volgens dezelfde regel transformeren als de schuifspanningen in de doorsnede. In de uitdrukking voor de spanningen in deze figuur vervangen we σ_{xy} door $\phi_{,z}$ en σ_{xz} door $-\phi_{,y}$. Dat resulteert in

$$\begin{aligned} \sigma_{xn} &= \cos\alpha\, \phi_{,z} - \sin\alpha\, \phi_{,y} \\ \sigma_{xs} &= -\sin\alpha\, \phi_{,z} + \cos\alpha\, \phi_{,y} \end{aligned} \qquad (6.18)$$

We moeten nu $\phi_{,n}$ en $\phi_{,s}$ nog uitdrukken in $\phi_{,y}$ en $\phi_{,z}$. Dit kan met de kettingregel

$$\phi_{,n} = \phi_{,y}\, y_{,n} + \phi_{,z}\, z_{,n}$$
$$\phi_{,s} = \phi_{,y}\, y_{,s} + \phi_{,z}\, z_{,s}$$

Om de afgeleiden van y en z naar n en s te bepalen, inverteren we de coördinaat-transformaties van fig. 6.13.

$$y = \cos\alpha\, n - \sin\alpha\, s$$
$$z = \sin\alpha\, n + \cos\alpha\, s$$

Dit leidt tot de uitdrukkingen

$$\begin{aligned} \phi_{,n} &= \cos\alpha\, \phi_{,y} + \sin\alpha\, \phi_{,z} \\ \phi_{,s} &= -\sin\alpha\, \phi_{,y} + \cos\alpha\, \phi_{,z} \end{aligned} \qquad (6.19)$$

Door nu (6.18) en (6.19) met elkaar te vergelijken, vindt men aangetoond dat (6.17) algemeen geldig is.

De ϕ-heuvel

Uit het eenvoudige wringprobleem van de cirkelvormige doorsnede, dat reeds in college b10 werd behandeld, weten we dat er een punt in de doorsnede is waar de schuifspanningen nul zijn en dat de rondgaande spanningen aangroeien naar de omtrek toe. Ook voor doorsneden van willekeurige vorm mogen we dat verwachten. In het punt waar de spanningen σ_{xy} en σ_{xz} nul zijn, moeten de afgeleiden $\phi_{,z}$ en $\phi_{,y}$ nul zijn. Daar bereikt ϕ dus een uiterste waarde, terwijl ϕ nul is op de rand. Als we ϕ loodrecht op de doorsnede uitzetten, ontstaat als het ware een overhuiving van de doorsnede. We zullen dit hierna de 'ϕ-heuvel' noemen (fig. 6.15). De hellingen van de ϕ-heuvel bepalen de grootte van de spanningen. We zien dat de spanningen inderdaad aangroeien naar de omtrek toe.

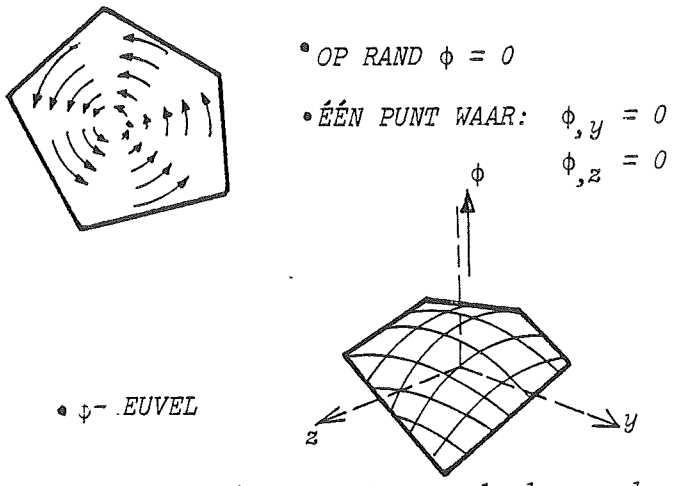


Fig. 6.15 Het verloop van ϕ over de doorsnede noemen we een 'ϕ-heuvel'.

Controle voor dwarskrachten

We hebben gezien dat alleen spanningen σ_{xy} en σ_{xz} optreden, en hoe deze berekend kunnen worden. In het algemeen zou de resultante van deze spanningen in de doorsnede kunnen bestaan uit een wringend moment M_w, een dwarskracht Q_y en een dwarskracht Q_z. In het geval van wringing moet de spanningsverdeling statisch equivalent zijn met een wringend moment M_w, en moeten de dwarskrachten Q_y en Q_z nul zijn. We zullen eerst dit laatste controleren.

We kunnen deze integraal-uitdrukking nu specifieker schrijven door zowel de schuifspanning σ_{xy} met zijn arm z en de schuifspanning σ_{xz} met zijn arm y te beschouwen. Zoals fig. 6.17 laat zien, leveren positieve waarden van σ_{xy} een moment dat het wringend moment vermindert en positieve waarden van σ_{xz} een bijdrage die het wringend moment doet toenemen (in het eerste kwadrant). De uitdrukking voor het moment wordt daardoor

$$M_w = \iint (y\ \sigma_{xz} - z\ \sigma_{xy})\ dA \tag{6.23}$$

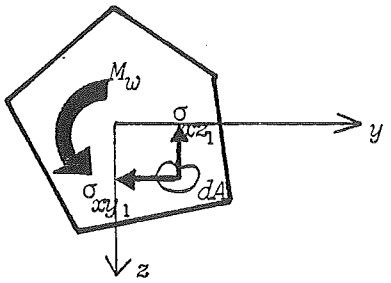


Fig. 6.16 Berekening van resulterend wringend moment

Het biedt voordeel, zoals we zullen zien, om de integraal in (6.23) in twee delen op te lossen. Bij dat oplossen zullen we partieel integreren. We roepen daarvoor in de herinnering terug hoe dat gebeurt. We beschouwen twee functies $u(x)$ en $v(x)$ in het interval $x_1 \leq x \leq x_2$. Voor x_1 zijn de functiewaarden u_1 en v_1, en voor x_2 zijn de functiewaarden u_2 en v_2. Voor het product van de twee functies geldt

$$\int_{x_1}^{x_2} d(uv) = u_2 v_2 - u_1 v_1$$

Of wel

$$\int_{x_1}^{x_2} u\ dv + \int_{x_1}^{x_2} v\ du = u_2 v_2 - u_1 v_1$$

Als regel voor het partieel integreren zullen we deze uitdrukking gebruiken in de vorm

$$\int_{x_1}^{x_2} u\ dv = -\int_{x_1}^{x_2} v\ du + (u_2 v_2 - u_1 v_1) \tag{6.24}$$

Op analoge wijze wordt M_{hor} berekend. Daarvoor wordt geïntegreerd in de z-richting. Ook dit maal wordt gevonden

$$M_{hor} = \iint_A \phi \, dy \, dz \qquad \textit{inhoud } \phi\textit{-heuvel} \tag{6.27}$$

We komen dus tot het totaalresultaat voor het wringend moment

$$M_w = 2 \iint_A \phi \, dA \qquad \textit{tweemaal inhoud } \phi\textit{-heuvel} \tag{6.28}$$

Bedenken we dat voor dit moment ook geldt

$$M_w = GI_w \, \theta$$

dan wordt voor de stijfheid gevonden

$$GI_w = \frac{1}{\theta} \iint_A 2\phi \, dA \tag{6.29}$$

Conclusies

In de tot hier geboden behandeling is een aantal resultaten bereikt, waarvan het de moeite loont ze hier als conclusies bij elkaar te noemen. In fig. 6.18 wordt dat op aanschouwelijke wijze ondersteund.

- De stijfheid GI_w en het moment M_w worden bepaald door het dubbele volume van de ϕ-heuvel. De stijfheid GI_w is het moment bij $\theta = 1$.
- Het blijkt dat de vertikale en horizontale spanningen evenveel bijdragen in de waarde van GI_w en M_w, namelijk elk één inhoud van de ϕ-heuvel. Dit geldt algemeen ongeacht de vorm van de doorsnede, dus zowel voor bijvoorbeeld een stripvormige doorsnede als voor een nagenoeg vierkante.
- De derde conclusie is dat de schuifspanning wordt bepaald door de helling van de ϕ-heuvel loodrecht op de richting van de spanning. Dit geldt voor elke richting.

Men kan eenvoudig nagaan dat de toegevoegde termen geen invloed op de spanningen hebben, en dat de rotatie nu om de as $y=a$, $z=b$, is. Dit toont dus aan dat de x-as inderdaad zonder verlies van algemeenheid willekeurig gekozen kan worden, mits evenwijdig aan de staafas.

2. In de behandeling is duidelijk gemaakt dat σ_{xx} nul moet zijn, ook aan de uiteinden, en dat daarom de welving niet mag worden belemmerd. In par. 6.12 wordt ingegaan op de gevolgen van verhinderde welving. De schuifspanningen σ_{xy} en σ_{xz} moeten aan de uiteinden in theorie precies aangrijpen volgens het verloop dat volgt uit de afgeleiden van de spanningsfunctie ϕ. Als dit niet gebeurt zal aan de uiteinde een storingslengte optreden waarin het spanningsbeeld geleidelijk evolueert naar het verloop volgens de afgeleiden van ϕ.

3. De oppervlakte-integraal (6.23) voor M_w hadden we ook in eenmaal kunnen bepalen door in (6.23) σ_{xy} en σ_{xz} te vervangen door de respectieve afgeleiden van ϕ, en vervolgens de stelling van Green te gebruiken voor het omzetten van een oppervlakte-integraal naar een contour-integraal. Bij deze aanpak zou echter niet zijn gebleken dat de horizontale en vertikale spanningen elk evenveel bijdragen aan het moment.

Oefening

1. Toon door berekening aan dat (6.27) juist is.

6.5. Exacte oplossing voor elliptische doorsnede

Het is mogelijk gebleken voor sommige doorsneden een exacte oplossing voor de differentiaalvergelijking en de randvoorwaarde (6.21) te vinden. Een voorbeeld hiervan is de elliptische doorsnede.

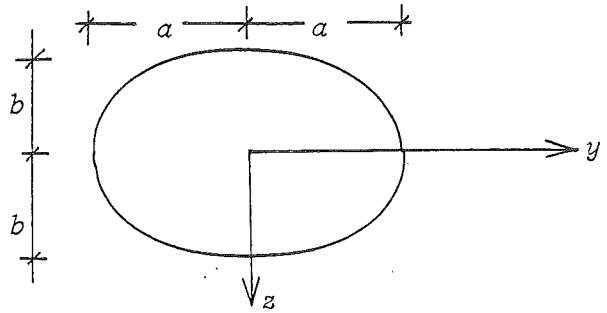


Fig. 6.19 Elliptische doorsnede.

De grootste schuifspanning treedt op langs de rand op de korte as (in $y=0$, $z=\pm b$, als $a>b$). De waarde ervan is, in absolute zin

$$\sigma_{max} = 2G \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} \theta \quad (a>b)$$

Het wringend moment is volgens (6.28) twee maal de inhoud van de ϕ-heuvel

$$M_w = 2G \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \{ \iint dydz - \frac{1}{a^2} \iint y^2 dydz - \frac{1}{b^2} \iint z^2 dydz \} \theta$$

De eerste integraal is het oppervlak van de ellips, πab. De tweede integraal is het traagheidsmoment t.o.v. de z-as, en de derde is het traagheidsmoment t.o.v. de y-as. Men vindt hiervoor $\frac{1}{4}\pi a^3 b$ respectievelijk $\frac{1}{4}\pi ab^3$. De term tussen accoladen is dus $\frac{1}{2}\pi ab$, en derhalve

$$M_w = G\pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \theta \tag{6.32}$$

Omdat ook geldt

$$M_w = GI_w \theta$$

wordt voor een ellips blijkbaar gevonden:

$$I_w = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{6.33}$$

De uitdrukkingen (6.31) voor de spanningen kan men met (6.32) ook uitdrukken in de grootte van het wringend moment M_w.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xy} &= -\frac{zM_w}{\frac{1}{2}\pi ab^3} \\ \sigma_{xz} &= \frac{yM_w}{\frac{1}{2}\pi a^3 b} \end{aligned}\right\} \tag{6.34}$$

Een constructeur zal zich vooral interesseren voor de maximale schuifspanning. Deze is, uitgedrukt in het wringend moment,

$$\sigma_{max} = \frac{M_w}{\frac{1}{2}\pi ab^2} \qquad (a > b) \tag{6.35}$$

Oefening

2. Bepaal, uitgaande van de hierboven gevonden spanningsverdeling, en gebruikmakend van de kinematische vergelijkingen (6.8) en de constitutieve vergelijkingen (6.9), de welvingsfunktie $\psi(y,z)$ voor de elliptische doorsnede. Merk op dat voor de cirkelvormige doorsnede $(a=b)$ het resultaat nogal bijzonder is.

Beschouwen we zowel de y-richting als de z-richting, dan wordt de differentiaalvergelijking voor een membraan gevonden.

$$-S(w_{,yy} + w_{,zz}) = p \qquad (6.36)$$

Membraan-analogie als proef.

Met de analogie kan men op de volgende wijze zijn winst doen. Er wordt een doos gemaakt met vertikale wanden en een horizontale bodem en bovenkant. De doos heeft in bovenaanzicht de vorm van de te onderzoeken staafdoorsnede. De bovenkant van de doos wordt uitgevoerd als een gespannen membraan. Door de lucht in de doos onder overdruk te brengen zal het membraan uitwijken, analoog aan het bestaan van de ϕ-heuvel. (In fig. 6.21 is kennelijk een rechthoekige staafdoorsnede in gedachten genomen). Door de hellingen van het membraan op te meten, vindt men de spanningsverdeling over de doorsnede.
In de literatuur kan men artikelen aantreffen waarin besproken wordt hoe men dit vroeger wel deed met zeepvliezen. Daarom wordt ook wel over de *zeepvlies-analogie* gesproken.

Een methode om het membraan-oppervlak zichtbaar te maken, is het weergeven van contourlijnen waarvoor ϕ een constante waarde heeft. Als langs zo'n contourlijn een coördinaat s wordt gekozen en loodrecht er op de coördinaat n, geldt langs de contourlijn $w_{,s}=0$ en dus $\phi_{,s}=0$. Dat betekent dat σ_{xn} daar nul is en alleen een schuifspanning σ_{xs} zal optreden. De schuifspanning is dus gericht volgens deze contourlijnen. Men kan de contourlijnen tekenen voor steeds een constant verschil in w (en dus ϕ). Dan kan men concluderen dat de schuifspanning σ_{xs} groot is waar de contourlijnen dicht bij elkaar liggen, want daar is de helling $\phi_{,n}$ groot.
De contourlijnen kan men onder meer zichtbaar maken met behulp van schaduw-moiré. Langs optische weg worden dan lijnen van constante verplaatsing zichtbaar gemaakt, met een constant verschil in verplaatsing tussen de lijnen.

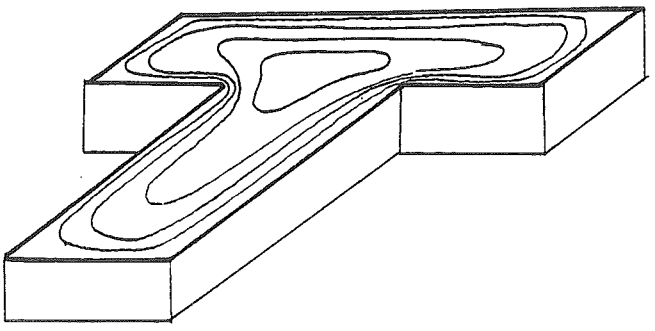
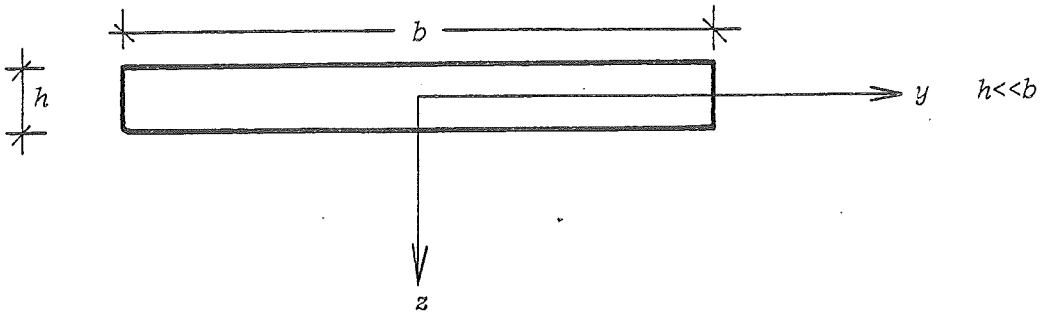


Fig. 6.22 Voorbeeld van contourlijnen voor T-vormige doorsnede.

Het gedachten-experiment kan ook worden uitgevoerd om *kwantitatieve* informatie te krijgen. Een bekend voorbeeld is het geval van wringing van een staaf met een stripvormige doorsnede (waarvoor in college b11 al een oplossing kon worden gevonden langs een andere weg)



Als een experiment zou worden uitgevoerd met een membraan, mag men verwachten dat de uitwijking over vrijwel de volledige breedte b cylindervormig zou zijn, onafhankelijk van y. Alleen nabij de twee uiteinden $y=b$ en $y=-b$ zou hiervan een afwijking optreden.
Voor $h<<b$, heeft het geen merkbare invloed op het volume onder het membraan, als we aannemen dat w over de volledige breedte alleen afhangt van z, zie fig. 6.24.

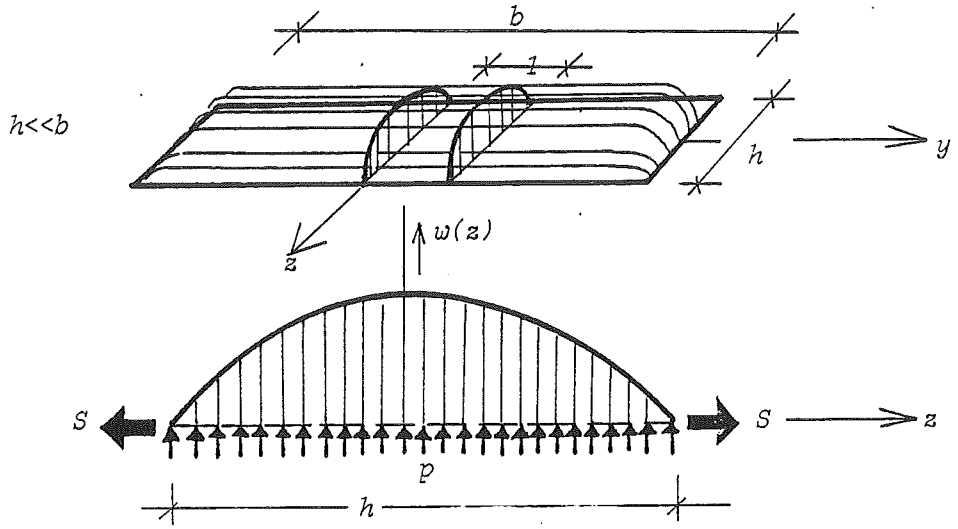


Fig. 6.24 Vorm van membraan voor een stripvormige doorsnede.

De differentiaalvergelijking vereenvoudigt nu tot

$$-\frac{1}{S}\frac{d^2w}{dz^2} = p$$

met als randvoorwaarden dat w nul is voor $z = \pm \frac{1}{2}h$.

SPANNING

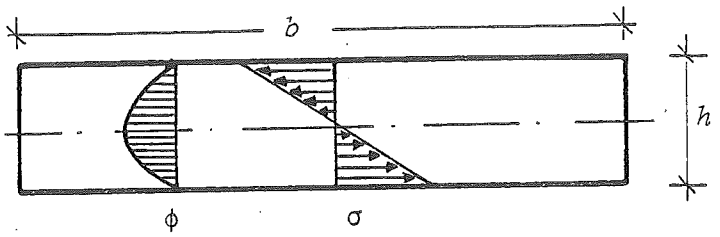


Fig. 6.25 Spanningsverdeling in stripvormige doorsnede.

We kunnen nog de spanningsverdeling nagaan. In de richting van de lange rand geldt:

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\ 2Gz\theta \tag{6.40}$$

De grootste waarde in absolute zin treedt op voor $z = \pm \frac{1}{2}h$, zie fig. 6.25.

$$\sigma_{max} = Gh\theta$$

Onder gebruikmaking van (6.38) kan deze grootste spanning ook worden uitgedrukt in het moment, een relatie die de constructeurs interesseert.

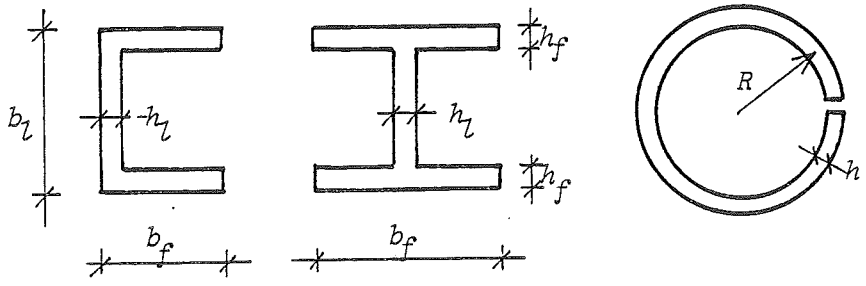
$$\boxed{\sigma_{max} = \frac{M_w}{\frac{1}{3}\,bh^2}} \tag{6.41}$$

Ook dit was in fig. 6.2 al genoemd.

Opmerkingen

1. Uit het gedachten-experiment volgt dat de formule $I_w = \frac{1}{3}\,bh^3$

   ook gebruikt kan worden om (met dezelfde benadering) het wringtraagheidsmoment te berekenen van doorsneden die uit stripvormige delen zijn opgebouwd, zoals



Het is een benaderingsmethode, die nauwkeuriger oplossingen biedt naarmate het elementennet fijner wordt gekozen.

Stripvormige doorsnede

Het wordt niet tot de stof van dit college gerekend deze rekenmethode in detail uiteen te zetten. We volstaan met het aangeven van het principe en doen dit aan de hand van de stripvormige doorsnede, waarvoor in paragraaf 4.6 reeds een oplossing is bepaald. Deze oplossing zullen we aanmerken als de exacte.
Omdat van een cylindervormige verplaatsing w sprake is, is het voldoende alleen een netverdeling over de kortste zijde h aan te brengen. De in fig. 6.24 getekende echte verdeling van de verplaatsing $w(z)$ wordt dan benaderd, door tussen twee knopen lineair te interpoleren. In fig. 6.26 is dat voor een verdeling in 3 elementen en 8 elementen getoond. De vorm van het membraan is nu een polygoon. Met 8 elementen is de benadering kennelijk al heel goed, maar met 3 elementen nog niet.

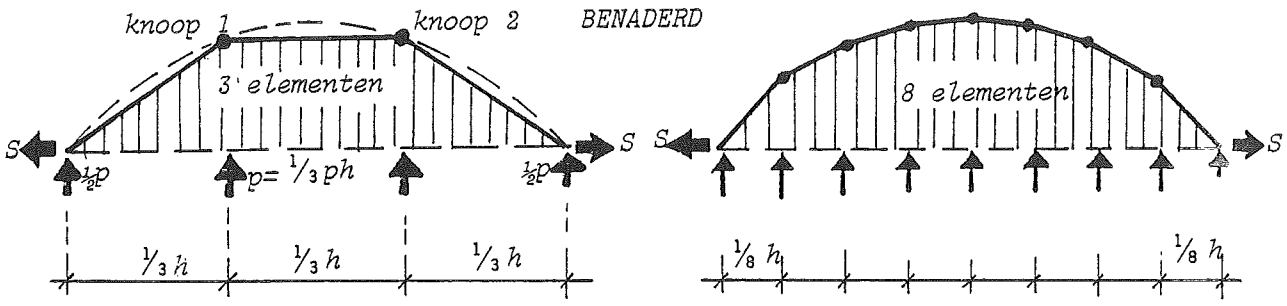


Fig. 6.26 Benadering van membraanvorm met drie en met acht elementen.

Voor de grove indeling met drie elementen kunnen we met een handberekening simuleren hoe de elementenmethode werkt. We maken daarbij gebruik van symmetrie van het membraanoppervlak. In fig. 6.27 is de stripvormige doorsnede en een snede over het membraan nogmaals getekend.

en het dubbele volume:

$$2 * Vol = 2 * Opp * b = \tfrac{4}{3} wbh$$

Substitutie van w uit (6.42) geeft

$$2 * Vol = \tfrac{4}{27} \frac{p}{S} bh^3$$

We gaan nu over op de ϕ-heuvel door te kiezen

$$p = 2\theta$$
$$S = \frac{1}{G}$$

Het dubbele volume is dan het wringend moment, en voor $\theta=1$ is dit de wringstijfheid GI_w

$$GI_w = \tfrac{4}{27} \frac{2}{1/G} bh^3 = \tfrac{8}{27} Gbh^3$$

De exacte uitkomst is

$$GI_w = \tfrac{1}{3} Gbh^3$$

Het verschil is van de orde van tien procent; voor zo'n grove element-indeling niet slecht! De benaderingsoplossing blijkt precies de ingeschreven polygoon van de parabool te zijn. Als de berekening met 8 elementen was uitgevoerd, treden 4 verschillende onbekende verplaatsingen w op. Dan worden 4 evenwichtsvergelijkingen opgesteld en simultaan opgelost. De fout in GI_w is dan al kleiner dan 1 procent.

We moeten nog bezien hoe accuraat het spanningsverloop wordt weergegeven. Het exacte verloop is in fig. 6.25 getekend. Omdat ϕ parabolisch verloopt, verloopt de afgeleide ervan, dus de spanning σ_{xy}, lineair over de hoogte h van de doorsnede. Bij een polygoon-beschrijving van ϕ met steeds rechte takken, zal de afgeleide per tak constant zijn en in knopen sprongsgewijs veranderen. We zien in fig. 6.28 geschetst welke uitkomst men in de hier beschreven elementenmethode mag verwachten. Bij drie elementen is de grootste fout niet minder dan 33 procent, maar bij acht elementen is de fout al afgenomen tot 12 procent. In het hart van de elementen wordt echter steeds de correcte waarde gevonden.

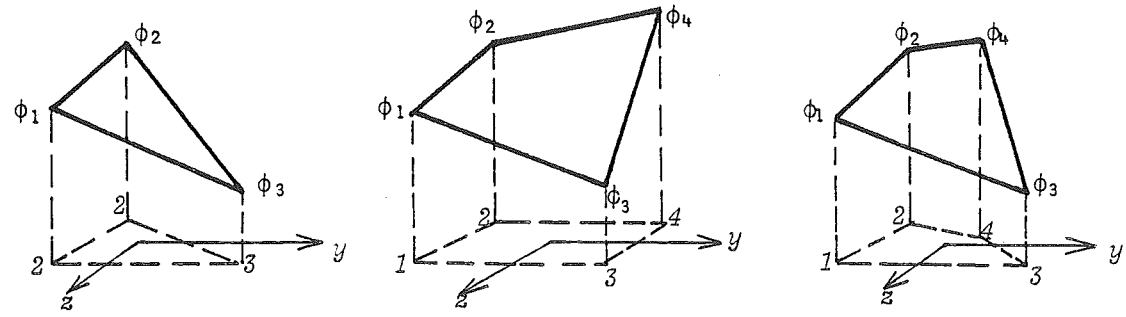
De belasting wordt weer oordeelkundig geconcentreerd gedacht in de knopen. Voor elke knoop wordt een onbekende w (en dus ϕ) gehanteerd en tussen de knopen, dus langs de elementenranden, verloopt w (en dus ϕ) lineair. In het algemeen ontstaan net zoveelvergelijkingen als er knopen zijn, dus als onbekende $w's$ (en $\phi's$). Hieruit worden de onbekenden opgelost. De ϕ-heuvel bestaat nu uit een oppervlak van vlakke delen (boven de driehoek-elementen) en hypparvlakken (boven de rechthoekige en vierhoekige elementen).
In formulevorm:

$$\textit{driehoek} \quad : \quad \phi(y,z) = a_1 + a_2 y + a_3 z$$

$$\textit{rechthoek} \quad : \quad \phi(y,z) = a_1 + a_2 y + a_3 z + a_4 yz$$

De dubbele inhoud van de ϕ-heuvel bij $\theta=1$ geeft weer de stijfheid GI_w
De waarde hiervan is met een betrekkelijk klein aantal elementen al gauw vrij exact.

De spanningen volgen als de helling van de ϕ-heuvel. In een driehoek zijn beide hellingen $\phi_{,y}$ en $\phi_{,z}$ constant over het gehele element. De ene waarde die voor σ_{xy} en σ_{xz} wordt berekend, wordt geacht op te treden in het zwaartepunt van de driehoek.
In een rechthoek is elk van de twee hellingen van ϕ constant in de ene richting en verloopt deze lineair in de andere. Dat levert voor elke spanning σ_{xy} en σ_{xz} twee waarden.
In een willekeurige vierhoek variëren de hellingen in beide richtingen en kunnen 4 waarden voor σ_{xy} en σ_{xz} worden berekend.



$\frac{\partial\phi}{\partial y}$ = *CONSTANT*

$\frac{\partial\phi}{\partial z}$ = *CONSTANT*

∴ *ÉÉN WAARDE VOOR* σ_{xy}

∴ *ÉÉN WAARDE VOOR* σ_{xz}

$\frac{\partial\phi}{\partial y}$ *VARIEERT ALLEEN IN z-RICHTING*

$\frac{\partial\phi}{\partial z}$ *VARIEERT ALLEEN IN y-RICHTING*

∴ *TWEE WAARDEN VOOR* σ_{xy}

∴ *TWEE WAARDEN VOOR* σ_{xz}

$\frac{\partial\phi}{\partial y}$ = *VARIEERT IN TWEE RICHTINGEN*

$\frac{\partial\phi}{\partial z}$ = *VARIEERT IN TWEE RICHTINGEN*

∴ *VIER WAARDEN VOOR* σ_{xy}

∴ *VIER WAARDEN VOOR* σ_{xz}

Fig. 6.30 Spanningsverloop in de elementen.

6.8. Doorsnede met gaten

Als in de staafdoorsnede een of meer holle ruimten voorkomen, behoeft de tot hier uiteengezette theorie nog enige aanvulling. We zullen beginnen met het geval dat één gat in de doorsnede voorkomt.

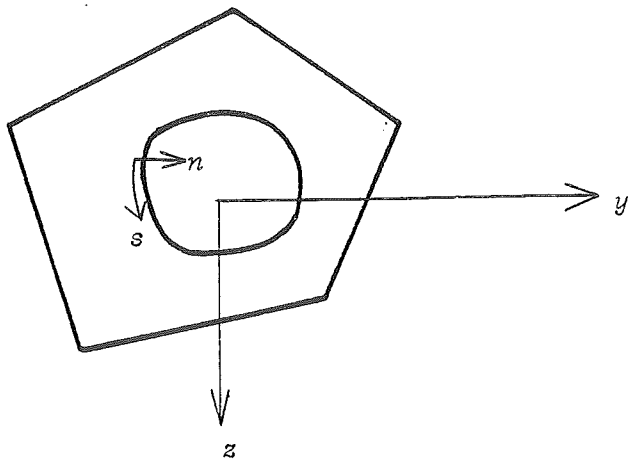


Fig. 6.33 Doorsnede met één gat.

Langs de rand van het gat kiezen we de coördinaten n en s. De positieve richting van n is naar het gat gericht. Op de rand van een gat kan geen schuifspanning σ_{xn} ongelijk nul optreden en geldt daarom

$$\phi_{,s} = 0$$

Langs de omtrek van een gat is ϕ derhalve constant, maar men mag in dit geval niet stellen dat ϕ nul is. Als dat reeds gedaan is op de buitenomtrek van de staafdoorsnede, moet er op gerekend worden dat ϕ een waarde ongelijk nul kan hebben op de rand van het gat. We zullen deze waarde ϕ_g noemen. Deze waarde is een onbepaalde vrijheidsgraad in het probleem.

De vraag rijst nu wat de randvoorwaarde voor $\phi(y,z)$ op de rand van het gat is. De harmonische vergelijking voor ϕ is een tweede-orde differentiaalvergelijking van het elliptische type. Op een rand kan dan in het algemeen één randvoorwaarde worden geformuleerd.

Langs zo'n lijn heeft $\phi_{,s}$ de waarde nul en derhalve is σ_{xn} voor elk punt op zo'n lijn gelijk aan nul. Dit betekent dat het staafdeel binnen zo'n hoogtelijn geen krachten uitoefent op het deel buiten de hoogtelijn. Je kunt het binnendeel (met oppervlakte A_g) wegnemen zonder dat de spanningsverdeling in het deel buiten de hoogtelijn (met oppervlakte A) wordt beïnvloed. Dit is in het rechterdeel van fig. 6.34 getekend.
In de schets is ook aangegeven wat dit voor de ϕ-heuvel betekent.
Voor de volle doorsnede is een snede over de ϕ-heuvel getekend in de lijn $z=0$. De hoogtelijn, waarbinnen we het gat maken kruist deze snede twee keer met dezelfde waarde voor ϕ, namelijk ϕ_g.
De torsiestijfheid GI_w voor de holle doorsnede laat zich in dit geval berekenen als het verschil van de torsiestijfheid voor de volle doorsnede minus de torsiestijfheid van het weggenomen binnendeel. De afgesneden kap van de ϕ-heuvel representeert de torsiestijfheid van het weggenomen deel.
We zien dan dat voor de ϕ-heuvel van de holle doorsnede het gat blijft meetellen, maar nu met een constante waarde ϕ_g over het hele gat.
De torsiestijfheid is dus tweemaal het volume van de afgeknotte ϕ-heuvel *inclusief* het deel boven het gat, bij $\theta = 1$.
In formulevorm:

$$\boxed{GI_t = 2 \iint_A \phi \, dA + 2 \phi_g A_g} \qquad \text{bij } \theta = 1 \tag{6.44}$$

Voor de verdere interpretatie heeft het ook zin na te gaan wat de hier gegeven uiteenzetting betekent in de membraananalogie. Deze analogie kan men blijven gebruiken door er een kleine uitbreiding aan te geven. Het membraan is weer vastgezet op de buitenomtrek van de doorsnede en overspant de doorsnede. Op de rand van het gat wordt het membraan bevestigd gedacht aan een dunne starre plaat waarvan het gewicht kan worden verwaarloosd. Deze plaat moet vrij kunnen verplaatsen. Als het membraan met een druk p wordt belast, zal deze verdeelde belasting niet alleen aangrijpen over het oppervlak A dat door het vlies wordt overspannen, maar ook over het oppervlak A_g van het gat.
De gewichtsloze plaat zal daardoor evenwijdig aan zichzelf verplaatsen.

*Het algemene geval

We stappen af van het bijzondere geval dat het gat wordt gerealiseerd door het materiaal juist binnen een hoogtelijn van de volle doorsnede weg te nemen. We kiezen nu het gat op een willekeurige plaats en hanteren weer de coördinaat s langs de gatomtrek en n loodrecht daarop.
Nu zal weer dezelfde randvoorwaarde (6.43) gelden en weer moet ϕ een constante waarde ϕ_g hebben. In dit geval zullen hoogtelijnen optreden die in het algemeen niet corresponderen met die van een volle doorsnede. Ten opzichte van de volle doorsnede wijzigt dus de spanningsverdeling. We zullen daarom afzonderlijk moeten bewijzen dat voorwaarde (6.45) ook voor dit geval geldt. Als dat zo is kan de analogie met de gewichtsloze plaat eveneens in het algemene geval worden gebruikt voor het bepalen van de ϕ-heuvel. Ook moet worden aangetoond dat de formule (6.44) voor het bepalen van GI_w algemene geldigheid heeft.

Omdat $\phi_{,n}$ gelijk is aan $-\sigma_{xs}$ en voor σ_{xs} kan worden gesuperponeerd $G\gamma_{xs}$, is voorwaarde (6.45) ook als volgt te schijven

$$-\oint \gamma_{xs}\, ds = 2A_g\theta \tag{6.46}$$

Om te onderzoeken of deze kringintegraal algemeen geldt, gaan we na hoe γ_{xs} in het driedimensionale verplaatsingsveld wordt uitgedrukt.
Dit verplaatsingsveld is

$$\left.\begin{aligned} u_x(y,z) &= \psi(y,z)\theta \\ u_y(y,z) &= -xz\ \theta \\ u_z(y,z) &= xy\ \theta \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

We maken eerst een tussenstap onder gebruikmaking van de verplaatsing $u_s(y,z)$ in de s-richting. Voor γ_{xs} geldt namelijk

$$\gamma_{xs} = u_{x,s} + u_{s,x}$$

en de verplaatsing u_s kan worden ontbonden in u_y en u_z volgens fig. 6.11

$$u_s = -\sin\alpha\, u_y + \cos\alpha\, u_z$$

Voor het eerste deel is dy positief als s in positieve richting aangroeit en ook z is in dit traject positief. De integraal over dit deel wordt derhalve

$$\oint z\,dy = \textit{oppervlakte van het deel van het gat waarvoor } z \geq 0$$

In het tweede deel van de kringintegraal is dy negatief als s in positieve richting aangroeit. Maar ook z is dan negatief, zodat $z\,dy$ toch positief wordt. De integraal over dit deel wordt derhalve

$$\oint z\,dy = \textit{oppervlakte van het deel van het gat waarvoor } z < 0$$

De beide integralen samen leveren juist het oppervlak van het gat:

$$\oint z\,dy = \oint z\,dy + \oint z\,dy = A_g$$

Evenzo is in het rechterdeel van fig. 6.36 het gebied in twee delen gesplitst voor de derde kringintegraal, een gebied, waarin $y \geq 0$ en een gebied waarin $y \leq 0$. Langs dezelfde weg wordt voor de derde kringintegraal gevonden

$$\oint y\,dz = \oint y\,dz + \oint y\,dz = -A_g$$

Met deze uitkomsten voor de drie kringintegralen gaat (6.48) over in

$$\boxed{-\oint \gamma_{xs}\,ds = 2A_g\theta}$$

Dit is dezelfde voorwaarde die in (6.46) was gevonden voor het bijzondere geval dat een gatrand wordt gekozen die samenvalt met een contourlijn in een volle doorsnede. We hebben daarmee aangetoond dat deze voorwaarde ook geldig is voor een willekeurige positie van het gat. Dan blijft ook de membraan-analogie bruikbaar voor het bepalen van de ϕ-heuvel. Alleen zal een gewichtsloze plaat nu niet meer automatisch evenwijdig aan zichzelf verplaatsen. Men zal een *geleiding* nodig hebben om dit te realizeren.

De eerste integraal laat zich als volgt uitwerken;

$$\iint_A - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dA = \int [\int_{y_1}^{y_2} - y \, d\phi + \int_{y_3}^{y_4} - y \, d\phi \,] dz$$

Door partiële integratie naar y wordt dit

$$\int [\int_{y_1}^{y_2} \phi \, dy - (y_2 \phi_2 - y_1 \phi_1) + \int_{y_3}^{y_4} \phi \, dy - (y_4 \phi_4 - y_3 \phi_3) \,] \, dz$$

Op de buitenomtrek is ϕ_1 en ϕ_4 nul, terwijl ϕ_2 en ϕ_3 op de omtrek van het gat dezelfde waarde ϕ_g hebben. Dit maakt van de integraal

$$\int [\int_{y_1}^{y_2} \phi \, dy + \phi_g (y_3 - y_2) + \int_{y_3}^{y_4} \phi \, dy] \, dz$$

De term tussen de rechte haken is juist de doorsnede over de ϕ-heuvel, *inclusief* het deel van ϕ-heuvel boven het gat. We vinden derhalve:

$$\iint_A - y \frac{\partial \phi}{\partial y} \, dA = \iint_A \phi \, dA + \phi_g A_g$$

Evenzo laat zich vinden

$$\iint_A - z \frac{\partial \phi}{\partial z} \, dA = \iint_A \phi \, dA + \phi_g A_g$$

Voor een doorsnede met een gat blijft gelden dat de vertikale en de horizontale spanningen in dezelfde maten bijdragen. Gesommeerd vinden we

$$GI_t = 2 \iint_A \phi \, dA + 2 \, \phi_g A_g = 2 \iint_{A+A_g} \phi \, dA \quad (bij \; \theta = 1)$$

Hiermee is voor elke willekeurige positie van een gat bewezen dat de torsiestijfheid gelijk is aan twee maal het volume van de ϕ-heuvel, bij $\theta = 1$.

Doorsnede met een aantal gaten

Het is op eenvoudige wijze aan te geven hoe de berekening moet verlopen als er niet slechts één gat in de doorsnede voorkomt, maar een aantal gaten. Er zijn dan net zo veel onbekende ϕ_g's als er gaten zijn, en deze kunnen alle een verschillende waarde hebben.

Het evenwicht van de gewichtsloze plaat wordt beschreven door

$$\oint_S w_{,n}\, ds = pA_g$$

zodat

$$S\ \frac{w}{h}\ 0 = pA_g$$

dus

$$w = \frac{p}{S}\ \frac{hA_g}{0}$$

Door te substitueren $p=2\theta$ en $S=\frac{1}{G}$ mogen we voor w ook ϕ_g lezen:

$$\phi_g = 2G\ \frac{hA_g}{0}\ \theta$$

Het wringend moment is tweemaal het volume van de ϕ-heuvel

$$M_w = 2\iint_A \phi\ dA + 2\phi_g A_g$$

De oppervlakte A van het materiaal is nu $h0$. Deze is bij dunwandige kokers verwaarloosbaar ten opzichte van A_g, zodat

$$M_w = 2\ \phi_g\ A_g$$

$$M_w = G\ \frac{4hA_g^2}{0}\ \theta$$

Het torsie traagheidsmoment is dus

$$I_w = \frac{4hA_g^2}{0}$$

Dit hadden we al gezien in fig. 6.2. In college b13 is de wringstijfheid voor dunwandige kokers afgeleid met een arbeidsbeschouwing. Dat voerde tot de algemeen geldende 2e formule van Bredt

$$\boxed{I_w = \frac{4A_g^2}{\oint \frac{ds}{h}}}$$

Deze volgt ook uit de evenwichtsbeschouwing van de gewichtsloze plaat. Als h constant is over de omtrek, leidt de formule tot het resultaat dat we hierboven vonden voor I_w.

De schuifspanningen σ_{xs} zijn bij benadering constant over de dikte. Afgezien van het teken geldt

$$\sigma_{xs} = \frac{\phi_g}{h} = 2G\ \frac{A_g}{0}\ \theta$$

of, uitgedrukt in het wringend moment

$$\boxed{\sigma_{xs} = \frac{M_w}{2hA_g}}$$

Dit wordt de 1e formule van Bredt genoemd.

De verhouding van de stijfheden is

$$\frac{I \text{ gesloten buis}}{I \text{ open buis}} = 3 \left(\frac{R}{h}\right)^2$$

en de verhouding voor de spanningen, bij eenzelfde moment

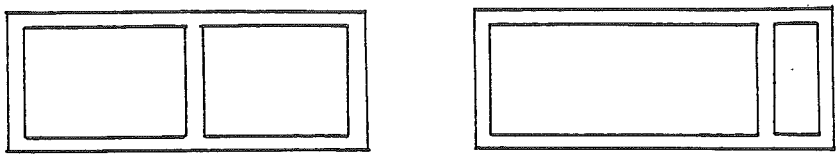
$$\frac{\sigma \text{ gesloten buis}}{\sigma \text{ open buis}} = 3 \left(\frac{h}{R}\right)$$

We zien dat de spanningen bij eenzelfde moment in de gesloten buis een orde $\frac{h}{R}$ kleiner zijn dan in de open buis, terwijl de stijfheid van een gesloten buis toch zeer veel groter is. Dit is er aan te danken dat de rondlopende schuifspanningen bij een gesloten buis een grote arm hebben ($2R$), terwijl deze bij een open buis kleiner of gelijk is aan h. Om hetzelfde moment op te nemen moeten in het laatste geval de schuifspanningen veel groter zijn.

Oefeningen

3. Bereken het wringstijfheidsmoment van een rechthoekige dunwandige koker met uitwendige afmetingen $2a * a$. Over de lengte $2a$ is de wanddikte h, en over de lengte a is de wanddikte $2h$.

4. Heeft het zin te trachten de wringstijfheid van een koker te verhogen door het aanbrengen van een middenschot? En als deze excentrisch wordt geplaatst?



6.10. Dunwandige meercellige kokers

In de bouwpraktijk kan het voorkomen dat de torsiestijfheid berekend moet worden van meercellige kokers. Een voorbeeld met twee cellen is getekend in fig. 6.39. De verkeersindeling op het bovendek van een brug kan er oorzaak van zijn dat een vertikaal tussenschot niet centrisch wordt aangebracht.

$$q = \frac{w_1}{h} S$$

$$q' = \frac{w_1}{\frac{1}{2}h} S$$

$$q'' = \frac{w_2}{h} S$$

$$q''' = \frac{w_2}{\frac{1}{2}h} S$$

$$q'''' = \frac{w_2 - w_1}{h} S$$

Als w_2 groter is dan w_1 zullen de getekende dwarskrachten een positieve waarde hebben.

De eerste vier dwarskrachten q, q', q'' en q''' oefenen op de platen neerwaarts gerichte krachten uit. De laatste dwarskracht q'''' werkt op plaat 1 omhoog en op plaat 2 naar beneden (als we w_1 groter hadden getekend dan w_2 zou dit net omgekeerd zijn geweest). Het vertikaal evenwicht luidt:

plaat 1 $q.a + q.2a + q'.2a - q''''.a = p.2a.a$

plaat 2 $q''.a + q''.a + q'''.a + q''''.a = p.a.a$

Dus

$$\frac{w_1}{h} Sa + \frac{w_1}{h} S\,2a + \frac{w_1}{\frac{1}{2}h} S\,2a - \frac{w_2 - w_1}{h} Sa = 2pa^2$$

$$\frac{w_2}{h} Sa + \frac{w_2}{h} Sa + \frac{w_2}{\frac{1}{2}h} Sa + \frac{w_2 - w_1}{h} Sa = pa^2$$

Of wel, na delen door a

$$\frac{8S}{h} w_1 - \frac{S}{h} w_2 = 2pa$$

$$-\frac{S}{h} w_1 + 5\frac{S}{h} w_2 = pa$$

Uit deze twee vergelijkingen lossen we op

$$w_1 = \frac{11}{39} \frac{p}{S} ah$$

$$w_2 = \frac{10}{39} \frac{p}{S} ah$$

De verplaatsing w_2 is kleiner dan w_1. Dan zal de dwarskracht q'''' juist anders gericht zijn als is getekend.

Men kan de eerste kiezen, en verder lettend op het teken van de helling van het membraan aangeven hoe ze in alle andere wanddelen verlopen. Het tussenschot heeft dezelfde helling als het rechter lijf, zodat σ'''' in dezelfde richting loopt als σ''.

Oefeningen

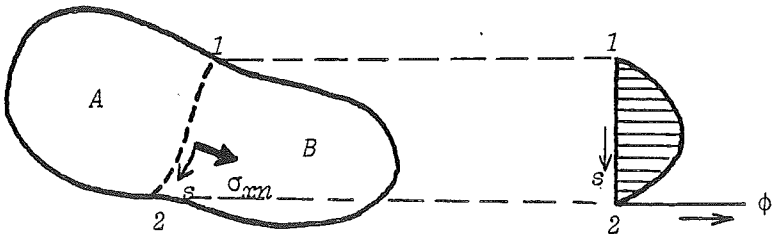
5. Controleer of de resulterende horizontale en vertikale dwarskrachten nul zijn in de besproken tweecellige koker.

6. Controleer of de berekende vertikale spanningen een wringend moment $\frac{1}{2}M_w$ leveren. Doe dit eveneens voor de horizontale spanningen.

7. Bereken met de formules van Bredt de I_w en de spanningen σ als het tussenschot wordt weggelaten. Bereken de verhouding van de I_w's en de maximale σ's voor de situatie met tussenschot en zonder tussenschot. Wat kunt u vaststellen?

6.11. Doorsnede met verschillende materialen

We beschouwen de doorsnede met twee verschillende materialen A en B, die in fig. 6.40 is geschetst. Voor deze materialen gelden de respectieve glijdingsmoduli G_A en G_B. Langs de scheidingslijn tussen de twee materialen kiezen we het assenstelsel n-s, waarvan de coördinaat s langs de scheidingslijn loopt en n loodrecht erop. We onderzoeken nu de randvoorwaarden langs de scheidingslijn.



RICHTING n:

$\sigma_{xn_A} = \sigma_{xn_B}$ ⇨ $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ *CONTINU* ⇨ ϕ *CONTINU*

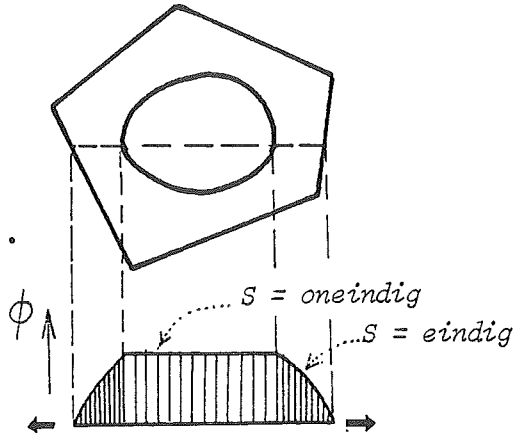
Fig. 6.41 Spanningsvoorwaarde loodrecht op een scheidingslijn tussen verschillende materialen.

Doorsnede met gat als bijzonder geval

Een doorsnede met een gat kunnen we opvatten als een bijzonder geval van een doorsnede met twee materialen. Het gat vatten we daartoe op als een afzonderlijk materiaal met $G=0$. In de membraan-analogie is de spankracht S boven dit gatmateriaal dan oneindig groot.
Dit membraandeel blijft dus vlak. Maken we verder gebruik van de wetenschap dat in dit bijzondere geval geldt

$$\sigma_{xn_A} = \sigma_{xn_B} = 0 \qquad \rightarrow \phi_{,s} = 0 \qquad \rightarrow \phi_g = constant$$

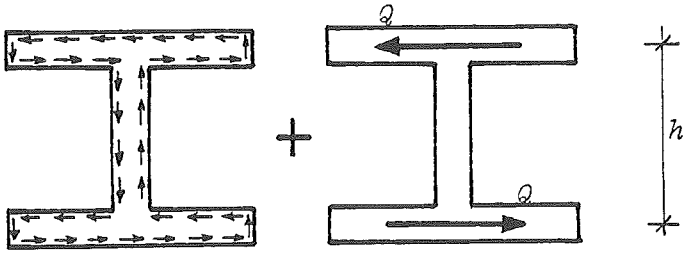
dan weten we bovendien dat het vlakke membraandeel horizontaal blijft.
Precies hetzelfde wordt bereikt met het concept van de gewichtsloze plaat!



6.12. Wringing met verhinderde welving

In het voorgaande is steeds aangenomen dat de uiteinden van de staaf zodanig zijn uitgevoerd, dat daar geen axiale normaalspanningen σ_{xx} kunnen optreden. Een eventuele welving van de doorsnede kan dan ongehinderd plaatsvinden. Als de welving bij een uiteinde wel wordt belemmerd, bijvoorbeeld door de staaf over zijn gehele doorsnede vast te lijmen op een onvervormbaar lichaam, is er sprake van een kinematische randvoorwaarde. Dan kan men niet tegelijk specificeren dat de spanning nul is. In het algemeen zullen nu dus normaalspanningen σ_{xx} optreden. De invloed van de verhinderde welving kan aanzienlijk zijn. Met name de stijfheid kan er sterk door toenemen.

Het verhinderen van de welving komt er op neer dat op de bovenflens een moment (om de z-as) moet worden uitgeoefend en op de onderflens een moment van dezelfde grootte, maar in tegengestelde richting.
In beide flenzen zal dit moment geleidelijk verdwijnen naarmate men verder van de inklemming komt. Dat gaat gepaard met dwarskrachten Q in de flenzen in de richting y. Het totale wringend moment M_w wordt nu niet alleen opgenomen door een rondgaande schuifstroom à la De Saint-Venant, maar voor een deel ook door deze dwarskrachten Q.



$$M_w = GI_w\theta + Qh$$

Bij de inklemming ($x=0$) is de welving volkomen verhinderd. Daar heeft θ de waarde nul. Het moment wordt dan geheel bepaald door Qh. Voor voldoende grote x wordt verwacht dat Q tot nul is uitgedempt en dat θ geheel tot ontwikkeling is gekomen, zodat het wringend moment geheel wordt opgenomen als bij onverhinderde welving ($GI_w\theta$).

We zullen het verwachte beeld nu kwantitatief uitwerken. De rotatie van de doorsnede noemen we φ en de verplaatsing van de bovenflens in y-richting noemen we w. Het moment M en de dwarskracht Q in deze flens achten we positief zoals ze zijn getekend in fig. 6.43.
De volgende verbanden gelden nu:

$$\left.\begin{aligned} Q &= -\frac{dM}{dx} \\ M &= EI_f \frac{d^2w}{dx^2} \end{aligned}\right\} \quad Q = -EI_f \frac{d^3w}{dx^3}$$

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{h}{2}\varphi \\ \theta &= \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned}\right\} \quad \frac{d^3w}{dx^3} = \frac{h}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2}$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= -EI_f \frac{d^3w}{dx^3} \\ \frac{d^3w}{dx^3} &= \frac{h}{2}\frac{d^2\theta}{dx^2} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \quad Q = -\frac{h}{2} EI_f \frac{d^2\theta}{dx^2}$$

Hierin is EI_f de buigstijfheid van een flens voor buiging in het vlak van de flens.

Op een afstand van 2λ à 3λ vanaf de inklemming is de invloed van deze inklemming praktisch uitgedempt.

Voorbeeld

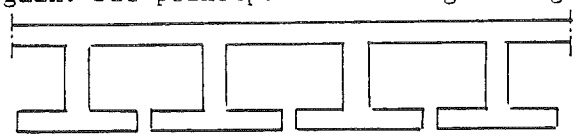
Voor het gemak nemen we $\nu=0$, zodat $G=\frac{1}{2}E$.
Bij een I-profiel met gelijke dikte t voor de flenzen en het lijf, is $I_f = \frac{1}{12} tb^3$ *en* $I_w = \frac{1}{3}(h+2b)t^3$, waarin b de breedte van de flens is.
Dan krijgt men

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{b}{2t}\sqrt{\frac{b}{h+2b}}$$

Als b en h van dezelfde orde van grootte zijn, wordt dit

$$\frac{\lambda}{h} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{b}{t}$$

Als b zeer veel groter is dan t, is λ veel groter dan h. De invloed van de verstoring door het vastgelijmde uiteinde is dan merkbaar tot een afstand (2λ à 3λ) die veel groter is dan de afmeting (h) van de doorsnede die verstoord wordt. In dit geval blijkt het principe van De Saint-Venant niet op te gaan. Dit principe heeft dus geen algemene geldigheid.



Een praktijkvoorbeeld van verstoorde welving treedt op in het geval van viaducten die zijn opgebouwd uit voorgespannen liggers, waarover een hoogliggend dek wordt gestort. De verstoring treedt op bij eind-dwarsdragers en eventuele tussendwarsdragers.
Zowel b als h zijn dan in de orde van grootte van 1.00 m, terwijl t in de orde van 0.20 m is. Met $b/t = 5$ wordt

$$\lambda = \frac{5}{2\sqrt{3}} \simeq 1.5\ m$$

Een uitdemplengte van 2λ à 3λ geeft ongeveer 4 m. Op een overspanning van 30 m à 40 m is dat een gering deel van de overspanning. Voor de torsiestijf-heid van zo'n viaduct kan men met voldoende nauwkeurigheid de stijfheid volgens De Saint-Venant aanhouden, als alleen einddwarsdragers worden toegepast.
Als ook een aantal tussendwarsdragers voorkomt, zal de werkelijke stijfheid groter zijn.