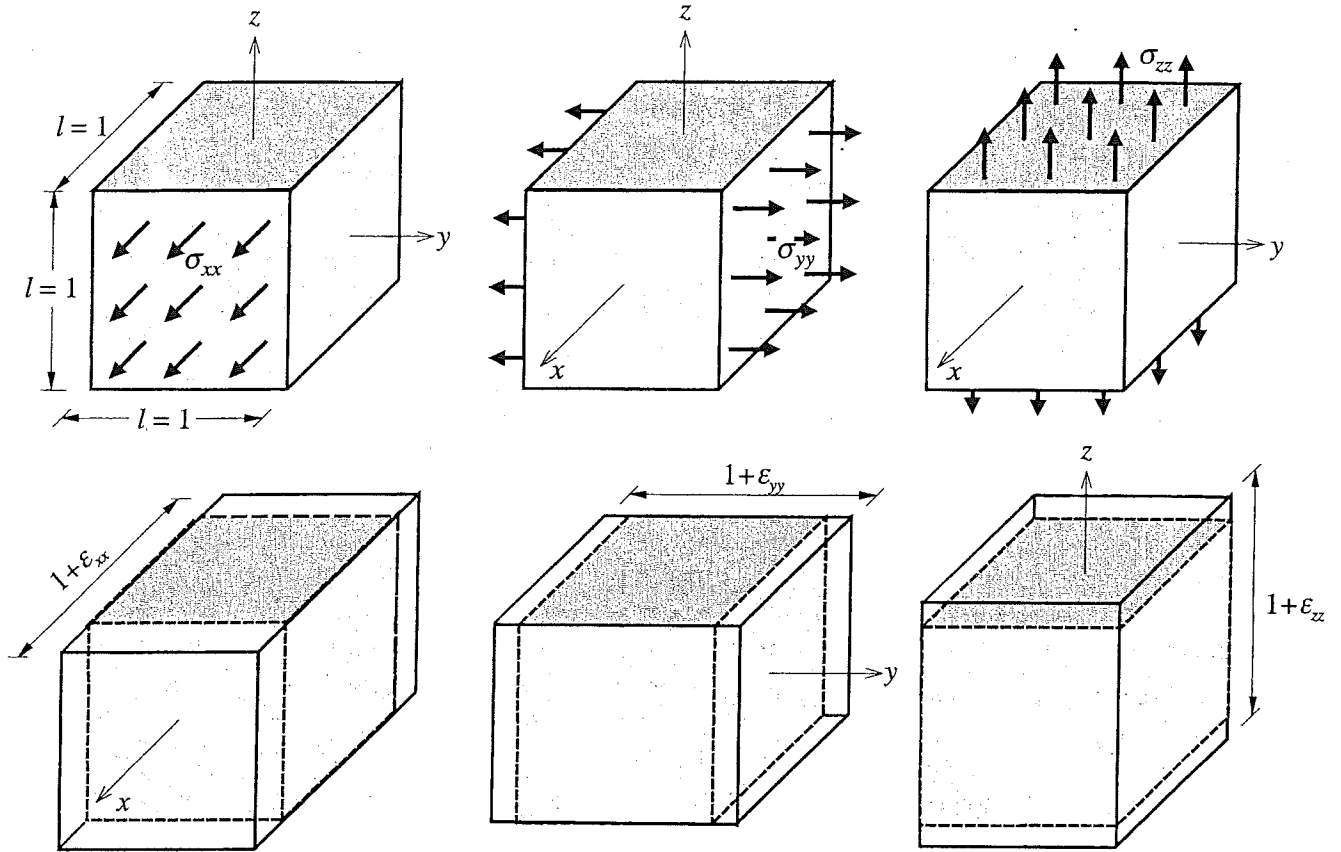


5 Elasticiteitstheorie in drie dimensies

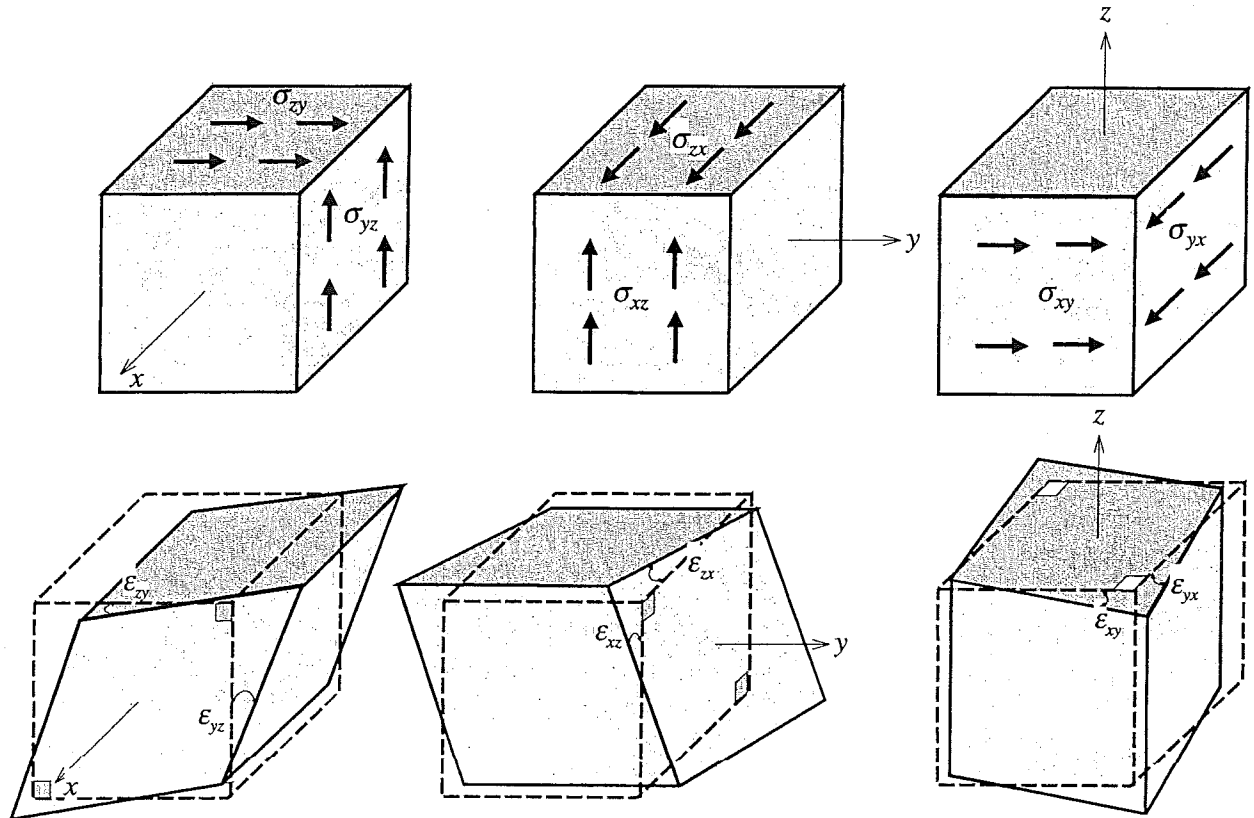
Na de een-dimensionale toepassingen in hoofdstuk 2 en de twee-dimensionale plaatproblemen van de hoofdstukken 3 en 4 wordt nu de generalisatie naar drie dimensies gemaakt.

In een ruimtelijk continuüm kan de verplaatsing van een punt (x,y,z) in een cartesisch assenstelsel worden ontbonden in de componenten $u_x(x,y,z)$ in de x -richting, $u_y(x,y,z)$ in de y -richting en $u_z(x,y,z)$ in de z -richting. Per volume-eenheid kan een uitwendige belasting P_x , P_y en P_z worden aangebracht die met de vrijheidsgraden u_x , u_y en u_z correspondeert. Wat de inwendige grootheden betreft, hebben we reeds kennis gemaakt met het aspect dat door een vlakke-elementje in een continuüm een kracht wordt overgebracht en dat de kracht per eenheid van oppervlakte een spanningsvector wordt genoemd. In een ruimtelijk continuüm kan men de spanningsvectoren op drie vlakjes loodrecht op de cartesische coördinaatassen x,y,z elk ontbinden in drie componenten in de drie coördinaatrichtingen. Zo ontstaan negen grootheden, aan te duiden als $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ (werkend op het vlakje loodrecht op de x -as), $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$ (werkend op het vlakje loodrecht op de y -as) en $\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz}$ (werkend op het vlakje loodrecht op de z -as). Men ziet weer dat de eerste index van de zogenaamde spanningscomponenten (vaak kortweg spanningen genoemd) de richting van de normaal op het vlakje aangeeft, en de tweede index de richting van de component van de spanningsvector. Evenals we dat deden bij platen, noemen we de spanningscomponent een normaalspanning als de twee indices gelijk zijn ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$). Als de indices ongelijk zijn, spreken we van een schuifspanning ($\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$). Ook nu is de tekenafspraken: een spanningscomponent is positief indien werkend in positieve coördinaatrichting op een vlakje met de normaalvector in positieve coördinaatrichting, of indien werkend in negatieve coördinaatrichting op een vlakje met normaal in negatieve coördinaatrichting.

Met de gedefinieerde inwendige spanningscomponenten corresponderen inwendige vervormingcomponenten, te weten specifieke rekken door de normaalspanningen en veranderingen van de rechte hoek door schuifspanningen.



Figuur 5.1 Normaalspanningen en daarmee corresponderende rekken in een driedimensionaal continuum, alle getekend als ze positief zijn.



Figuur 5.2 Schuifspanningen en daarmee corresponderende rekken in een driedimensionaal continuum, alle getekend als ze positief zijn.

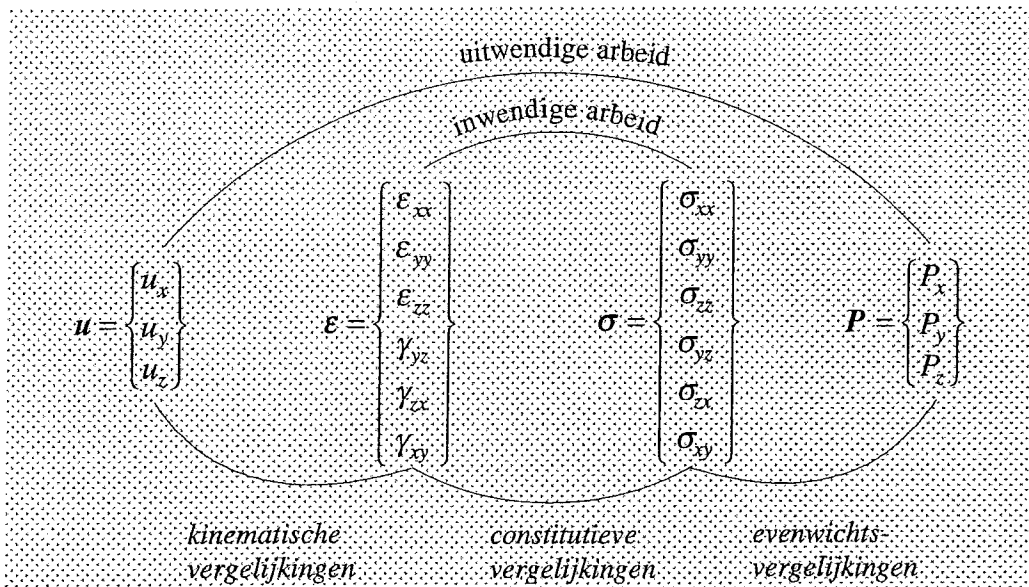
Zoals uit fig. 5.1 blijkt worden de specifieke rekken ten gevolge van de normaalspanningen respectievelijk ε_{xx} , ε_{yy} en ε_{zz} genoemd. De schuifvervormingen bestaan uit drie paren van gelijke hoekveranderingen:

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}, \quad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} \text{ en } \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}.$$

Zoals we eerder bij platen deden, kunnen we werken met de afschuifvervormingen:

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} \text{ en } \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}.$$

We krijgen dan het volgende overzichtsschema:



Figuur 5.3 Relatieschema in drie dimensies

Omdat er zes spanningscomponenten zijn tegen drie belastingscomponenten (dus drie evenwichtsvergelijkingen) is een ruimtelijk spanningsprobleem drievoudig statisch onbepaald.

5.1 Basisvergelijkingen

We zullen achtereenvolgens de drie categorieën basisvergelijkingen formuleren in de volgorde: kinematische vergelijkingen, constitutieve vergelijkingen en evenwichtsvergelijkingen.

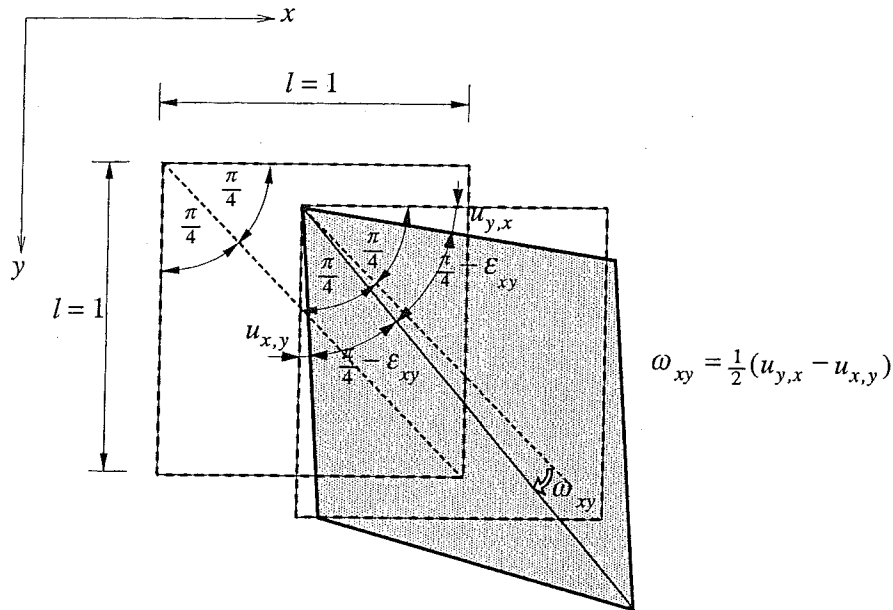
Kinematische vergelijkingen

In paragraaf 3.1 zijn de kinematische vergelijkingen voor een plaat afgeleid. Door dit nu in drie richtingen te beschouwen worden op een overeenkomstige wijze de kinematische vergelijkingen voor een ruimtelijk continuüm gevonden:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{x,x} & \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = u_{y,z} + u_{z,y} \\ \varepsilon_{yy} &= u_{y,y} & \gamma_{zx} &= 2\varepsilon_{zx} = u_{z,x} + u_{x,z} \\ \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} & \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = u_{x,y} + u_{y,x} \end{aligned} \quad (5.1)$$

In deze notatie betekent $_{,x}$ differentieren naar x , enzovoort.

Een volumedeeltje ondergaat in het algemeen behalve de vervormingen ook nog verplaatsingen als een star lichaam. Dit zijn zes verplaatsingscomponenten. Drie daarvan zijn zuivere translaties u_x , u_y en u_z in de x -, y - en z -richting en drie daarvan zijn rotaties om de x -, y - en z -as. Deze noemen we respectievelijk ω_{yz} , ω_{zx} en ω_{xy} .



Figuur 5.4 Rotatie om de z -as

In figuur 5.4 is de rotatie ω_{xy} om de z -as in beeld gebracht. Voor de drie rotaties vinden we aldus (rechtsdraaiend positief):

$$\begin{aligned}\omega_{yz} &= \frac{1}{2}(u_{z,y} - u_{y,z}) \\ \omega_{zx} &= \frac{1}{2}(u_{x,z} - u_{z,x}) \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{y,x} - u_{x,y})\end{aligned}\quad (5.2)$$

Constitutieve vergelijkingen

Voor een isotroop lineair elastisch materiaal is de wet van Hooke van toepassing. Het verband tussen de spanningen en vervormingen luidt dan:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{zz} + \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\end{aligned}\quad (5.3a)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} \\ 2\varepsilon_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{xy} \end{aligned} \quad (5.3b)$$

Hier in is E de *elasticiteitsmodulus* en ν de *dwarscontractiecoëfficiënt* (Poisson's ratio).

De term $2(1+\nu)/E$ is de reciproke van de glijdingsmodulus genoemd en wordt aangegeven met de letter G . In matrixschrijfwijze luiden de constitutieve eigenschappen (5.3):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.4a)$$

symmetrisch

Of kort:

$$\varepsilon = C\sigma \quad (5.4b)$$

waarin C de flexibiliteitsmatrix is.

Door inversie ontstaat de stijfheidsvorm van de constitutieve eigenschappen:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.5a)$$

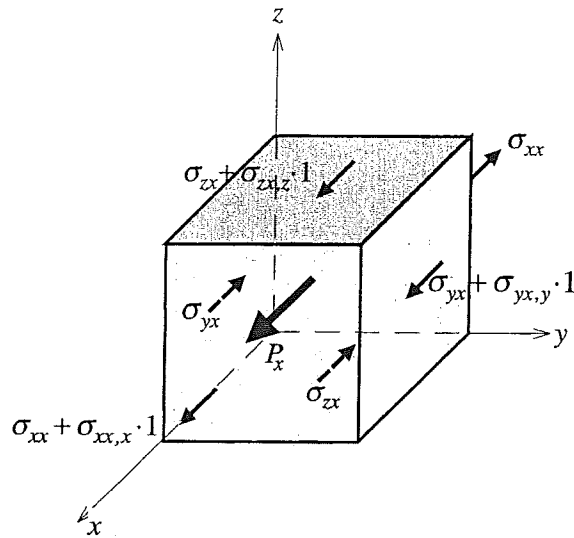
symmetrisch

Of kort:

$$\sigma = D\varepsilon \quad (5.5b)$$

waarin D de *stijfheidsmatrix* is. In deze vorm worden de constitutieve eigenschappen meestal gebruikt in elementenmethodeprogramma's met ruimtelijke elementen.

Evenwichtsvergelijkingen



Figuur 5.5 Krachten in de x-richting

In figuur 5.5 wordt het evenwicht beschouwd in de x-richting. Het getekende volumedeeltje heeft in alle richtingen afmetingen ter grootte van de eenheid van lengte. Op overeenkomstige wijze is het evenwicht in de y- en z-richting te beschouwen. Aldus wordt gevonden:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + P_x &= 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} + P_y &= 0 \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + P_z &= 0\end{aligned}\quad (5.6^a)$$

Het momentenevenwicht om de x-, y- en z-as leidt tot:

$$\begin{aligned}\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} &= \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{yx}\end{aligned}\quad (5.6^b)$$

Controle met differentiaaloperator-matrices

Voor de kinematische vergelijkingen (5.1) kan men schrijven:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}\quad (5.7a)$$

Of kort:

$$\varepsilon = \mathcal{B} u$$

(5.7b)

Evenzo luiden de evenwichtsvergelijkingen (5.6a) in deze notatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (5.8a)$$

Of kort :

$$\mathcal{B}^T \sigma = P$$

(5.8b)

We zien ook nu dat $\mathcal{B}^T$ wordt verkregen door transpositie van $\mathcal{B}$ waarbij alle tekens van de differentiaties veranderen omdat het steeds een oneven orde afgeleide betreft.

5.2 Oplosmethoden en randvoorwaarden

In de *krachtenmethode* zou men drie compatibiliteitsvoorwaarden verwachten, maar in de literatuur zal men toch steeds zes compatibiliteitsvoorwaarden afgeleid vinden. Deze zijn weliswaar lineair onafhankelijk van elkaar, maar uit de zes voorwaarden kan nog een drietal *identiteiten* worden afgeleid, de zogenaamde identiteiten van Bianchi. Ten opzichte van de één-dimensionale en twee-dimensionale problemen die we eerder behandelden, is er dus in de drie-dimensionale formulering een extra complicatie. We zullen deze materie hier verder onbesproken laten.

In de *verplaatsingsmethode* worden de kinematische vergelijkingen en de constitutieve vergelijkingen gesubstitueerd in de evenwichtsvergelijkingen. Bij deze aanpak resulteren drie simultane partiële differentiaalvergelijkingen in de drie componenten u_x , u_y en u_z van het verplaatsingsveld:

$$\begin{aligned} \dots u_x + \dots u_y + \dots u_z &= P_x \\ \dots u_x + \dots u_y + \dots u_z &= P_y \\ \dots u_x + \dots u_y + \dots u_z &= P_z \end{aligned} \quad (5.9)$$

De met punten aangeduide posities worden ingenomen door differentiaaloperatoren vermenigvuldigd met stijfheidstermen uit (5.5). In paragraaf 5.5 wordt van de drie differentiaalvergelijkingen een alternatieve beschrijving gegeven.

Opmerking

In dit dictaat worden geen algemene toepassingen besproken van het voor driedimensionale spanningstoestanden afgeleide stelsel differentiaalvergelijkingen (5.9). We zullen volstaan met één bijzonder geval wringing van staven. Hieraan wordt een afzonderlijk hoofdstuk 6 gewijd. In het wringprobleem blijkt het mogelijk een driedimensionale spanningstoestand terug te brengen tot een twee-dimensionaal probleem.

Randvoorwaarden

Het algemene probleem uit de elasticiteitstheorie is: de verplaatsingen, vervormingen en spanningen in het inwendige van een lichaam te berekenen als de volumekrachten en zekere voorwaarden langs de rand van het lichaam gegeven zijn. De twee meest voorkomende typen van randvoorwaarden zijn:

Kinematische randvoorwaarde

Deze randvoorwaarde treedt op als op een gedeelte (zeg het deel S_u) van de rand van het lichaam een zodanige voorziening is getroffen dat punten op dat deel van de rand een voorgeschreven verplaatsing ondergaan. Een voorbeeld is dat het lichaam plaatselijk volledig is vastgelijmd aan een onvervormbaar oplegblok. Dan zijn de verplaatsingen daar nul (dat wil zeggen: er is voorgeschreven dat ze nul zijn). In formule is de randvoorwaarde:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x^0 \\ u_y &= u_y^0 \\ u_z &= u_z^0 \end{aligned} \right\} \text{ op } S_u \quad (5.10)$$

waarin u_x^0, u_y^0 en u_z^0 gegeven zijn (bijvoorbeeld nul).

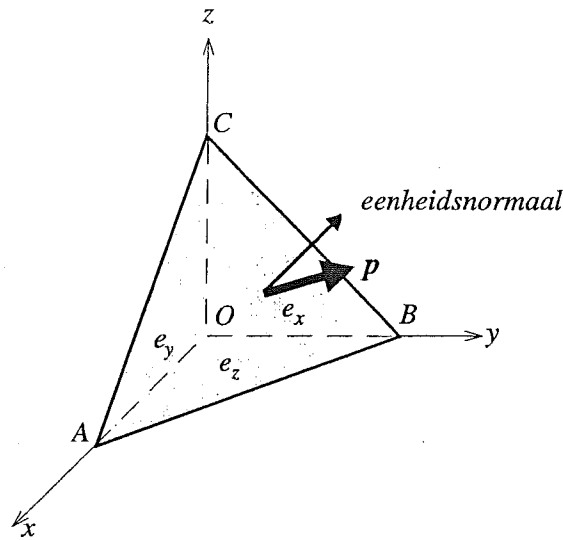
Dynamische randvoorwaarde

Deze randvoorwaarde treedt op als op een gedeelte (zeg het deel S_p) van de rand van het lichaam een gegeven oppervlaktebelasting aangrijpt. In dat geval is tussen de spanningscomponenten in het cartesische assenstelsel een drietal relaties te formuleren. Als de eenheidsnormaalvector loodrecht op de rand componenten e_x , e_y en e_z heeft, is de formulering van de randvoorwaarde:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} e_x + \sigma_{yx} e_y + \sigma_{zx} e_z &= p_x \\ \sigma_{xy} e_x + \sigma_{yy} e_y + \sigma_{zy} e_z &= p_y \\ \sigma_{xz} e_x + \sigma_{yz} e_y + \sigma_{zz} e_z &= p_z \end{aligned} \right\} \text{ op } S_p \quad (5.11)$$

waarin p_x , p_y en p_z gegeven zijn. Langs een onbelast deel van het oppervlak zijn p_x , p_y en p_z vanzelfsprekend nul.

De randvoorwaarden (5.11) zijn een generalisatie naar drie dimensies van de overeenkomstige voorwaarden voor een in zijn vlak belaste plast. De afleiding geschiedt ook op een analoge wijze. We beschouwen een driehoekig oppervlakte-deeltje ABC ter grootte van de eenheid van oppervlakte, waarop de vector $\mathbf{p}$ werkt met componenten p_x , p_y en p_z .



Figuur 5.6 Afleiding van dynamische randvoorwaarden

Zoals gezegd heeft de eenheidsnormaal op ABC componenten e_x , e_y en e_z . Uit een elementaire toepassing van de stereometrie volgt dan dat het oppervlak van driehoek OBC gelijk is aan e_x , dat van driehoek OAC gelijk aan e_y en dat van driehoek OAB gelijk aan e_z . Door het evenwicht van het viervlak in de richtingen x , y en z te beschouwen, krijgt men de drie voorwaarden van (5.11).

Oefeningen

1. Bepaal het vervormingsveld dat behoort bij het volgende verplaatsingsveld.

$$u_x = a + by$$

$$u_y = c - bx$$

$$u_z = d$$

waarin a , b , c en d constanten zijn. Het resultaat is nogal bijzonder. Probeer hiervoor een verklaring te geven.

2. Bepaal het verplaatsingsveld dat behoort bij het volgende (homogene) vervormingsveld, als nog gegeven is dat $u_z = 0$.

$$\varepsilon_{xx} = a \quad \varepsilon_{xy} = 0$$

$$\varepsilon_{yy} = b \quad \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \varepsilon_{zx} = 0$$

3. Is het volgende spanningsveld mogelijk in een in evenwicht verkerend lichaam, waarop geen volumekrachten werken?

$$\sigma_{xx} = ax^2; \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -2axy; \quad \sigma_{yy} = ay^2$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$$

4. Als in een in evenwicht verkerend lichaam de volgende spanningen heersen (k , ρ en g zijn constanten)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = k\rho gz; \quad \sigma_{zz} = \rho gz$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

Welke volumekracht werkt er dan op het lichaam?

5.3 Alternatieve formulering van de constitutieve vergelijkingen

In paragraaf 5.1 is de wet van Hooke gepresenteerd voor de beschrijving van het gedrag van isotroop lineair elastisch materiaal. Er is een verband beschreven tussen de zes spanningscomponenten

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$$

en de daarmee corresponderende vervormingen

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}$$

Dit verband is zowel in de flexibiliteitsvorm als in de stijfheidsvorm gepresenteerd. Het bleek dat de twee elastische constanten E en ν voldoende zijn om een eenduidige materiaalbeschrijving te maken. Soms heeft het voordeel de materiaalbeschrijving op een andere wijze te doen, door aan te sluiten bij het gegeven dat de totale vervorming kan worden onderscheiden in een *volumeverandering* en een *gedaanteverandering*. Dit kan bijvoorbeeld van betekenis zijn voor grond, als daarin de volumeverandering wordt verhinderd door poriënwater, terwijl gedaanteveranderingen onbelemmerd kunnen optreden. In plaats van de constanten E en ν wordt dan met twee andere constanten gewerkt. Een ander voorbeeld is rubber, waarin de volumeverandering nul is omdat de constante ν praktisch de waarde 0.5 heeft. In (5.5a) komt een term $(1-2\nu)$ voor in de noemer, waardoor het verband tussen de spanningen en de rekken dan onbepaald wordt. Het splitsen van de deformaties in een volumeverandering en een gedaanteverandering kan soms ook de beschrijving van niet-lineair gedrag van materialen vergemakkelijken. Dat is onder meer van belang voor beton en grond. We zullen de alternatieve formulering van de wet van Hooke hier samenvatten. Om te beginnen wordt de wet van Hooke gesplitst in een afzonderlijke *wet voor de volumeverandering* en een afzonderlijke *wet voor de gedaanteverandering*. We doen dit zowel in flexibiliteitsvorm als in de stijfheidsvorm. Daarbij zullen we als materiaalconstanten leren kennen de *compressiemodulus* K en de *glijdingsmodulus* G . De basisvergelijkingen (5.4) en (5.5) vormen bij deze bewerking ons punt van uitgang. Vervolgens wordt weer *één totaalwet van Hooke* geformuleerd met gebruikmaking van deze materiaalconstanten. Ook dit wordt in de flexibiliteitsvorm en in de stijfheidsvorm gedaan. Voor deze stijfheidsvorm blijkt er nog een tweede alternatief te zijn, waarin de constanten K en G worden vervangen door λ en μ , de zogenaamde constanten van Lamé.

5.3.1 Afzonderlijke wet van Hooke voor volume- en gedaanteverandering

Van de optredende spanningstoestand $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ wordt de zogenaamde *bolspanningstoestand* σ_0 afgesplitst

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (5.12)$$

zodat de *deviatorspanningen* $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ het resterende deel vormen.

Voor s_{xx}, s_{yy}, s_{zz} geldt

$$\left. \begin{aligned} s_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_0 = \frac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\ s_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_0 = \frac{1}{3}(2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \\ s_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_0 = \frac{1}{3}(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Op overeenkomstige wijze wordt van de optredende vervormingen $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ een component e_0 , afgesplitst, die een derde is van de *volumeverandering* e

$$e_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{3}e \quad (5.14)$$

zodat de *deviatorvervormingen* $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ het resterende deel vormen. Hiervan is

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \varepsilon_{xx} - e_0 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \\ e_{yy} &= \varepsilon_{yy} - e_0 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \\ e_{zz} &= \varepsilon_{zz} - e_0 = \frac{1}{3}(2\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Met de zes deviatorvervormingen gaat geen volumeverandering gepaard. Alleen de vorm (gedaante) van een materiaaldeeltje verandert er door.

Flexibiliteitsrelaties

Tussen e en σ_0 kan een verband worden gelegd door in (5.4a) de eerste drie vergelijkingen op te tellen. Dit geeft

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Ofwel

$$e = \frac{1}{K} \sigma_0 \quad \text{Wet van Hooke voor de volumeverandering} \quad (5.16)$$

met

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{Compressiemodulus} \quad (5.17)$$

De relatie (5.16) is de wet van Hooke voor de volumeverandering.

Er is ook een verband te leggen tussen de deviatorvervormingen e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} en de deviatorspanningen s_{xx}, s_{yy}, s_{zz} . Uit (5.15) weten we bijvoorbeeld

$$e_{xx} = \varepsilon_{xx} - e_0$$

en zowel voor ε_{xx} als e_0 kennen we het verband met de spanningen, zodat

$$e_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{zz}) - \frac{1-2\nu}{3E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

ofwel

$$e_{xx} = \frac{1+\nu}{E}(\frac{2}{3}\sigma_{xx} - \frac{1}{3}\sigma_{yy} - \frac{1}{3}\sigma_{zz})$$

Hiervoor kunnen we kort schrijven

$$e_{xx} = \frac{1}{2G}s_{xx}$$

waarin G de *glijdingsmodulus* is. Een analoge afleiding geldt voor het verband tussen e_{yy} en s_{yy} , en tussen e_{zz} en s_{zz} . De glijdingsmodulus legt ook de relatie tussen de afschuifvervormingen $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ en de schuifspanningen σ_{yz}, σ_{zx} en σ_{xy} . Als we voor de afschuifvervormingen $\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}$ gebruiken, speelt de factor $\frac{1}{2G}$ weer een rol. Voor alle zes deviatorvervormingen en deviatorspanningen geldt dus

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{2G}s_{xx} \\ e_{yy} &= \frac{1}{2G}s_{yy} \\ e_{zz} &= \frac{1}{2G}s_{zz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G}\sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2G}\sigma_{zx} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \end{aligned}$$

$$\text{Wet van Hooke voor de gedaanteverandering} \quad (5.18)$$

met

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{Glijdingsmodulus} \quad (5.19)$$

Stijfheidsrelaties

De twee componenten van de Wet van Hooke (5.16) en (5.18) hadden we ook in de inverse vorm kunnen afleiden als stijfheidsrelaties.

Door in (5.5a) de eerste drie vergelijkingen op te tellen, en de som door drie te delen wordt gevonden

$$\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = \frac{E}{3(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

Dit is juist

$$\sigma_0 = K\varepsilon \quad \text{Wet van Hooke voor de volumeverandering in stijfheidsvorm} \quad (5.20)$$

Het verband tussen de deviatorspanningen s_{xx}, s_{yy}, s_{zz} en de deviatorvervormingen e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} in de stijfheidsvorm is ook snel aan te geven. Voor s_{xx} weten we

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_0$$

en bovendien kennen we zowel voor σ_{xx} als σ_0 het verband met de vervormingen.

Dat maakt van s_{xx}

$$s_{xx} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left(\varepsilon_{xx} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{yy} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{zz}\right) - \frac{E}{3(1-2\nu)}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$$

ofwel, na herleiding

$$s_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)}\left(\frac{2}{3}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}\varepsilon_{zz}\right)$$

Hiervoor kunnen we kort schrijven

$$s_{xx} = 2Ge_{xx}$$

Op dezelfde wijze wordt voor s_{yy} en s_{zz} een uitdrukking gevonden.

De Wet van Hooke voor de gedaanteverandering in de stijfheidsvorm is dus

$$s_{xx} = 2Ge_{xx}$$

$$s_{yy} = 2Ge_{yy}$$

$$s_{zz} = 2Ge_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx}$$

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\text{Wet van Hooke voor de gedaanteverandering} \quad (5.21)$$

5.3.2 Wet van Hooke voor totale vervorming en spanningen

Met behulp van de afzonderlijke wetten van Hooke op basis van K en G voor de volumeverandering en de gedaanteverandering, laat zich één wet formuleren op basis van K en G voor de totale vervormingen (in de flexibiliteitsvorm), c.q. voor de totale spanningen (in de stijfheidsvorm).

Flexibiliteitrelaties

De totale rekken $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}$ zijn de som van de gemiddelde rek $e_o (= \frac{1}{3}e)$ en deviatorvervormingen $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$.

Met de relaties (5.16) en (5.18) wordt dan rechtstreeks gevonden

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_o}{3K} + \frac{s_{xx}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_o}{3K} + \frac{s_{yy}}{2G}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_o}{3K} + \frac{s_{zz}}{2G}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2G} \sigma_{yz}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2G} \sigma_{zx}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \sigma_{xy}$$

$$\text{Wet van Hooke in } K \text{ en } G \text{ voor de totale vervormingen} \quad (5.22)$$

in flexibiliteitsvorm

Stijfheidrelaties

De totale spanningen $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$ zijn de som van de bolspanning σ_o en de deviatorspanningen $s_{xx}, s_{yy}, s_{zz}, s_{yz}, s_{zx}, s_{xy}$. Met (5.20) en (5.21) vinden we dan direct voor de totale spanningen

$$\sigma_{xx} = Ke + 2Ge_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = Ke + 2Ge_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = Ke + 2Ge_{zz}$$

$$\sigma_{yz} = 2G\varepsilon_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = 2G\varepsilon_{zx}$$

$$\sigma_{xy} = 2G\varepsilon_{xy}$$

$$\text{Wet van Hooke in } K \text{ en } G \text{ voor de totale spanningen} \quad (5.23)$$

in stijfheidsvorm

De hier gevonden Wet van Hooke voor de totale spanningen kan nog op een andere wijze worden gepresenteerd, als de drie deviatorvervormingen e_{xx}, e_{yy}, e_{zz} worden vervangen door $\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3}e, \varepsilon_{yy} - \frac{1}{3}e, \varepsilon_{zz} - \frac{1}{3}e$.

De wet luidt dan

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yz} &= 2\mu \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zx} &= 2\mu \varepsilon_{zx} \\ \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}\end{aligned}$$

*Wet van Hooke voor de totale spanningen in
stijfheidsvorm met λ en μ* (5.24)

waarin λ en μ de *Lamé-constanten* worden genoemd. Deze verhouden zich tot K en G en tot E en ν op de volgende wijze

$$\left. \begin{aligned}\lambda &= K - \frac{2}{3}G = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ \mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)}\end{aligned}\right\} \quad (5.25)$$

De grootheid μ is dezelfde als G, maar het is gebruikelijk μ te hanteren als ook met λ wordt gewerkt.

5.3.3 Verplaatsingsmethode in de Lamé-beschrijving

In paragraaf 5.2 is aangegeven dat de verplaatsingsmethode voor driedimensionale problemen neerkomt op het oplossen van drie simultane partiële differentiaalvergelijkingen in (5.9) in u_x, u_y en u_z .

Deze drie differentiaalvergelijkingen laten zich zeer bondig formuleren als de Wet van Hooke in de Lamé -constanten λ en μ wordt gebruikt.

De drie stelsel basisvergelijkingen zijn nu:

Kinematisch

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= u_{x,x} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}(u_{y,z} + u_{z,y}) \\ \varepsilon_{yy} &= u_{y,y} & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}(u_{z,x} + u_{x,z}) \\ \varepsilon_{zz} &= u_{z,z} & \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(u_{x,y} + u_{y,x})\end{aligned}$$

Constitutief

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} & \sigma_{zx} &= 2\mu \varepsilon_{zx} \\ \sigma_{yy} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} & \sigma_{zy} &= 2\mu \varepsilon_{zy} \\ \sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} & \sigma_{xy} &= 2\mu \varepsilon_{xy}\end{aligned}$$

Evenwicht

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \sigma_{yx,y} + \sigma_{zx,z} + P_x &= 0 \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{zy,z} + P_y &= 0 \\ \sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} + \sigma_{zz,z} + P_z &= 0\end{aligned}$$



Door neerwaartse substitutie gaan de drie evenwichtsvergelijkingen over in de zogenaamde vergelijkingen van Navier:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)e_x + \mu \nabla^2 u_x + P_x &= 0 \\ (\lambda + \mu)e_y + \mu \nabla^2 u_y + P_y &= 0 \\ (\lambda + \mu)e_z + \mu \nabla^2 u_z + P_z &= 0\end{aligned}$$

Vergelijkingen van Navier

(5.26)

Hierin is de volumerek e een functie van de verplaatsingen en ∇^2 is de Laplace-operator voor drie dimensies

$$\begin{aligned}e &= u_{x,x} + u_{y,y} + u_{z,z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Gebruik van tensornotaties

De voordelen van de kern-index-notatie komen nog meer tot hun recht als ook van de zogenaamde sommatie-conventie gebruik gemaakt wordt. Daartoe worden om te beginnen de coördinaatassen niet langer x, y, z genoemd, maar x_1, x_2, x_3 . De verplaatsingscomponenten zijn dan u_1, u_2, u_3 . De spanningscomponenten zijn σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) en de vervormingcomponenten zijn ε_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$).

De notatie voor partiële differentiatie is

$$a_{,i} = \frac{\partial a}{\partial x_i}$$

De sommatie-conventie van Einstein bepaalt, dat als in een uitdrukking één index tweemaal voorkomt, over deze index gesommeerd dient te worden van 1 tot 3

$$a_{ii} = \sum_{i=1}^3 a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Een nuttige grootheid is nog de zogenaamde Kronecker delta, gedefinieerd door

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{als } i = j \\ 0, & \text{als } i \neq j \end{cases}$$

De drie stelsels basisvergelijkingen luiden nu

kinematisch	$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$	$(i, j = 1, 2, 3)$
constitutief	$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$	$(i, j = 1, 2, 3)$
evenwicht	$\sigma_{ij,i} + P_i = 0$	$(j = 1, 2, 3)$

Neerwaartse substitutie geeft weer de vergelijkingen van Navier,

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + P_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

De randvoorwaarden zijn

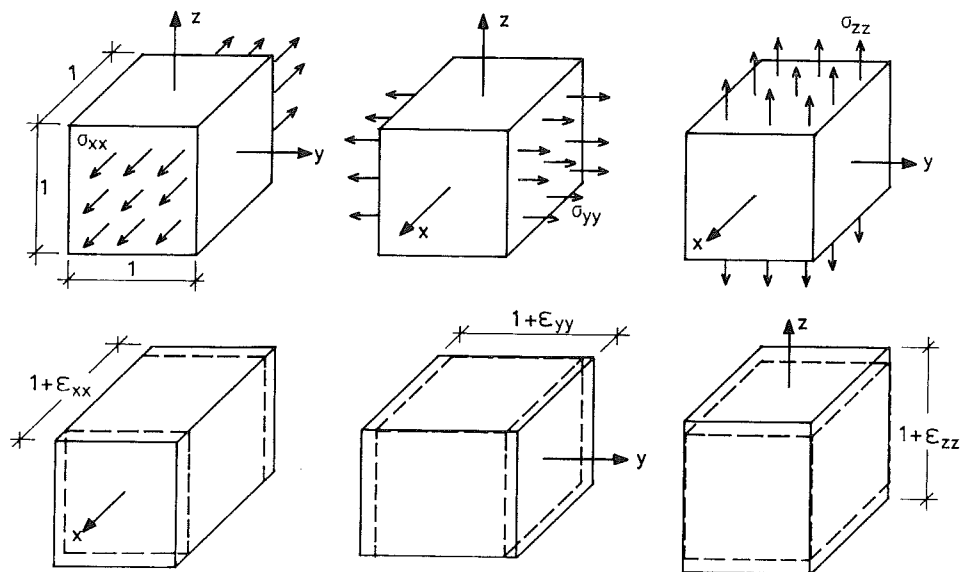
op S_p :	$u_i = u_i^0$	$(i = 1, 2, 3)$
op S_o :	$\sigma_{ij} e_i = p_j$	$(j = 1, 2, 3)$

Het voordeel van deze notatie is dat men een heel stelsel vergelijkingen kan samenvatten in eenvoudige vorm. Substitutie van vergelijkingen in elkaar is zonder meer mogelijk. In de literatuur wordt van deze tensornotatie intensief gebruik gemaakt.

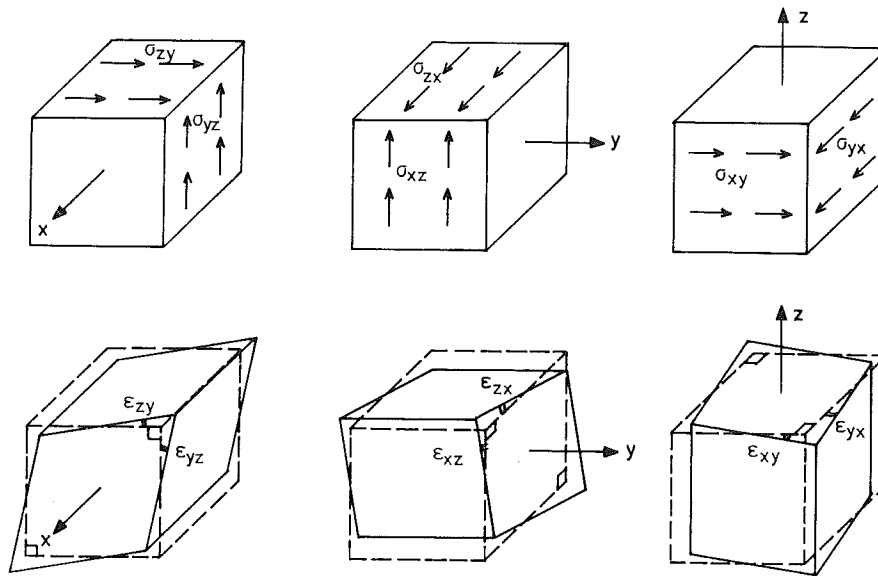
1. SPANNINGEN, REKKEN EN ELASTICITEIT

1.1 Spanningen en rekken

In een ruimtelijk continuüm kan men de spanningsvectoren op drie vlakjes loodrecht op de cartesische coördinaatassen x, y, z elk ontbinden in drie componenten in de drie coördinaatrichtingen. Zo ontstaan negen grootheden, aan te duiden als $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ (werkend op het vlakje loodrecht op de x -as), $\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz}$ (werkend op het vlakje loodrecht op de y -as) en σ_{zx}, σ_{zy} en σ_{zz} (werkend op het vlakje loodrecht op de z -as). Men ziet dat de eerste index van de zogenaamde spanningscomponenten (vaak kortweg spanningen genoemd) de richting van de normaal op het vlakje aangeeft, en de tweede index de richting van de component van de spanningsvector. We noemen de spanningscomponent een normaalspanning als de twee indices gelijk zijn ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$). Als de indices ongelijk zijn, spreken we van een schuifspanning ($\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$). De tekenafspraken is: een spanningscomponent is positief indien werkend in positieve coördinaatrichting op een vlakje met de normaalvector in positieve coördinaatrichting, of indien werkend in negatieve coördinaatrichting op een vlakje met de normaal in negatieve coördinaatrichting. Met de gedefinieerde inwendige spanningscomponenten corresponderen inwendige vervormingscomponenten, te weten specifieke rekken door de normaalspanningen en veranderingen van de rechte hoek door schuifspanningen.



Normaalspanningen en daarmee corresponderende rekken in een driedimensionaal continuüm, alle getekend als ze positief zijn.



Schuifspanningen en daarmee corresponderende rekken in een driedimensionaal continuum, alle getekend als ze positief zijn.

De specifieke rekken ten gevolge van de normaalspanningen worden respectievelijk ϵ_{xx} , ϵ_{yy} en ϵ_{zz} genoemd. De schuifvervormingen bestaan uit drie paren van gelijke hoekveranderingen $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$, $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}$, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$. In plaats hiervan wordt vaak gewerkt met de totale afschuifvervormingen $\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz}$, $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx}$, $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$.

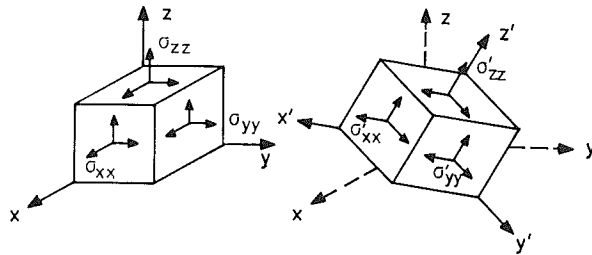
Transformatie van coördinaten

De spanningen en rekken zijn in het voorgaande gedefinieerd in het orthogonale rechtsdraaiende cartesische assenstelsel x , y , z .

Hieruit kan direct worden afgeleid welke spanningen σ'_{xx} , σ'_{yy} , σ'_{zz} , σ'_{yz} , σ'_{zx} , σ'_{xy} gelden in een overeenkomstig assenstelsel x' , y' , z' . Voor de coördinaten geldt

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

De matrix in het rechterlid noemen we $[T]$. De term β_{11} is de cosinus van de hoek die de x' -as maakt met de x -as, enzovoorts



$$\begin{bmatrix} \sigma'_{xx} \\ \sigma'_{yy} \\ \sigma'_{zz} \\ \sigma'_{yz} \\ \sigma'_{zx} \\ \sigma'_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}^2 & \beta_{12}^2 & \beta_{13}^2 & 2\beta_{12}\beta_{13} & 2\beta_{13}\beta_{11} & 2\beta_{11}\beta_{12} \\ \beta_{21}^2 & \beta_{22}^2 & \beta_{23}^2 & 2\beta_{22}\beta_{23} & 2\beta_{23}\beta_{21} & 2\beta_{21}\beta_{22} \\ \beta_{31}^2 & \beta_{32}^2 & \beta_{33}^2 & 2\beta_{32}\beta_{33} & 2\beta_{33}\beta_{31} & 2\beta_{31}\beta_{32} \\ \beta_{21}\beta_{31} & \beta_{22}\beta_{32} & \beta_{23}\beta_{33} & \beta_{22}\beta_{33} + \beta_{23}\beta_{32} & \beta_{23}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{33} & \beta_{21}\beta_{32} + \beta_{22}\beta_{31} \\ \beta_{31}\beta_{11} & \beta_{32}\beta_{12} & \beta_{33}\beta_{13} & \beta_{32}\beta_{13} + \beta_{33}\beta_{12} & \beta_{33}\beta_{11} + \beta_{31}\beta_{13} & \beta_{31}\beta_{12} + \beta_{32}\beta_{11} \\ \beta_{11}\beta_{21} & \beta_{12}\beta_{22} & \beta_{13}\beta_{23} & \beta_{12}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{22} & \beta_{13}\beta_{21} + \beta_{11}\beta_{23} & \beta_{11}\beta_{22} + \beta_{12}\beta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}$$

De transformatiematrix in het rechterlid duiden we aan met $[T_\sigma]$.

Isotrope spanning en deviatorspanningen

In veel situaties biedt het voordeel de spanningen en de rekken nog op een andere wijze te bezien.

We definiëren de isotrope spanning σ_o :

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

en geven aan het resterende deel van de spanningen de naam deviatorspanningen:

$$\begin{aligned}s_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_o \\ s_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_o \\ s_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_o\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{yz} &= \sigma_{yz} \\ s_{zx} &= \sigma_{zx} \\ s_{xy} &= \sigma_{xy}\end{aligned}$$

Voor isotrope spanning wordt ook wel bolspanning gezegd. Het is de gemiddelde waarde van de drie normaalspanningen.

Op overeenkomende wijze worden in de rekken twee componenten onderscheiden. We definiëren de isotrope rek ϵ_o als:

$$\epsilon_o = \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz})$$

en geven aan het resterende deel van de rekken de naam deviatorrekken:

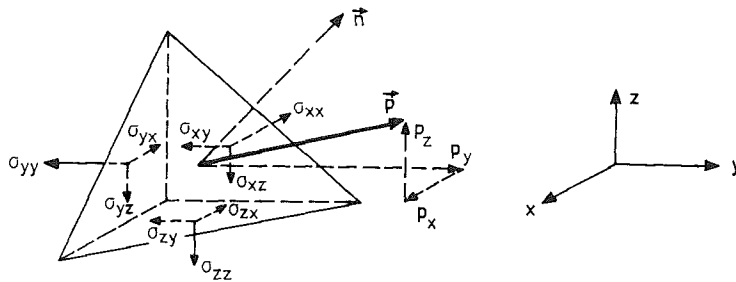
$$\begin{aligned}e_{xx} &= \epsilon_{xx} - \epsilon_o \\ e_{yy} &= \epsilon_{yy} - \epsilon_o \\ e_{zz} &= \epsilon_{zz} - \epsilon_o \\ e_{yz} &= \epsilon_{yz} \\ e_{zx} &= \epsilon_{zx} \\ e_{xy} &= \epsilon_{xy}\end{aligned}$$

De isotrope rek is een maat voor de volumeverandering van het materiaal. Deze is immers

$$e = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

Dus ϵ_o is eenderde van de volumeverandering. Door de gekozen definitie is de som van de deviatorrekken e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} juist nul. We hebben de totale vervormingen dus gesplitst in een deel dat de volumeverandering bewerkstelligt en een deel dat volumebestendig is. Dit deel is verantwoordelijk voor de gedaanteverandering.

Hoofdspansingen en Invarianten



We beschouwen een vlak waarvan de normaal $\vec{n}$ in het x, y, z assenstelsel is gedefinieerd door:

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Omdat de lengte van de normaal gelijk aan de eenheid van lengte wordt gekozen, geldt:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

De oppervlakte van het beschouwde driehoekvlak kiezen we ook gelijk aan één. Dan is de krachtenvector $\vec{p}$ de resultante van de normaal- en schuifspanningen in het vlak.

Voor de drie componenten p_x, p_y, p_z van $\vec{p}$ geldt dan

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

We kunnen nu onderzoeken of er richtingen zijn waarin $\vec{p}$ samenvalt met $\vec{n}$. In dat geval werkt op het vlak alleen een normaalspanning. De schuifspanningen zijn dan nul. In dit bijzondere geval geldt dus ook

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Hierin is σ de grootte van de normaalspanning. Door de twee relaties tussen $\vec{p}$ en $\vec{n}$ met elkaar te vergelijken vinden we de volgende conditie:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In het algemeen hebben n_x , n_y en n_z waarden ongelijk nul. Dus moet de determinant van deze homogene vergelijkingen nul zijn. Deze eis resulteert in een derdegraadsvergelijking voor σ .

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

waarin

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

De derdegraadsvergelijking in σ heeft drie oplossingen σ_1 , σ_2 en σ_3 . We noemen dit de hoofdspanningen. De richting $\vec{n}$ van elk van deze hoofdspanningen kan men berekenen door de eigenvectoren van het homogene stelsel te bepalen.

De waarde en de richting van de drie hoofdspanningen σ_1 , σ_2 , σ_3 zijn onafhankelijk van de keuze die men maakt voor het assenstelsel x , y , z . Men moet dus dezelfde derdegraadsvergelijking krijgen bij een rotatie van het assenkruis. Dat betekent dat I_1 , I_2 en I_3 invarianten zijn. Je mag ze dus uitrekenen in de spanningen van elk assenstelsel x' , y' , z' . Als we hiervoor de hoofdspanningsrichtingen kiezen, vinden we

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

We kunnen dezelfde werkwijze ook toepassen op de deviatorspanningen. Ook daarvoor zijn hoofdspansingen s_1, s_2, s_3 te berekenen met bijbehorende richtingen. Voor deze hoofdspansingen geldt:

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

Hierin is:

$$J_1 = I_1 - 3\sigma_o$$

$$J_2 = 3\sigma_o^2 - I_2$$

$$J_3 = I_3 - I_2 \sigma_o + 2\sigma_o^3$$

Omdat $\sigma_o = \frac{1}{3} I_1$ kunnen we ook schrijven

$$J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2$$

$$J_3 = I_3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + \frac{2}{27} I_1^3$$

Er wordt op geattendeerd dat het teken van J_2 in de derdegraadsvergelijking voor de deviatorspanningen anders is gekozen als dat voor I_2 in de derdegraadsvergelijking voor de totale spanningen. Daardoor wordt J_2 zelf een positieve invariant.

Voor J_2 kan men in de literatuur verschillende formules aantreffen. Zo kan men J_2 herleiden tot de gedaante

$$J_2 = \frac{1}{6} \{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2\} + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xy}^2$$

Of in hoofdspansingen:

$$J_2 = \frac{1}{6} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}$$

Isotrope spanning en deviatorspanningen in de hoofdspansingsruimte

Laat in een punt van het materiaal de spanningstoestand weergegeven worden door de drie hoofdspansingen σ_1, σ_2 en σ_3 . In het algemeen zijn deze niet aan elkaar gelijk.

In de hoofdspanningsruimte geeft de ruimtediagonaal de spanningstoestanden weer waarvoor geldt $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. De vectorvoorstelling van de ruimtediagonaal is $\lambda(1,1,1)$.

Vlakken loodrecht op de hoofddiagonaal hebben als vergelijking

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = c.$$

Als de constante c nul is, gaat het vlak door de oorsprong. Dit bijzondere geval noemt men het π -vlak: $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$.

We kunnen een punt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ buiten de ruimtediagonaal projecteren op het π -vlak. De projectie is het punt $\sigma_1 - a, \sigma_2 - a, \sigma_3 - a$ want er is sprake van een translatie evenwijdig aan de ruimtediagonaal. In het π -vlak geldt

$$(\sigma_1 - a) + (\sigma_2 - a) + (\sigma_3 - a) = 0$$

zodat voor a wordt gevonden

$$a = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

We zien dat a juist de isotrope spanning σ_0 is. En de projectie in het π -vlak $\sigma_1 - \sigma_0, \sigma_2 - \sigma_0, \sigma_3 - \sigma_0$ geeft de deviatorhoofdspanningen weer. De afstand van de projectie tot de oorsprong noemen we r . Deze kan worden berekend (Pythagoras) uit:

$$r^2 = (\sigma_1 - \sigma_0)^2 + (\sigma_2 - \sigma_0)^2 + (\sigma_3 - \sigma_0)^2$$

waarin

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

De in het π -vlak gemeten afstand r van de projectie tot de oorsprong ligt dus vast met de deviatorspanningen. Als we de waarde voor σ_0 substitueren kunnen we de uitdrukking voor r^2 herleiden tot de vorm

$$r^2 = \frac{1}{3}\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}$$

We hebben hiermee een interpretatie gevonden voor de spanningsinvarianten I_1 en J_2 . kennelijk is I_1 een maat voor de afstand $\sqrt{3}\sigma_0$ in de hoofdspanningsruimte van een punt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ tot het π -vlak, want er geldt $I_1 = 3\sigma_0$. En J_2 is een maat voor de afstand van de projectie in het π -vlak tot de oorsprong want r^2 is behoudens een factor 2 gelijk aan J_2 .

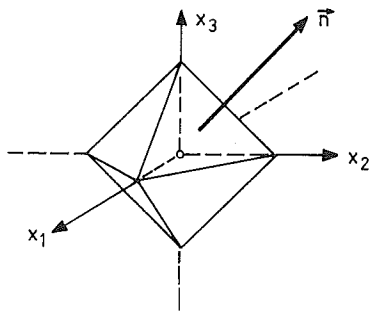
Octaedervlak

We zullen nog een andere interpretatie van de invarianten bespreken.

Bij het bepalen van de hoofdspansingen en de invarianten hebben we een vlak in het assenstelsel x, y, z beschouwd met een normaalrichting $\vec{n}$. We nemen een bijzonder geval van zo'n vlak nu onder de loep. De assen x, y, z vallen samen met de richting van de hoofdspansingen x_1, x_2 en x_3 en de normaal $\vec{n}$ maakt met elk van deze assen een evengrote hoek.

In dit bijzondere geval geldt:

$$n_x = n_y = n_z = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

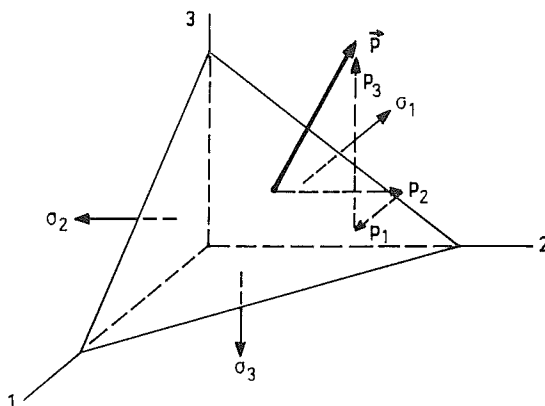


Zo'n vlak wordt een octaedervlak genoemd.

Er komen 8 van zulke vlakken voor, die samen een octaeder vormen.

Hier zullen we met name het octaedervlak beschouwen in het kwadrant waarin alle hoofdspansingen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ positief zijn.

Spanningen op het octaedervlak



De totale spanning $\vec{p}$ op het octaedervlak kan worden ontbonden in drie componenten p_1, p_2 en p_3 . Hiervoor geldt

$$p_1 = \sigma_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

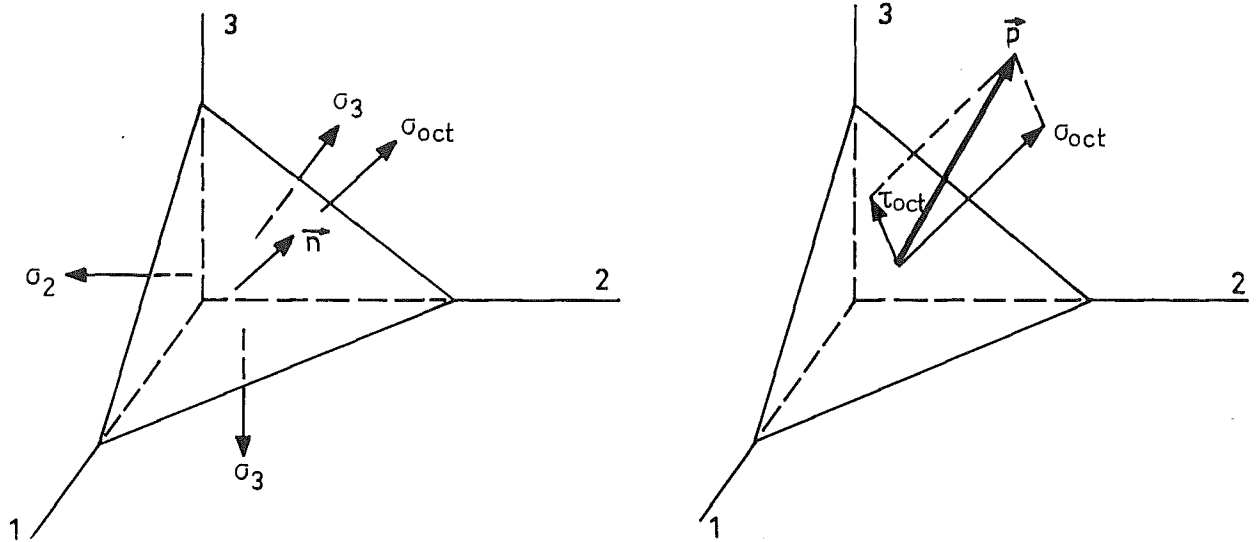
$$p_2 = \sigma_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p_3 = \sigma_3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

zodat

$$p^2 = \frac{1}{3}\sigma_1^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 + \frac{1}{3}\sigma_3^2$$

We kunnen $\vec{p}$ ook ontbinden in een component σ_{oct} loodrecht op het octaedervlak en een component τ_{oct} evenwijdig aan het octaedervlak. De schuifspanning τ_{oct} is de resultante van de schuifspanningen in dat vlak.



Door σ_1 , σ_2 en σ_3 te ontbinden in de richting $\vec{n}$ vinden we

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sigma_1 + \frac{1}{3}\sigma_2 + \frac{1}{3}\sigma_3$$

We kennen nu de lengte van $\vec{p}$ en de grootte van σ_{oct} . Dus volgt voor τ_{oct} :

$$\tau_{\text{oct}}^2 = p^2 - \sigma_{\text{oct}}^2$$

Dit laat zich uitwerken tot de vorm

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{9}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{9}(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \frac{1}{9}(\sigma_3 - \sigma_1)^2$$

Het blijkt dat enkele interessante conclusies kunnen worden getrokken. De octaedernormalspanning σ_{oct} is het gemiddelde van de hoofdspansingen. We hebben daarmee opnieuw een interpretatie van de invariant I_1 gevonden. Het is een maat voor de octaedernormalspanning. Evenzo is de octaederschuifspanning gerelateerd aan de invariant J_2 . De relaties zijn

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3} I_1$$

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{2}{3} J_2$$

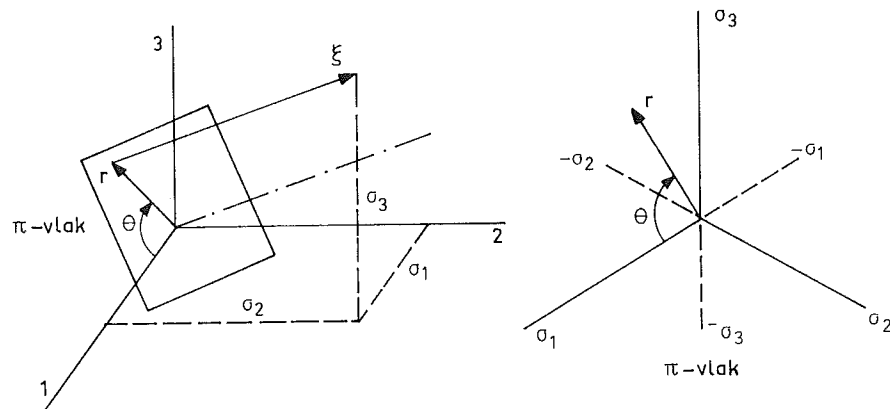
Representatie van spanningspunt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

De twee gegeven interpretaties van I_1 en J_2 maken het mogelijk een punt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ in de ruimte van hoofdspansingen ook te beschrijven in cylinder-coördinaten ξ , r en θ , waarbij θ de hoek is tussen de projectie van de σ_1 -as op het π -vlak en de straal r .

$$\xi = I_1 / \sqrt{3} = \sigma_{\text{oct}} \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{2 J_2} = \tau_{\text{oct}} \sqrt{3}$$

$$\cos 3\theta = \sqrt{2} J_3 / \tau_{\text{oct}}^3$$



Rekken

Op overeenkomstige wijze als is gedaan voor de spanningen kan men ook de rekken beschouwen. Ook daarvoor kunnen drie hoofdrichtingen worden afgeleid met rekken ϵ_1 , ϵ_2 en ϵ_3 . Voor isotrope homogene materialen vallen deze samen met de hoofdrichtingen voor de spanningen (co-axialiteit). Ook in de hoofdrekkenruimte hebben de ruimtediagonaal en de vlakken loodrecht daarop betekenis. Voor zulke vlakken geldt de vergelijking

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - 3b = 0$$

Hierin is $b/3$ de langs de ruimtediagonaal gemeten afstand tot de oorsprong. Nu is b juist de eerder ingevoerde gemiddelde isotrope rek ϵ_0 . In een vlak voor een gegeven b leidt elke combinatie van hoofdrekken tot de zelfde volumewijziging, want de som van de drie hoofdrekken is constant. Voor $b = 0$ hebben we een bijzonder geval. Dat is het vlak door de oorsprong. Als we de ruimte voor de hoofdspansingen en de ruimte voor de hoofdrekken in hetzelfde assenstelsel tekenen, valt het vlak met $b = 0$ samen met het π -vlak.

Met de deviatorcomponent van de spanningen gaat geen volumeverandering gepaard! Deze constatering is geldig voor lineair-elastische materialen. Maar zoals we hierna nog zullen zien, kunnen rekken ook veroorzaakt worden door plasticiteit. Iedere rekcomponent of verandering van rek die gericht is volgens een deviatorvlak geeft ook dan een volumebestendige vervorming weer. Er treedt dan alleen gedaanteverandering op.

Evenzo leiden rekcomponenten of veranderingen van rek in de richting van de ruimtediagonaal tot een verandering van het volume, zonder de gedaante te veranderen.

1.2 Elastisch gedrag van materiaal

Het lineair-elastisch gedrag van homogene isotrope materialen wordt beschreven met de wet van Hooke. In zijn flexibiliteitsvorm luidt het verband tussen de rekken en de spanningen dan

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ & & & & 2(1+\nu) & 0 \\ & & \text{symmetrisch} & & & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2-1)$$