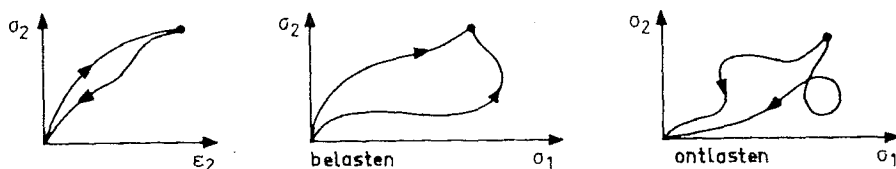


3.2 Methoden voor niet-lineair gedrag

We sluiten dit hoofdstuk af met een kort overzicht van de verschillende methoden die zijn voorgesteld voor het beschrijven van materiaalgedrag dat niet voldoet aan de voorwaarden voor lineair-elastisch gedrag.

- 1) De eerste mogelijkheid is dat het materiaal wel elastisch blijft, maar niet lineair is. De relatie tussen de spanningen en de rekken is eenduidig, in die zin dat hij hetzelfde is voor belasten en ontlasten. Het doet er ook niet toe welk belastingspad wordt gevolgd om een bepaalde spanningstoestand te realiseren, en bij volledig ontlasten zullen alle spanningen en rekken weer nul worden. In onderstaande figuur is dit in een tweedimensionale hoofdspanningsruimte visueel voorgesteld.

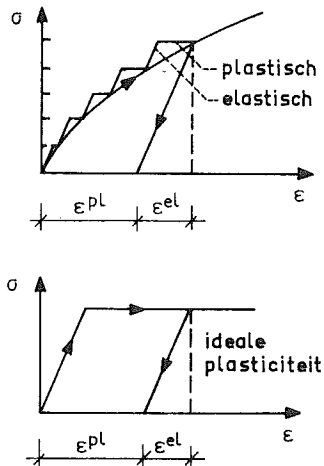


Truesdell heeft aan dit type materiaalgedrag veel aandacht besteed. In dit geval is het zinvoller de constitutieve eigenschappen uit te drukken in de toename van spanningen en rekken, de zogenaamde incrementen. De stijfheidsmatrix $[S_\epsilon]$ wordt dan vervangen door de tangentstijfheidsmatrix $[S_\epsilon^t]$. Een bijzonder geval is dat deze eenduidig vastligt door de momentaan optredende spanningen

$$\{d\sigma\} = [S_\epsilon^t(\sigma)] \{d\epsilon\}$$

Men spreekt dan over 'hypo-elastisch' materiaalgedrag.

- 2) Een ander type materiaal-gedrag is plasticiteit. Hierin wordt duidelijk onderscheid gemaakt tussen belasten en onbelasten. Bij belasten ontstaat, net als bij hypo-elastische materialen, een niet-lineair verband tussen de rekken en de spanningen. De rekken worden nu samengesteld gedacht uit een lineair-elastisch deel en een plastisch deel. Bij ontlasten wordt het lineair-elastisch deel van de vervormingen ongedaan gemaakt, maar het plastische deel is een blijvende vervorming.



Een kromlijinig verband tussen σ en ϵ kan men opgebouwd denken uit lineair-elastische stapjes en plastische stapjes.

Een bijzonder geval is wat men noemt 'ideale plasticiteit'. Het materiaal blijft dan lineair-elastisch tot een zekere grens.

Bij voortgaand belasten treden alleen plastische rekken op.

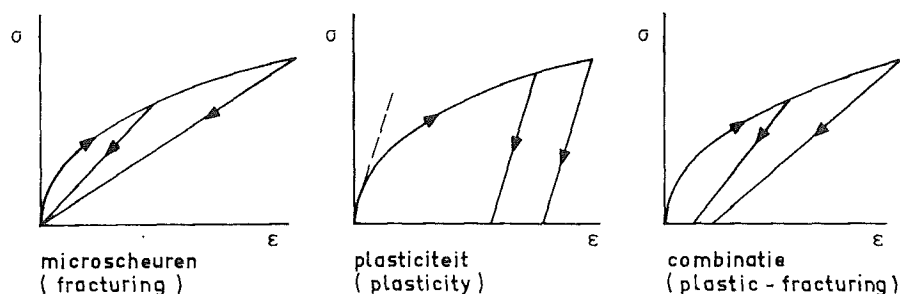
In de plasticiteitstheorie treft men twee 'scholen' aan, die van de 'totale rek' en die van de 'incrementele rek'. In de engelstalige literatuur noemt men ze respectie-

velijk de 'deformation theory' en de 'flow theory'. Het verschil treedt alleen op in het stadium van belasten. In de deformation theory wordt een eenduidig verband gehanteerd tussen de totale rekken en de spanningen, op een wijze als gebeurt voor hypo-elastische materialen.

In de flow theory wordt een verband gedefinieerd tussen de incrementen van spanningen en rekken. Hoe groot de totale rekken worden hangt af van de voorgeschiedenis. In de incrementele rek methode is de uitkomst dus afhankelijk van het gevolgde belastingspad. Bij de totale rek methode is dat niet het geval. Alleen in het bijzondere geval dat de spanningen proportioneel toenemen (proportional loading) zullen de twee methoden tot hetzelfde resultaat leiden. In dit college zal de meeste aandacht worden besteed aan de meer algemene aanpak van de incrementele rek methode.

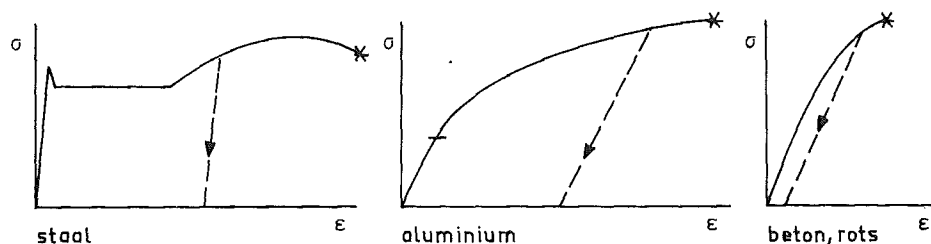
- 3) De in het voorgaande genoemde plasticiteit heeft als fysische achtergrond dat materiaalkristallen over en langs elkaar schuiven. Dit glijden is niet omkeerbaar (terugwinbaar), maar de samenhang tussen de kristallen gaat er niet door verloren. Daarom mag bij ontlasten, dus bij het opbrengen van een negatieve belasting, geheel gerekend worden op de aanwezigheid en het functioneren van het oorspronkelijke materiaal.

Er zijn materialen waar nog een ander fenomeen een rol speelt, met name als trekspanningen optreden. Er ontstaan dan microscheuren, of beter gezegd de altijd wel aanwezige imperfecties en microscheuren in het materiaal breiden zich uit. In het stadium van belasten zal men het verschil tussen plasticiteit en microscheurvorming niet direct (hoeven) merken. Door beide oorzaken ontstaat een kromlijinig verband tussen de spanningen en rekken. Maar bij het ontlasten wordt het verschil wel zichtbaar. Als microscheurvorming (fracturing) heeft plaatsgevonden is de materiaalsamenhang verminderd en zal het gedrag bij ontlasten minder stijf zijn. Na algeheel ontlasten zullen de rekken weer nul geworden zijn. Het verschil met plasticiteit is in onderstaande figuur tot uitdrukking gebracht. Microscheurvorming en plasticiteit zijn beide ideaal-opvattingen van een materiaalgedrag. Sommige materialen worden het beste beschreven door een combinatie van de twee modellen. Beton is daarvan een voorbeeld.



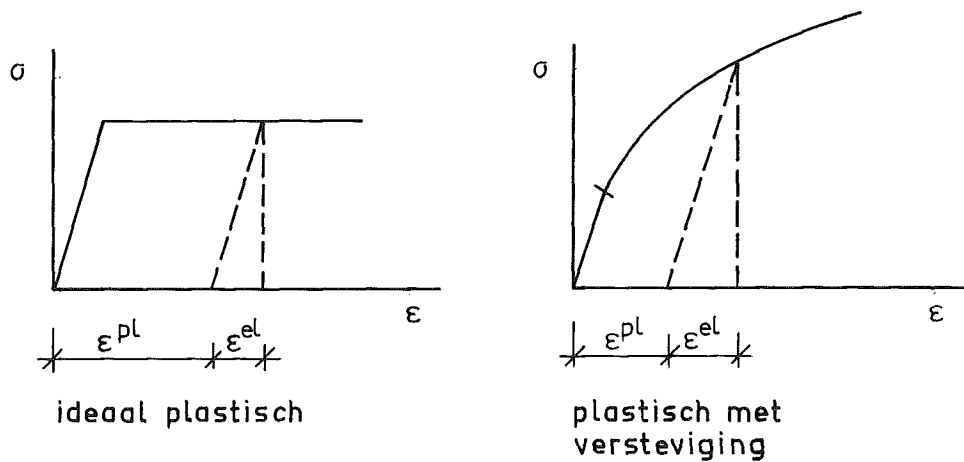
4. INLEIDING TOT PLASTICITEIT

In dit hoofdstuk wordt plasticiteit besproken zoals die zich manifesteert bij metalen. Als een één-assige trek- of drukproef wordt uitgevoerd kan afhankelijk van het gebruikte metaal een verschillend σ - ϵ diagram worden gevonden. In de onderstaande figuur zijn enkele mogelijkheden getoond en ter vergelijking is een trekproef voor beton of rots toegevoegd. De laatste vertoont bros gedrag (brittle) en de metalen taai gedrag (ductile).

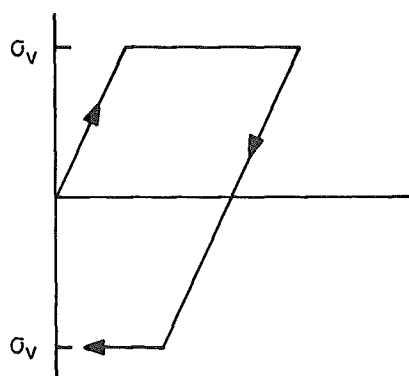


Gewoon constructiestaal begint elastisch en vloeit aanvankelijk instabiel. Bij een iets lagere waarde van de spanning ontstaat vervolgens een stabiel vloeiplateau. Voor zeer grote rekken kan de spanning weer toenemen. In dit gebied is sprake van versterking (hardening) van het materiaal. Bij een metaal als aluminium treedt het constante vloeiplateau niet op. Na een lineair-elastisch gedeelte is er direct sprake van een versterkingstak. Constructiestaal kan worden opgevat als een materiaal dat ideaal-plastisch is in de gevallen waarin wordt verwacht dat de versterkingstak bij grote rekken geen rol zal spelen. Bij aluminium kan dit strict genomen niet, hoewel men voor sommige praktische toepassingen met een vervangend σ - ϵ diagram voor ideale plasticiteit zou kunnen rekenen.

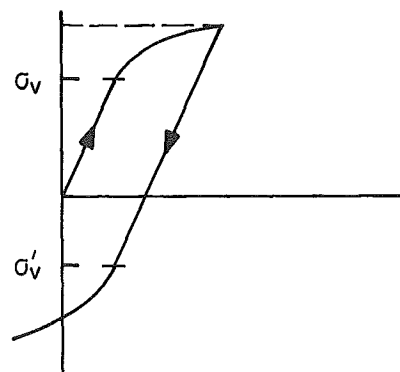
Zoals gezegd zijn metalen taai van gedrag. Er treden grote plastische vervormingen op. Uit proeven blijkt voorts dat de plasticiteit niet verandert als een alzijdige voorspanning wordt aangebracht. Dit is in ieder geval waar zolang deze voorspanning in de orde van grootte van de een-assige vloeispanning ligt. De hierboven getoonde σ - ϵ diagrammen veranderen dan niet. Bij gesteenten is dit anders. Het gedrag is betrekkelijk bros onder een één-assige spanning, maar dat wordt taai als een grote alzijdige voorspanning aanwezig is. In dit hoofdstuk beperken we ons tot taaie metalen waarvoor het gedrag ideaal-plastisch is, dan wel plastisch met versterking.



Eerder is reeds gesproken over belasten en ontlasten. Daarmee is bedoeld dat een belasting monotoon stijgend is aangebracht en dat deze belasting vervolgens weer geleidelijk is weggenomen. Als we daarna belasting in de tegengestelde richting aanbrengen, spreken we van wisselbelasting. Voor een ideaal-plastisch materiaal kunnen we doorgaan met belasten in de andere richting tot opnieuw de vloeispanning is bereikt. Deze is even groot als in de andere richting maar verschillend van teken (zie onderstaande figuur). Voor een plastisch materiaal met versterking ligt de zaak minder eenvoudig. Als eerst in de ene richting een spanning σ_v bereikt is (de momentane vloeispanning), blijkt het niet mogelijk deze in de andere richting te bereiken langs een lineair-elastische tak. Al veel eerder treden weer plastische rekken in de andere richting op bij een vloeispanning σ'_v die kleiner is dan σ_v . Dit wordt het Bauschinger-effect genoemd (naar J. Bauschinger, 1886). Een goede plasticiteitstheorie zal hiermee rekening moeten houden.



wisselbelasting
bij ideale plasticiteit

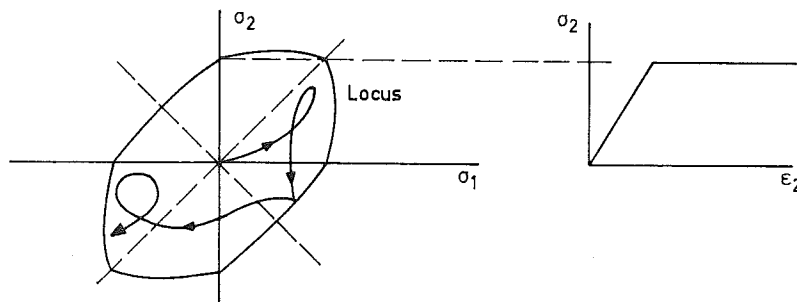


wisselbelasting bij plasticiteit
met versterking
(Bauschinger - effect)

Generalisatie voor twee en drie dimensies

Tot hier toe is in deze introductie gesproken over het gedrag onder één-assige spanningstoestanden. Het is de opgave voor een goede plasticiteits-theorie om van de verschijnselen een generalisatie te geven die beschrijft hoe een en ander verloopt voor twee- en drie-dimensionale spanningstoestanden. Zo'n algemene beschrijving moet de één-dimensionale toestand als bijzonder geval correct weergeven.

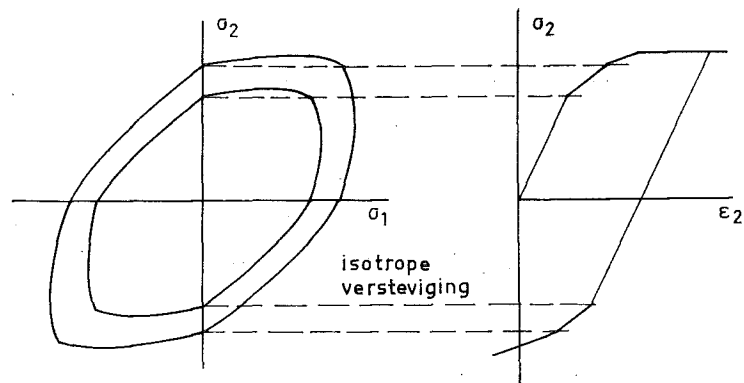
Om de gedachten te vormen zullen we dat twee-dimensionaal inleiden op de wijze zoals Calladine dat doet in zijn boek Engineering Plasticity. We beginnen met ideale plasticiteit. Zoals één-assig vloeit optreedt als de spanning een vloeiwaaarde σ_v bereikt zal bij een twee-assige spanningstoestand vloeit optreden als in de hoofdspanningsruimte σ_1, σ_2 een locus wordt bereikt. Deze locus wordt vloeifunctie of vloeivoorwaarde genoemd.



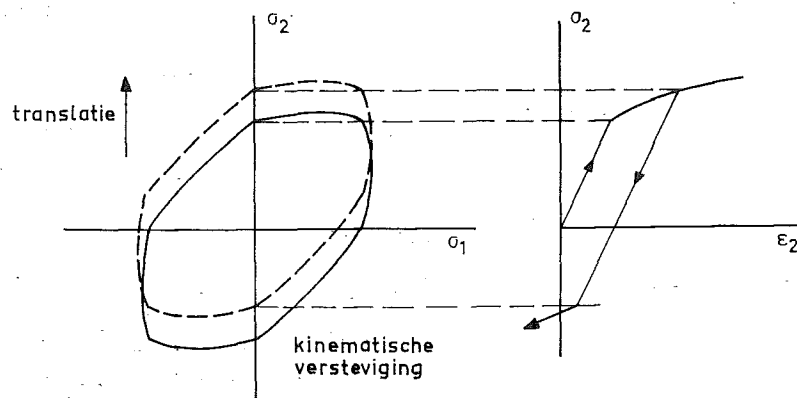
Vanwege de isotropie zal men geen bevoordeling van de richting σ_1 boven de richting σ_2 en omgekeerd mogen toestaan. Ook moet trek en druk gelijk behandeld worden. De lijnen onder 45 graden met de σ_1 -as en σ_2 -as zijn symmetrielijnen voor de locus. De juiste vorm van de locus volgt uit proeven. Zolang de belasting zodanig is dat de combinaties van σ_1 en σ_2 binnen de vloeifunctie blijven, is er sprake van lineariteit en onafhankelijkheid van het belastingspad. Zo gauw een combinatie van σ_1 en σ_2 wordt bereikt die op de vloeifunctie ligt, blijven de spanningen op die waarden, of het spanningspad loopt langs de vloeifunctie. Deze toestand valt onder de definitie van belasten (loading). Als de belasting zo verandert dat weer een spanningscombinatie σ_1, σ_2 ontstaat die binnen de vloeifunctie valt spreken we over ontlasten (unloading). Bij belasten met spanningen op de vloeivoorwaarde treden plastische rekken op. Zo gauw er sprake is van ontlasten is de groei van de plastische rekken nul en is er weer lineair-elastisch gedrag. Vanwege haar functie in het definiëren van belasting en ontlasting wordt de vloeifunctie ook wel de belastingsfunctie genoemd.

Zonder nu al in te gaan op mathematische details, kunnen we er ook reeds een indruk van geven hoe versterking twee-dimensionaal kan worden gemodelleerd. Een van de mogelijkheden is om de vloeifunctie als het ware te laten uitdijen.

Als hierbij geen van de richtigen σ_1 en σ_2 wordt bevoordeeld spreken we over isotrope versterking. Het zal duidelijk zijn dat zo'n versterkingsregel niet in staat is om het Bauschinger-effect te beschrijven. Dat wordt



snel ingezien als σ_1 nul gesteld wordt en een wisselbelasting langs de σ_2 -as wordt aangebracht. Om het Bauschinger-effect te modelleren in de twee-dimensionale hoofdspanningsruimte moet de vloeifunctie op de negatieve σ_2 -as in dezelfde richting opschuiven als op de positieve σ_2 -as. De eenvoudigste manier om dit te bereiken is het zuiver transleren van de vloeifunctie in het $\sigma_1 - \sigma_2$ vlak. Men spreekt dan over kinematische versterking.

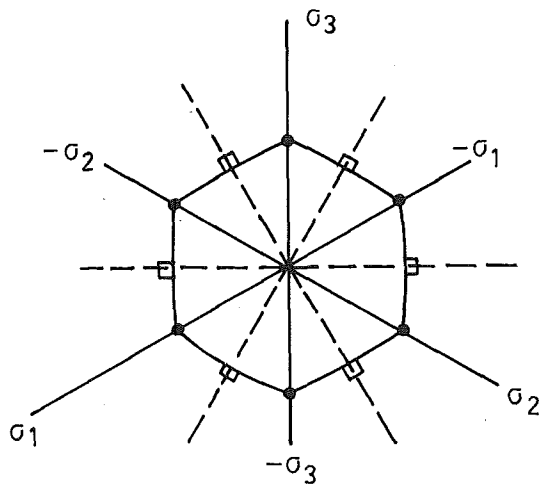


Uiteraard kan men ook mengvormen van isotrope en kinematische versteviging definieeren. En de translatie hoeft niet in de richting van de coördinaatassen van de hoofdspanningsruimte te zijn, maar moet in elke richting kunnen optreden.

We gaan nu weer terug naar het geval van ideale plasticiteit zonder versteviging, met de bedoeling om na te gaan hoe de vloeivoorwaarde voor driedimensionale spanningstoestanden er uit kan zien. Daarvoor maken we gebruik van de hoofdspanningsruimte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Stel dat het punt $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (a, b, c)$ op de locus ligt. Er is geen invloed op het optreden van vloeï als een alzijdige druk h wordt aan gebracht. Het punt $(a + h, b + h, c + h)$ ligt dus ook op de locus. Voor diverse waarden van h doorlopen we dan een lijn evenwijdig aan de ruimtediagonaal. Deze lijn snijdt het π -vlak in het punt waarvoor geldt:

$$(a + h) + (b + h) + (c + h) = 0 \quad \rightarrow \quad h = -\frac{1}{3}(a + b + c)$$

Op dezelfde wijze zijn er nog veel andere lijnen evenwijdig aan de ruimtediagonaal die het begin van vloeï aangeven. Al deze lijnen samen vormen een cylinderoppervlak om de ruimtediagonaal. Hiervan komt het dat men een vloeïfunctie ook wel een vloeïoppervlak noemt. De doorsnijding van de cylinder met het π -vlak wordt wel de C-curve genoemd. Deze doorsnede geldt voor elk deviatorvlak. Over de vorm van de C-curve kunnen we in het algemeen wel iets zeggen. Vanwege de onderstelde isotropie zullen de hoofdasen σ_1, σ_2 en σ_3 een zelfde rol moeten spelen. Ook is er geen verschil tussen de negatieve en de positieve richting van deze eenassige spanningstoestanden. In de onderstaande figuur zijn dit de punten die met een vette stip zijn aangegeven. De bisectrices van de hoek tussen een positieve hoofdspanning en de naastliggende negatieve hoofdspanning spelen ook een bijzondere rol. Dat zijn lijnen waarop toestanden van zuivere schuifspanning worden weergegeven, want de hoofdspanningen zijn dan van de vorm $(b, -b, 0)$. Meer algemeen, het zijn projecties op het π -vlak van toestanden van zuivere schuifspanning plus een willekeurige hydrostatische (of isotrope) spanning. De snijpunten van deze bisectrices (lijnen van symmetrie) met de C-curve zijn met open vierkantjes aangegeven. Aldus wordt een eerste indruk verkregen van de mogelijke doorsnedevormen van de cylindrische vloeïvoorwaarde.



C-curve, de doorsnede van de vloeivoorwaarde in het π -vlak.

Zes assen van symmetrie.

— éénassige normaalspanning

----- zuivere schuifspanning

Als we de cylinder om de ruimtediagonaal snijden met het vlak $\sigma_3=0$, krijgen we een locus als eerder is besproken in het σ_1 - σ_2 vlak. Voor ideale plasticiteit zijn die wijze van weergeven en het beschrijven van de vloeivoorwaarde in een deviatorvlak alternatieven, afhankelijk van persoonlijke voorkeur.

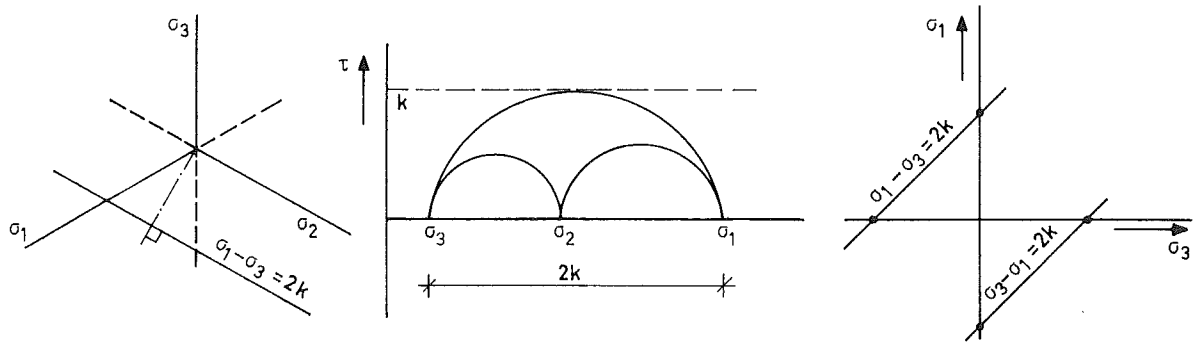
Het spreekt vanzelf dat versteviging ook in het deviatorvlak (π -vlak) kan worden gedefinieerd. Bij isotrope versteviging dijt de C-curve alzijdig uit en bij kinematische versteviging transleert hij in het deviatorvlak.

Vloeioppervlak van Tresca

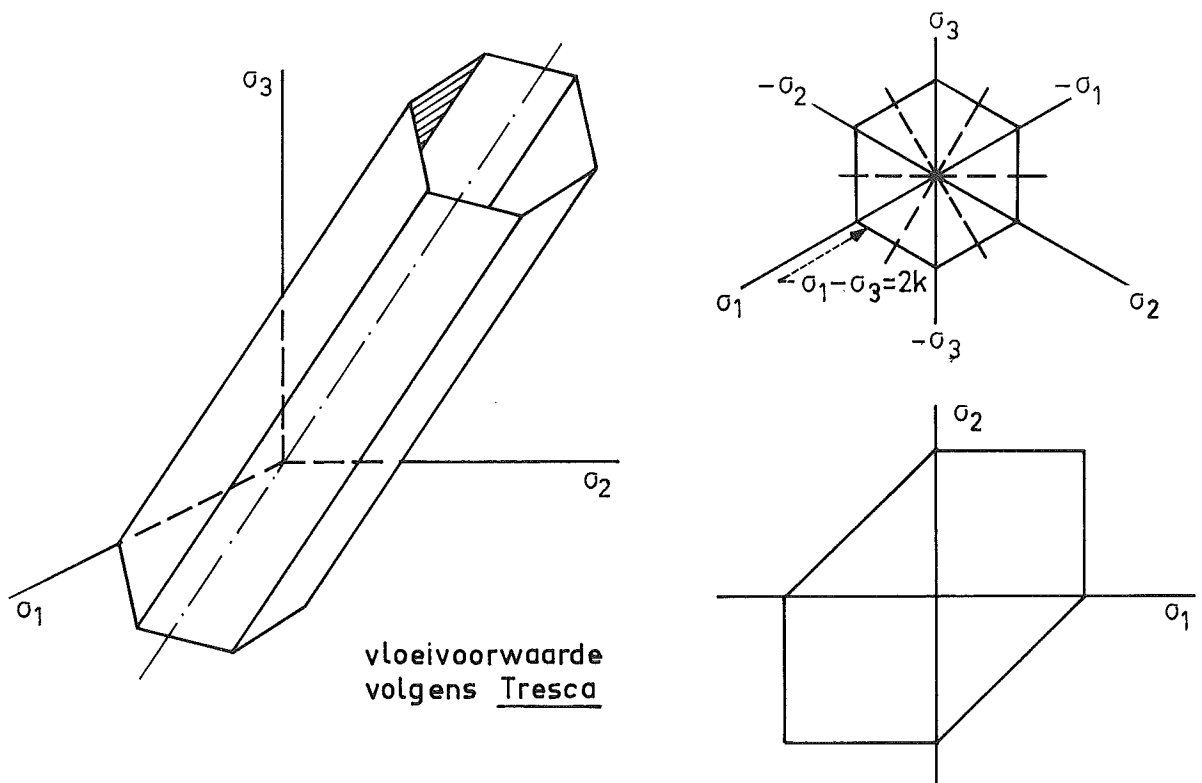
Het oudste vloeicriterium dateert reeds van 1864. Tresca onderstelde dat vloeï zal optreden als de grootste schuifspanning op enig vlak een limietwaarde bereikt, zeg k . Aannemend dat geldt $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ luidt dan de voorwaarde:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$$

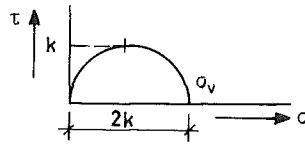
zoals snel uit de cirkels van Mohr voor deze spanningstoestand blijkt (zie volgende pagina).



In het π -vlak is de voorwaarde een rechte lijn die loodrecht staat op de bisectrice tussen de positieve σ_1 -as en de negatieve σ_3 -as. Zo zijn er nog vijf andere mogelijke volgordes voor de hoofdspansingen, die elk ook een rechte lijn geven. Het vloeioppervlak wordt dus een regelmatig hexagonaal prisma. In onderstaande figuur is dit prisma getekend, alsmede de representatie in het π -vlak en de twee-dimensionale representatie in het σ_1 - σ_2 vlak.



Gelet op de definitie van k is deze gelijk aan de plastische schuifvloei-spanning τ_v . Voor een één-assige trekproef is de vloeigrens $2k$. Daaruit volgt $k = \frac{1}{2}\sigma_v$ en dus geldt $\tau_v = \frac{1}{2}\sigma_v$.



De vloeivoorwaarde $\sigma_1 - \sigma_3 = 2k$ met de vijf andere mogelijkheden wordt wel genoteerd als

$$\max |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| = 2k$$

Een andere schrijfwijze is ook

$$F = \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4k^2\} \{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4k^2\} \{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4k^2\} = 0$$

De vloeifunctie kan geheel in deviatorspanningen worden uitgedrukt. Reuss heeft laten zien dat F kan worden omgewerkt tot

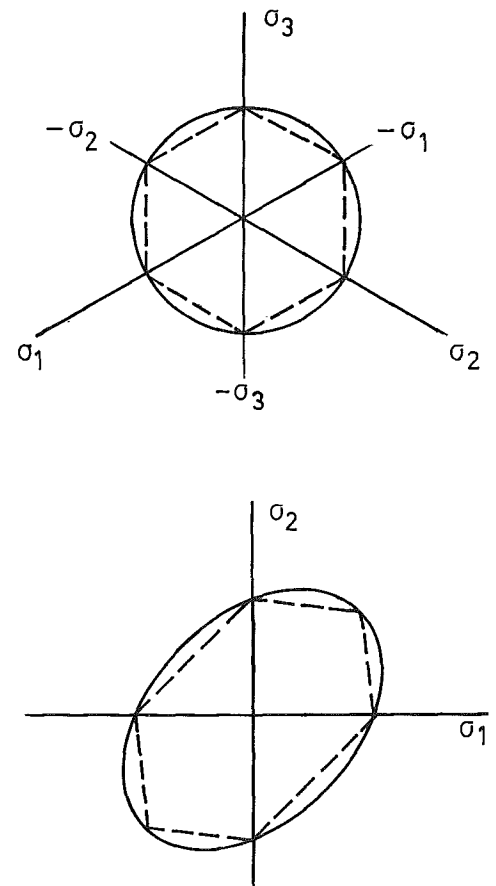
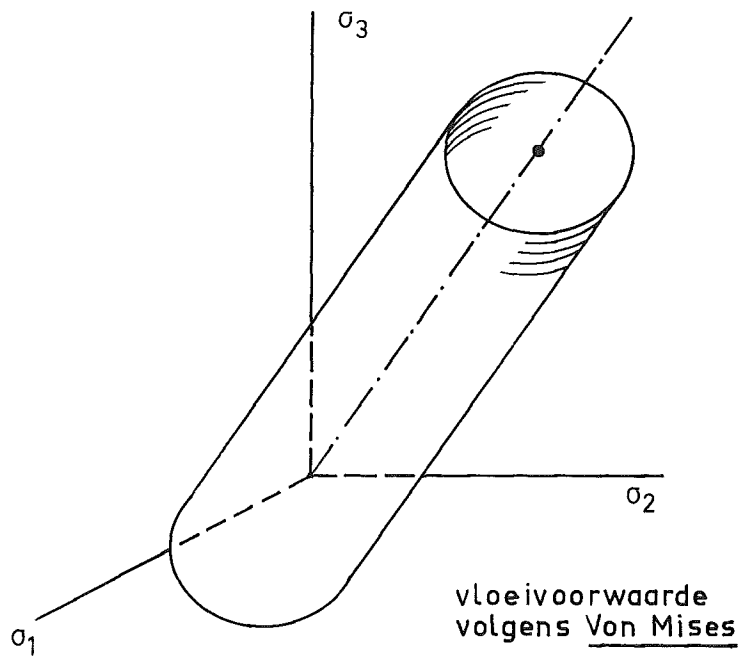
$$F = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0$$

In deze algemene vorm zijn de twee invarianten J_2 en J_3 gebruikt die de positie van een punt op het deviatorvlak van de hoofdspanningsruimte definiëren.

In de literatuur wordt niet alleen de naam van Tresca met het criterium van de maximale schuifspanning in verband gebracht. Ook de namen van Coulomb, Guest en Mohr zijn aan dit vloeicriterium verbonden.

Vloeioppervlak van Von Mises

Omstreeks 1912 heeft Von Mises een alternatief voorgesteld voor het vloeicriterium. In de driedimensionale hoofdspanningsruimte is dat criterium een cirkelcylinder in plaats van een prisma. Dan wordt de locus in het π -vlak een cirkel. Voor één-assige normaalspanningstoestanden wordt hetzelfde gedrag geëist als in het criterium van Tresca. Daarmee wordt dat criterium de ingeschreven veelhoek van de cirkel volgens Von Mises. In onderstaande figuur is het nieuwe criterium visueel voorgesteld.



De straal r van de cirkel in het π -vlak laat zich als volgt berekenen. Bij een één-assige normaalspanning is de vloeispanning σ_v . De hoofdspanssassen maken een hoek met het π -vlak waarvan de cosinus de waarde $1/\sqrt{3}$ heeft. Dus $r = \sigma_v/\sqrt{3}$. Deze straal is juist $\sqrt{3}$ maal de octaederschuifspanning, zodat voor de vloeivoorwaarde volgt

$$\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}^{\frac{1}{2}} = \sigma_v$$

Voor een zuivere schuifspanningstoestand is dan voor de schuifvloeispanning bij Von Mises af te leiden:

$$\tau_v = 0.58 \sigma_v$$

Bij Tresca is dat:

$$\tau_v = 0.50 \sigma_v$$

Het verschil is ongeveer 15%. Taylor en Quinney hebben proeven uitgevoerd op taaie materialen als aluminium, koper en zacht staal om na te gaan welk model het dichtst aansluit bij de realiteit. Zij vonden veruit de beste overeenkomst met het criterium van Von Mises.

Omdat we de octaederschuifspanning τ_{oct} kunnen uitdrukken in de hoofdspanningsverschillen (zie par. 1.1) is ook het vloeicriterium van Von Mises zo te schrijven. We krijgen dan

$$F = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_v^2 = 0$$

Vanwege de rechtstreekse relatie tussen τ_{oct} en J_2 kunnen we F ook met deze invariant definieren:

$$F = J_2 - k^2 = 0 \quad \text{of} \quad F = \sqrt{J_2} - k = 0$$

waarin k nu staat voor de plastische schuifspanning $\tau_v = \sigma_v/\sqrt{3}$.

In de literatuur is niet alleen de naam van Von Mises verbonden aan dit criterium. Ook Huber en Hencky worden in deze context genoemd, alsmede Nadai.

De verschillende manieren waarop het criterium van Von Mises kan worden genoteerd heeft in feite veel te maken met de (al dan niet) fysische interpretatie die men er aan geeft.

Von Mises heeft de vloeivoorwaarde geponeerd als een criterium voor de invariant J_2 . Later heeft Nadai de vloeivoorwaarde geïnterpreteerd als een criterium waaraan de octaederschuifspanning τ_{oct} moet voldoen. Van Huber en Hencky is weer een andere interpretatie ontvangen. Omdat J_2 een kwadratische uitdrukking in de spanningen is, kan men denken in termen van een interpretatie die te maken heeft met complementaire energie (vormveranderingsarbeid; in het engels: work). Per eenheid van volume is de totale energie:

$$E_c = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)$$

De energie die gepaard gaat met de isotrope spanning (dus met de volumeverandering) is:

$$E_{c,\text{vol}} = \frac{1 - 2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{18K} I_1^2$$

zodat voor de gedaanteveranderingsarbeid resulteert het verschil van E_c en $E_{c,\text{vol}}$. Dit noemen we $E_{c,\text{ged}}$

$$E_{c,\text{ged}} = \frac{1}{12G} \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\} = \frac{2}{G} J_2$$

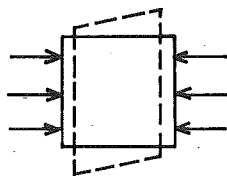
Behoudens een factor $\frac{1}{2}G$ is dit gelijk aan J_2 . Het stellen van een grens aan J_2 kan dus zo worden geïnterpreteerd dat vloeï optreedt als de gedaanteveranderingsarbeid een kritieke waarde bereikt.

Wijze van vloeien

Tot hier hebben we ons in deze introductie tot plasticiteit bezig gehouden met het spanningscriterium aan de hand waarvan wordt vastgesteld of het materiaal wel of niet vloeit. Voor dat criterium zijn, zoals we hebben gezien verschillende aanduidingen in omloop. Afwisselend wordt gesproken over vloeicriterium, vloeifunctie, vloeivoorwaarde en vloeioppervlak. Soms gebruikt men het begrip belastingfunctie.

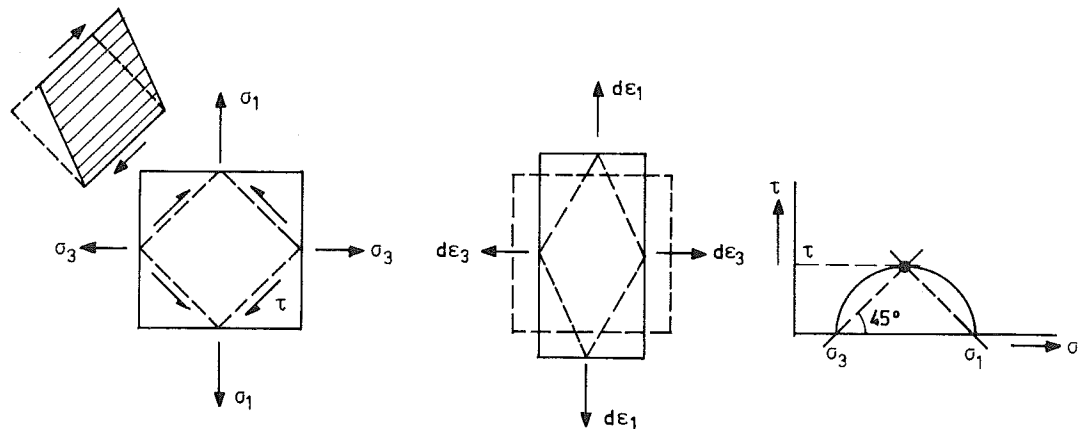
Nu gaan we er toe over om te onderzoeken welke plastische rekken verwacht kunnen worden. We gaan daarvoor weer terug naar het criterium van Tresca. In par. 2.2 hebben we al gezegd dat over de totale plastische rekken alleen een uitspraak kan worden gedaan als de voorgeschiedenis bekend is. In het algemeen kunnen we wel over de veranderingen spreken, de rekincrementen $d\{\epsilon\}$. Het blijkt zo te zijn dat de richting waarin de rekken zich ontwikkelen bij materialen als metalen niet wordt beïnvloed door de mate van verstevigen. Alleen de vorm van het vloeioppervlak speelt een rol.

In een isotroop materiaal verwachten we dat de hoofdrichtingen voor de spanningen en voor de rekincrementen samenvallen. Om een voorbeeld te noemen, het zou verbazing wekken als door een één-assige belasting afschuifvervorming zou optreden.



voorbeeld van
onlogische
plastische
vervorming

We nemen in gedachten een toestand op het vloeiooppervlak van Tresca waarvoor geldt $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. De maximale schuifspanning is dan $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$. Deze schuifspanning werkt in vlakken evenwijdig aan de hoofdspanningsrichting σ_2 (die niet voorkomt in het vloeicriterium) en het lijkt niet onredelijk te onderstellen dat die richting niet wordt betrokken bij de plastische vervorming, dus $d\epsilon_2 = 0$.



Het verantwoordelijk stellen van de schuifspanning τ voor het vloeien suggereert het plastisch afschuiven langs vlakken die een hoek van 45° maken met de richting van σ_1 en σ_3 . Bij kleine plastische incrementen geldt dan $d\epsilon_1 = -d\epsilon_3$ en $d\epsilon_1$ zal positief zijn omdat σ_1 groter is dan σ_3 . Voor de plastische incrementele rekken vinden we dus

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \text{met } \lambda \geq 0$$

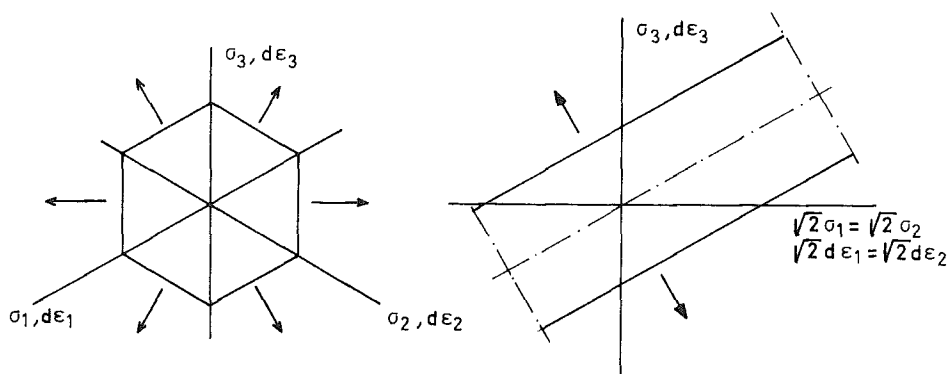
Dit is een volumebestendige vervorming want er is voldaan aan

$$d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$$

In de ruimte van de incrementen van de hoofdrekken is dit het vlak dat te vergelijken is met het π -vlak in de ruimte van de hoofdspanningen. Als $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ luidt het vloeicriterium van Tresca.

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0$$

De normaal op dit vlak heeft dezelfde richting als de incrementele rekvector! Hetzelfde kan worden aangetoond voor de andere vlakken in het prisma van Tresca. We hebben hiermee de vloeiregel of vloeiwet voor de plastische rekincrementen gevonden. Deze zijn gericht loodrecht op het vloeiooppervlak. Men noemt dit wel het normaliteitsprincipe.



normaliteit
van rekincrementen
en vloeiooppervlak

In bovenstaande figuur is in het rechterdeel een doorsnede getekend van het prisma van Tresca en het vlak door de ruimtediagonaal en de σ_3 -as. Dit wordt het hydrostatische vlak genoemd. Links in de figuur is de doorsnede met het π -vlak getoond, of meer algemeen met elk vlak loodrecht op de ruimtediagonaal. Al die vlakken worden een deviatorvlak genoemd.

In een hoek van de C-curve in het deviatorvlak is de richting van de incrementele rekvector onbepaald. In onderstaande figuur is dit getekend voor het snijpunt van de twee vlakken

$$\sigma_1 - \sigma_3 - 2k = 0$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 - 2k = 0$$

De richting van de plastische rekincrementen is voor deze vlakken respectievelijk

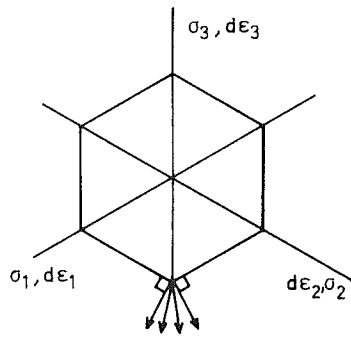
$$(d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3) = \lambda(1, 0, -1)$$

$$(d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3) = \mu(0, 1, -1)$$

Voor het snijpunt geldt dan

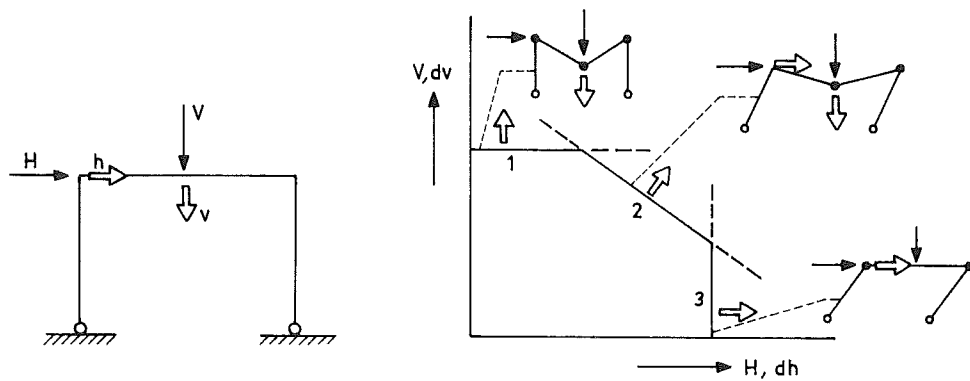
$$(d\epsilon_1, d\epsilon_2, d\epsilon_3) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1)$$

waarin λ en μ groter of gelijk aan nul zijn. Deze rekriching is onbepaald, maar blijft beperkt tot de in de figuur aangegeven sector.



In het Tresca-criterium is de richting van de plastische rekincrementen niet bepaald in de hoekpunten van de vloeivoorwaarde

Het normaliteitsbeginsel is in de voorgaande bespreking toegelicht voor de spanningsruimte en de ruimte van incrementele rekken. We kunnen het beginsel ook generaliseren en het bezien voor de belasting en de incrementen van de verplaatsingen voor een totale constructie. In onderstaande figuur is dat gedaan voor een portaal met twee belastingsparameters H en V en de daarmee corresponderende vrijheidsgraden h en v .

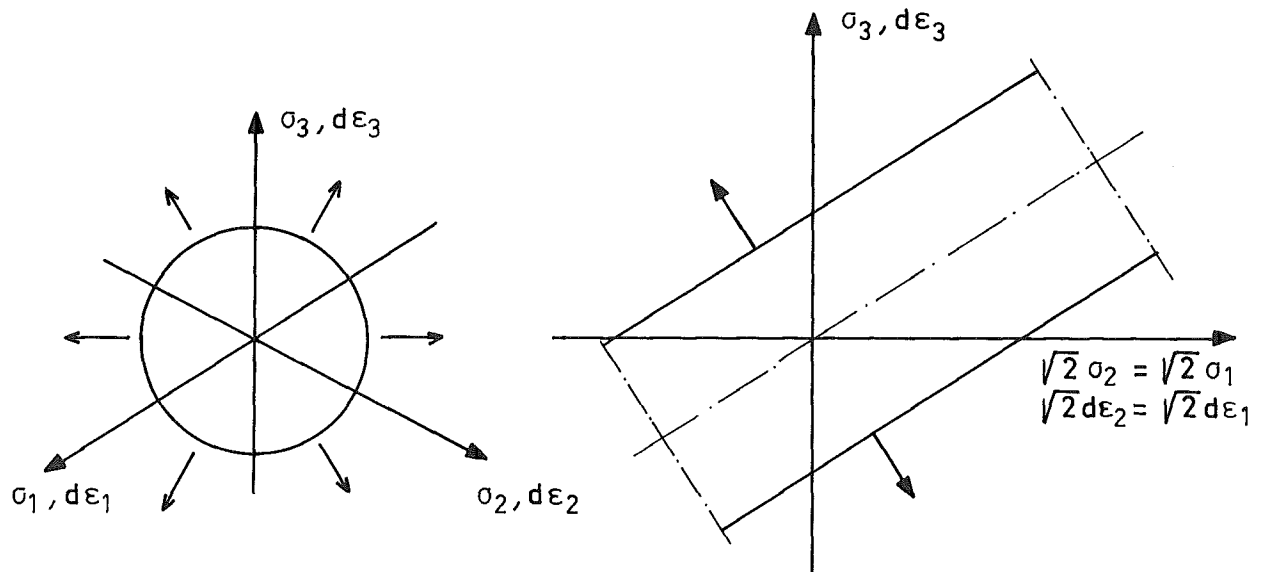


In de H-V ruimte wordt bezwijken van de constructie beschreven met drie takken 1, 2 en 3. Elke tak hoort bij een specifiek mechanisme met zijn eigen volplastische scharnieren. In het zelfde assenstelsel zijn de richtingen van de verplaatsingsincrementen du en dv aangegeven. Ook nu is de normaliteit kennelijk aanwezig.

Vloeiregels die voldoen aan het normaliteitsbeginsel heten in de literatuur geassocieerd (associated flow rule). Later zal nog blijken dat niet alle materialen hieraan voldoen. Er zijn soms niet-geassocieerde vloeiregels nodig om de plastische rekincrementen correct te beschrijven (non-associated flow rules).

Het Tresca vloeioppervlak is een plezierig en gemakkelijk te hanteren criterium voor ingenieurstoepassingen, maar wat de algemene geldigheid betreft is er wel op af te dingen. We hebben reeds gezien dat proeven het Von Mises criterium meer ondersteunen. Het is mathematisch een bezwaar dat de richting van de plastische rekincrementen niet éénduidig is in de hoeken van de vloeifunctie. Het komt fysisch ook niet zo waarschijnlijk voor dat twee zeer naburige spanningstoestanden (aan weerszijden van zo'n hoek) een abrupt verschil in vloeirichting zouden hebben. Als je het materiaal op microscopische schaal beschouwt is er geen reden om dat te verwachten. De kristallen in een polykristallijn materiaaldeel zijn op willekeurige wijze gericht en dan verwacht je dat ook van hun 'glijvlakken'. Plotselinge richtingsveranderingen van de plastische rekincrementen bij kleine spanningverandering zijn met die verwachting in strijd. Midden tussen twee hoeken kan het Tresca vloeicriterium wel goed zijn, maar in de omgeving van de hoeken niet.

In feite is deze overweging de achtergrond van het alternatieve criterium van Von Mises. Als je bij dat criterium normaliteit hanteert, is er een geleidelijke verandering van de richting van de plastische rekincrementen. En midden tussen twee hoekpunten van het Tresca criterium wordt bij het Von Mises criterium dezelfde richting gevonden. Dat zijn toestanden van zuivere schuifspanning. In alle andere situaties voorspellen de twee criteria verschillende plastische rekincrementen. Het is een groot voordeel van het Von Mises criterium dat de richting van deze rekken éénduidig is. Normaliteit betekent nu dat de vector van de plastische rekincrementen steeds loodrecht op het cirkelcilindrische vloeioppervlak staat.



De richting van de plastische rekincrementen valt nu samen met de richting van de deviatorspanning, zodat we kunnen schrijven

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_1 \\ d\epsilon_2 \\ d\epsilon_3 \end{Bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{Bmatrix} \quad \text{met } \lambda \geq 0$$

Ook voor deze rekincrementen is voldaan aan

$$d\epsilon_1 + d\epsilon_2 + d\epsilon_3 = 0$$

dus vindt de plastische vervorming volumebestendig plaats.

Aan de vloeiregel van Von Mises is ook de naam van Levy verbonden.

Voorbeeld

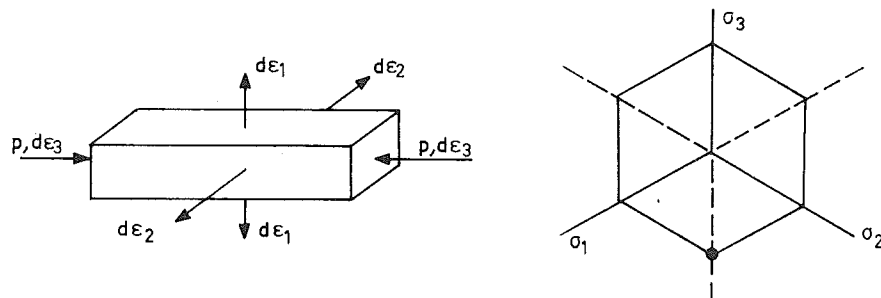
Bij wijze van voorbeeld gaan we na welke plastische deformatie wordt voorspeld in het geval van een één-assige normaaldrukspanning p in de hoofdspanningsrichting σ_3 . Dan geldt $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-p$.

De predicties voor de plastische rekincrementen zijn:

$$\text{Tresca} : (d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, -1) \quad \begin{array}{l} \lambda > 0 \\ \mu > 0 \end{array}$$

$$\text{Von Mises: } (d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3) = \lambda^* (\sigma_1 - \sigma_o, \sigma_2 - \sigma_o, \sigma_3 - \sigma_o) \quad \begin{array}{l} \lambda^* > 0 \end{array}$$

De vloeiregel volgens Tresca is onbepaald. Als we $\lambda \neq 0$ en $\mu = 0$ kiezen vinden we dat $d\varepsilon_2$ niet optreedt en dat de uitdijng $d\varepsilon_1$ evengroot is als de verkorting $d\varepsilon_3$. Zowel $d\varepsilon_1$ als $d\varepsilon_2$ staan loodrecht op de belastingsrichting. Op grond van isotropie zouden ze evengroot moeten zijn. Als $\lambda = 0$ en $\mu \neq 0$ gebeurt iets dergelijks. Dan treedt de uitdijng $d\varepsilon_2$ wel op maar $d\varepsilon_1$ niet. Alleen de combinatie $\lambda = \mu$ voldoet aan de verwachting op grond van de isotropie.



Om het vloeien volgens Von Mises te onderzoeken substitueren we $\sigma_1=0$, $\sigma_2=0$, $\sigma_3=-p$ en $\sigma_o = -\frac{1}{3}p$.
Dat leidt tot

$$(d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3) = \lambda^* (1, 1, -2)$$

Nu volgt éénvoudig dat de uitdijng in de richting 1 en 2 loodrecht op de belastingsrichting evengroot is. Dit bevredigt volkomen de fysische verwachting voor isotroop materiaal.