

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

ONDERWERPEN

LES 1

Spanningen en rekken in 3D en lineair elastisch gedrag

LES 2

Grensspanningshypothese voor materialen

LES 3

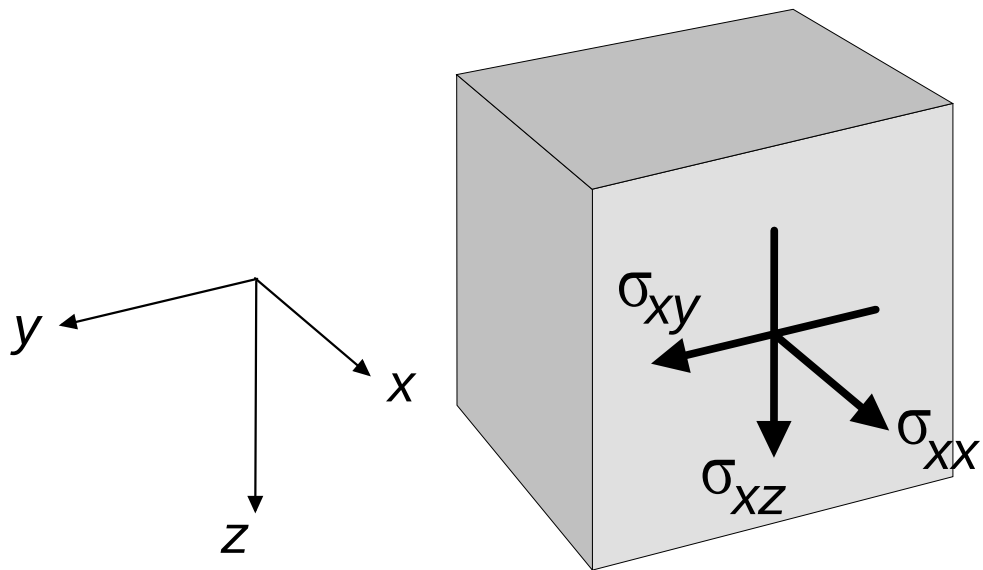
Wapening bepalen voor beton 2D en 3D

Geschreven door ir. J.W. Welleman

Aangepast door dr. ir. P.C.J. Hoogenboom, juni 2016

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

NOTATIE VAN SPANNINGEN



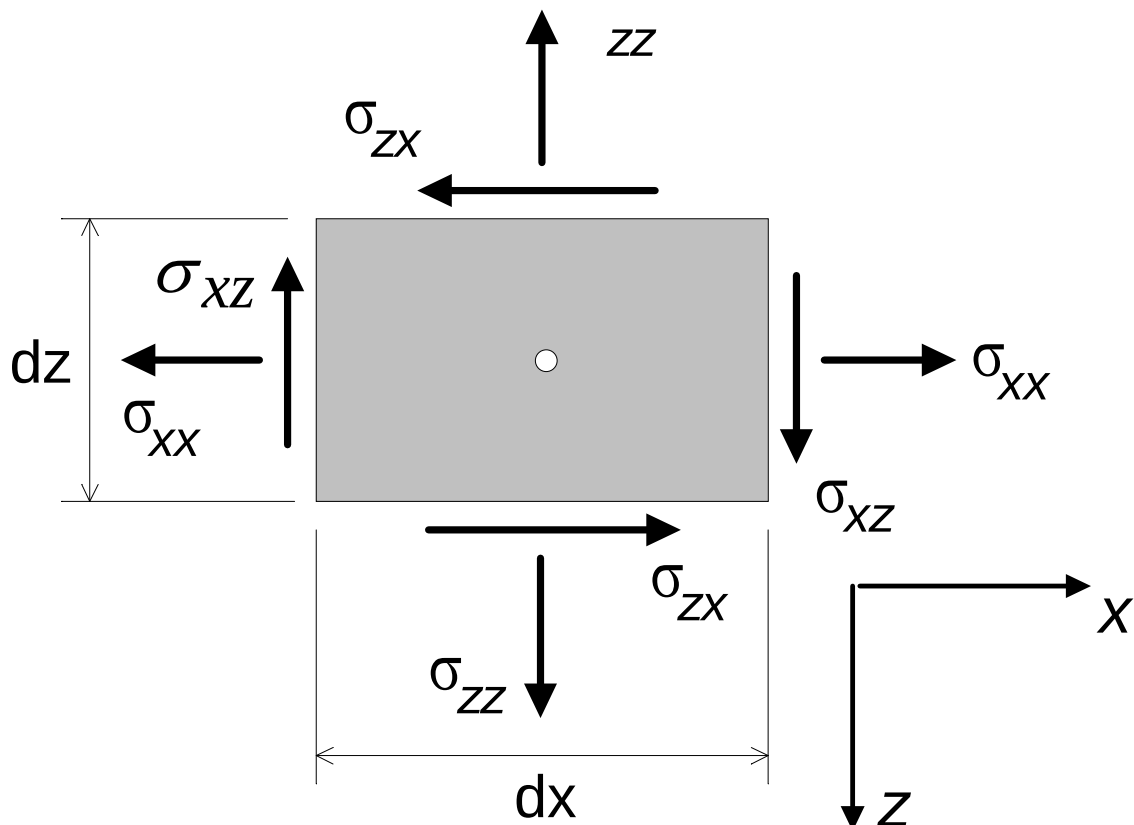
σ_{xy} is de spanning op het x -vlakje in de y -richting

Het x -vlakje is het vlak met de normaalvector in de x -richting.

Een normaalvector staat loodrecht op een vlak.

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

MOMENTEVENWICHT



$$\sigma_{xz} dz dx = \sigma_{zx} dx dz$$

dus

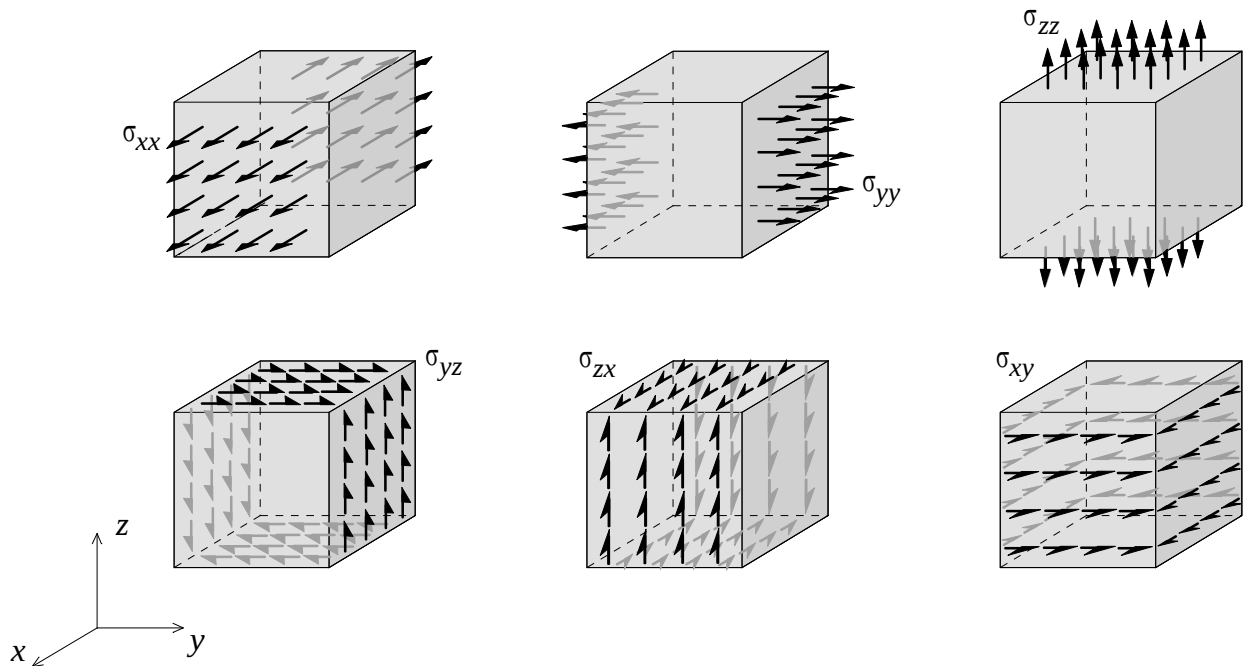
$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

De schuifspanningen zijn paarsgewijs aan elkaar gelijk, dus er zijn slechts 3 onafhankelijke schuifspanningen.

De spanningstoestand wordt vastgelegd met 6 componenten.

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

3D SPANNINGEN



Spanningen op een elementair kubusje van een materiaal

$$\text{spanning} = \left\{ \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

TENSOR

Fysische grootheid die op een bepaalde manier verandert als een ander assenstelsel wordt gekozen.

nulde orde tensor = scalar

bijvoorbeeld 3.1415

eerste orde tensor = vector

bijvoorbeeld $\begin{Bmatrix} 3.14 \\ 7.21 \\ -1.09 \end{Bmatrix}$

plaats, verplaatsing

tweede orde tensor = matrix

bijvoorbeeld $\begin{bmatrix} 3.14 & 7.21 & -1.09 \\ 7.21 & -8.97 & 0.01 \\ -1.09 & 0.01 & 3.34 \end{bmatrix}$

spanning, rek, plaatmomenten, schaalkrommingen

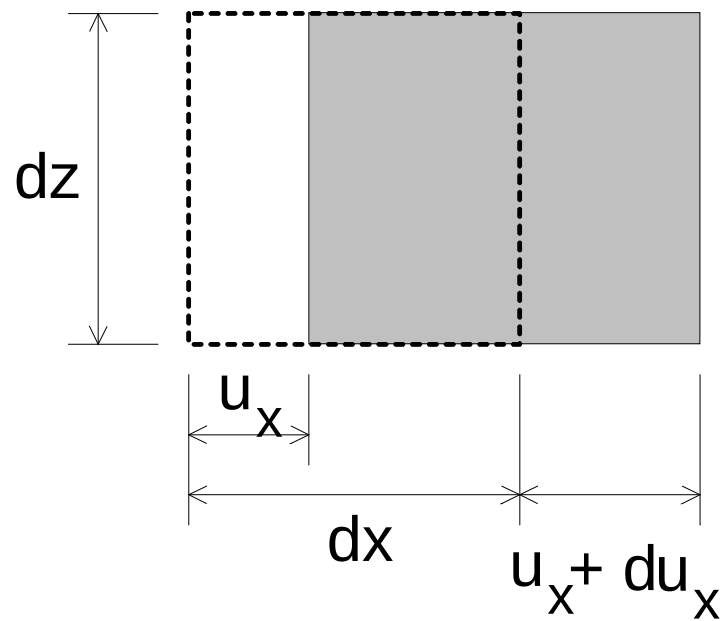
derde orde tensor = kubus met getallen, geen toepassingen

vierde orde tensor = geen afbeelding mogelijk

bijvoorbeeld materiaalstijfheid

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

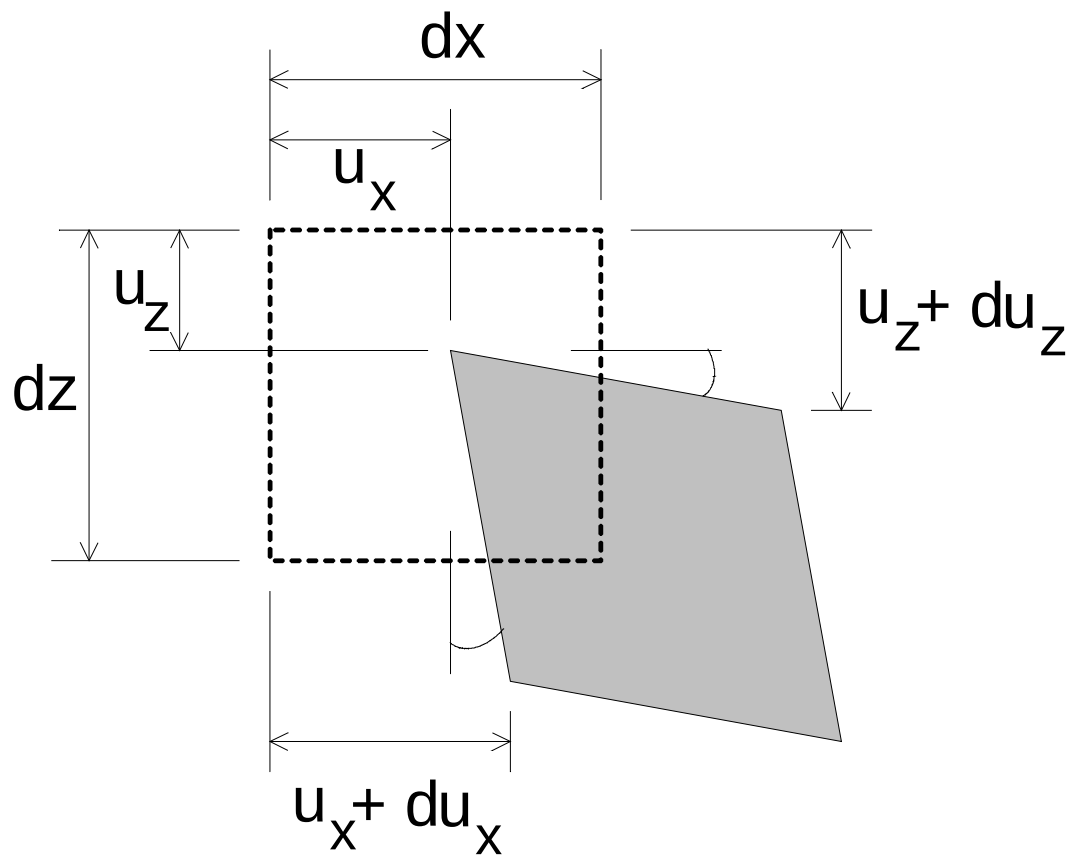
NORMAALREK



$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

AFSCHUIFREK



$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

TENSOR NOTATIE

normaalrek

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$$

afschuifrek

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

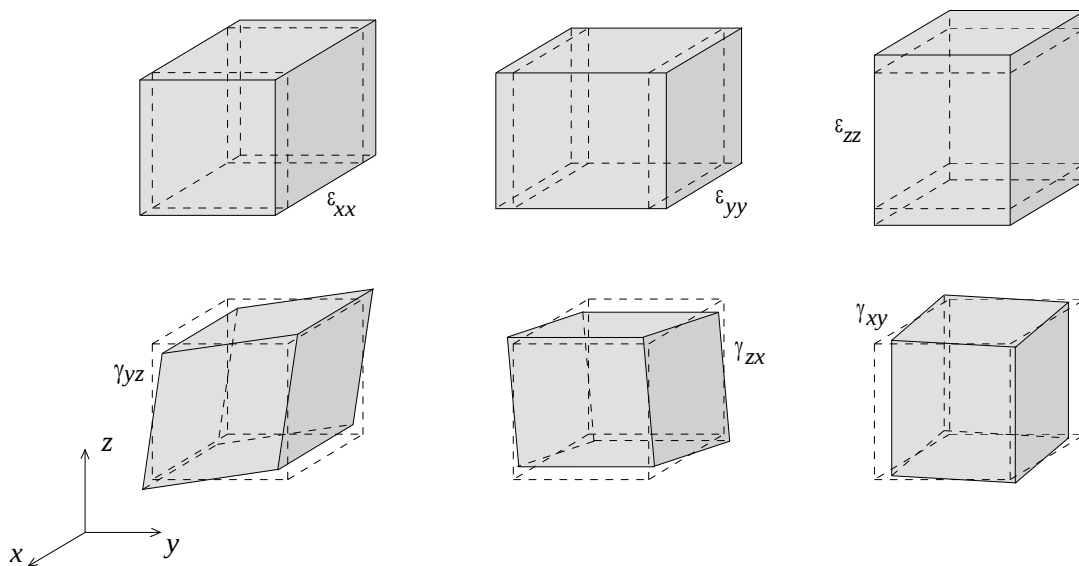
$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

algemeen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad i, j = x, y, z$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

3D REKKEN



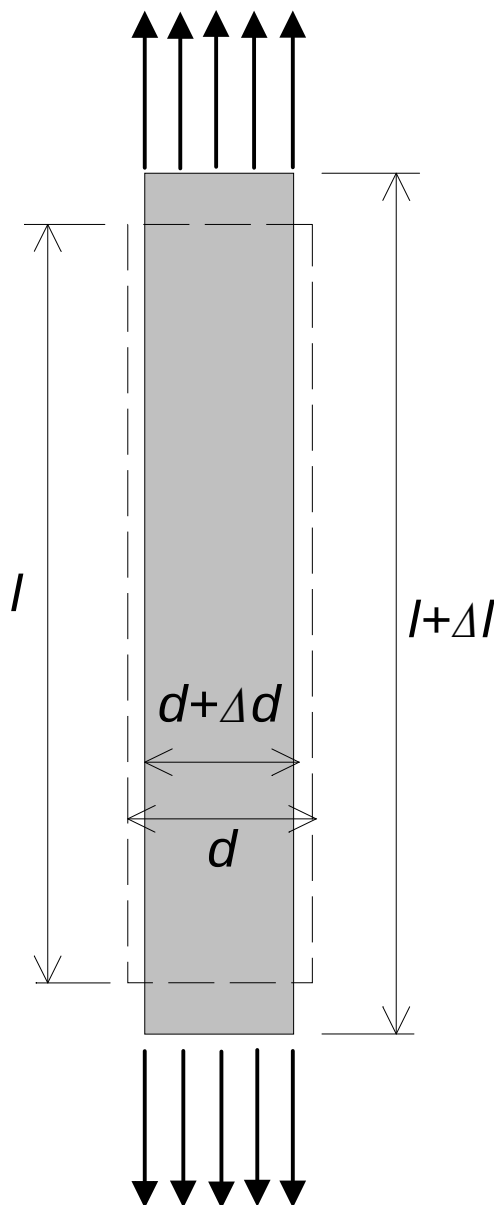
Rekken in een elementair kubusje van een materiaal

$$rek = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

ELASTISCH GEDRAG

Trekproef



Lengterichting :

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

Dwarsrichting :

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$$

(Δd is negatief)

Contractie :

$$\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = \text{const} = -\nu$$

ν = dwarscontractie
coëfficiënt of de
constante van Poisson

ongescheurd beton $\nu \approx 0,15$

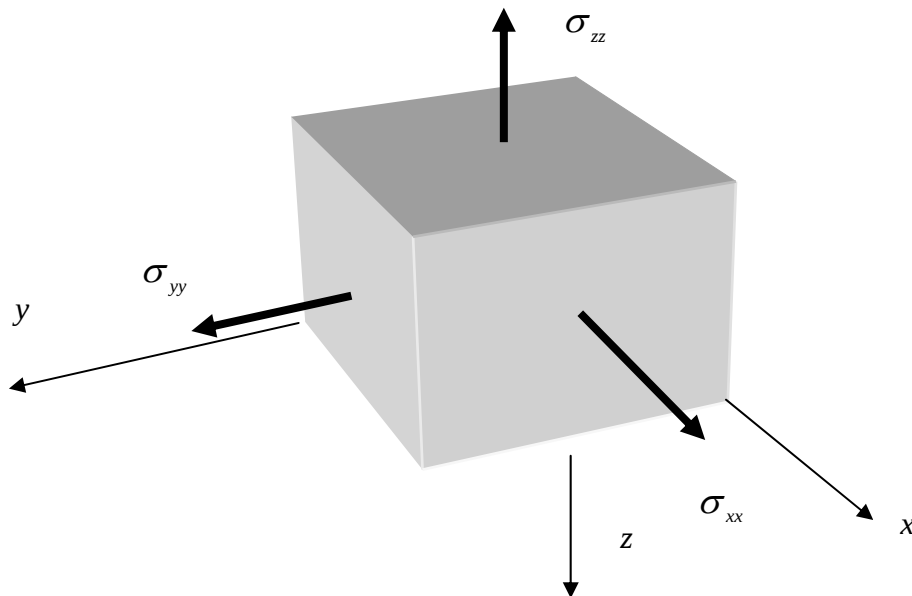
gescheurd beton $\nu \approx 0$

staal $\nu \approx 0,3$

rubber $\nu \approx 0,5$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

SPANNINGS - REK RELATIE



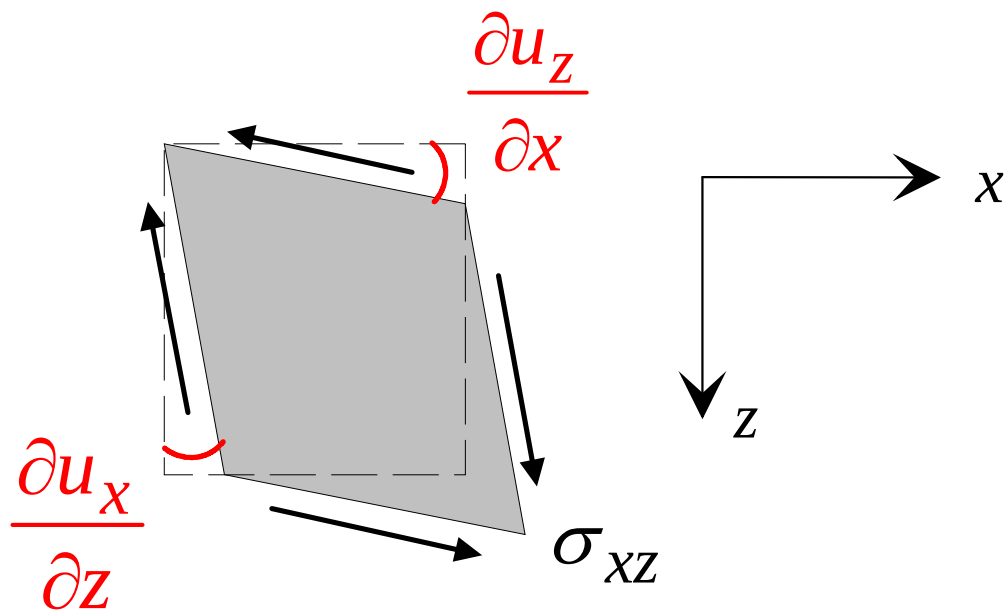
$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz} \right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{zz} - \nu \sigma_{xx} \right)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{zz} - \nu \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \right)$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

SCHUIFSTIJFHEID

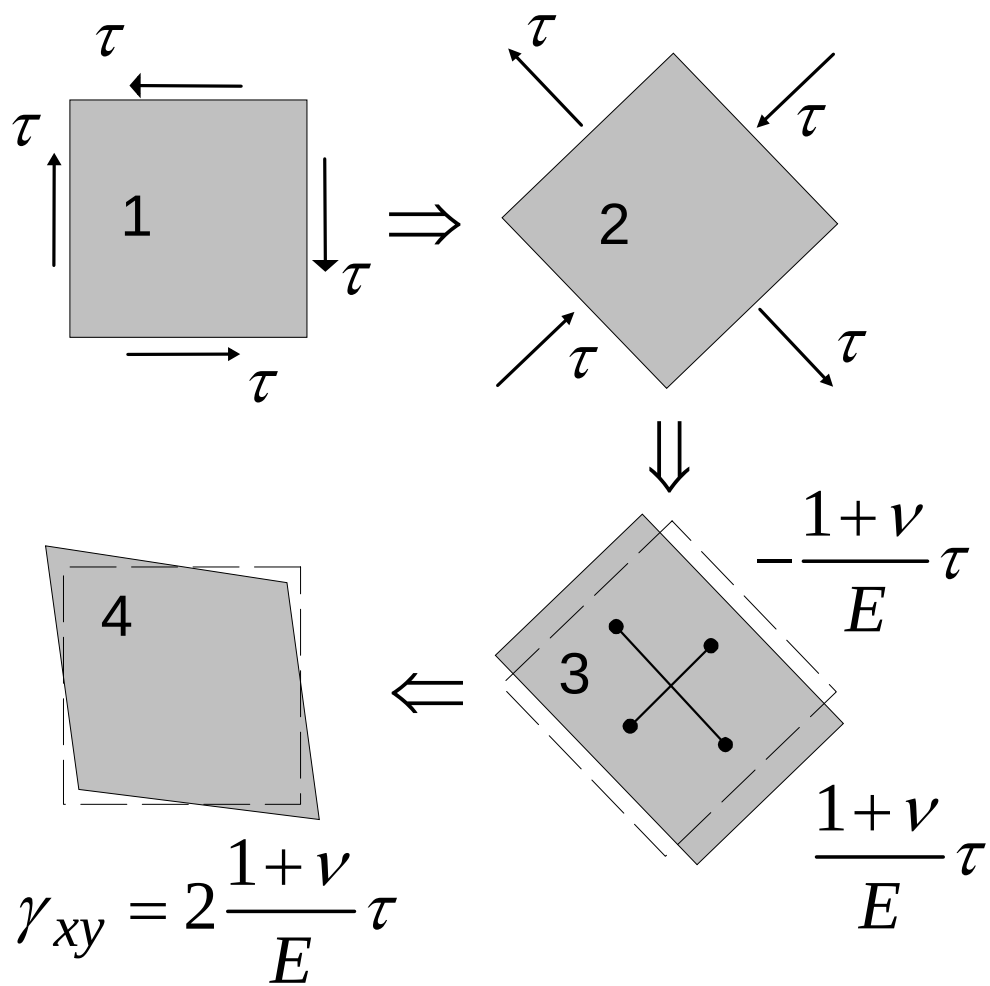


$$\sigma_{xz} = G \gamma_{xz}$$

G = glijdingsmodulus

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

VERBAND TUSSEN G , E en ν



$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

ISOTROOP LINEAIR-ELASTISCH MATERIAAL

WET VAN HOOKE
UT TENSIO, SIC VIS.
(Als de verlenging, zo is de kracht.)

FLEXIBILITEITSRELATIE

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

STIJFHEIDSRELATIE

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

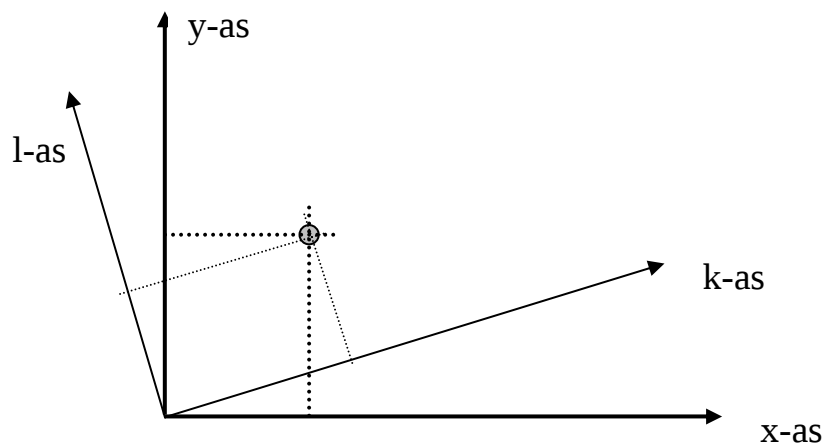
Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

BEGRIPPEN

- TRANSFORMATIES
- ISOTROPE SPANNING EN REK
- DEVIATORSPANNING EN -REK
- HOOFDSPANNINGEN
- INVARIANTEN
- OCTAEDERVLAK

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

TRANSFORMATIES



rotatiematrix **T**

eerste orde tensor

$$\begin{Bmatrix} k \\ l \\ m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{kx} & \beta_{ky} & \beta_{kz} \\ \beta_{lx} & \beta_{ly} & \beta_{lz} \\ \beta_{mx} & \beta_{my} & \beta_{mz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

β_{ij} = cosinus van de hoek
tussen de i -as en
de j -as

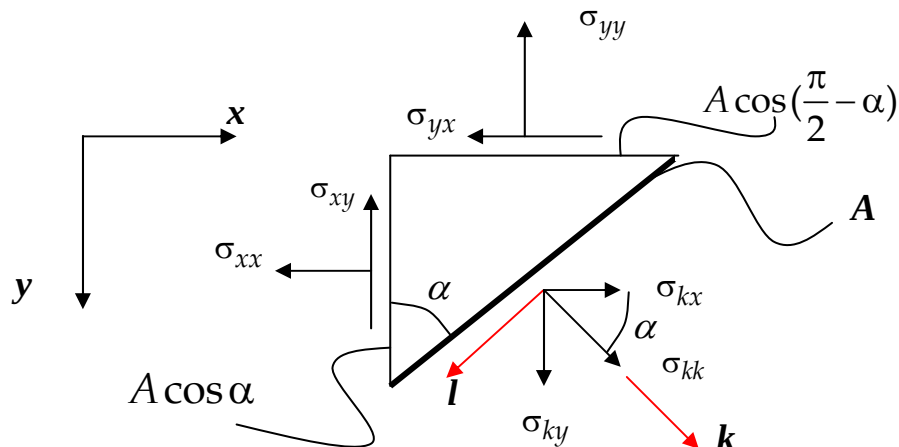
Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

getransponeerde rotatiematrix
 rotatiematrix spanningstensor

$$\begin{bmatrix} \sigma_{kk} & \sigma_{kl} & \sigma_{km} \\ \sigma_{lk} & \sigma_{ll} & \sigma_{lm} \\ \sigma_{mk} & \sigma_{ml} & \sigma_{mm} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T$$

In het dictaat op blz. 1.3 is deze relatie uitgeschreven in vectornotatie.

Toepassing



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) & 0 \\ \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha & -\sigma_{xx} \sin \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha & -\sigma_{yx} \sin \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \sin \alpha & -\sigma_{zx} \sin \alpha + \sigma_{zy} \cos \alpha & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha & -\sigma_{xx} \sin \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha & -\sigma_{yx} \sin \alpha + \sigma_{yy} \cos \alpha & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \sin \alpha & -\sigma_{zx} \sin \alpha + \sigma_{zy} \cos \alpha & \sigma_{zz} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \cos \alpha + (\sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha) \sin \alpha & * & * \\ -(\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha) \cos \alpha & * & * \\ \sigma_{zx} \cos \alpha + \sigma_{zy} \sin \alpha & * & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Dus

$$\sigma_{kk} = (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \cos \alpha + (\sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha) \sin \alpha$$

$$\sigma_{lk} = -(\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_{yx} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha) \cos \alpha$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

Andere manier, Evenwicht

$$\sigma_{xx}A \cos \alpha + \sigma_{xy}A \sin \alpha = A\sigma_{kx}$$

$$\sigma_{yy}A \sin \alpha + \sigma_{xy}A \cos \alpha = A\sigma_{ky}$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{kx} \cos \alpha + \sigma_{ky} \sin \alpha$$

$$\sigma_{kl} = \sigma_{ky} \cos \alpha - \sigma_{kx} \sin \alpha$$

$$\sigma_{kk} = (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \cos \alpha + (\sigma_{yy} \sin \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha) \sin \alpha$$

$$\sigma_{kl} = (\sigma_{yy} \sin \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha) \cos \alpha - (\sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha) \sin \alpha$$

Hetzelfde resultaat !

Vereenvoudigd

$$\sigma_{kk} = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha \sin \alpha$$

$$\sigma_{lk} = \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) \sin \alpha \cos \alpha$$

(Deze formules geven de Cirkel van Mohr, zie volgende les)

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

COMPRESSIE EN DISTORSIE

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix}$$

ISOTROPE DEEL :

$$\sigma_o = \frac{1}{3} \left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \right)$$

DEVIATORISCHE DEEL :

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_o$$

$$s_{xy} = \sigma_{xy}$$

$$s_{xz} = \sigma_{xz}$$

$$s_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_o$$

$$s_{yz} = \sigma_{yz}$$

$$s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_o$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

WAAROM ?

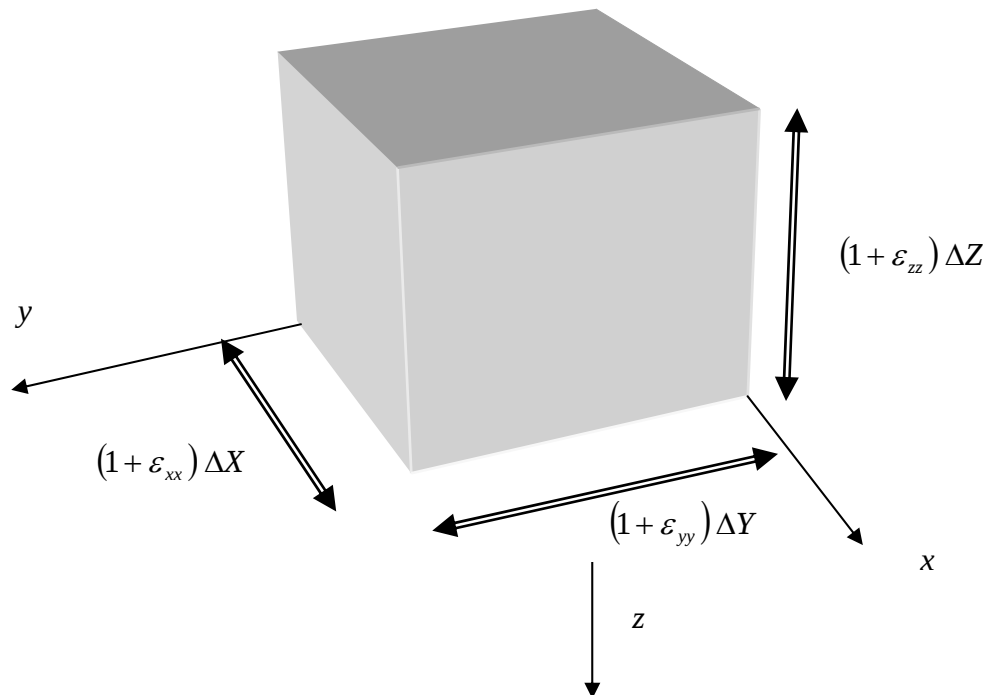
DEVIATORSPANNINGEN ZIJN
VERANTWOORDELIJK VOOR
GEDAANTEVERANDERING.

ISOTROPE SPANNINGEN ZIJN
VERANTWOORDELIJK VOOR
VOLUMEVERANDERING.

BEZWIJKEN VAN MATERIALEN IS VAAK
GEVOELIGER VOOR GEDAANTE-
VERANDERING DAN VOOR VOLUME-
VERANDERING

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

VOLUME REK



$$V' = (1 + \varepsilon_{xx}) \cdot \Delta X \cdot (1 + \varepsilon_{yy}) \cdot \Delta Y \cdot (1 + \varepsilon_{zz}) \cdot \Delta Z$$

$$V' = V \left(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} \right)$$

$$V' = V \left(1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \right)$$

dus

$$e = \frac{V' - V}{V} = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

KOMPRESSIEMODULUS K

VERBAND TUSSEN ISOTROPE SPANNING EN DE VOLUMEVERANDERING

isotrope spanning :

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

volumerek :

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

invullen wet van Hooke :

$$e = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_o = \frac{1}{K} \sigma_o$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

HOOFDSPANNINGEN

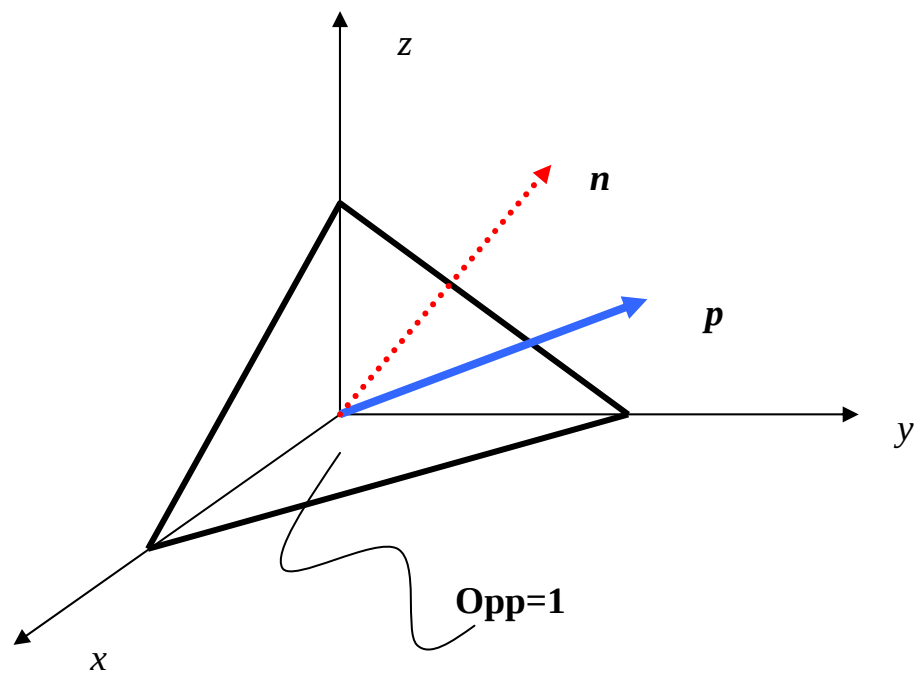
IS ER EEN RICHTING WAARBIJ ALLEEN NORMAALSPANNINGEN WERKEN OP EEN VLAKJE, DUS GEEN SCHUIFSPANNINGEN.

WISKUNDIG BETEKENIT DIT :

DE SPANNINGSVECTOR VALT SAMEN MET DE NORMAALVECTOR VAN HET VLAK

$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag



$$\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

EIGENWAARDE PROBLEEM :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- HOOFDSPANNINGEN = EIGENWAARDEN
- HOOFDRICHTINGEN = EIGENVECTOREN

UITWERKEN

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

Een niet triviale oplossing bestaat indien de determinant nul is.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

met :

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix}$$

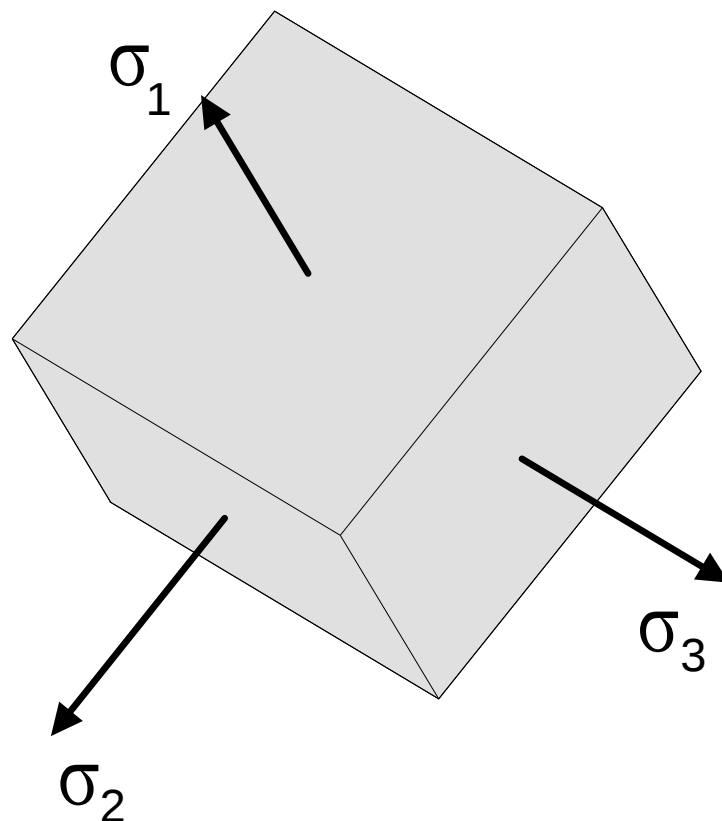
Een derde-graadsvergelijking heeft in het algemeen 3 wortels.

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

Hieruit volgen

- 3 hoofdspanningen σ_1 , σ_2 en σ_3
- 3 normaalvectoren $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ en $\mathbf{n}_3$

De normaalvectoren staan loodrecht op elkaar.



De hoofdspanningen zijn **invariant**. Dat wil zeggen dat ze onafhankelijk zijn van de initiële richting van de x-, y- en z-as.

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

INVARIANTEN

DE HOOFDSPANNINGEN VERANDEREN
NIET BIJ ASSENTTRANSFORMATIES

DUS :

DE CONSTANTEN I_1 , I_2 en I_3 MOGEN DUS
NIET VERANDEREN

DEZE CONSTANTEN HETEN DAAROM
INVARIANT

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

DEVIATORHOOFDSPANNINGEN

$$\begin{bmatrix} s_{xx} - s & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{xy} & s_{yy} - s & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{yz} & s_{zz} - s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = 0$$

MET :

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_o \quad s_{xy} = \sigma_{xy}$$

$$s_{yy} = \sigma_{yy} - \sigma_o \quad s_{xz} = \sigma_{xz}$$

$$s_{zz} = \sigma_{zz} - \sigma_o \quad s_{yz} = \sigma_{yz}$$

en :

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

KARAKTERISTIEK POLYNOOM (EIGENWAARDE-PROBLEEM)

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0$$

met :

$$J_1 = I_1 - 3\sigma_o = 0 \quad !$$

$$J_2 = 3\sigma_o^2 - I_2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2$$

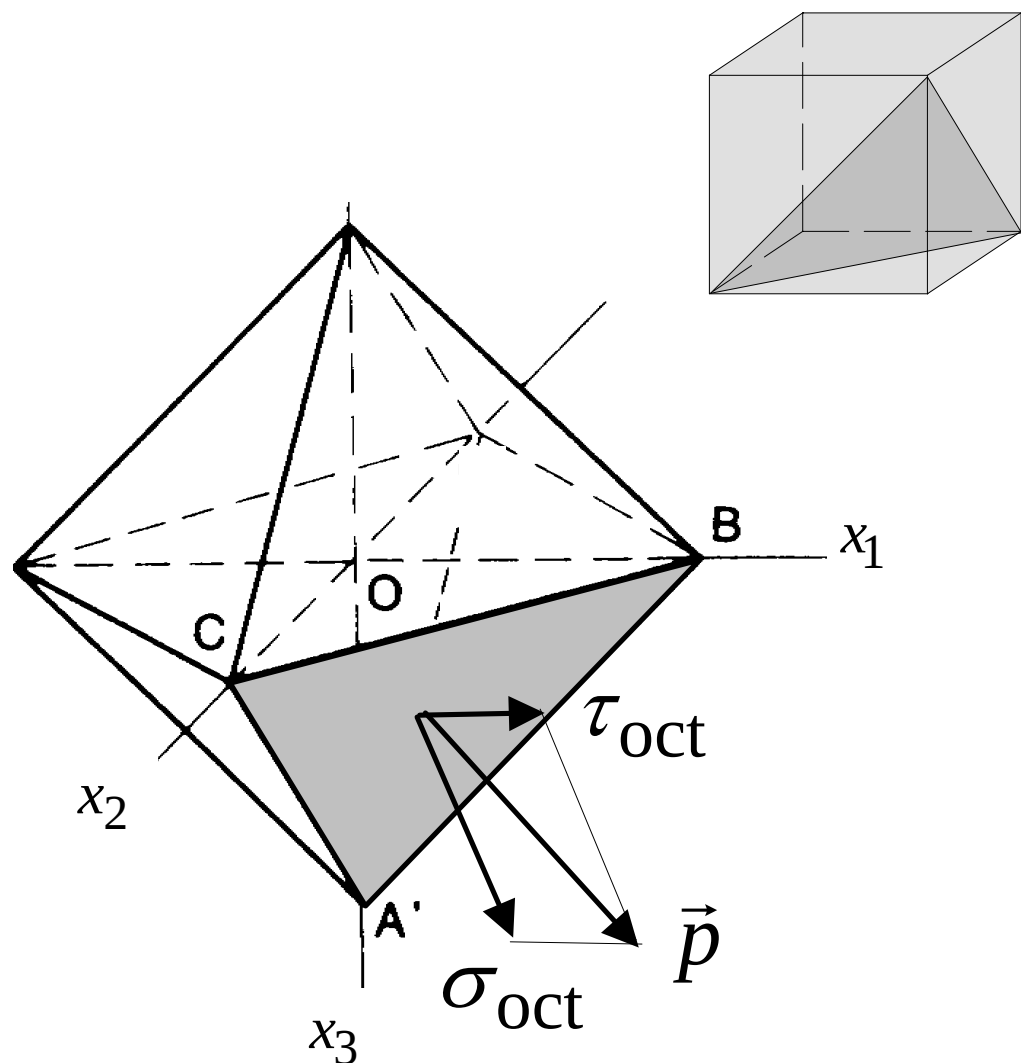
$$J_3 = I_3 - I_2\sigma_o + 2\sigma_o^3 = I_3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + \frac{2}{27}I_1^3$$

DE WAARDE J_2 KAN WORDEN
HERLEID TOT :

$$J_2 = \frac{1}{6} \left\{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right\}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

OCTAEDERVLAK



vlak met normaalvector

$$\mathbf{n} = \left(\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3} \right)$$

ten opzichte van de hoofdrichtingen

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

SPANNINGEN OP HET OCTAEDERVLAK

- NORMAALSPANNING
- SCHUIFSPANNING

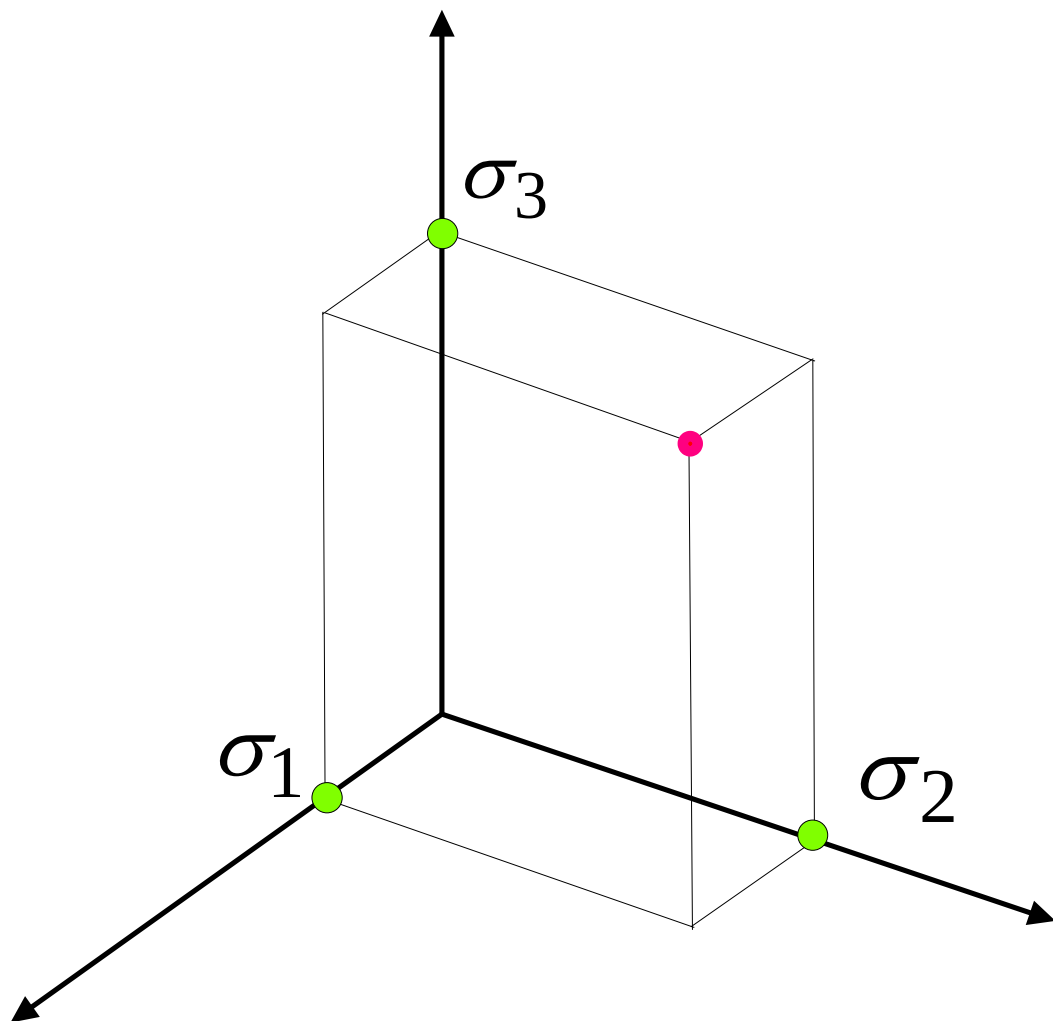
$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_o = \frac{1}{3}I_1$$

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{1}{9}\left\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right\}} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}$$

DIT IS EEN INTERPRETATIE VAN I_1 en J_2

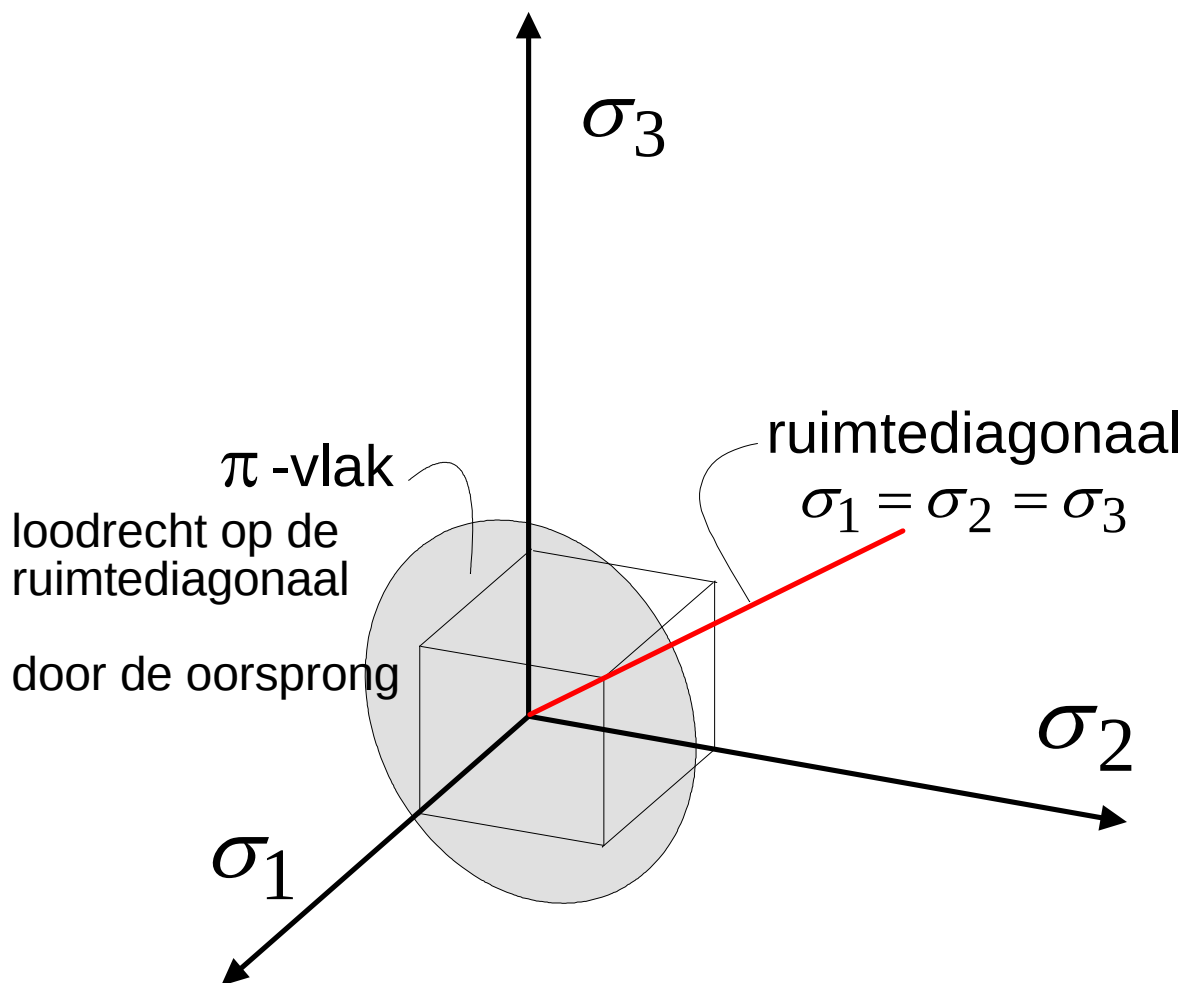
Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

HOOFDSPANNINGSRUIMTE



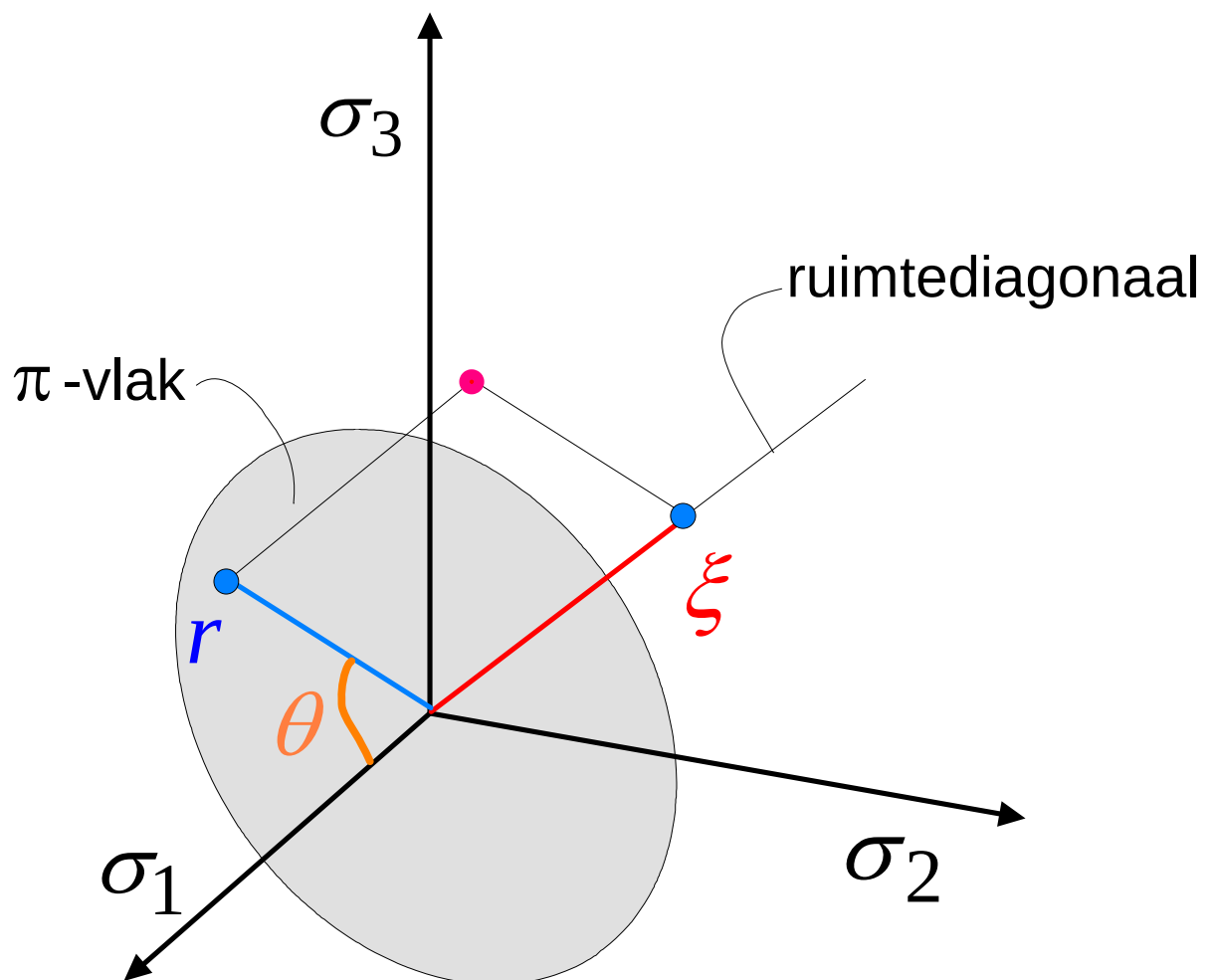
Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

HOOFDSPANNINGSRUIMTE



Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

HOOFDSPANNINGSRUIMTE



Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

CILINDERCOORDINATEN

Afstand tot het π -vlak

$$\xi = \sqrt{3} \sigma_o = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \sigma_{\text{oct}}$$

Afstand tot de ruimtediagonaal

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{3} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)} \\ &= \sqrt{2 J_2} = \sqrt{3} \tau_{\text{oct}} \end{aligned}$$

Hoek in het π -vlak

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_{\text{oct}}^3}$$

Spanningen en rekken in 3D en elastisch gedrag

SAMENVATING INVARIANTEN

- DE 3D SPANNINGSSITUATIE LIGT VAST MET HOOFDSPANNINGEN

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

- DE 3D SPANNINGSSITUATIE LIGT VAST MET INVARIANTEN

$$I_1, I_2, I_3$$

- DE 3D SPANNINGSSITUATIE LIGT VAST MET INVARIANTEN

$$\sigma_o, J_2, J_3$$

- DE 3D SPANNINGSSITUATIE LIGT VAST MET DE CILINDERCOORDINATEN

$$\xi, r, \theta$$