

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

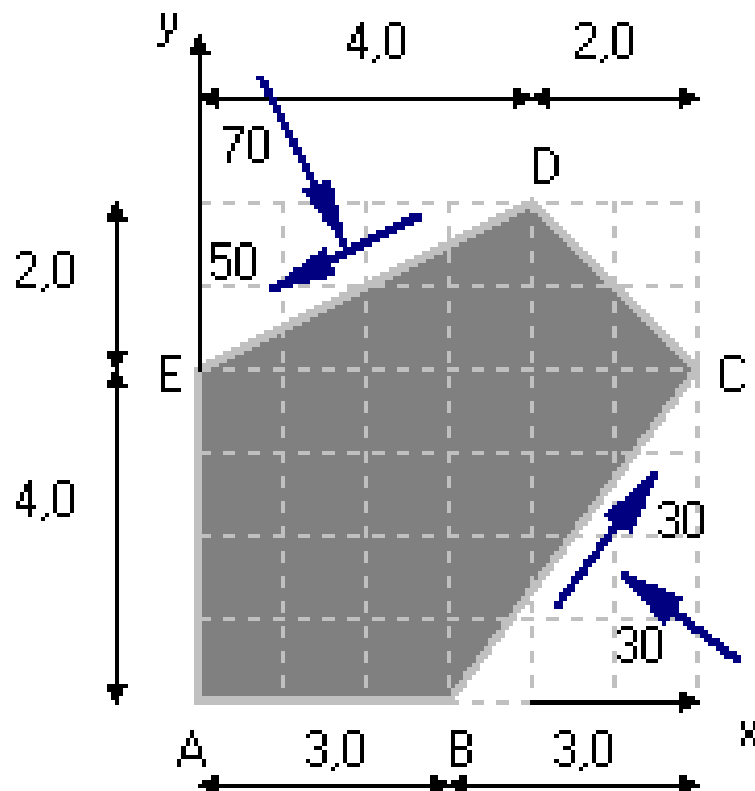
INHOUD LES 2

- Circel van Mohr
- Inleiding grensspannings-hypothesen
- Vloeimodellen
 - Rankine
 - De Saint Venant
 - Tresca
 - Beltrani
 - Von Mises (metalen)
 - Mohr-Coulomb (grond)
 - Drucker-Prager
 - Rankine + Mohr-Coulomb (beton)
 - Tsai-Hill (hout)

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr

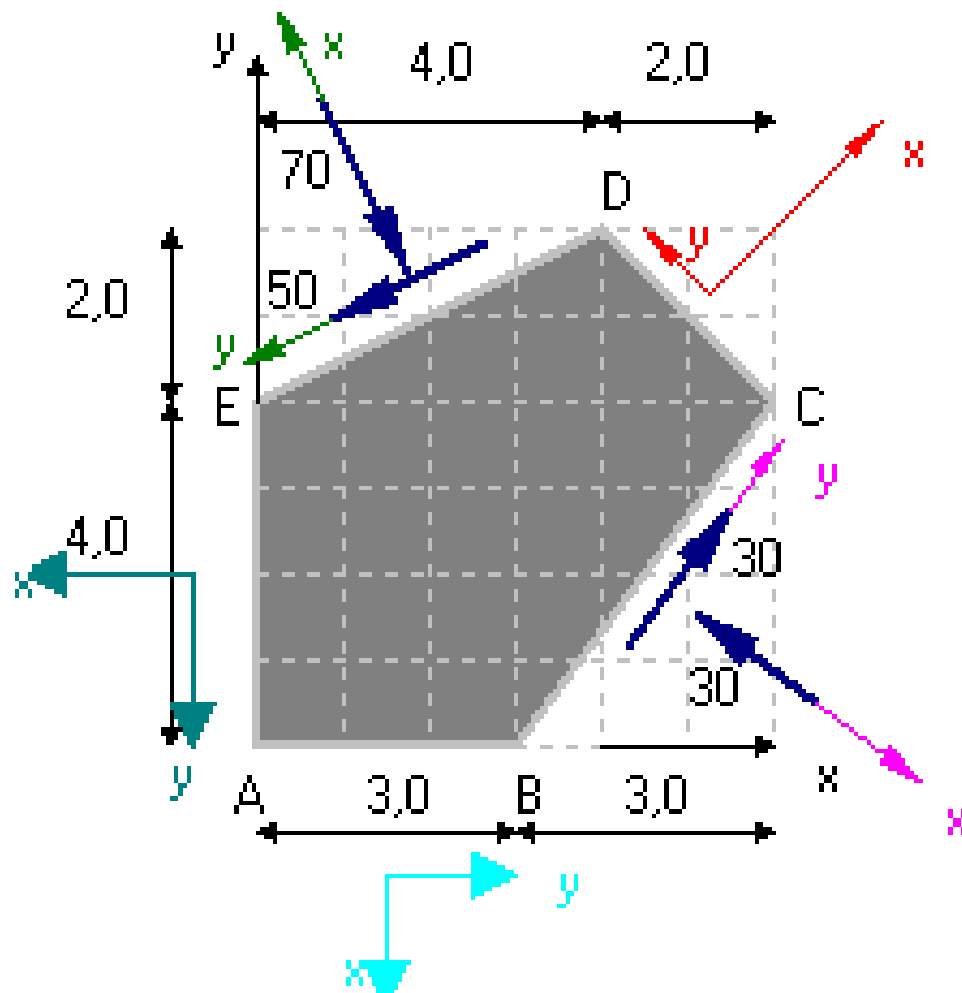
Download een uitleg-programma van
Dhr. Welleman:
http://mech025.citg.tudelft.nl/TUD_CT/software/mohr/



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr

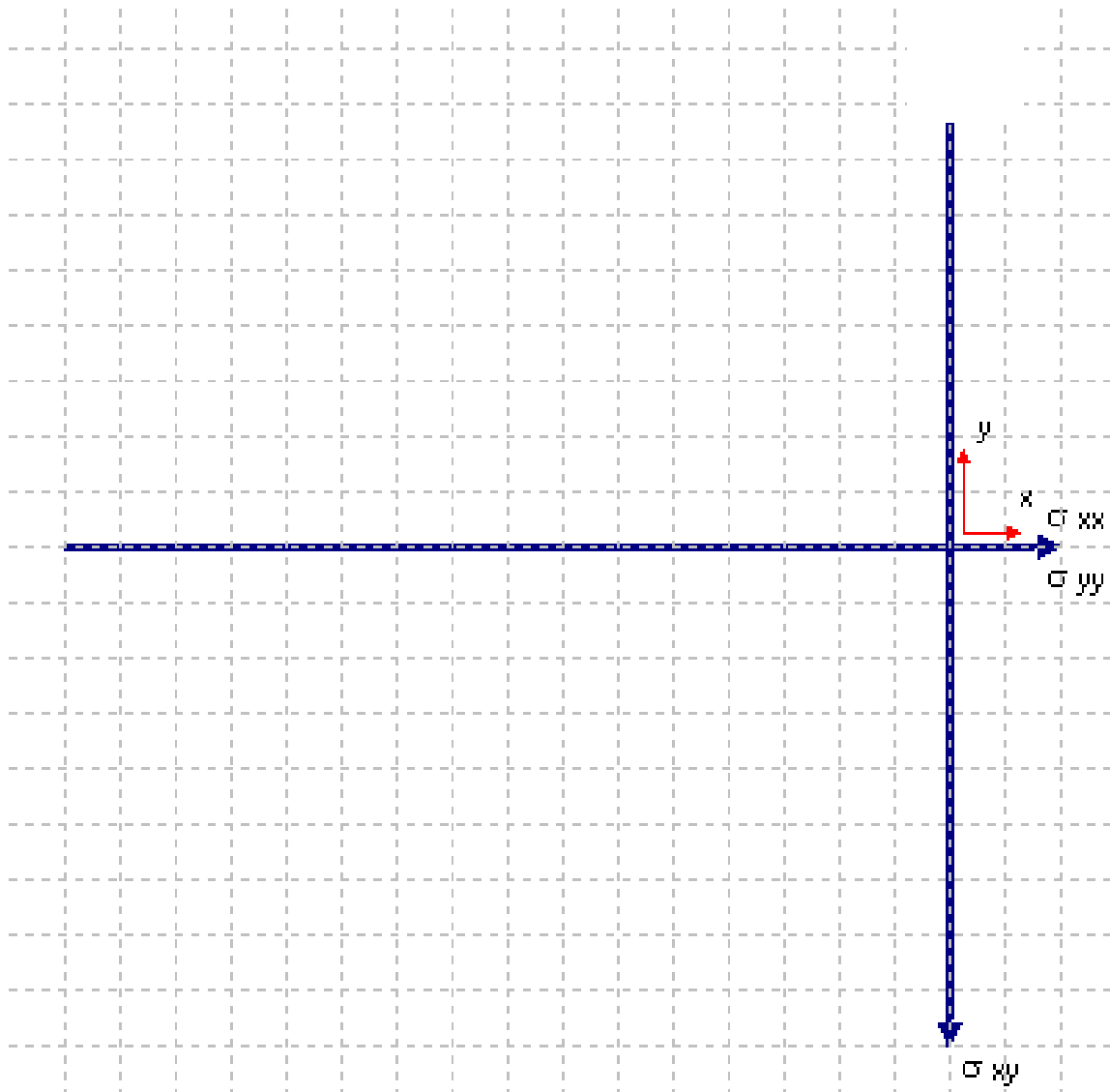
Assenstelsels voor de vlakjes



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr

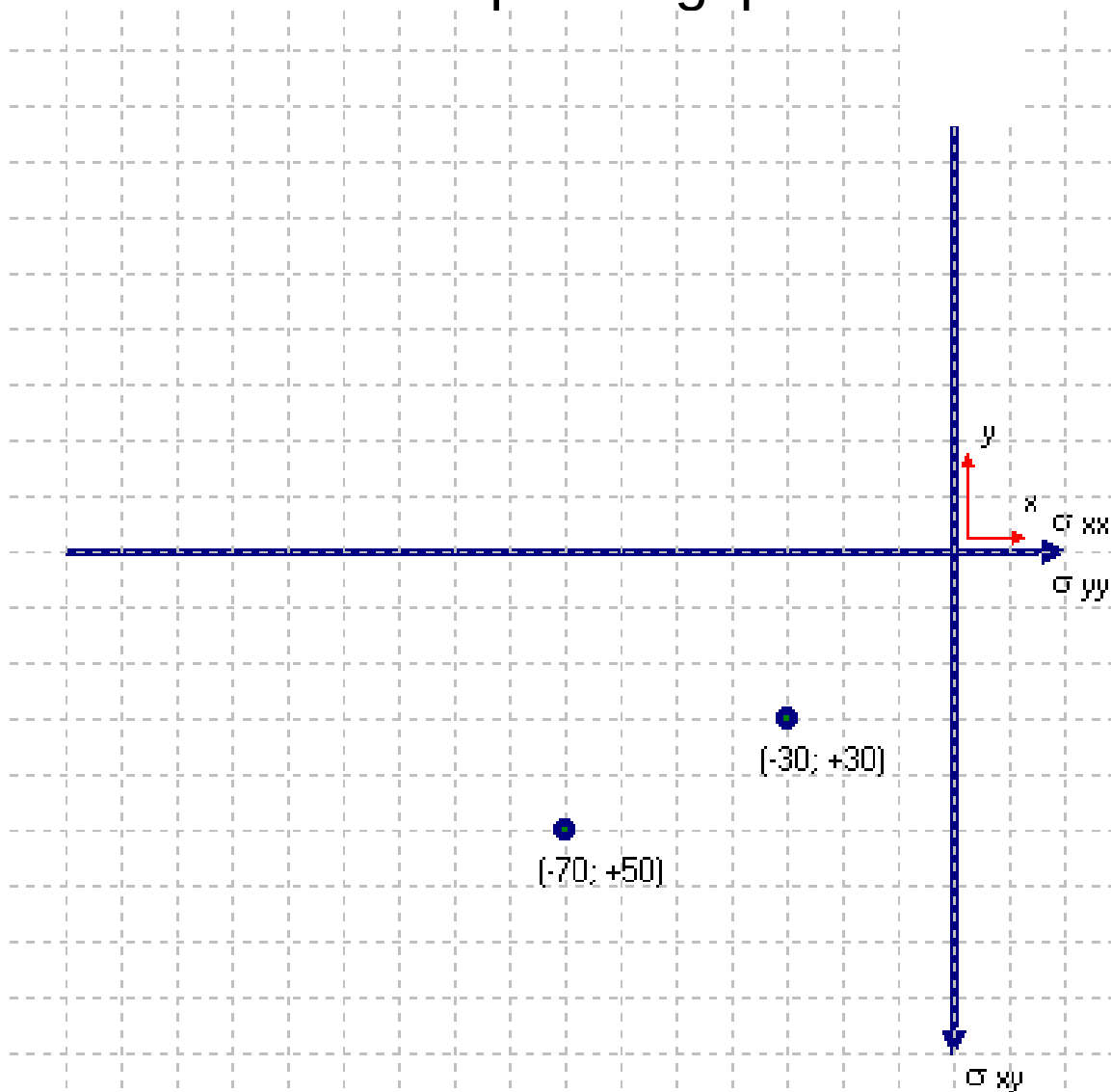
Assen van de cirkel



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr

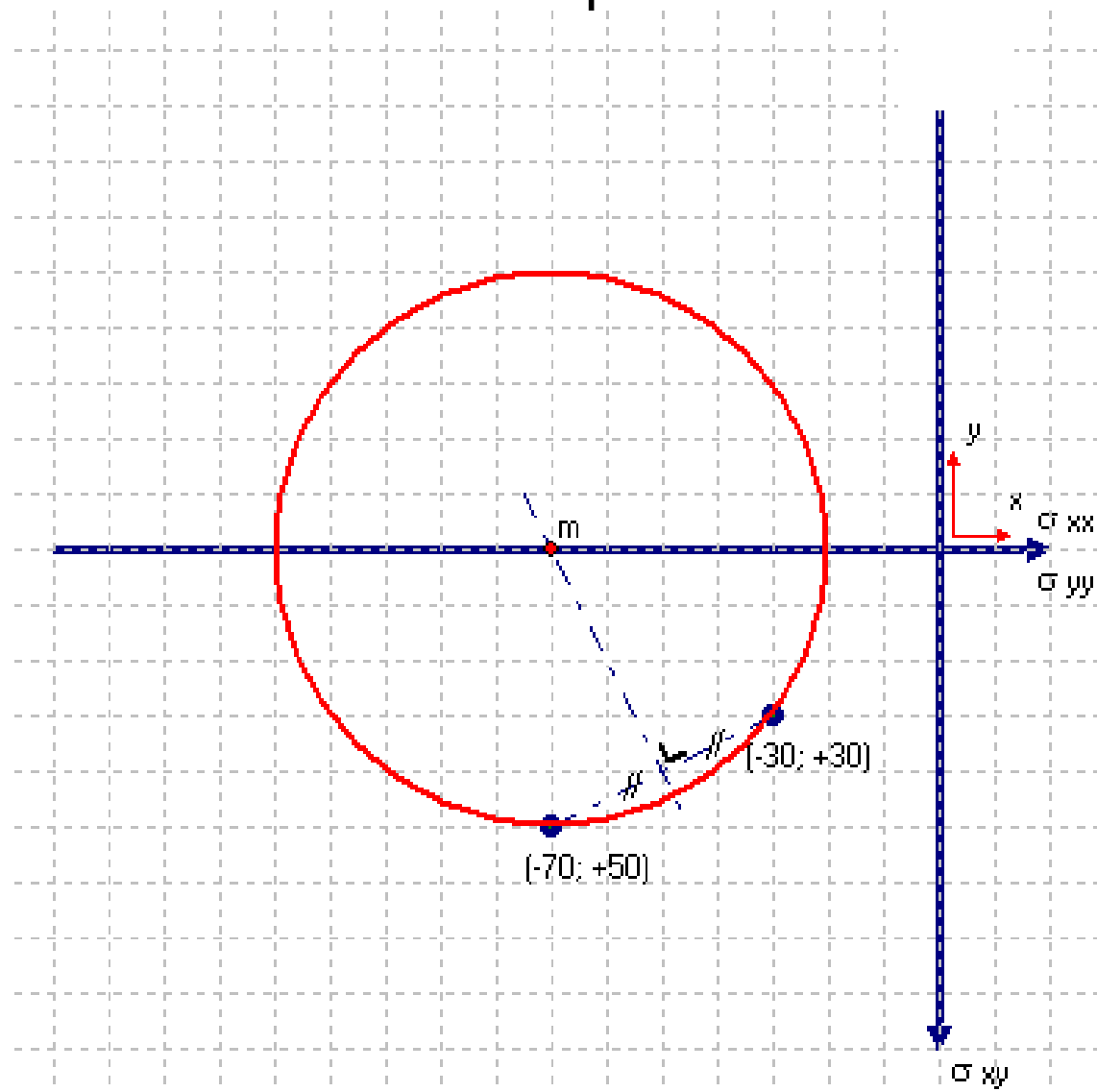
Bekende spanningspunten



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr

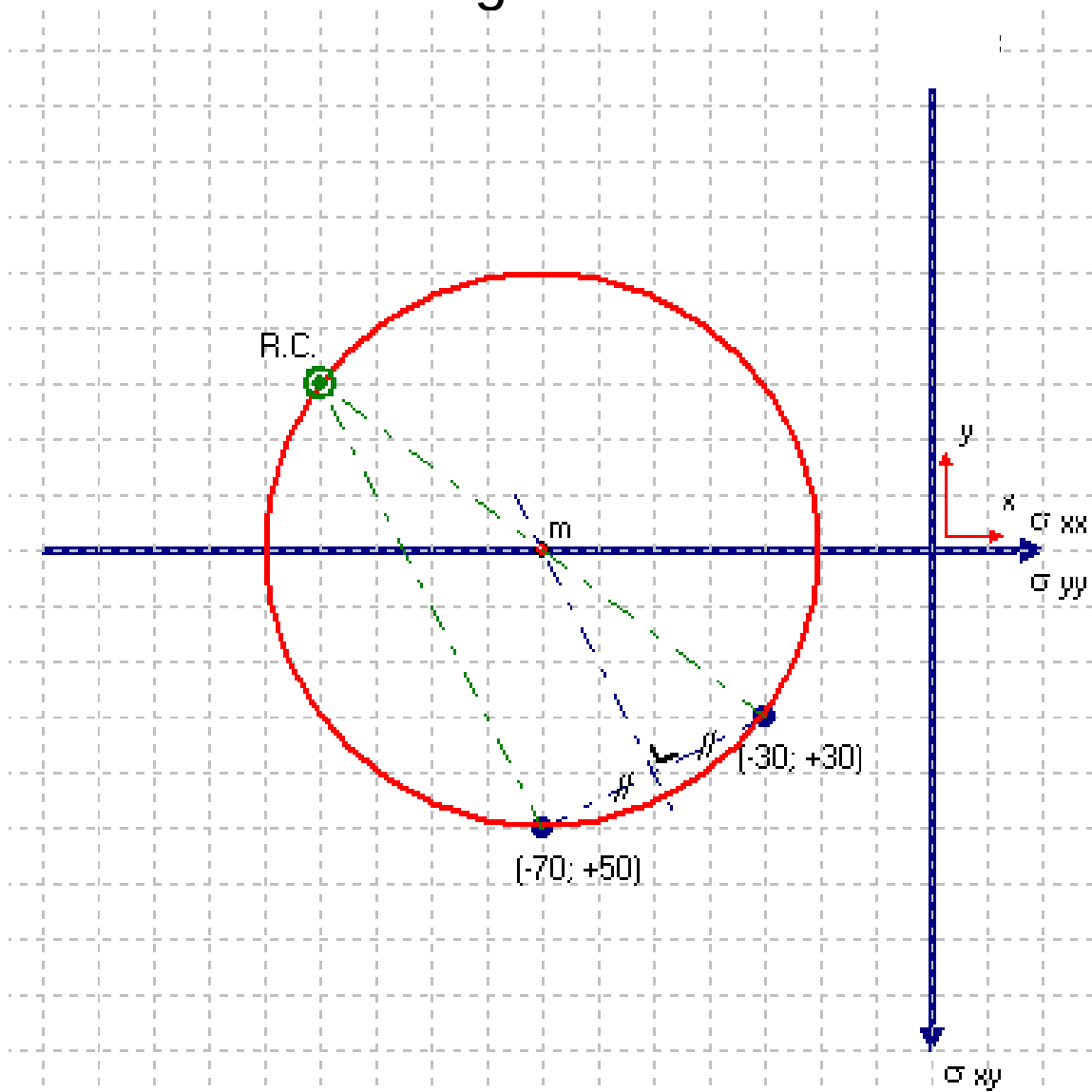
Middelpunt



Plasticiteit en grensspanningshypothese

Cirkel van Mohr

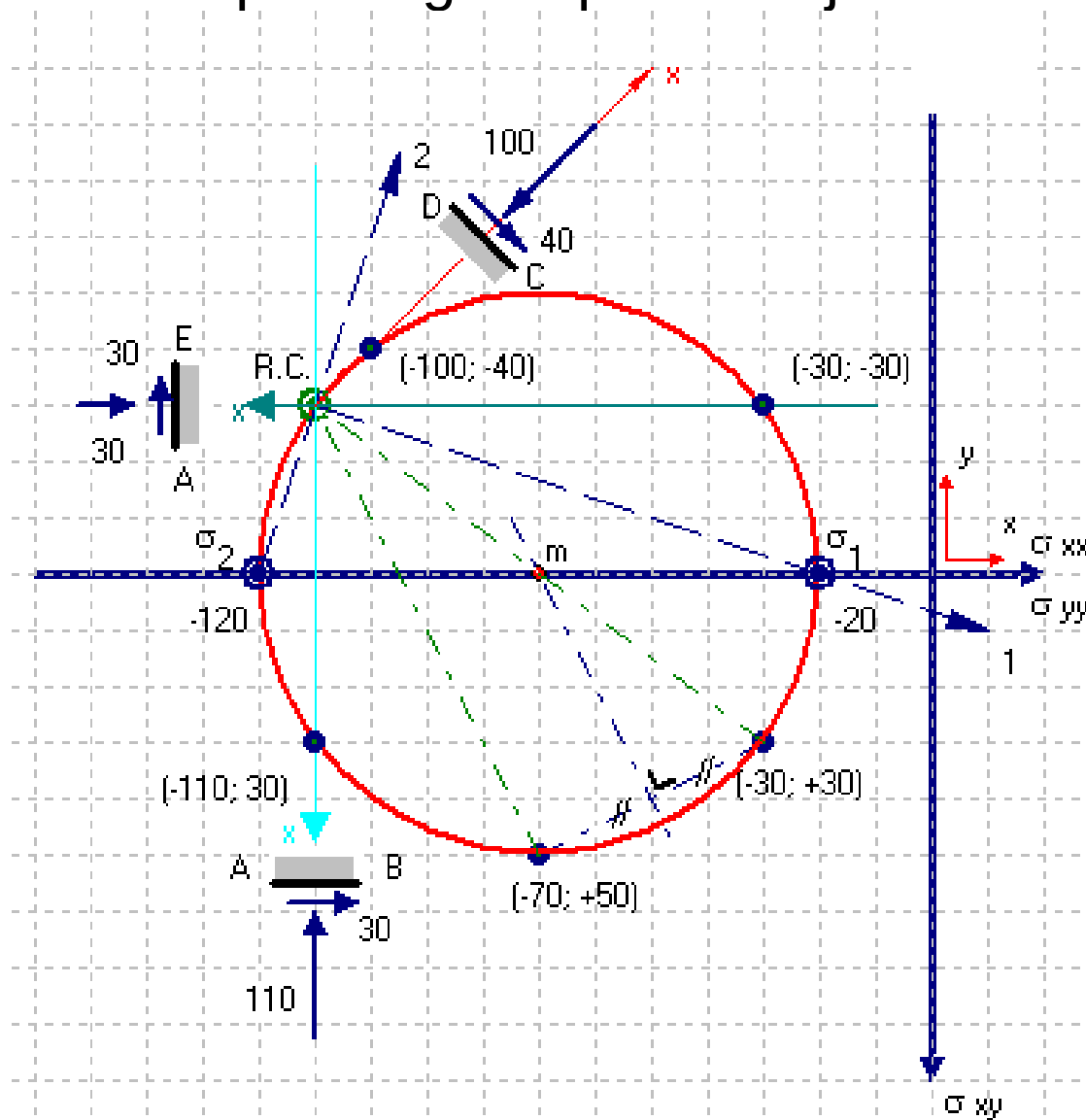
Richtingen-centrum



Plasticiteit en grensspanningshypothese

Cirkel van Mohr

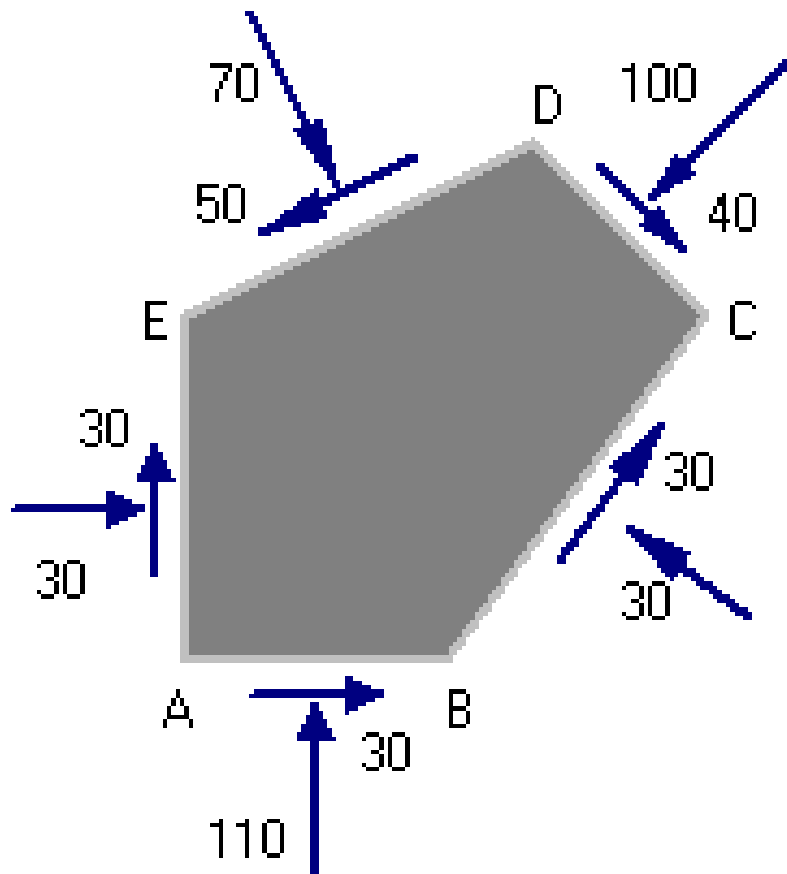
Spanningen op de vlakjes



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

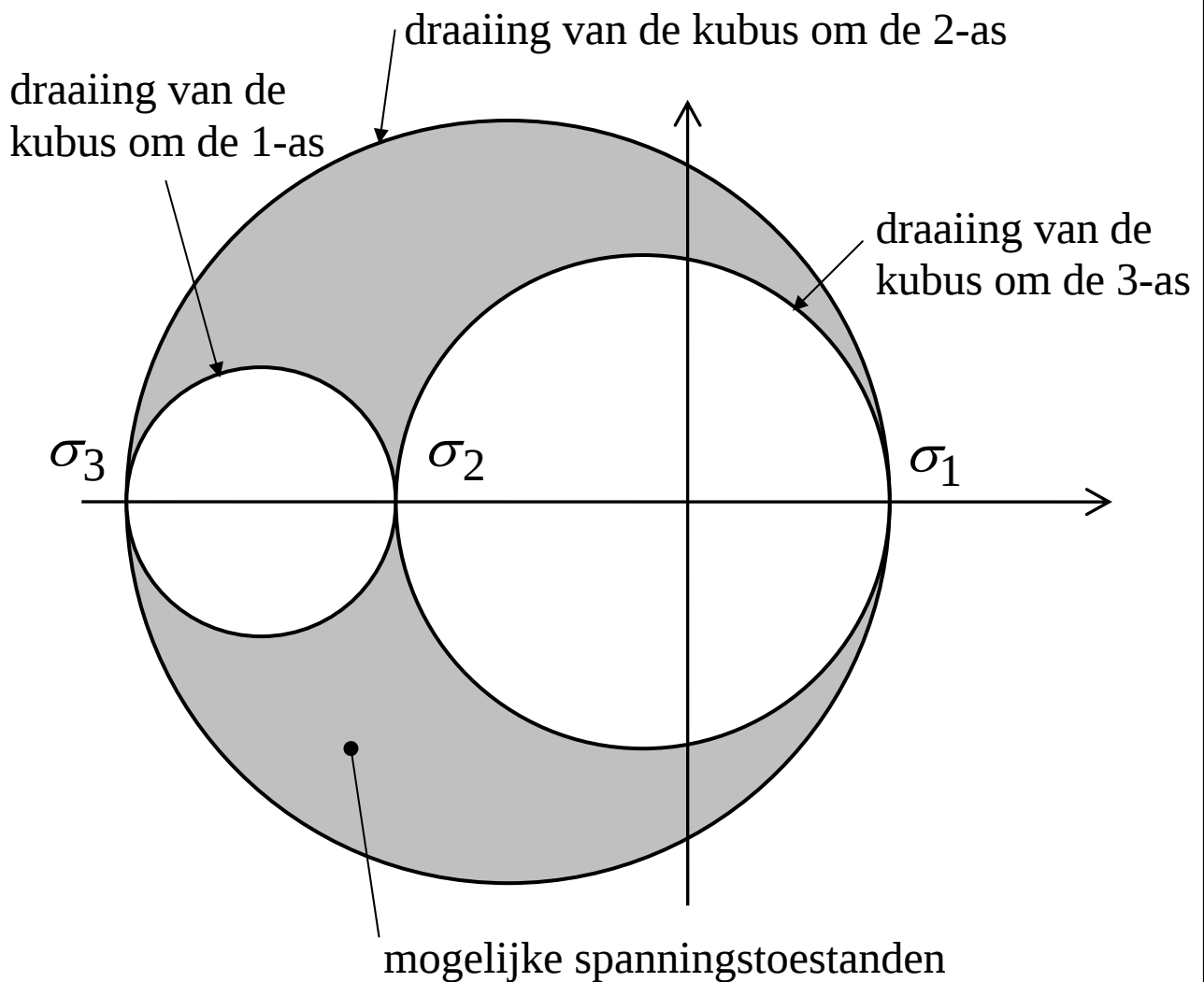
Cirkel van Mohr

Spanningen op de vlakjes



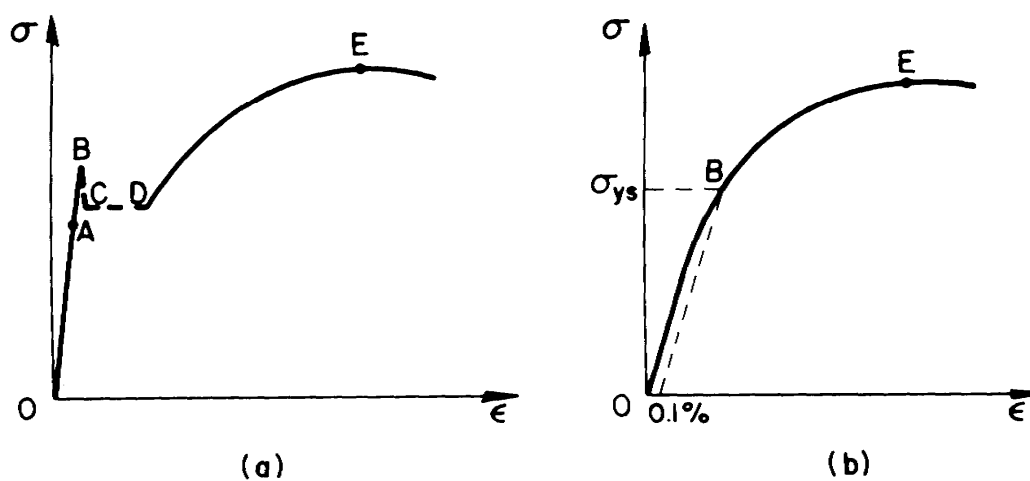
Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Cirkel van Mohr 3D



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TREKPROEVEN OP METALEN

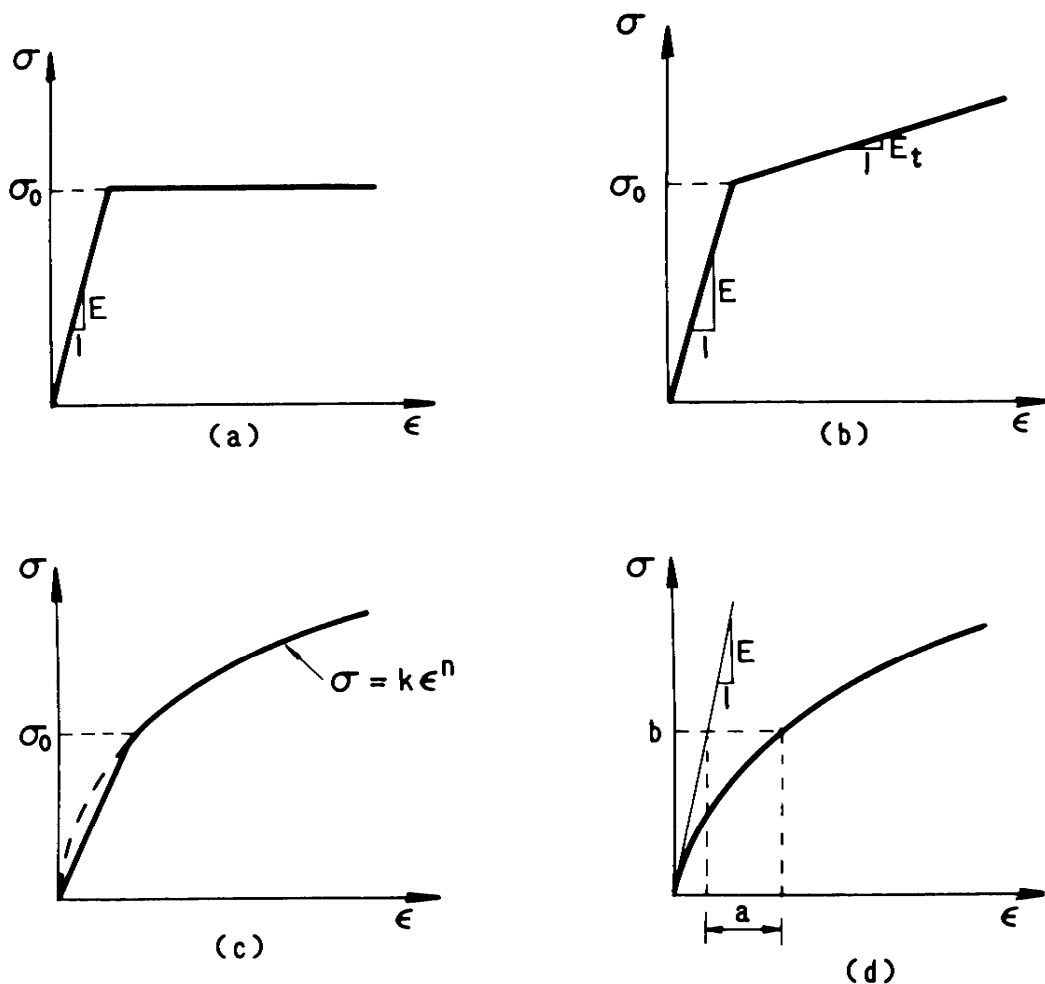


- Plastisch gedrag
- Met of zonder vloeitraject
- Kort plastisch traject = bros
- Lang plastisch traject = ductiel

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

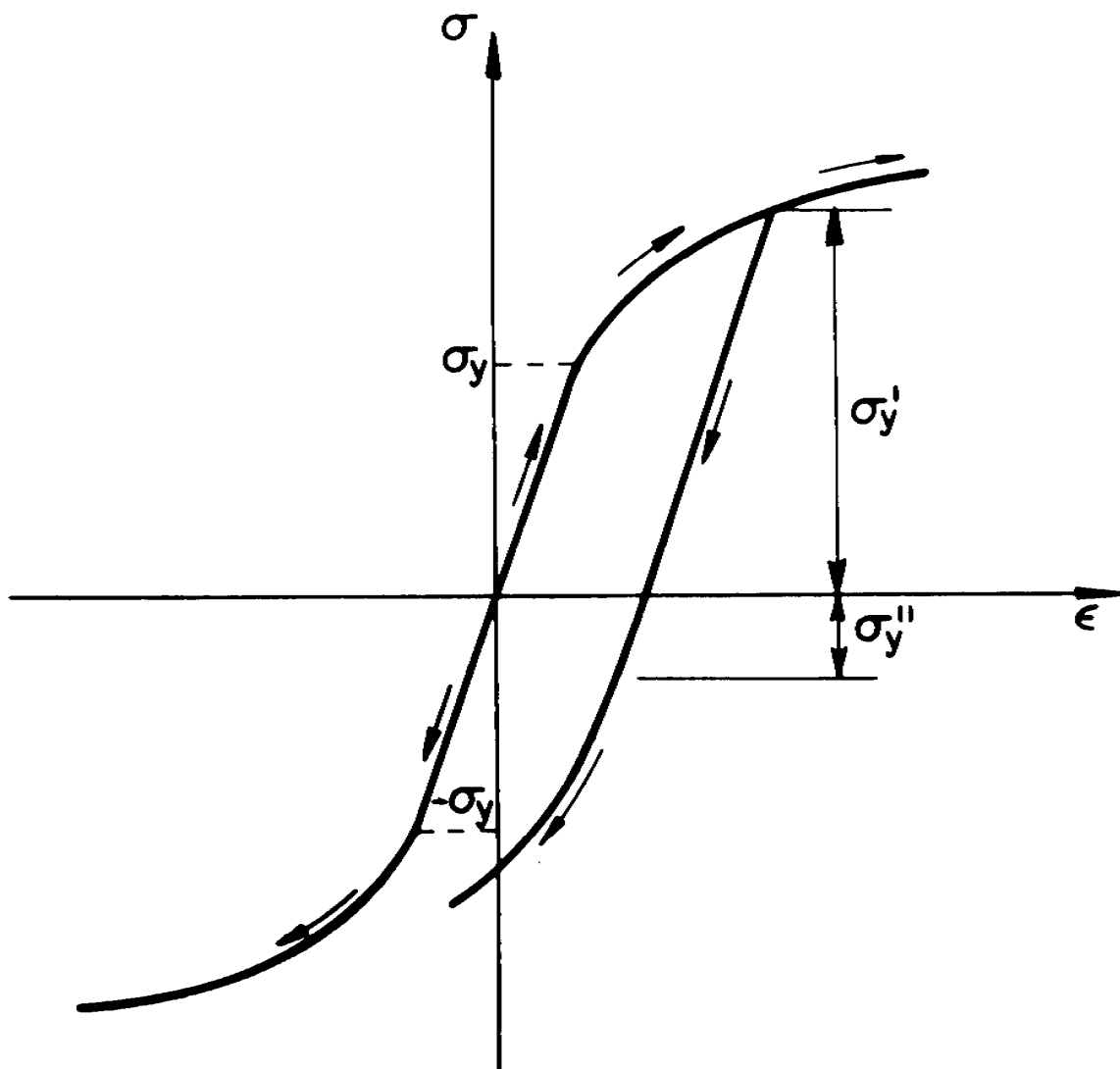
MODELLERING

Versteviging (Hardening)



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

BAUSCHINGER EFFECT



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

GRENSSPANNINGSHYPOTHESE

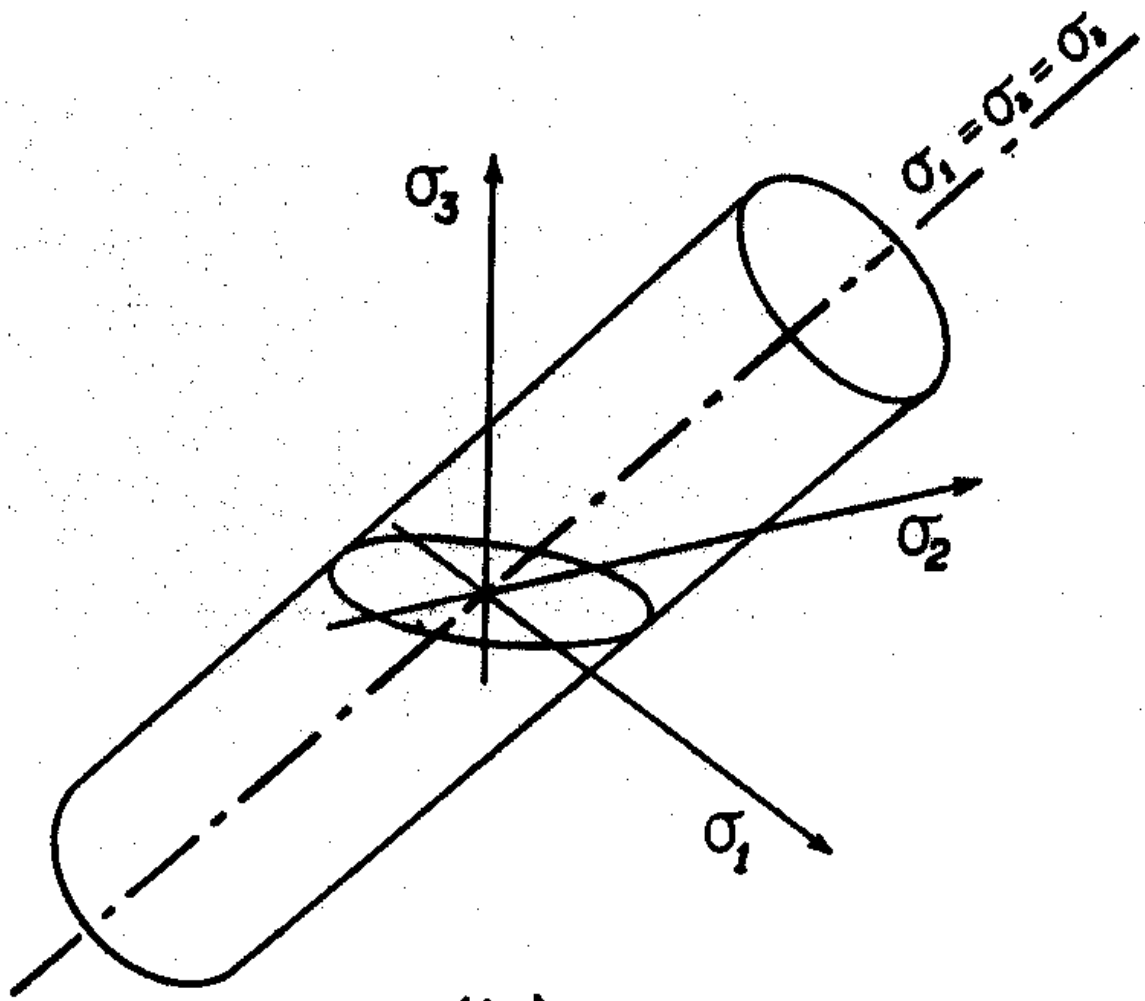
- Hypothese = Aanname (nog toetsen met experimenten)
- Wiskundige formulering van een criterium waarbij vloeï, breuk of verbrijzelen ontstaat

SYNONIEMEN

- Vloeivoorwaarde
- Vloeifunctie
- Vloeioppervlak
- Vloeicriterium
- Locus
- Belastingsfunctie
- ...

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

HOOFDSPANNINGSRUIMTE

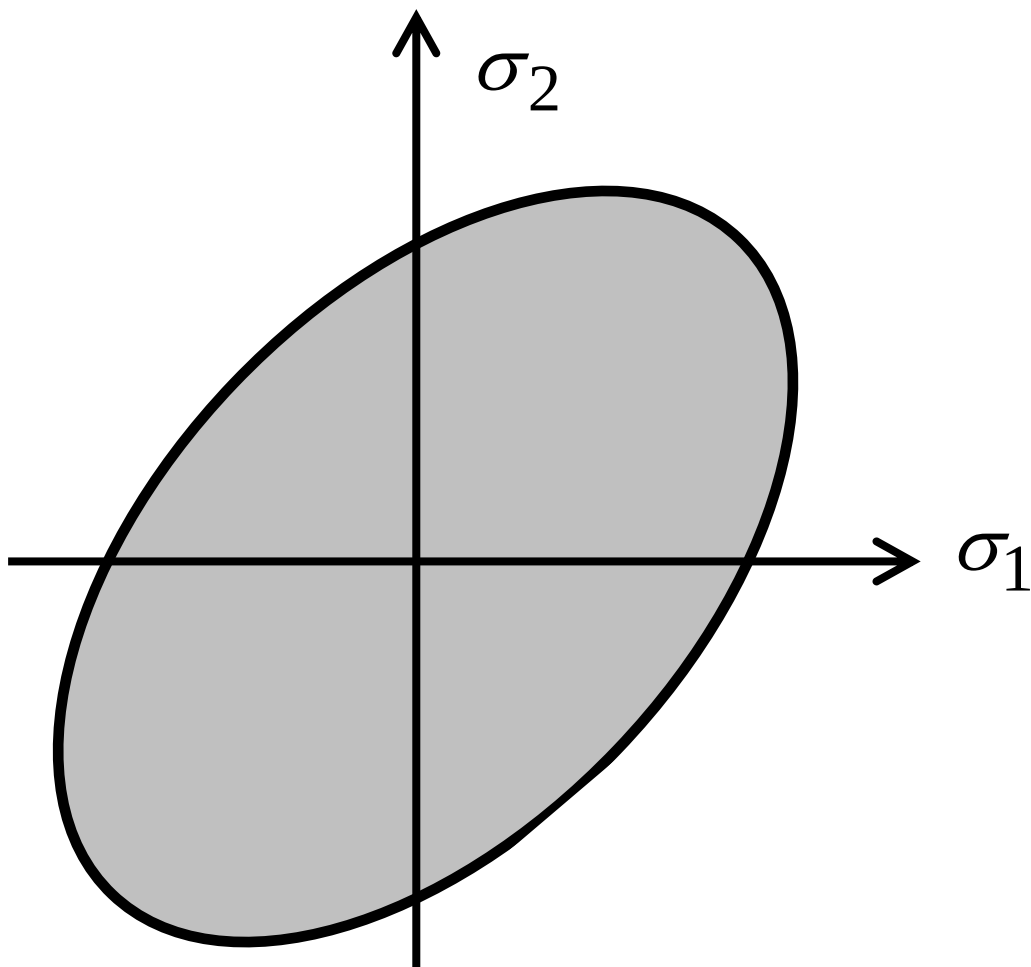


(Von Mises)

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

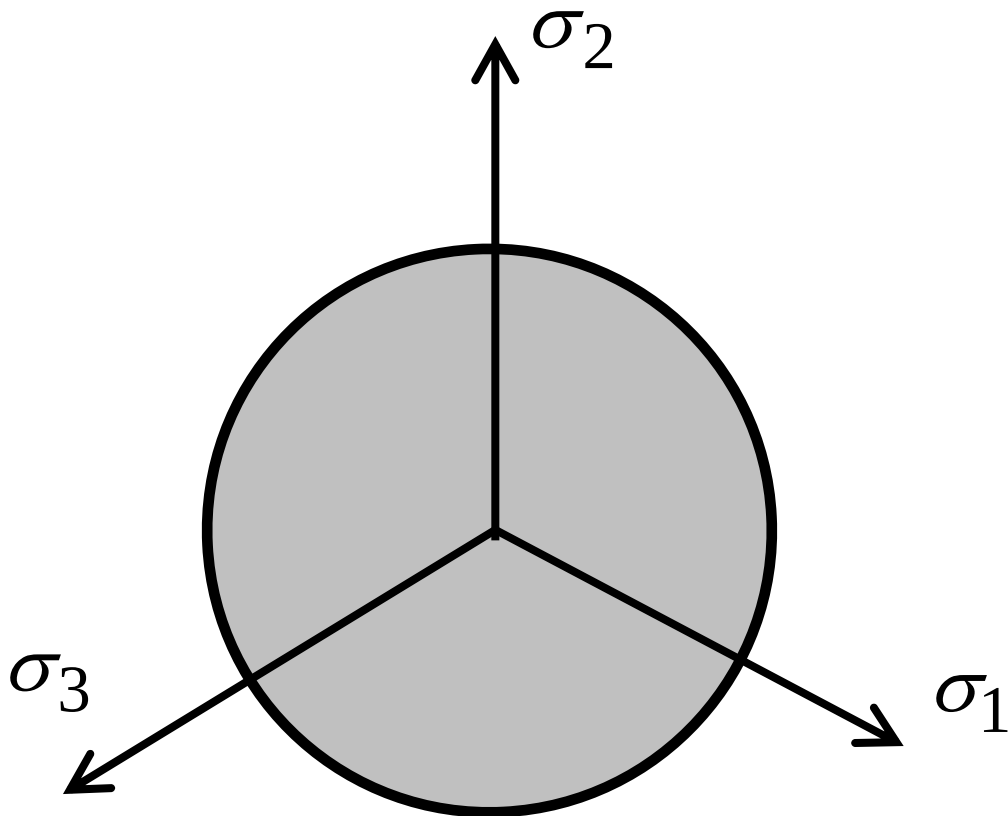
VLAKKE SPANNINGSTOESTAND

$$\sigma_3 = 0$$



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

π -VLAK



C-curve

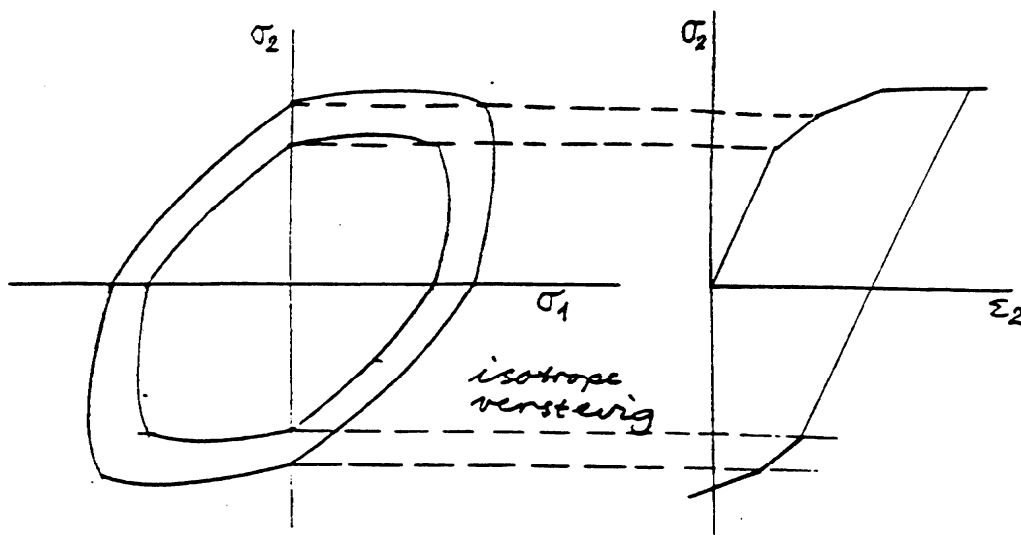
Plasticiteit en grensspanningshypothesen

WAT GEBEURT ER BIJ BELASTEN EN ONTLASTEN ?

- Belastingen binnen de vloeifunctie geeft elastisch gedrag.
- Als de vloeifunctie wordt geraakt kan vloeï optreden.
- Tijdens het vloeien kan de spanning langs de vloeifunctie lopen.
- Bij ontlasten wordt het gedrag weer elastisch.

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

NIET CONSTANTE VLOEIFUNCTIES

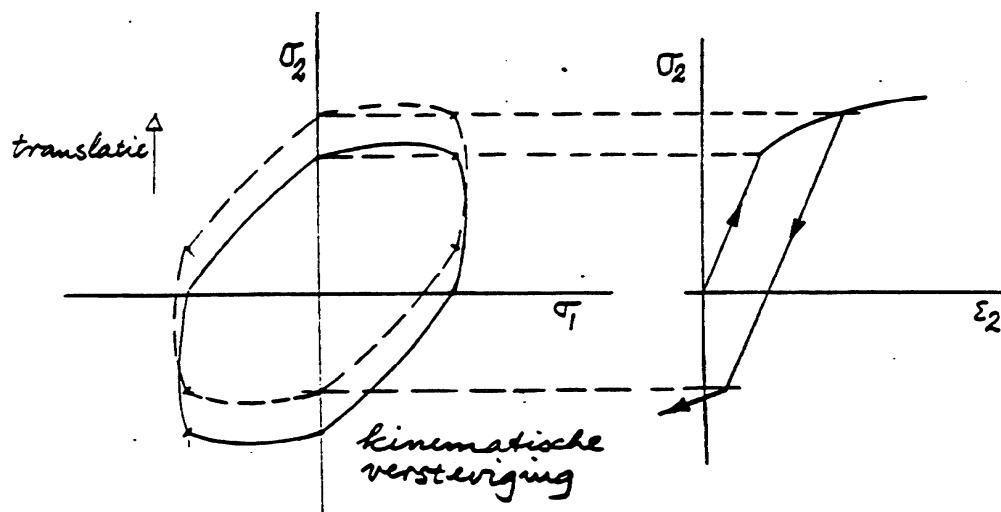


ISOTROPIC HARDENING

- Eenvoudig te programmeren
- Vaak niet realistisch

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

NIET CONSTATE VLOEIFUNCTIES



KINEMATIC HARDENING

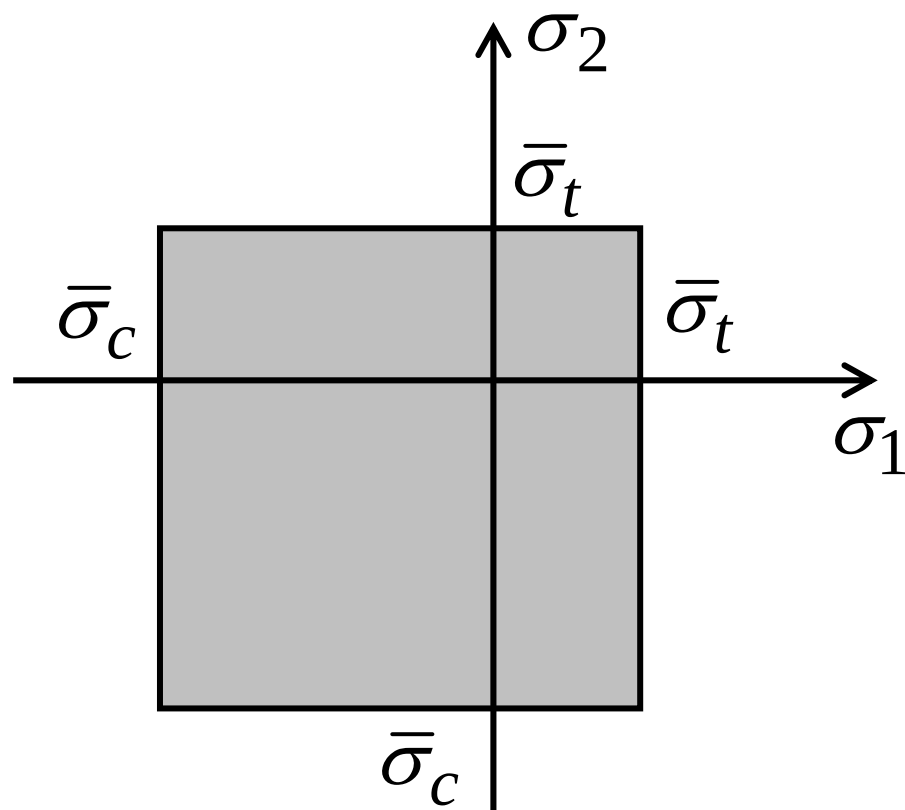
Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOGELIJKE VLOEIMODELLEN

- Maximale hoofdspanning
RANKINE
- Maximale hoofdrek
SAINT VENANT
- Maximale schuifspanning
TRESCA
- Maximale rek-energie
BELTRANI
- Maximale vervormingsenergie
VON MISES
- Interne wrijving
MOHR-COULOMB
DRUCKER-PRAGER

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

RANKINE



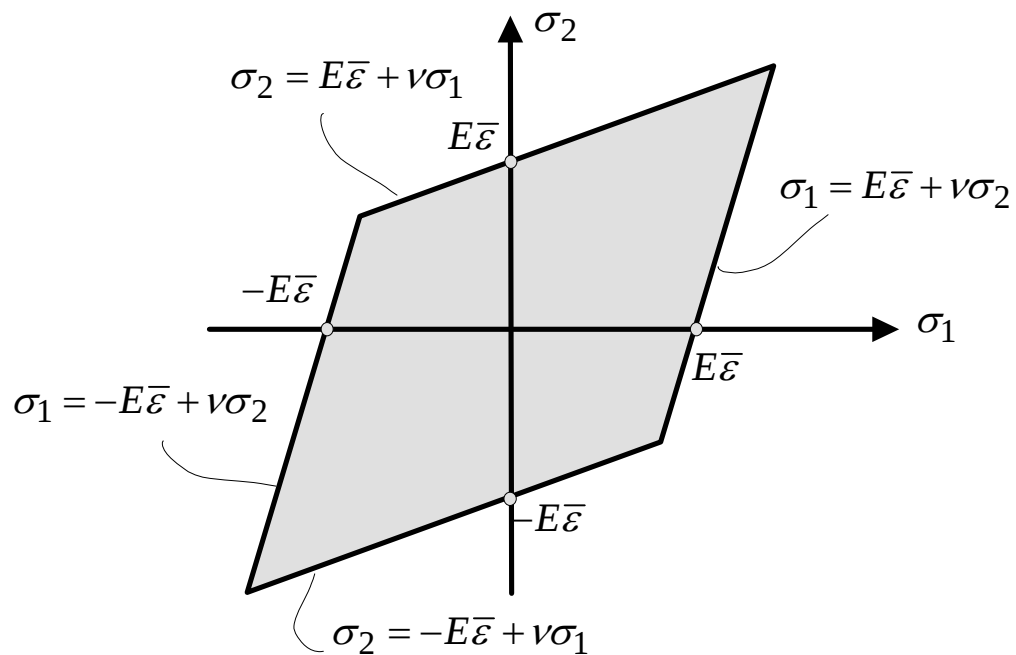
Grenzen aan de hoofdspanningen

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq \bar{\sigma}_t$$

Ongelijke sterkte voor trek en druk

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

SAINT VENANT



Grenzen aan de hoofdrekken

$$-\bar{\varepsilon} \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \leq \bar{\varepsilon}$$

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

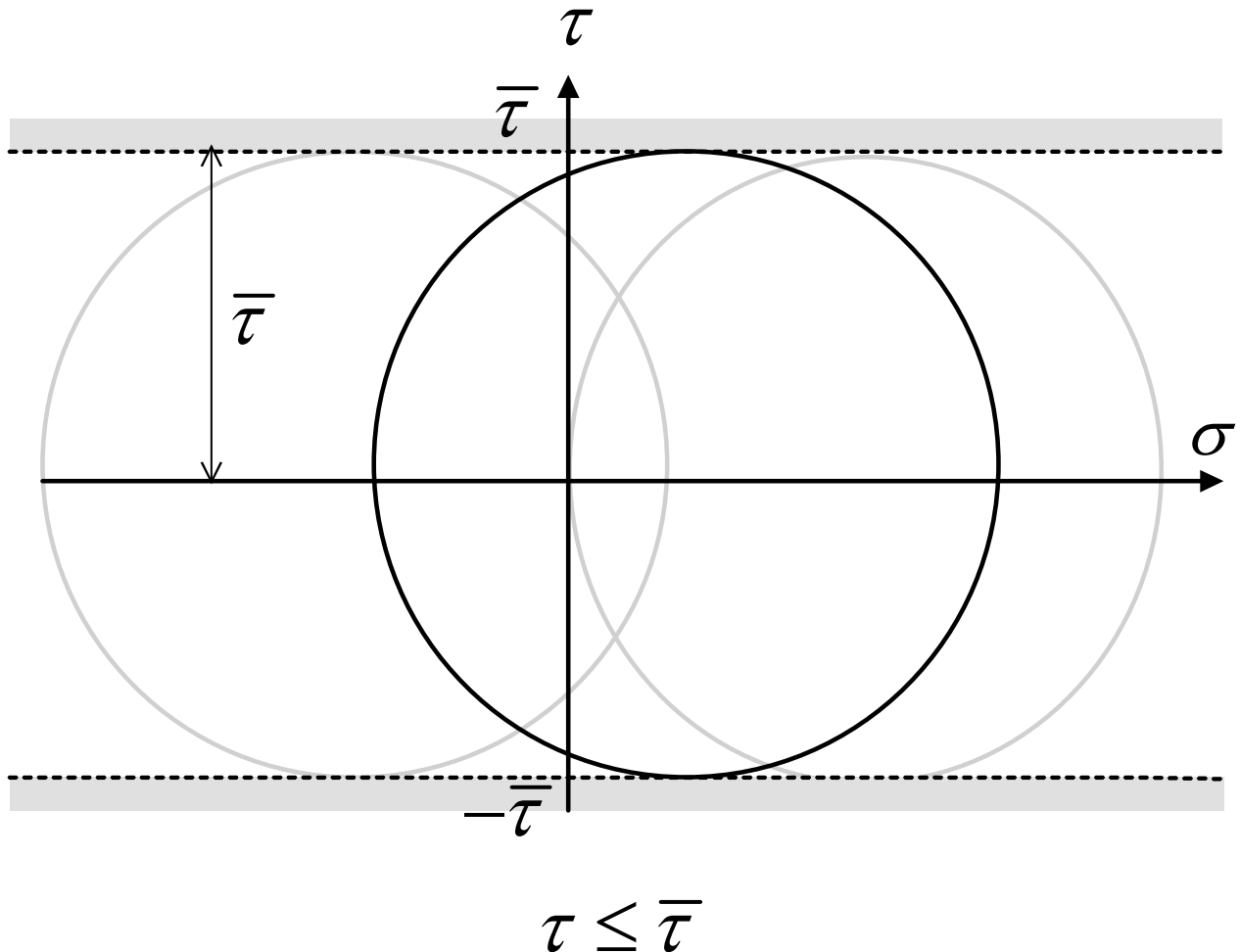
$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \nu\sigma_2]$$

$$\sigma_1 = \bar{\varepsilon}E + \nu\sigma_2$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

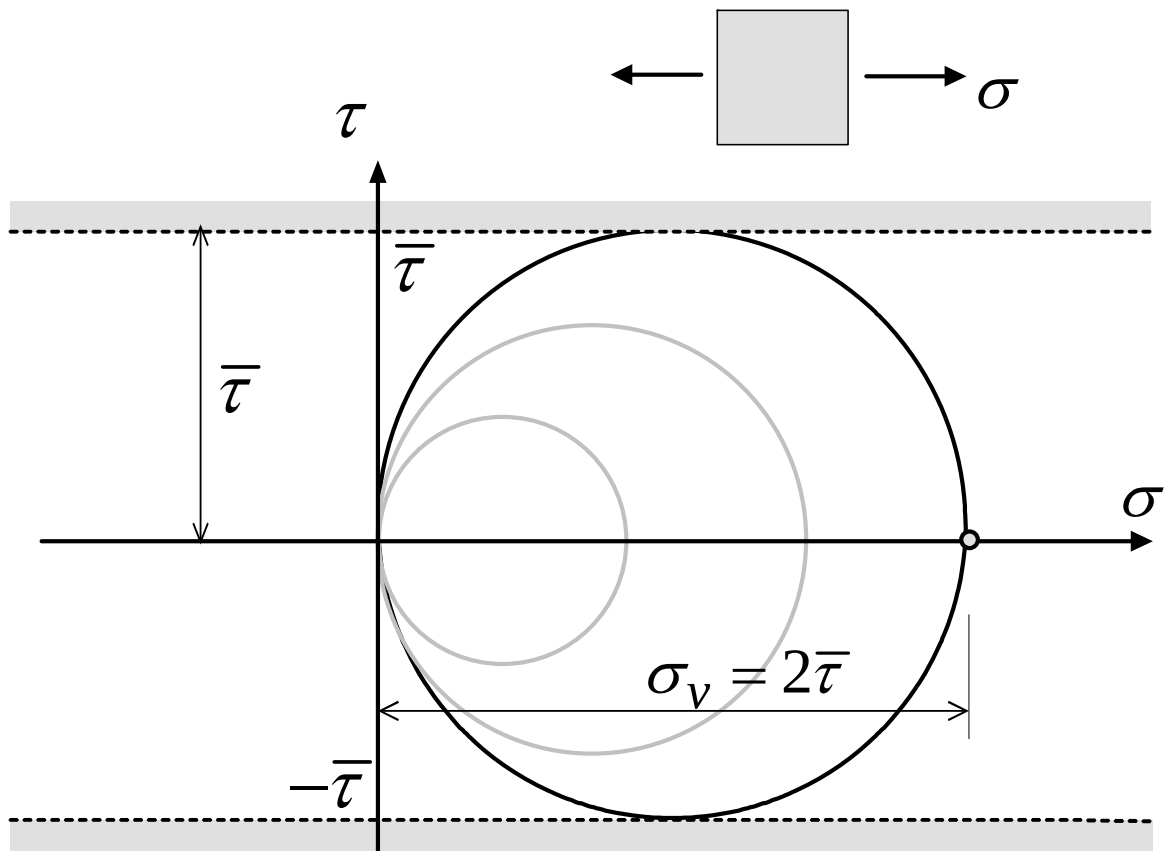
TRESCA

Grens aan de grootste schuifspanning op
iedere mogelijke snede



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TRESCA (VERVOLG)

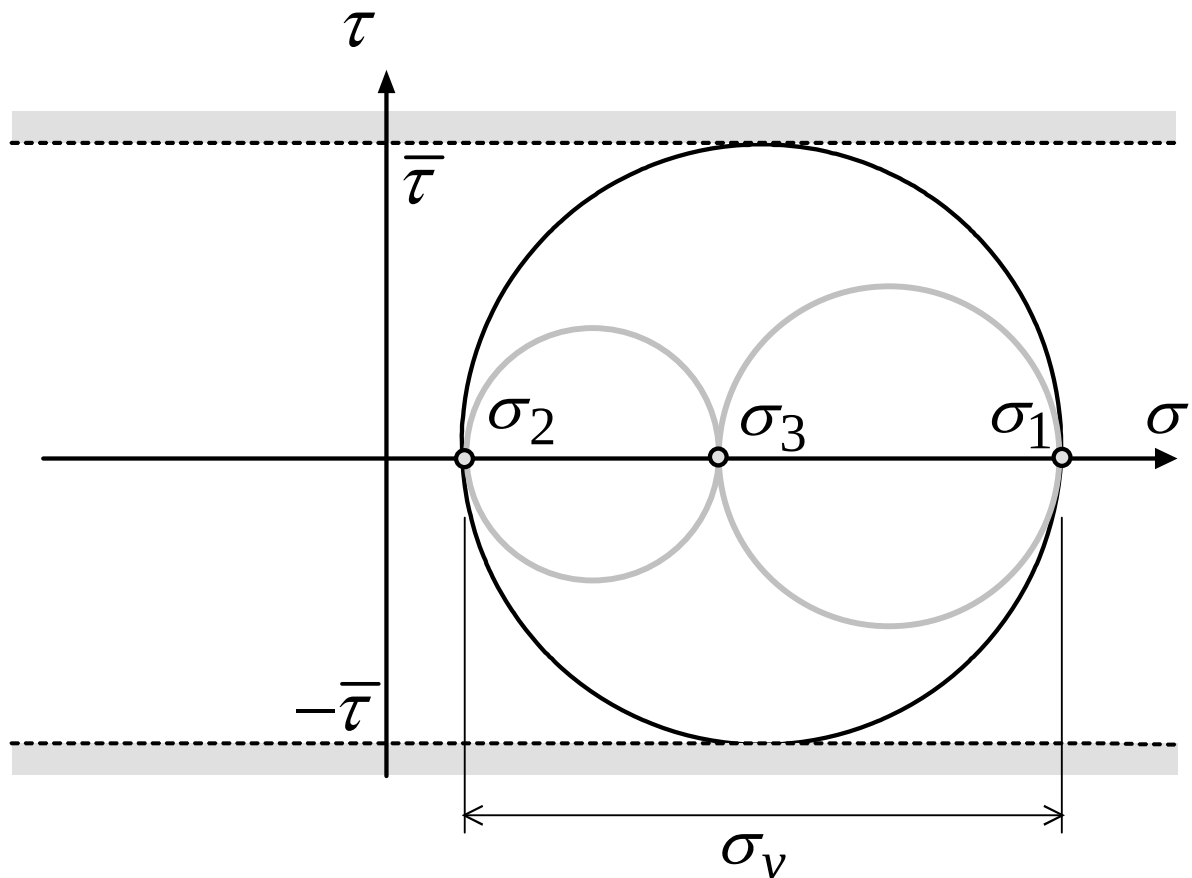


Dus we kunnen ook schrijven

$$2\tau \leq \sigma_v$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TRESCA (VERVOLG)



Dus we kunnen ook schrijven

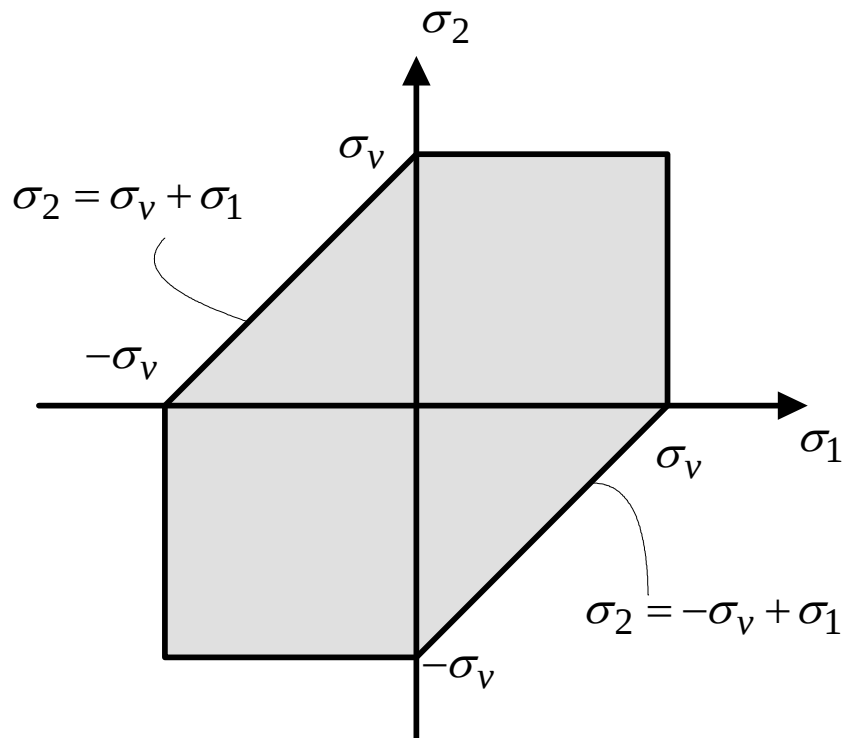
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_v$$

$$|\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_v$$

$$|\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_v$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TRESCA (VERVOLG)



$$\sigma_3 = 0$$

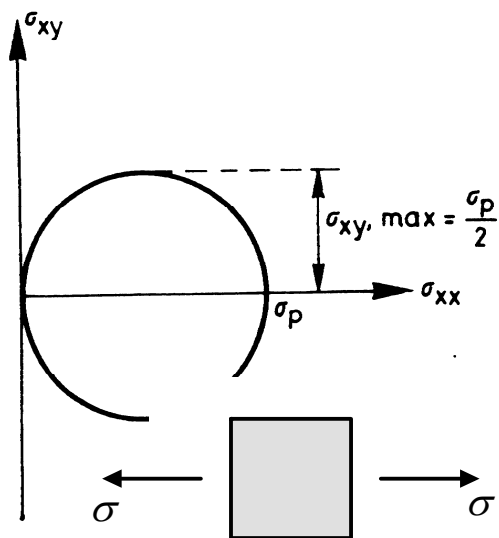
$$|\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_v$$

$$|\sigma_2| \leq \sigma_v$$

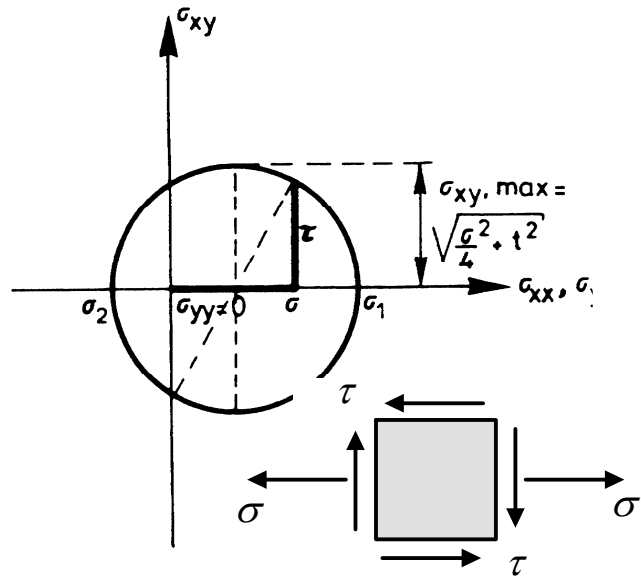
$$|\sigma_1| \leq \sigma_v$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

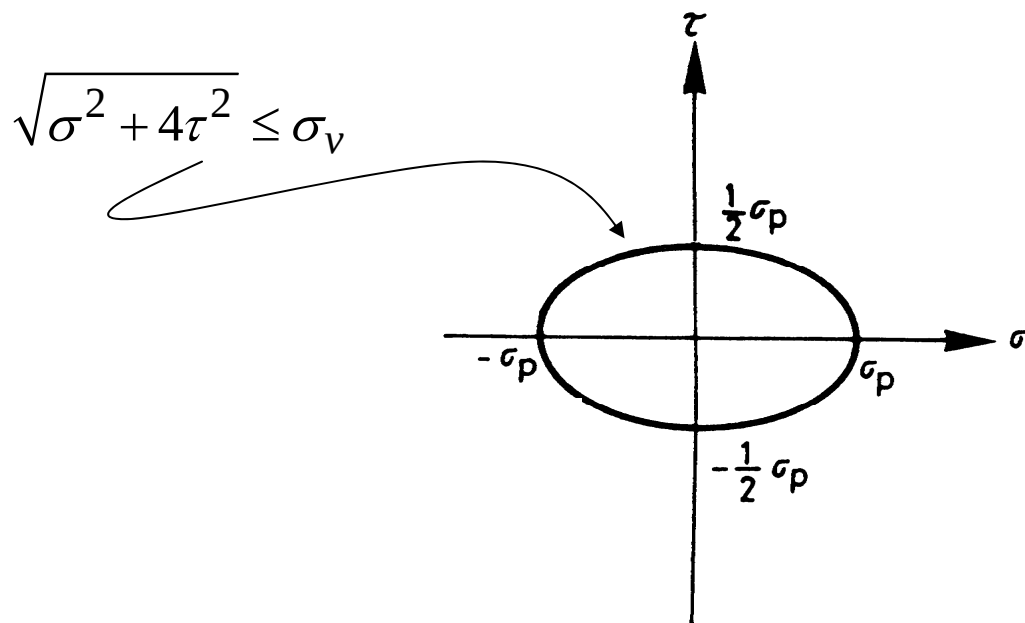
TRESCA (VERVOLG)



trek



trek + afschuiving



Plasticiteit en grensspanningshypothese

BELTRANI

Grens aan de vormveranderingsenergie

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)$$

met :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2))$$

dus

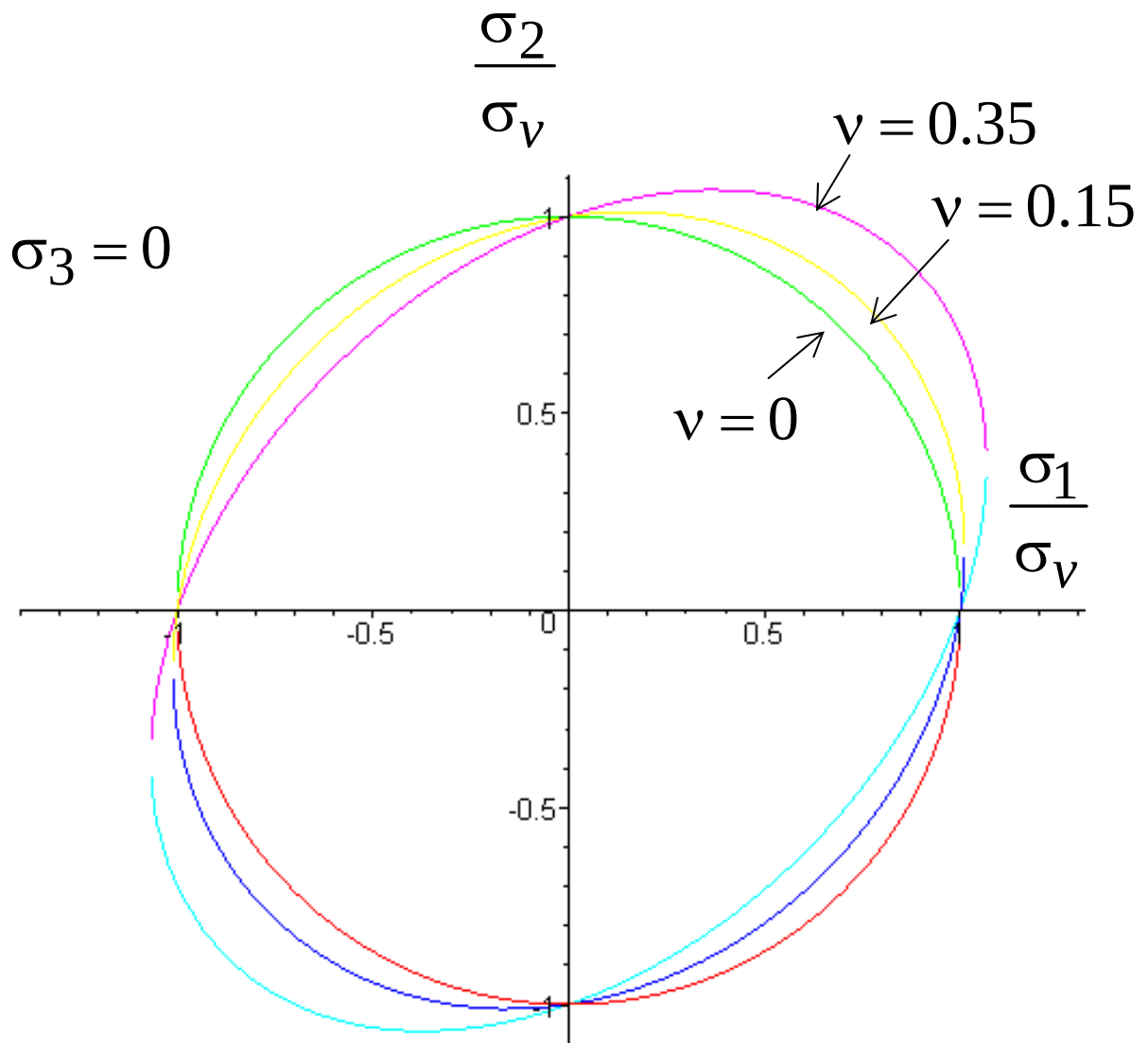
$$W = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{2E} \leq \bar{W}$$

$$\bar{W} = \frac{\sigma_v^2}{2E}$$

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \leq \sigma_v^2$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

BELTRANI



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

VON MISES

Grens aan de gedaante-veranderings-energie

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \sum_{i=x,y,z} \sum_{j=x,y,z} s_{ij} \varepsilon_{ij}$$

$$s_{xx} = \sigma_{xx} - \sigma_o$$

$$s_{xy} = \sigma_{xy} \quad \text{etc.}$$

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

Resultaat:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \leq \sigma_v$$

Of:

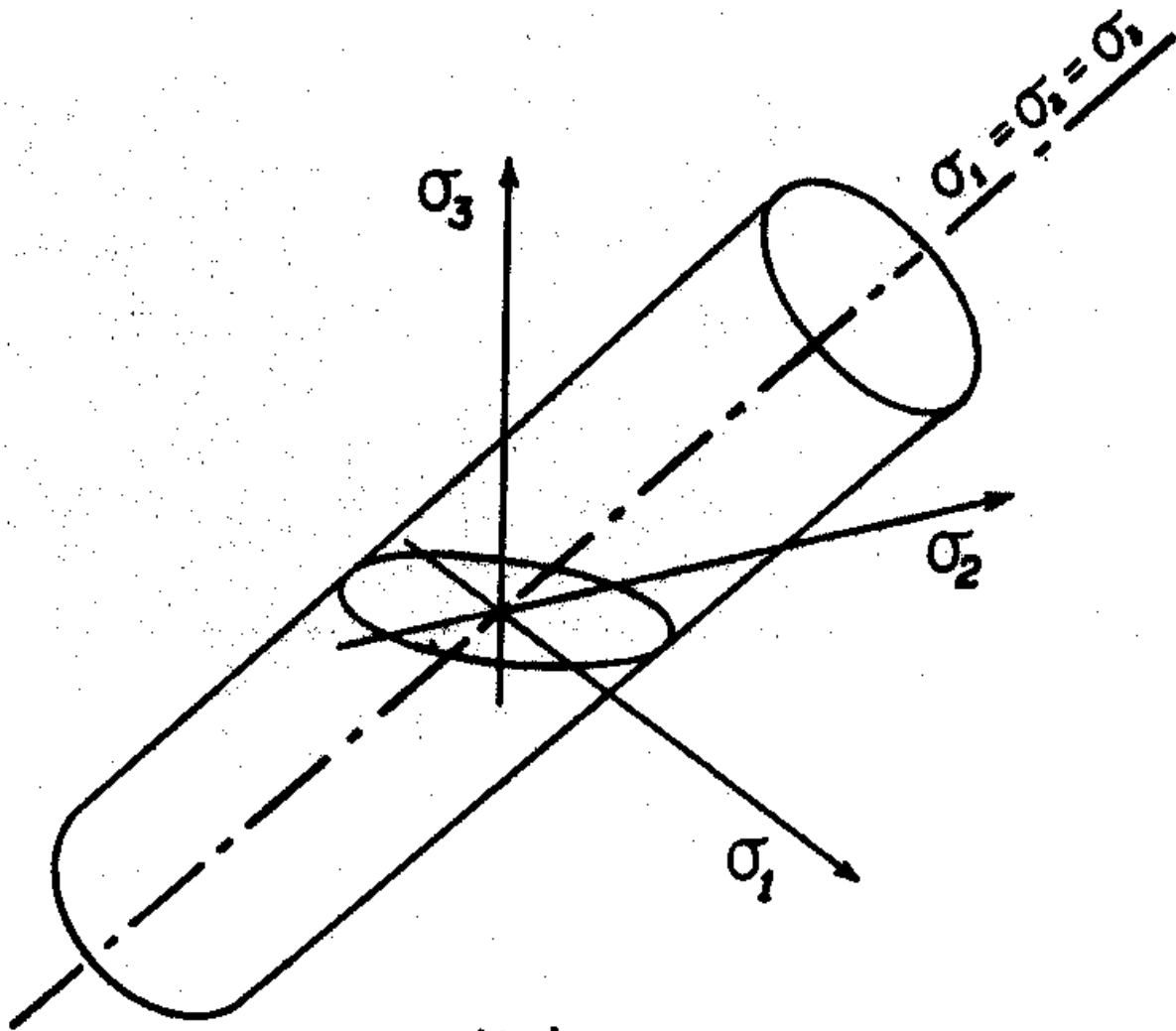
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_v$$

Of:

$$\sqrt{3J_2} \leq \sigma_v$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

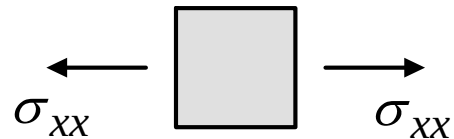
VON MISES



Plasticiteit en grensspanningshypothese

VON MISES

Zuivere trek

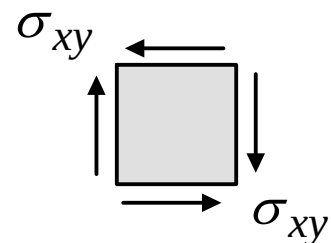


$$0 = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz}$$

Dus

$$\sigma_{xx} \leq \sigma_v$$

Zuivere afschuiving



$$0 = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz}$$

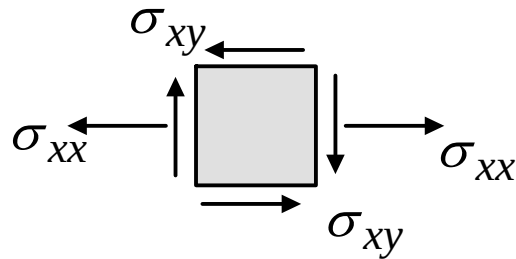
Dus

$$\sqrt{3}\sigma_{xy} = \sigma_v \Rightarrow \boxed{\sigma_{xy} \leq 0,58\sigma_v}$$

Plasticiteit en grensspanningshypothese

VON MISES

Trek plus afschuiving



$$0 = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz}$$

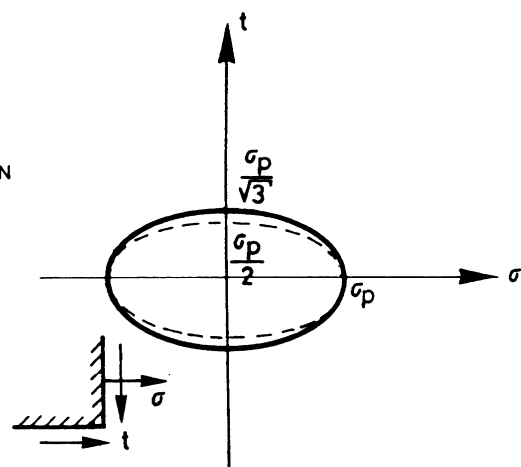
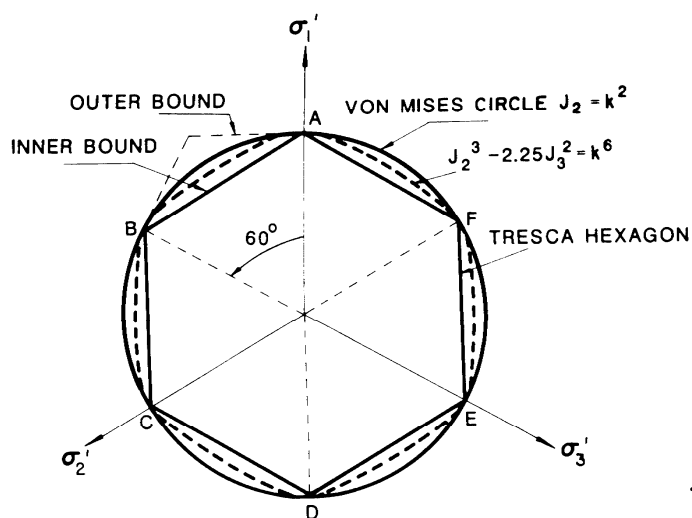
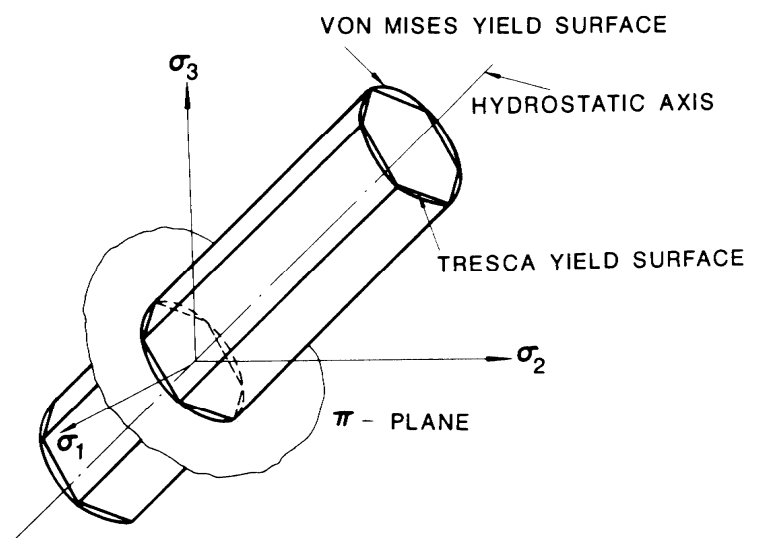
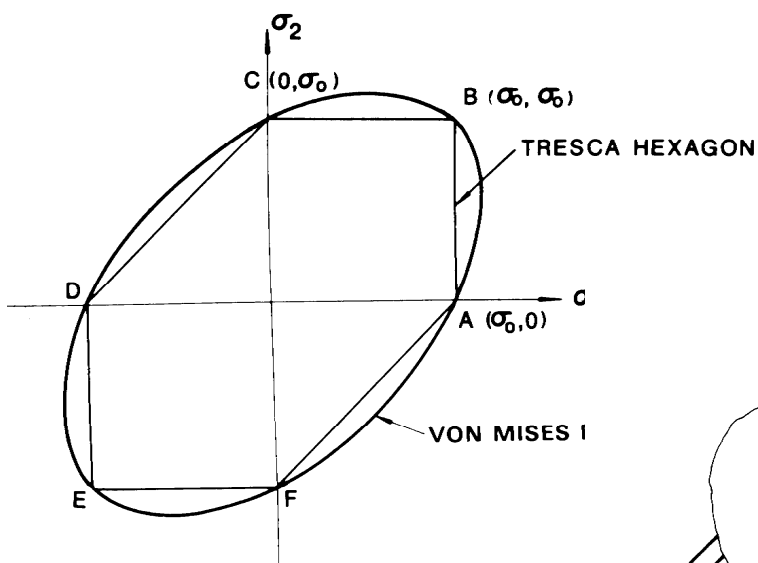
Dus

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 + 3\sigma_{xy}^2} \leq \sigma_v$$

(Huber Hencky)

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

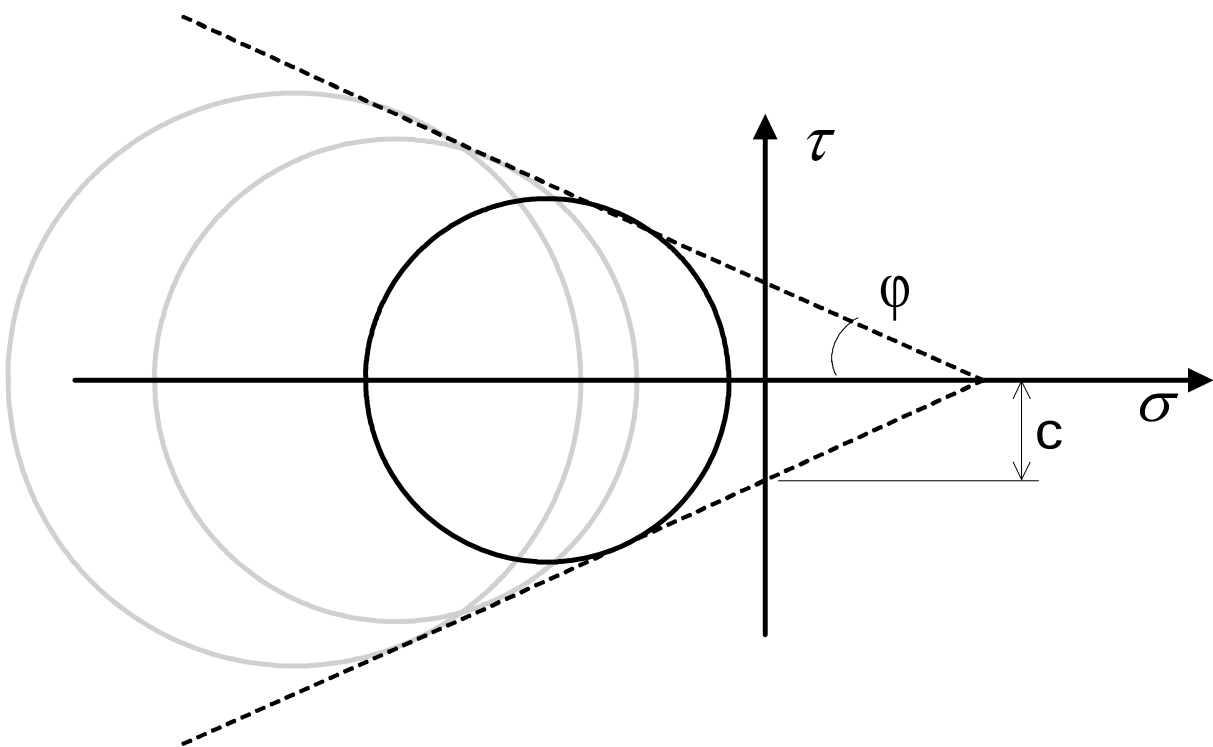
VON MISES versus TRESCA



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB

Grens aan de combinatie van τ en σ op
iedere mogelijke snede



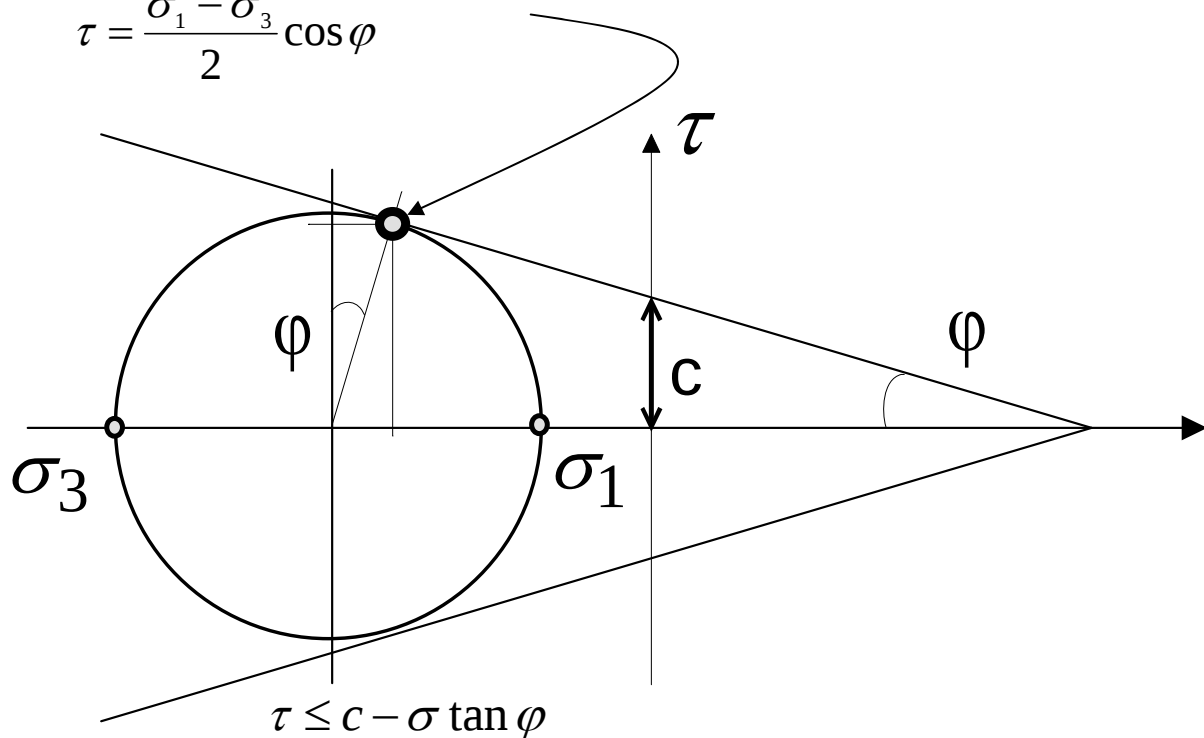
$$\tau \leq c - \sigma \tan \varphi$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \varphi$$



invullen:

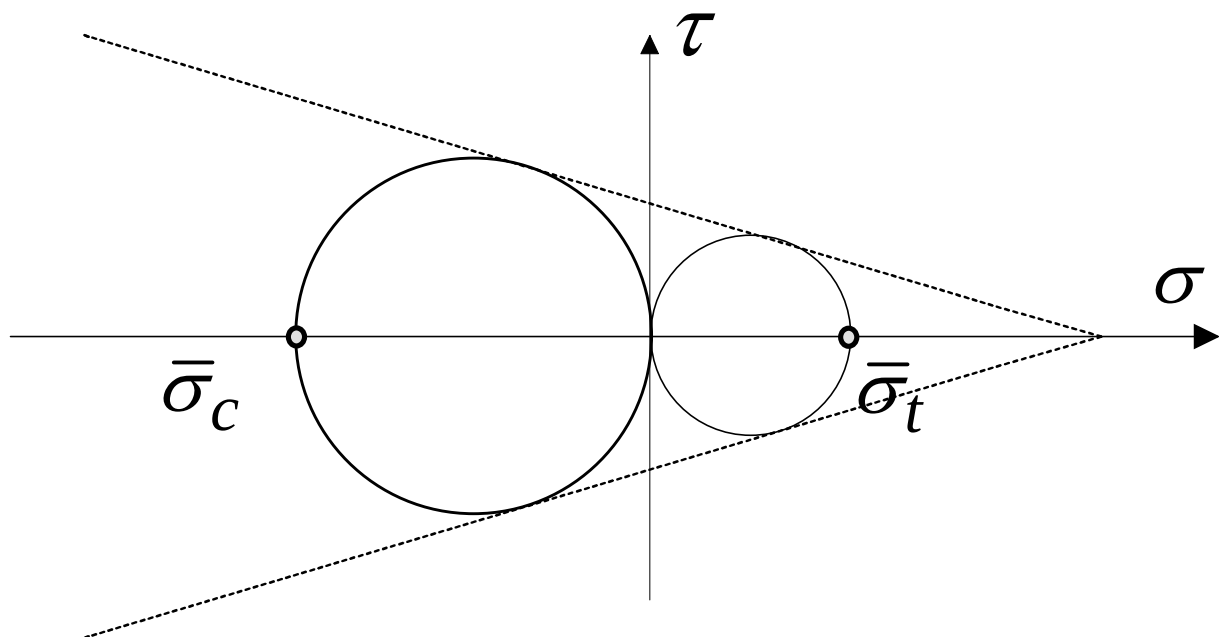
$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \varphi \leq c - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \varphi \right) \tan \varphi$$

vereenvoudigen:

$$\sigma_1 \frac{1 + \sin \varphi}{2c \cos \varphi} - \sigma_3 \frac{1 - \sin \varphi}{2c \cos \varphi} \leq 1$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB



Zuivere druk

$$\bar{\sigma}_c = \frac{2c \cos \varphi}{\sin \varphi - 1}$$

Zuivere trek

$$\bar{\sigma}_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Algemene formulering:

$$\frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_c} \leq 1$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB Voorbeeld

Grond: $c = 3,0 \text{ MPa}$
 $\varphi = 0,2 \text{ rad}$

Te dragen spanningstoestand:

$$\sigma_1 = -0,86 \quad \sigma_2 = -4,16 \quad \sigma_3 = 3,88$$

Gevraagd: Zal het bezwijken?

$$\bar{\sigma}_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{2 * 3,0 * \cos 0,2}{1 + \sin 0,2} = 4,91$$

$$\bar{\sigma}_c = \frac{2c \cos \varphi}{\sin \varphi - 1} = \frac{2 * 3,0 * \cos 0,2}{\sin 0,2 - 1} = -7,34$$

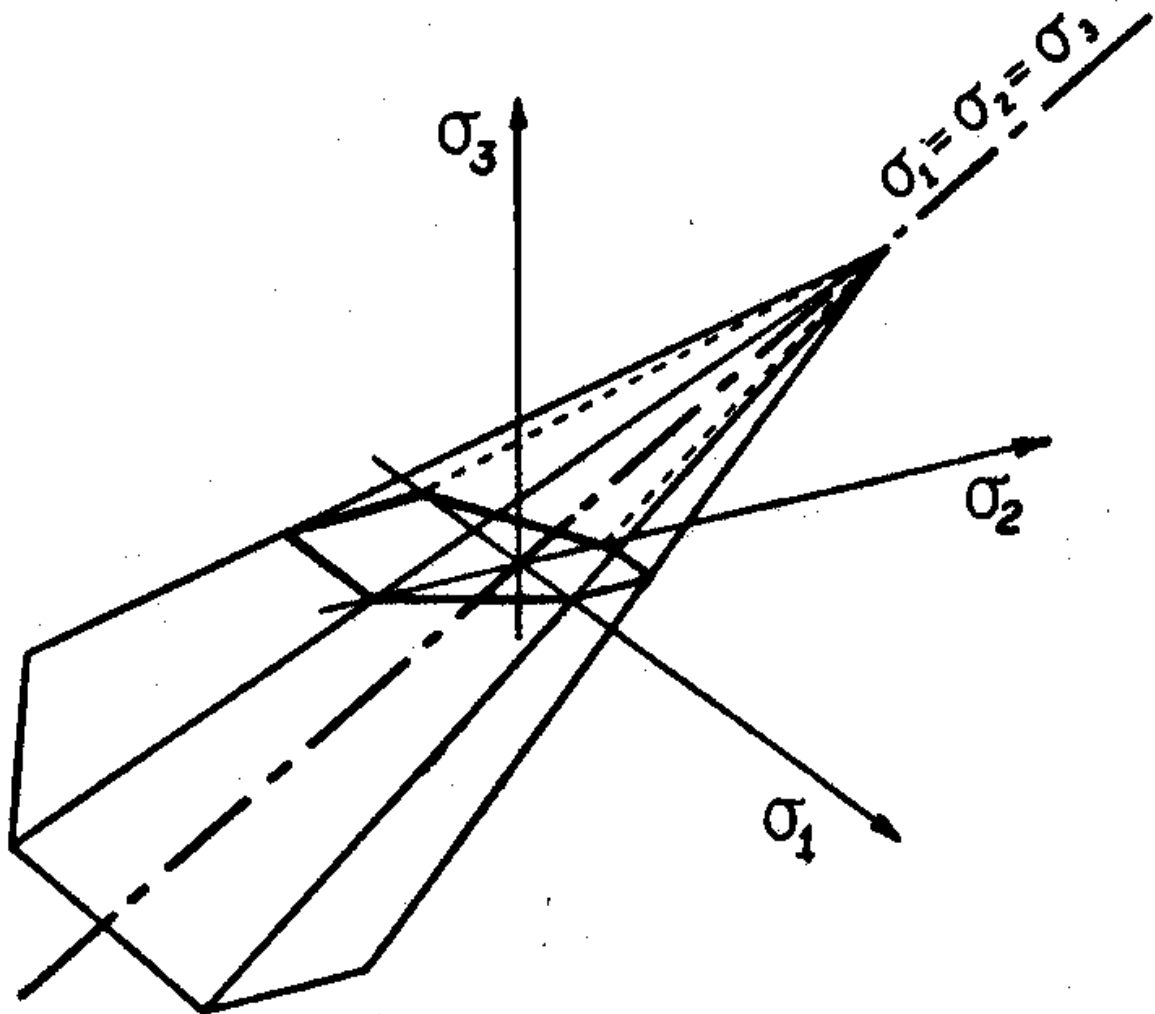
$$\frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_c} =$$

$$\frac{3,88}{4,91} + \frac{-4,16}{-7,34} = 1,36$$

1,36 is groter dan 1. Dus de grond zal bezwijken.

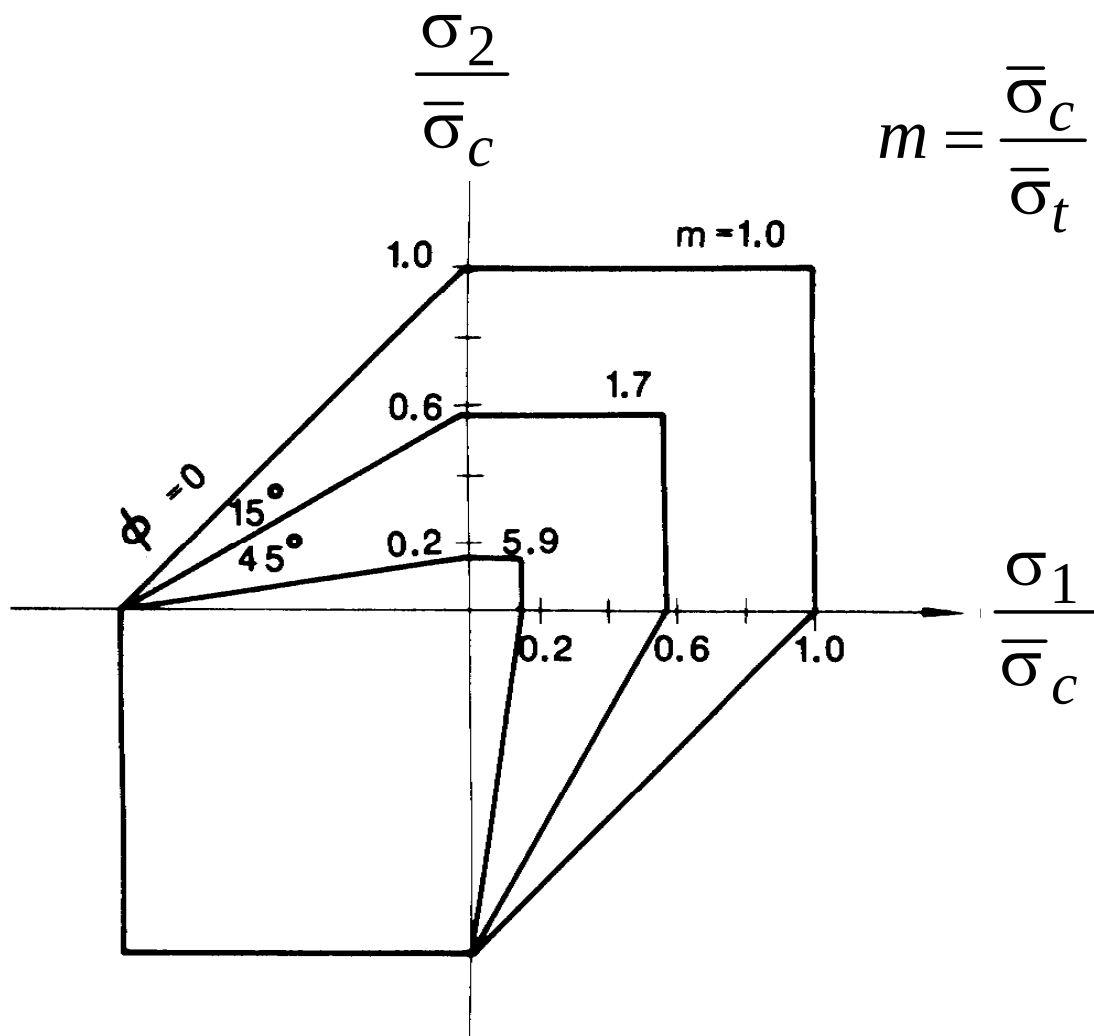
Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB



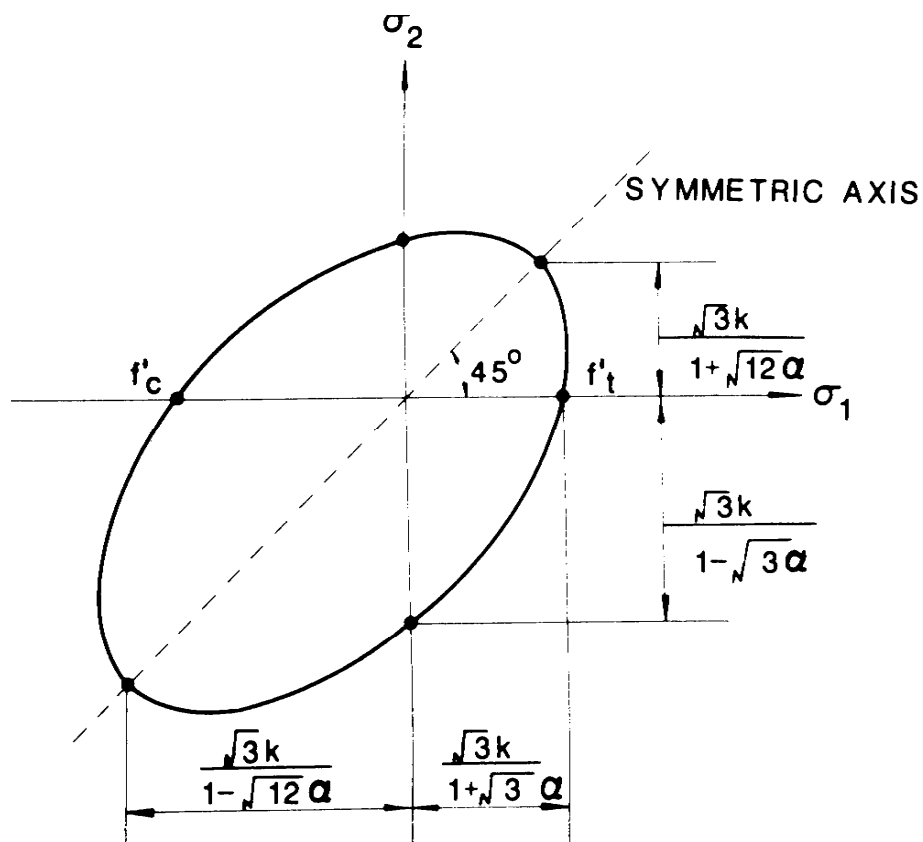
Plasticiteit en grensspanningshypothesen

MOHR-COULOMB



Plasticiteit en grensspanningshypothese

DRUCKER-PRAGER met hydrostatische invloed



Von Mises :

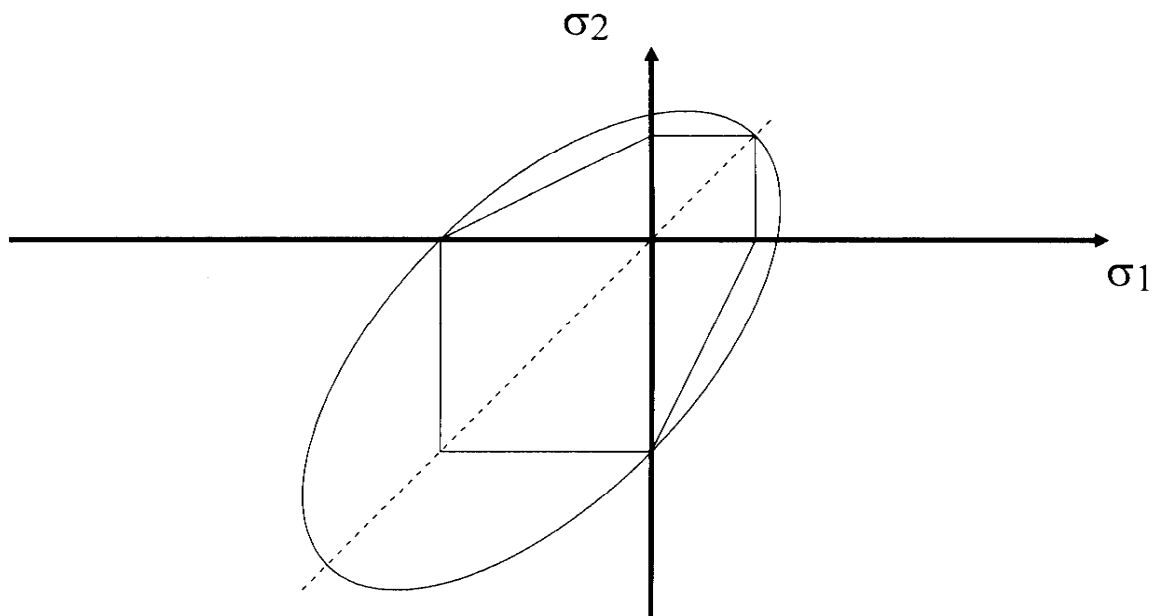
$$J_2 = \frac{1}{3} \overline{\sigma}^2$$

Drucker – Prager

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k$$

Plasticiteit en grensspanningshypothese

MOHR-COULOMB versus DRUCKER-PRAGER

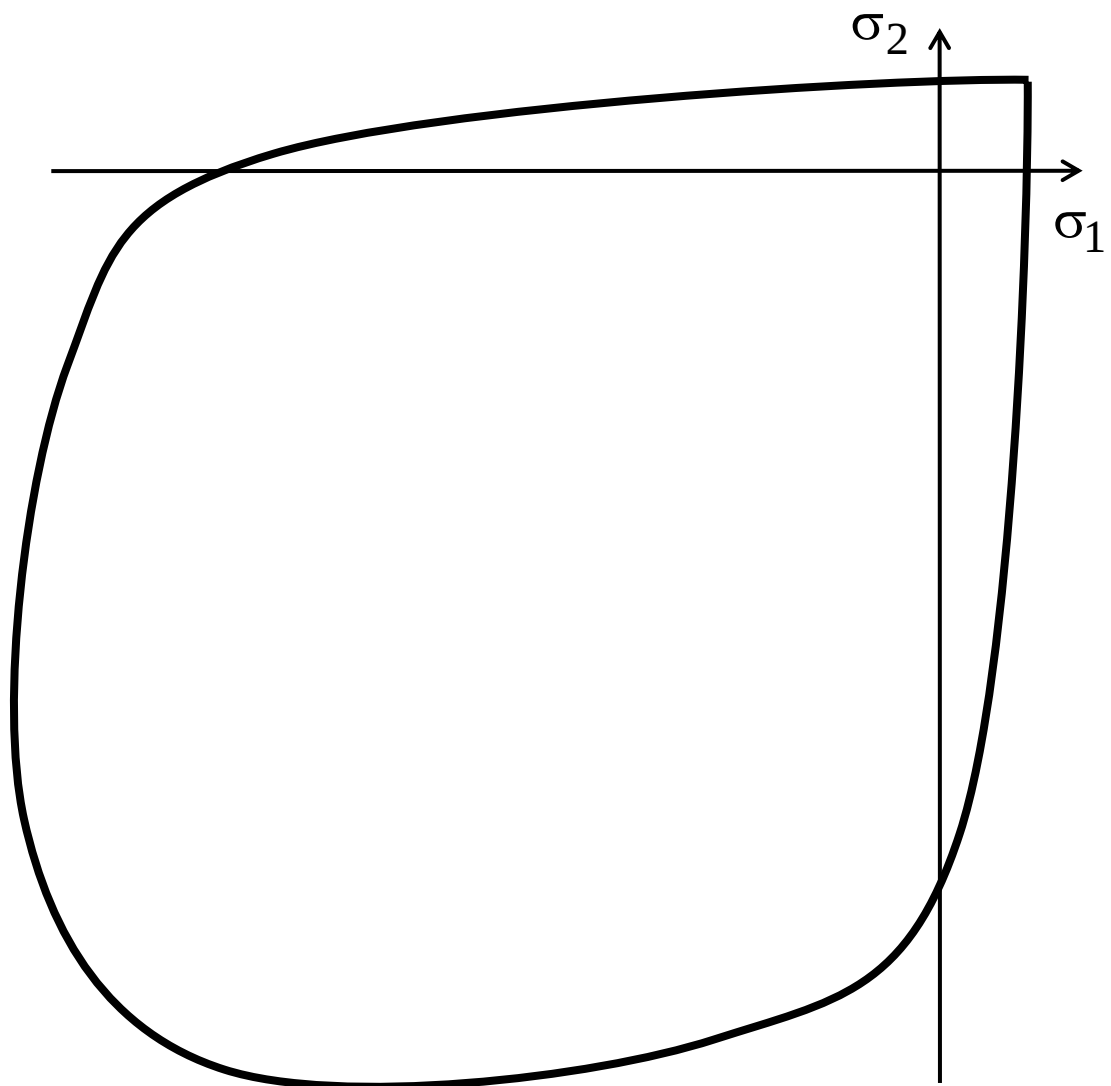


$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{3}(3 + \sin \varphi)} \quad \text{en} \quad k = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)}$$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

ONGEWAPEND BETON

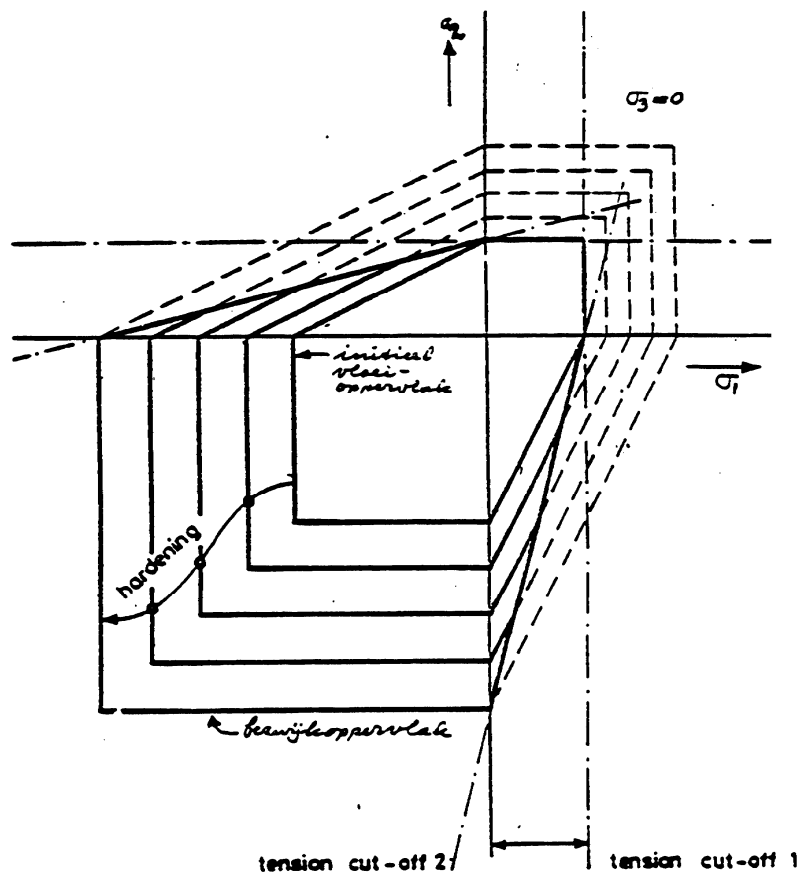
Experimentele resultaat



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Model voor ONGEWAPEND BETON

- Rankine is geschikt voor trek (tension cut-off).
- Mohr-Coulomb is geschikt voor druk.



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

Rankine $\bar{\sigma}_c \leq \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t$

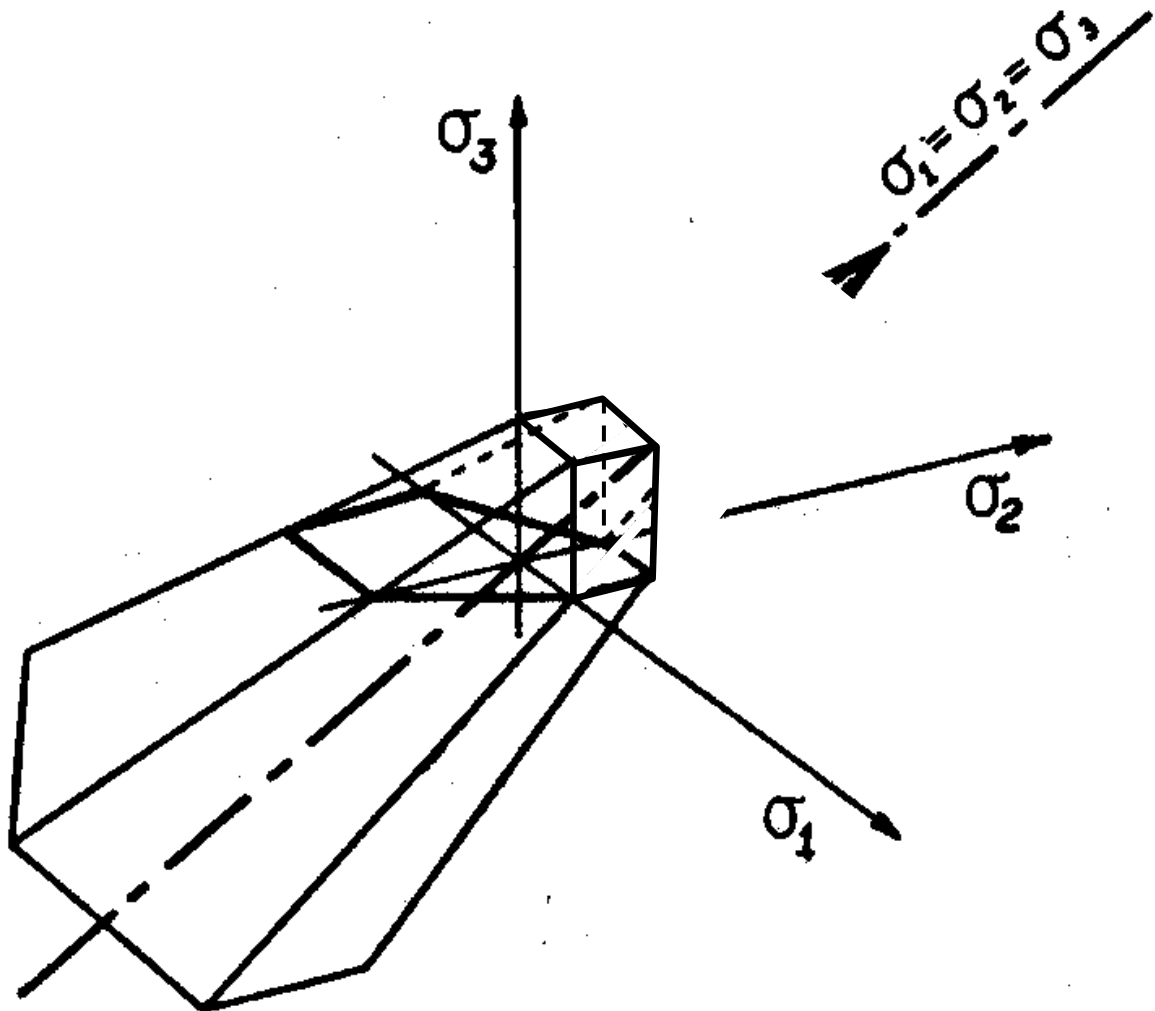
Alleen trek $\sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t$

Ofwel $\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} \leq 1$

Mohr Coulomb $\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c} \leq 1$

Gecombineerd $\max\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t}, \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c}\right) \leq 1$

Plasticiteit en grensspanningshypothesen



Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TSAI-HILL

Grensspanningshypothese voor hout

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{\hat{\sigma}_{xx}^2} - \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\hat{\sigma}_{xx}^2} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\hat{\sigma}_{yy}^2} + \frac{\sigma_{xy}^2}{\hat{\sigma}_{xy}^2} \leq 1$$

x is de vezelrichting

y is loodrecht op de vezelrichting

$\hat{\sigma}$ is de sterkte

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

TSAI-HILL afleiding

Von-Mises (metalen)

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2) + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)} \leq \sigma_y$$

Als vlakke spanningstoestand $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$

$$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy})^2 + (\sigma_{xx})^2) + 3\sigma_{xy}^2} \leq \sigma_v$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_{xx}^2 - 2\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2) + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}^2} + 3\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_v$$

$$\sqrt{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2} \leq \sigma_v$$

$$\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}^2 + 3\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_v^2$$

“Delen” door de sterkte

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{\hat{\sigma}_{xx}^2} - \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\hat{\sigma}_{xx}\hat{\sigma}_{yy}} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\hat{\sigma}_{yy}^2} + 3\frac{\sigma_{xy}^2}{\hat{\sigma}_{xy}^2} \leq 1$$

Correcties om overeenkomst met experimenten te verbeteren.

Plasticiteit en grensspanningshypothesen

SAMENVATTING

- **Metalen**
Von Mises
- **Grond**
Mohr-Coulomb
- **Ongewapend beton**
Rankine voor trek en
Mohr-Coulomb voor druk
- **Hout**
Tsai-Hill
- Raadpleeg de software-handleiding voor het geïmplementeerde materiaal-model.