

POST HBO-OPLEIDINGEN

**Betonconstructeur BV
Staalconstructeur BmS**

Professional master of structural engineering

Toegepaste mechanica 1

**Spanningen en rekken in 3-D
grensspanningshypothesen
en wringing**

**docenten : dr ir P.C.J. Hoogenboom
ir J.W. Welleman**

**TENTAMEN 2^e JAAR
duur : 90 minuten**

WAARSCHUWING : Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam !

*OPMERKING : Al het studiemateriaal betreffende dit onderdeel
mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd*

**POST
HBO**

Tweede jaars cursus Beton-Staalconstructeur BV/BmS

Datum, jan 2002

Vraagstuk 1 : Spanningen

(totaal 25 min, 2 punten)

De spanningen in een constructiedeel zijn berekend met twee eindige-elementenprogramma's. Het eerste programma berekent de volgende hoofdspanningen in een bepaald punt.

$$\sigma_1 = 14 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 31$$

$$\sigma_3 = -87$$

Het tweede programma berekent de volgende spanningen in hetzelfde punt.

$$\sigma_{xx} = -2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = 29$$

$$\sigma_{zz} = -69$$

$$\sigma_{yz} = -9$$

$$\sigma_{zx} = 0$$

$$\sigma_{xy} = 14$$

- Teken een elementair blokje met de spanningen op de zichtbare vlakjes. Teken tevens het bijbehorende assenstelsel.
- Verklaar de naam "invarianten" voor I_1 , I_2 en I_3 .
- Vanzelfsprekend moeten de spanningstoestanden die de programma's berekenen hetzelfde zijn. Is dit inderdaad het geval in het beschouwde punt? Laat dit zien.

Vraagstuk 2 : Grensspanningshypothesen

(totaal 25 min, 2,5 punten)

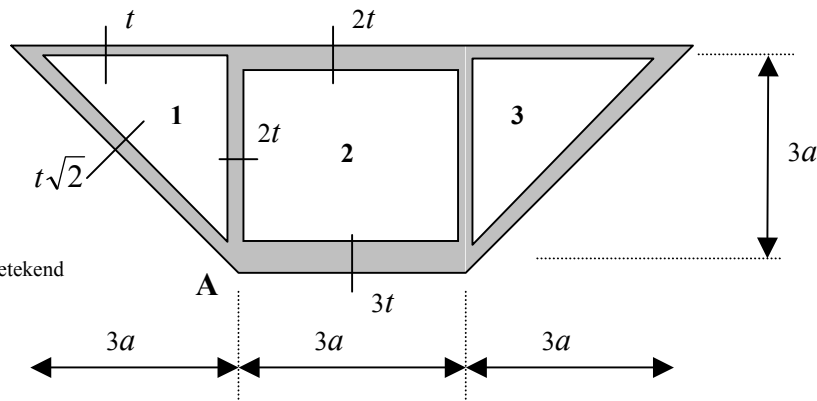
Een eindige-elementenprogramma heeft de spanningsverdeling in een constructiedeel berekend met een lineair model. De elasticiteitsmodulus bedraagt $E = 10^5 \text{ MPa}$ en de dwarscontractiecoëfficiënt bedraagt $\nu = 0,2$. In een bepaald kritisch punt zijn de berekende hoofdspanningen $\sigma_1 = 14$, $\sigma_2 = 31$ en $\sigma_3 = -87 \text{ MPa}$. Onder de opgelegde belasting mag het constructiedeel niet vloeien, scheuren of verbrijzelen. Controleer of de toelaatbare spanning wordt overschreden volgens de volgende grensspanningshypothesen. U hoeft geen veiligheidsfactoren in rekening te brengen.

- | | | |
|----------------------|-------------------------|--|
| a) Von Mises met : | éénassige vloeispanning | $\sigma_v = 105 \text{ MPa}$ |
| b) Rankine met : | éénassige druksterkte | $\bar{\sigma}_c = -105 \text{ MPa}$ en |
| | éénassige treksterkte | $\bar{\sigma}_t = 32 \text{ MPa}$ |
| c) Mohr-Coulomb met: | éénassige druksterkte | $\bar{\sigma}_c = -105 \text{ MPa}$ en |
| | éénassige treksterkte | $\bar{\sigma}_t = 32 \text{ MPa}$ |
| d) Saint Venant met: | éénassige vloeispanning | $\sigma_v = 105 \text{ MPa}$ |

Vraagstuk 3 Wringing

(totaal 40 min, 4,5 punten)

Hieronder is een dwarsdoorsnede van een symmetrische meercellige betonnen kokerbrug gegeven. De wanden hebben de aangegeven dikte waarbij de dikte t klein is t.o.v. de afmeting a . Van deze doorsnede wordt gevraagd de wringstijfheid te bepalen.



Figuur is niet op schaal getekend

Voor het oplossen van het probleem wordt gebruik gemaakt van de zeepvliesanalogie. Om de beoordeling te vereenvoudigen dient u de volgende vragen te beantwoorden.

Vragen:

- Stel voor het vlies de evenwichtsvoorwaarden op.
- Toon met de voorwaarden van a) aan dat de verplaatsingen in de cellen 1,2 en 3 als volgt kunnen worden bepaald :

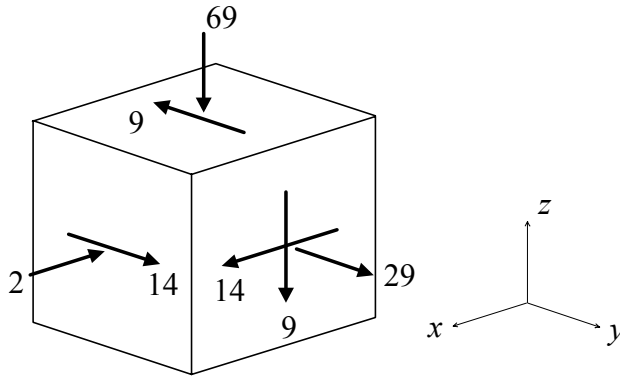
$$w_1 = \frac{51}{49} \frac{pat}{S} \quad w_2 = \frac{108}{49} \frac{pat}{S} \quad w_3 = \frac{51}{49} \frac{pat}{S}$$

- Bepaal op basis van het antwoord onder b) de torsiestijfheid.
- Bepaal de schuifspanningen in alle wanden en geef de richting van de schuifspanningen in een duidelijke schets weer.
- Waar treedt in de koker de grootste schuifspanning op ?
- Aan welke eis moeten de schuifspanningen in het aangegeven punt A voldoen en laat zien of ze daar ook aan voldoen.

UITWERKING

Vraagstuk 1

a)



- b) I_1, I_2 en I_3 heten invarianten omdat ze niet afhankelijk zijn van de keuze van het assenstelsel. Als de programma's dezelfde spanningstoestanden berekenen moeten de invarianten van de spanningstoestanden hetzelfde zijn.

c) Eerste programma $I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -2 + 29 - 69 = -42$

Tweede programma $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 14 + 31 - 87 = -42$ akkoord

Eerste programma
$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}$$

$$= \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{zx}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2$$

$$= 29 \times (-69) - (-9)^2 + (-2) \times (-69) - 0^2 + (-2) \times 29 - 14^2 = -2198$$

Tweede programma $I_2 = \sigma_2\sigma_3 - 0^2 + \sigma_1\sigma_3 - 0^2 + \sigma_1\sigma_2 - 0^2$

$$= 31 \times (-87) + 14 \times (-87) + 14 \times 31 = -3481$$
 niet akkoord

De programma's geven dus niet hetzelfde resultaat. (Dit kan natuurlijk meerdere oorzaken hebben. Een mogelijke oorzaak is dat één van de programma's de spanningen niet juist heeft berekend.) De I_3 hoeven we niet meer uit te rekenen omdat deze de conclusie niet beïnvloedt.

Vraagstuk 2

a) Von Mises
$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \sigma_v$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(14 - 31)^2 + (31 + 87)^2 + (-87 - 14)^2]} \leq 105$$

$$110 \leq 105$$

voldoet niet

b) Rankine
$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \leq \bar{\sigma}_t$$

$$-105 \leq 14, 31, -87 \leq 32$$

voldoet

c) Mohr-Coulomb
$$\frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_c} \leq 1$$

$$\frac{31}{32} + \frac{-87}{-105} \leq 1$$

$$1,8 \leq 1$$

voldoet niet

d) Saint Venant
$$-\bar{\epsilon} \leq \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \leq \bar{\epsilon}$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2 - \nu\sigma_3) = \frac{1}{10^5}(14 - 0,2 \times 31 + 0,2 \times 87) = 0,00025$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_1 + \sigma_2 - \nu\sigma_3) = \frac{1}{10^5}(-0,2 \times 14 + 31 + 0,2 \times 87) = 0,00046$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_1 - \nu\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{10^5}(-0,2 \times 14 - 0,2 \times 31 + 87) = -0,00096$$

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{E}(\sigma_v - \nu \times 0 - \nu \times 0) = \frac{\sigma_v}{E} = \frac{105}{10^5} = 0,00105$$

$$-0,00105 \leq 0,00025, 0,00046, -0,00096 \leq 0,00105$$

voldoet

Vraagstuk 3

- a) Het opstellen van de evenwichtsvoorwaarden resulteert in het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -3 & 11 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \frac{pat}{S} \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- b) Invullen van de gegeven oplossing toont aan dat deze voldoet aan de drie evenwichtsvoorwaarden voor het vlies.

$$w_1 = \frac{51}{49} \frac{pat}{S} \quad w_2 = \frac{108}{49} \frac{pat}{S} \quad w_3 = \frac{51}{49} \frac{pat}{S}$$

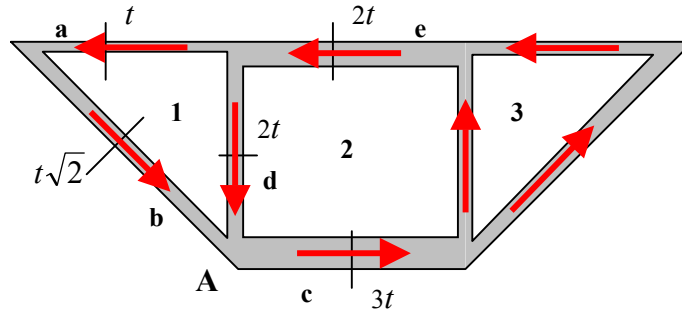
- c) Het wringend moment is gelijk aan twee maal de inhoud van de spanningsheuvel :

$$Inh = 2 * \frac{1}{2} (9a^2 w_1) + 9a^2 w_2 = 9a^2 (w_1 + w_2) = \frac{9a^2 \times 159}{49} \frac{pat}{S} = \frac{1431}{49} \frac{pa^3 t}{S}$$

$$\text{Ga over op : } \varphi = w; \quad S = \frac{1}{G}; \quad p = 2\theta;$$

$$M_w = 2 \times \frac{1431}{49} Ga^3 t 2\theta \Rightarrow GI_w = \frac{M_w}{\theta} = \frac{5724}{49} Ga^3 t \approx 116,82 Ga^3 t$$

- d) In de onderstaande schets zijn de schuifstromen weergegeven.



De schuifspanningen volgen uit de helling van de φ -heuvel. In de onderstaande tabel zijn de schuifspanningen weergegeven van de wanden a t/m e zoals deze in de bovenstaande figuur zijn aangegeven:

wand	schuifspanning	waarde ($\times Ga\theta$)
a	$\tau = \frac{\varphi_1}{t} = \frac{w_1}{t} = \frac{51}{49} \frac{pa}{S} = \frac{102}{49} Ga\theta$	2,08
b	$\tau = \frac{\varphi_1}{t\sqrt{2}} = \frac{w_1}{t\sqrt{2}} = \frac{51}{49\sqrt{2}} \frac{pa}{S} = \frac{102}{49\sqrt{2}} Ga\theta$	1,47
c	$\tau = \frac{\varphi_2}{3t} = \frac{w_2}{3t} = \frac{108}{3 \cdot 49} \frac{pa}{S} = \frac{72}{49} Ga\theta$	1,47
d	$\tau = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2t} = \frac{w_2 - w_1}{2t} = \frac{57}{2 \cdot 49} \frac{pa}{S} = \frac{114}{98} Ga\theta$	1,16
e	$\tau = \frac{\varphi_2}{2t} = \frac{w_2}{2t} = \frac{108}{2 \cdot 49} \frac{pa}{S} = \frac{108}{49} Ga\theta$	2,20

- e) De grootste schuifspanning t.g.v. wringing treedt op in het dek **e** tussen de beide middenwanden.
- f) De som van de schuifstromen in A moet nul zijn. De schuifstroom is de schuifspanning maal de wanddikte. Rekening houdend met het teken (ingaaand en uitgaand) ontstaat :

$$s_b + s_d = s_c$$

$$(1,47 \times t\sqrt{2} + 1,16 \times 2t) Ga\theta = (1,47 \times 3t) Ga\theta$$

voldoet