

POST HBO-OPLEIDINGEN
Betonconstructeur BV Staalconstructeur BmS

Professional master of structural engineering

Toegepaste mechanica

**Materiaalmodellen en
niet-lineaire mechanica**

docent : dr ir P.C.J. Hoogenboom

TENTAMEN 2^e JAAR
duur : 90 minuten

<i>WAARSCHUWING</i>	<i>: Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam !</i>
<i>OPMERKING</i>	<i>: Al het studiemateriaal en aantekeningen betreffende dit onderdeel mag tijdens het tentamen worden geraadpleegd</i>

POST
HBO

Vraagstuk 1

(30 minuten 3.3 punten)

In een bepaald punt van een gewapend betonnen tunnel worden de volgende spanningen berekend.

$$\sigma_{xx} = -14,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = -2,2$$

$$\sigma_{zz} = -7,3$$

$$\sigma_{yz} = 0$$

$$\sigma_{zx} = -15,9$$

$$\sigma_{xy} = -1,0$$

- Teken een elementair blokje met de spanningen op de zichtbare vlakjes. Teken tevens het bijbehorende assenstelsel.
- Met een wiskundig computerprogramma kunnen snel de hoofdspanningen worden berekend. Welke wiskundige procedure wordt gebruikt om hoofdspanningen te berekenen?

De hoofdspanningen zijn voor u berekend met het volgende resultaat.

$$\sigma_1 = 5,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -2,2$$

$$\sigma_3 = -27,0$$

- Bereken de invarianten J_2 en J_3 .
- Waarom worden veel materiaalmodellen geformuleerd als functie van invarianten?

Vraagstuk 2

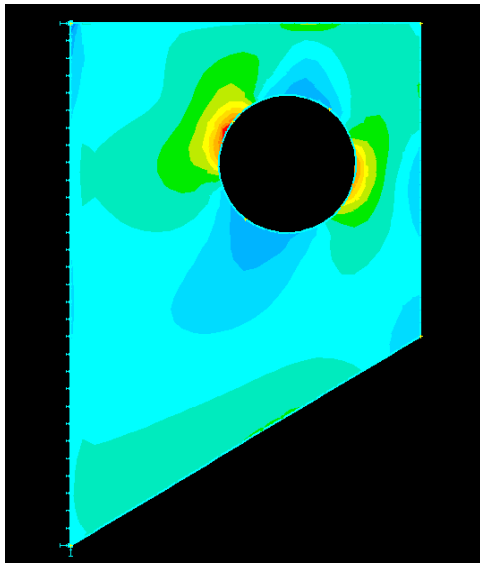
(30 minuten 3.3 punten)

Eindige-elementenprogramma's kunnen de spanning in een constructiedeel afbeelden op verschillende manieren. Bijvoorbeeld de spanning σ_{xx} of de grootste hoofdspanning σ_1 (figuur 1) of de Von Mises-spanning $\sigma_{\text{Von Mises}}$ (figuur 2). De laatste is als volgt gedefinieerd.

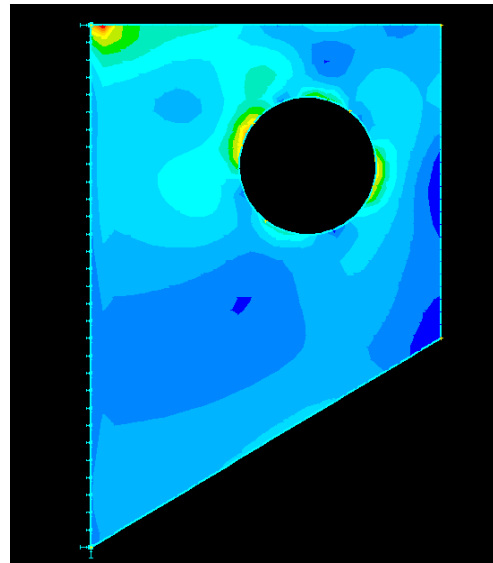
$$\sigma_{\text{Von Mises}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)}$$

- Welke manier van afbeelden is handig als een constructiedeel wordt uitgevoerd in staal? Verklaar uw antwoord.

- b** Stel dat een constructiedeel wordt uitgevoerd in gewapend beton. Welke manier van afbeelden is dan geschikt om de drukspanning te controleren? Welke manier van afbeelden is geschikt om de wapening te ontwerpen?
- c** Waarom kunnen eindige-elementenprogramma's geen Mohr-Coulomb-spanningen afbeelden?
- d** Bedenk een zinvolle definitie van de Beltrani-spanning.



Figuur 1. Grootste hoofdspanning σ_1



Figuur 2. Von Mises-spanning σ_{VonMises}

(In de figuren is een willekeurig constructiedeel getekend om te laten zien hoe spanningen kunnen worden geplot. U hoeft deze figuren niet af te lezen of te interpreteren.)

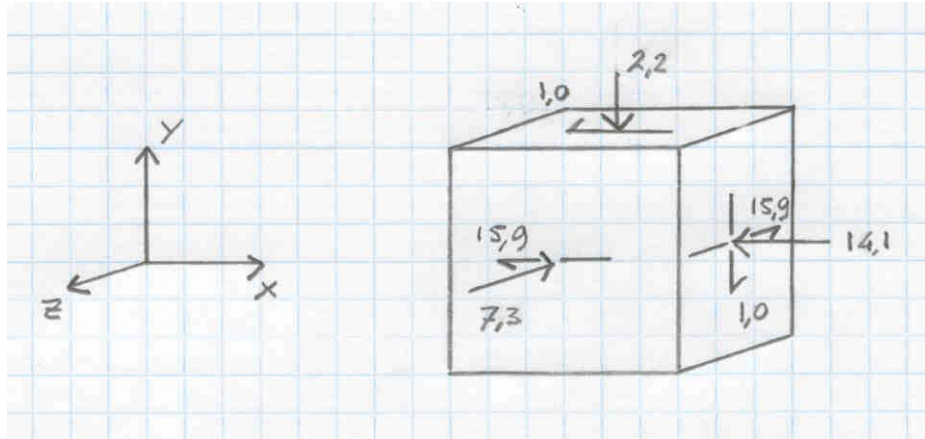
Vraagstuk 3

(30 minuten 3.4 punten)

- a** In veel oude programma's voor het ontwerpen van draagconstructies kan de gebruiker de belastingcombinaties kiezen en wijzigen nadat de krachtswerking in de constructie is berekend. In veel moderne programma's is dit niet het geval. In deze moderne programma's moeten de belastingcombinaties gekozen worden voordat de krachtswerking wordt berekend. Wat is de reden van dit opvallende verschil?
- b** Tijdens de simulatie van statisch constructiegedrag worden de krachten op het model in stappen vergroot. Bij een zekere belasting divergeert het rekenproces. Wat kan de oorzaak hiervan zijn en hoe zou dit kunnen worden verholpen?
- c** Als we een constructie ontwerpen dan beginnen we vaak met een lineair model. Indien nodig wordt pas later een niet-lineair model gebruikt. Waarom wordt niet direct met een niet-lineair model begonnen?

Uitwerking vraagstuk 1

a



b De procedure is het berekenen van de eigenwaarden van de spanningstensor.

c Invarianten

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 5,6 - 2,2 - 27,0 = -23,6$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 5,6(-2,2) + 5,6(-27,0) + (-2,2)(-27,0) = -104,1$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 5,6(-2,2)(-27,0) = 332,6$$

$$J_2 = \frac{1}{3}I_1^2 - I_2 = \frac{1}{3}(-23,6)^2 - (-104,1)$$

$$J_2 = 289,8 \quad (\text{N/mm}^2)^2$$

$$J_3 = I_3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + \frac{2}{27}I_1^3 = 332,6 - \frac{1}{3}(-23,6)(-104,1) + \frac{2}{27}(-23,6)^3$$

$$J_3 = -1460,1 \quad (\text{N/mm}^2)^3$$

d Invarianten kunnen snel worden berekend en hangen niet af van het gekozen assenstelsel.

Uitwerking vraagstuk 2

a Voor staal is de Von Mises-spanning handig omdat staal niet zal vloeien als de Von Mises-spanning overall kleiner is dan de vloeispanning.

b De drukspanning kan worden gecontroleerd door de kleinste hoofdspanning af te beelden. De wapening kan worden ontworpen met de grootste hoofdspanning of met de normaal- en schuifspanningen in de wapeningsrichting. (Veel programma's kunnen ook vergelijkingsspanningen voor wapening plotten.)

c De grensspanningshypothese van Mohr-Coulomb kan niet worden geschreven met een vergelijkingsspanning. Dit criterium wordt namelijk bepaald door twee parameters: de treksterkte en de druksterkte.

d De grensspanningshypothese van Beltrani luidt

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{2E} \leq \hat{W}.$$

De waarde $\hat{W}$ kunnen we vinden uit een eenassige trekproef $\sigma_1 = \hat{\sigma}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{2E} = \hat{W}$$

Hieruit volgt

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{2E} \leq \frac{\hat{\sigma}^2}{2E}.$$

Derhalve kunnen we de vergelijkingsspanning schrijven als

$$\sigma_{\text{Beltrani}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}.$$

Uitwerking vraagstuk 3

- a** De oude programma's zijn gebaseerd op lineaire constructiemodellen. Hiervoor geldt dat de belastinggevallen kunnen worden gesuperponeerd. Moderne programma's kunnen niet alleen lineair maar ook niet-lineair rekenen. In het laatste geval kan niet worden gesuperponeerd zodat de belastingcombinaties bekend moeten zijn voordat de berekening van de vervormingen en krachtswerking kan plaatsvinden. (Overigens is de methode van de oude programma's sneller maar met moderne computers is dit niet zo belangrijk meer.)
- b** Bij een krachtgestuurde berekening zal het rekenproces divergeren als de belasting groter wordt dan de draagkracht van de constructie. Dit kan worden verholpen door verplaatsingssturing of booglengtesturing.
- c** Een lineair model heeft vaak minder invoergegevens nodig dan een niet-lineair model en blijft bruikbaar bij een slechte schatting van de eerste afmetingen.