

POST HBO-OPLEIDINGEN

**Betonconstructeur BV
Staalconstructeur BmS**

Professional master of structural engineering

Toegepaste mechanica

**Materiaalmodellen en
niet-lineaire mechanica**

docent : dr ir P.C.J. Hoogenboom

TENTAMEN 2^e JAAR

duur : 60 minuten

OPMERKINGEN : *Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam.*

: Het tentamen bestaat uit 4 bladzijden inclusief dit voorblad en een uitwerkingsblad.

: Al het studiemateriaal en aantekeningen mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd.

: Na afloop kunt u de uitwerking vinden op www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre

**POST
HBO**

Vraagstuk 1

(30 minuten 5 punten)

In een bepaald punt van een houtverbinding worden de volgende spanningen berekend met een eindige-elementenprogramma.

$$\sigma_{xx} = -16,1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = 1,2$$

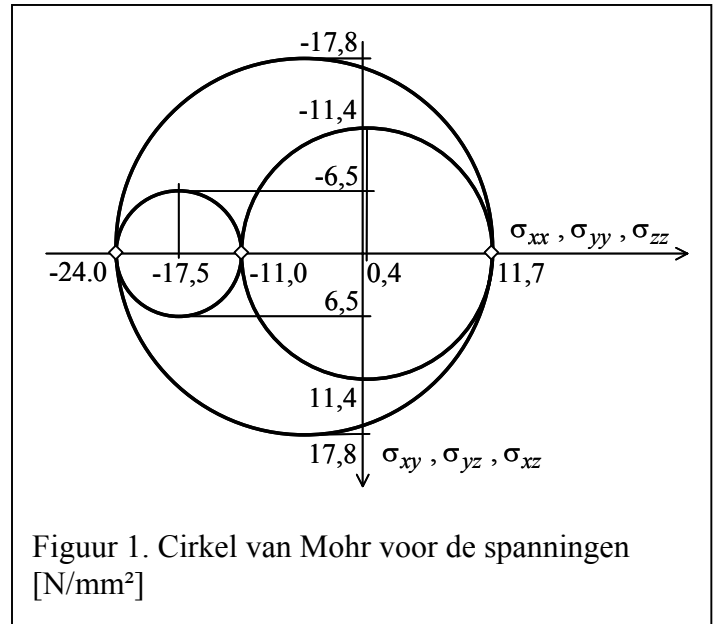
$$\sigma_{zz} = -8,4$$

$$\sigma_{yz} = 10,3$$

$$\sigma_{zx} = 0,0$$

$$\sigma_{xy} = -12,0$$

In figuur 1 is de cirkel van Mohr getekend van dit punt. De vectoren van de hoofdspanningsrichtingen zijn



Figuur 1. Cirkel van Mohr voor de spanningen [N/mm²]

$$\begin{pmatrix} -0,359 \\ 0,830 \\ 0,426 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,503 \\ -0,213 \\ 0,838 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,787 \\ 0,515 \\ -0,341 \end{pmatrix}.$$

- Teken een elementair blokje met de spanningen op de zichtbare vlakjes. Teken tevens het bijbehorende assenstelsel.
- Wat zijn grootten van de hoofdspanningen? Wat is de grootte van de grootste schuifspanning die kan worden gevonden door het elementaire blokje te draaien?
- Bereken de octaederspanningen σ_{oct} en τ_{oct} .
- Bereken de normaalvector van het octaedervlak in het x - y - z -assenstelsel.

Vraagstuk 2

(30 minuten 5 punten)

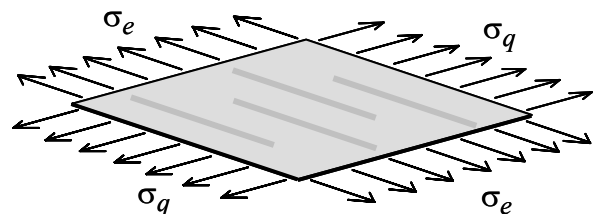
Een nieuw materiaal voor tentdaken is getest bij de TU Delft [1]. Het betreft een doorzichtige folie van 0,2 mm dikte met de naam ethyltetrafluorethylene (ETFE). Het materiaal is belast met een normaalspanning σ_e in de extrusie-richting en tegelijkertijd met een normaalspanning σ_q in de richting loodrecht op de extrusie-richting (figuur 2). Er is geen schuifspanning aangebracht.

In tabel 1 zijn de resultaten verzameld van tests op 21 proefstukken waarbij de spanning langzaam is vergroot. De eerste twee kolommen geven de spanningen waarbij het materiaal begint te vloeien. In tabel 1 zijn tevens gegeven de vergelijkingsspanning σ_T volgens Tresca, de vergelijkingsspanning σ_{VM} volgens Von Mises en de vergelijkingsspanning σ_{SV} volgens De Saint Venant. Deze vergelijkingsspanningen zijn berekend uit σ_e en σ_q . Bij de berekening van de vergelijkingsspanningen volgens De Saint Venant is tevens een dwarscontractie-coëfficiënt $\nu = 0,40$ gebruikt. De onderste twee regels van de tabel geven de gemiddelde vergelijkingsspanningen en de standaarddeviaties van de vergelijkingsspanningen.

σ_e	σ_q	σ_T	σ_{VM}	σ_{SV}
11,50	15,00	15,00	13,59	10,40
9,70	14,60	14,60	12,87	10,72
9,40	14,01	14,01	12,37	10,25
13,87	10,46	13,87	12,52	9,69
13,40	9,60	13,40	11,96	9,56
13,00	9,05	13,00	11,54	9,38
12,46	12,58	12,58	12,52	7,60
12,13	12,47	12,47	12,30	7,62
12,52	12,54	12,54	12,53	7,53
11,87	0,00	11,87	11,87	11,87
12,13	0,00	12,13	12,13	12,13
0,00	15,20	15,20	15,20	15,20
0,00	14,30	14,30	14,30	14,30
12,46	6,27	12,46	10,79	9,95
12,13	5,49	12,13	10,52	9,93
12,52	6,22	12,52	10,84	10,03
6,29	15,58	15,58	13,58	13,06
6,24	12,47	12,47	10,80	9,97
6,43	12,86	12,86	11,14	10,29
3,21	12,58	12,58	11,32	11,30
14,15	2,95	14,15	12,93	12,97
gem.		13,32	12,27	10,65
st.dev.		1,13	1,22	2,04

- Zijn de spanningen σ_e en σ_q hoofdspanningen? Licht uw antwoord toe.
- Hoe zijn de vergelijkingsspanningen volgens Von Mises berekend in de vierde kolom van de tabel?
- Waarom speelt de dwarscontractiecoëfficiënt ν wel een rol bij de Saint Venant-hypothese en geen rol bij de Tresca-hypothese?
- Schets de grensspanningshypothese van Tresca, Von Mises en De Saint Venant in de grafiek op het uitwerkingsblad. (Aanwijzing: De 21 punten op het uitwerkingsblad zijn de experimentele resultaten. De grensspanningshypothese moet zo goed mogelijk door de puntenwolk gaan.)
- Welk grensspanningshypothese past het beste bij de experimentele data? Licht uw antwoord toe.

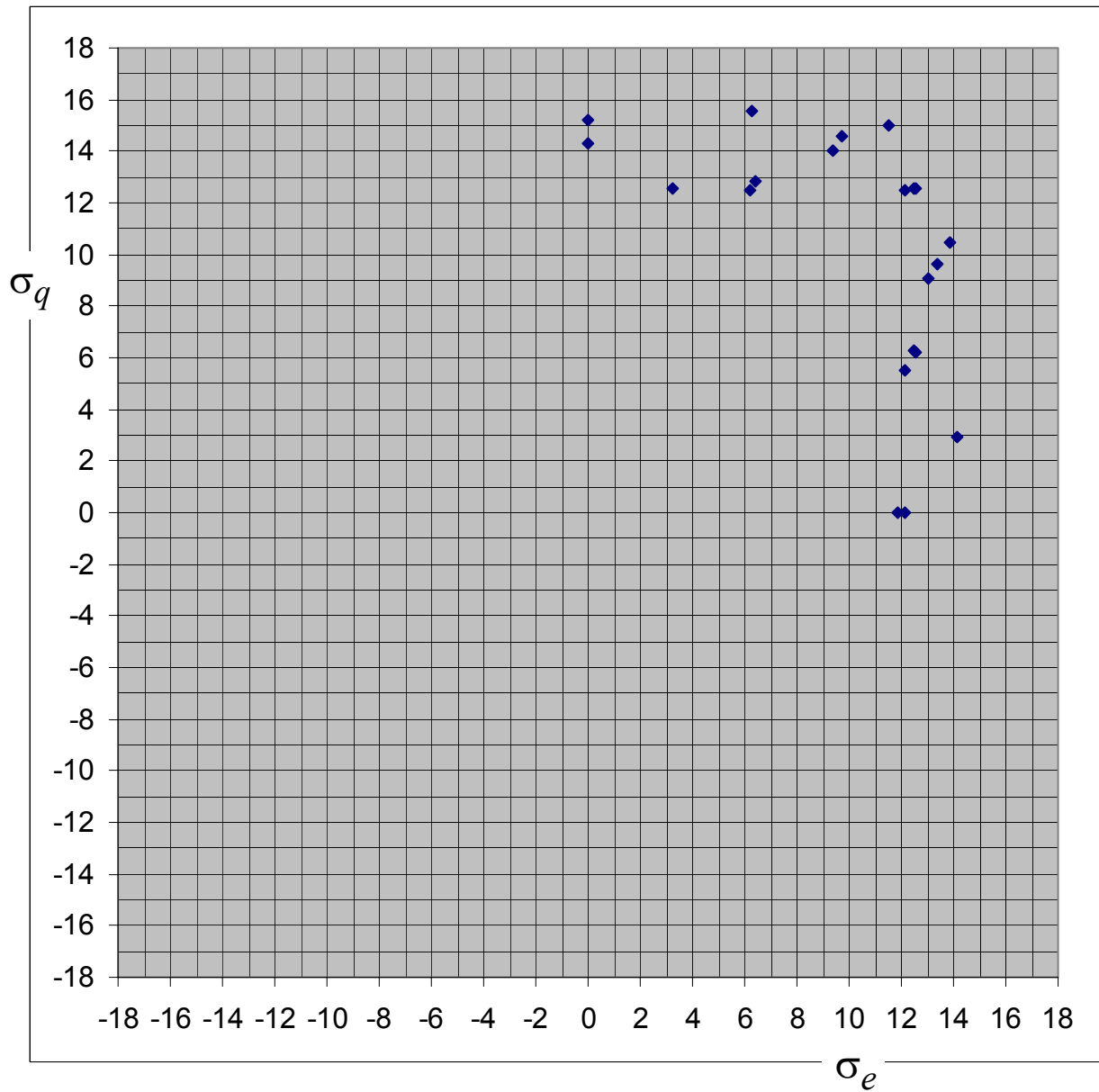
Tabel 1. Vloeispanningen van ETFE-folie [N/mm²]



Figuur 2. Proefstuk van folie

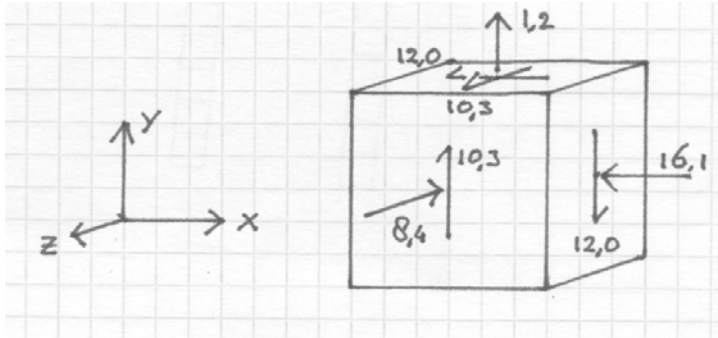
[1] J.W.J. de Vries, Tensile Foil, ETFE Foil as Membrane Construction Material, MSc. Thesis, Delft University of Technology, September 2003.

Uitwerkingsblad



Uitwerking vraagstuk 1

a



- b De hoofdspanningen kunnen uit de cirkel van Mohr worden afgelezen.
 $\sigma_1 = 11,7 \quad \sigma_2 = -11,0 \quad \sigma_3 = -24,0 \text{ N/mm}^2$
 De grootste schuifspanning kan ook uit de cirkel van Mohr worden afgelezen.
 $\tau_{\max} = 17,8 \text{ N/mm}^2$

c Octaederspansingen

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{11,7 - 11,0 - 24,0}{3} = -7,8 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{9}[(11,7 + 11,0)^2 + (-11,0 + 24,0)^2 + (-24,0 - 11,7)^2]} = 14,8 \text{ N/mm}^2$$

- d Het octaedervlak heeft de volgende normaalvector ten opzichte van de hoofdspansingsrichtingen.

$$\begin{pmatrix} 0,577 \\ 0,577 \\ 0,577 \end{pmatrix}$$

Ten opzichte van de x-, y- en z-richting is dit

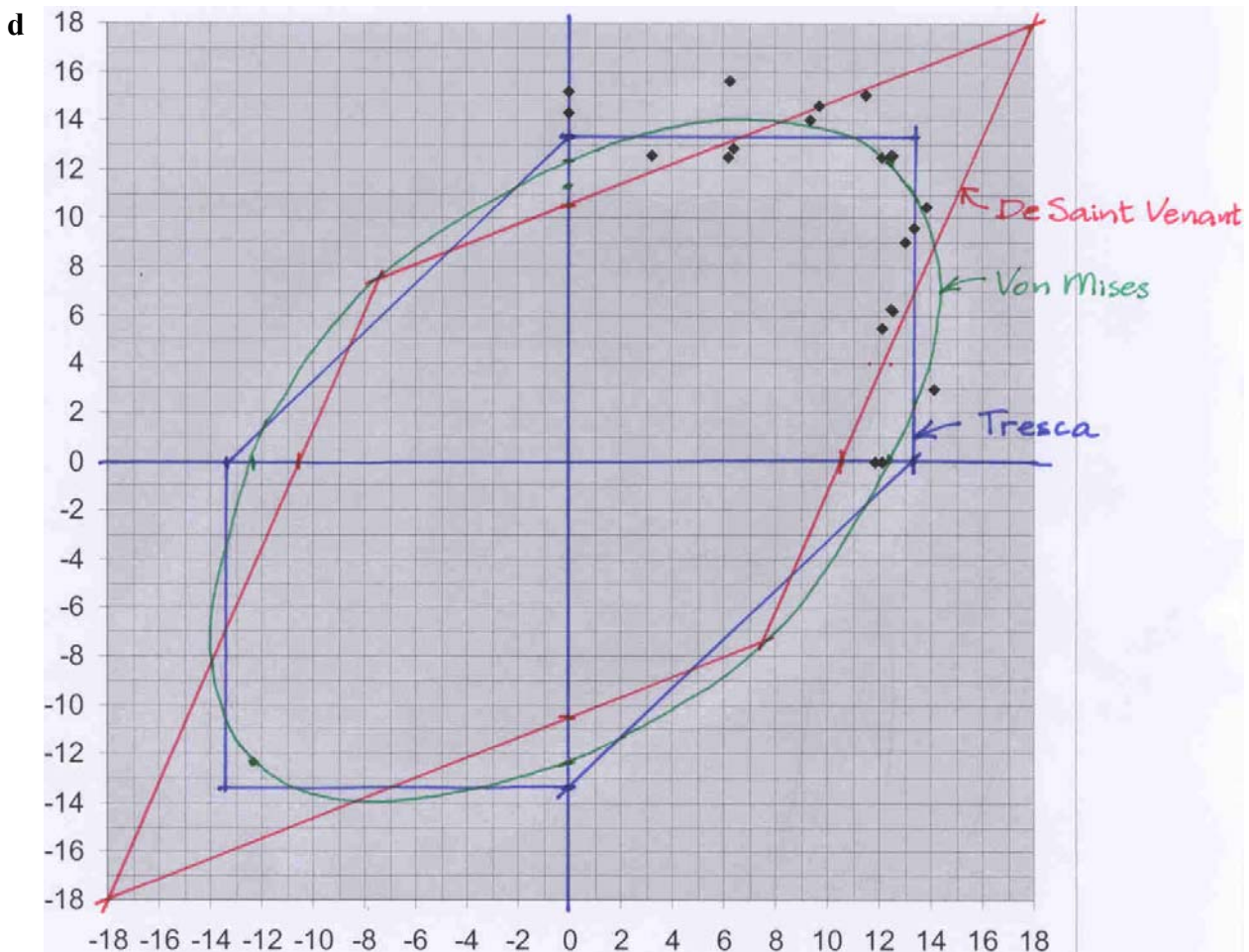
$$0,577 \begin{pmatrix} -0,359 \\ 0,830 \\ 0,426 \end{pmatrix} + 0,577 \begin{pmatrix} 0,503 \\ -0,213 \\ 0,838 \end{pmatrix} + 0,577 \begin{pmatrix} 0,787 \\ 0,515 \\ -0,341 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,537 \\ 0,653 \\ 0,533 \end{pmatrix}$$

Uitwerking vraagstuk 2

- a σ_e en σ_q zijn hoofdspanningen omdat geen schuifspanningen op de randen werken.
- b Aangezien $\sigma_1 = \sigma_e$, $\sigma_2 = \sigma_q$ en $\sigma_3 = 0$ wordt de vergelijkingsspanning van Von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_e - \sigma_q)^2 + \sigma_e^2 + \sigma_q^2]}.$$

- c De Saint Venant-hypothese is gebaseerd op een begrenzing van de rek. Als we die omrekenen naar de spanningen wordt de dwarscontractie-coëfficiënt geïntroduceerd door de constitutieve vergelijkingen. De Tresca-hypothese is gebaseerd op een begrenzing van de spanning. De constitutieve vergelijkingen spelen hierbij geen rol.



- e De grensspanningshypothese van Tresca blijkt het beste overeen te komen met de experimentele data omdat de standaarddeviatie het kleinst is.