

POST HBO-OPLEIDINGEN

**Betonconstructeur BV
Staalconstructeur BmS**

Professional master of structural engineering

Toegepaste mechanica

**Materiaalmodellen en
niet-lineaire mechanica**

docent : dr. ir. P.C.J. Hoogenboom

TENTAMEN 2^e JAAR
duur : 90 minuten

OPMERKINGEN : *Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam.*

: Het tentamen bestaat uit 4 bladzijden inclusief dit voorblad.

: Al het studiemateriaal en aantekeningen mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd.

*: Na afloop kunt u de uitwerking vinden op
www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/2TM6.html*

**POST
HBO**

Vraagstuk 1

(30 minuten 3 punten)

Een gewapend betonnen console wordt gemodelleerd met een eindige-elementenprogramma. Het model is driedimensionaal en lineair-elastisch. De spanningen in een maatgevend punt van de console zijn

$$\sigma_{xx} = -25,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = 10,3$$

$$\sigma_{zz} = -0,4$$

$$\sigma_{yz} = 0,3$$

$$\sigma_{zx} = 1,1$$

$$\sigma_{xy} = -11,9$$

De hoofdspanningen zijn berekend met het volgende resultaat.

$$\sigma_1 = 13,9 \text{ N/mm}^2 \quad \sigma_2 = -0,4 \quad \sigma_3 = -29,0$$

- Teken een elementair blokje met de spanningen op de zichtbare vlakjes. Teken tevens het bijbehorende assenstelsel.
- Met welke wiskundige procedure zijn de hoofdspanningen berekend? Wat is de grootte van de grootste schuifspanning die kan worden gevonden door het elementaire blokje te draaien?
- Welke spanning kan worden gebruikt om te beoordelen of de druksterkte van het beton voldoende is? Welke spanning kan worden gebruikt om te beoordelen of de hoeveelheid wapening voldoende is?

Vraagstuk 2

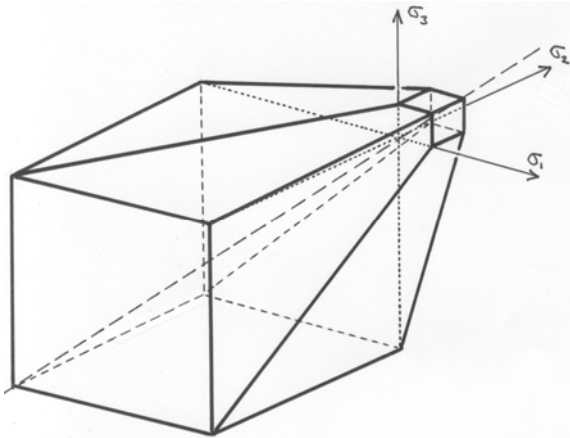
(30 minuten 3 punten)

- Hoe luidt de grensspanningshypothese van Rankine?
- Laat zien dat deze hypothese kan worden geschreven als de volgende “unity check”.

$$\max\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_t}, \frac{\sigma_3}{\sigma_c}\right) \leq 1$$

Welke veronderstellingen zijn hierbij gedaan?

- c Voor ongewapend beton wordt vaak de hypothese van Rankine gecombineerd met die van Mohr-Coulomb (Figuur 1). Geef hiervoor een “unity check”.



Figuur 1. Grensspanningshypothese voor ongewapend beton.

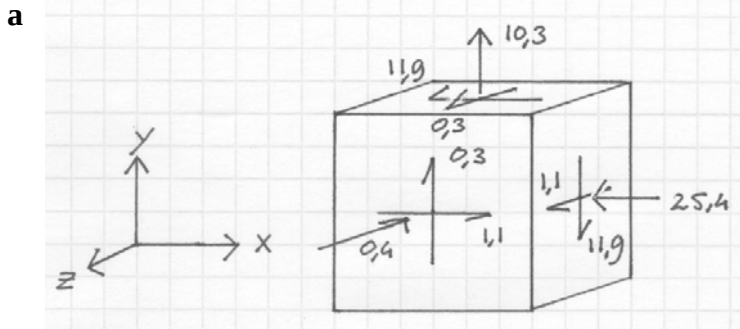
Vraagstuk 3

(30 minuten 4 punten)

- a Er wordt vaak onderscheid gemaakt tussen fysisch niet-lineaire berekeningen en geometrisch niet-lineaire berekeningen. Wat is het verschil? Geef van de volgende berekeningen aan van welk type deze is: lineair, fysisch niet-lineair of geometrisch niet-lineair.
- 1) plastische bezwijklast van een raamwerk
 - 2) doorbuiging van een gewapend betonnen vloer
 - 3) staafwerkmodel van een gewapend betonnen wandligger
 - 4) tweede orde verplaatsingen van een ongeschoord raamwerk
 - 5) kiplast van een uitkragende slanke ligger
 - 6) benodigde ductiliteit bij een aardbeving
 - 7) eigenfrequenties van een vlaggenmast
- b Van een groot ruimtevakwerk wordt een lineaire berekening gemaakt. De computer breekt de berekening voortijdig af omdat dat de constructie kinematisch onbepaald blijkt te zijn. Niettemin wordt een geometrisch niet-lineaire berekening op hetzelfde model wel correct uitgevoerd. Hoe kan dit?
- c De stijfheidsmatrix van een niet-lineair raamwerkelement is afhankelijk van de normaalkracht in het element. Hoe groter de normaalkracht des te kleiner de buigstijfheid. Echter, experimenten laten zien dat de werkelijke buigstijfheid nog kleiner is dan de stijfheidsmatrix voorspelt. Waardoor ontstaat deze verdere reductie van de stijfheid? Hoe wordt dit in rekening gebracht bij een niet-lineaire raamwerkberekening.

-
- d** Een raamwerk wordt fysisch niet-lineair berekend. De belasting wordt in stappen aangebracht en de constructie blijkt reeds te bezwijken bij een belastingfactor $\lambda = 0,86$. Derhalve moeten zwaardere constructiedelen worden gekozen op de plaatsen waar vloeï is opgetreden. Bij het ontwerpen van deze constructiedelen kunnen we niet zomaar uitgaan van de berekende spanningen omdat de totale belasting nog niet aanwezig was. Hoe kunnen we deze constructiedelen herontwerpen?

Uitwerking vraagstuk 1



- b De hoofdspansingen zijn de eigenwaarden van de spanningstensor. Uit de cirkel van Mohr volgt dat de grootste schuifspanning gelijk is aan de helft van het grootste verschil van de hoofdspansingen.

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{13,9 + 29,0}{2} = 21,5 \text{ N/mm}^2$$

- c De drukspanning van het beton kan worden gecontroleerd met het Mohr-Coulomb criterium

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_d} + \frac{\sigma_1}{\sigma_t} \leq 1. \text{ Hierin is } \sigma_d \text{ de een-assige druksterkte (negatieve waarde) en } \sigma_t \text{ de eenassige}$$

treksterkte van het ongewapende beton.

Als de wapening in de hoofdspansingsrichtingen is aangebracht kan de trekspanning gecontroleerd worden met $\sigma_1 \leq \rho_1 \sigma_s$, $\sigma_2 \leq \rho_2 \sigma_s$, $\sigma_3 \leq \rho_3 \sigma_s$. Hierin is σ_s de vloeispanning van de wapeningsstaven en ρ het wapeningspercentage.

Uitwerking vraagstuk 2

- a De grensspanningshypothese van Rankine luidt $\bar{\sigma}_c \leq \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t$

- b We kunnen dit op splitsen in

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1 \text{ en } \sigma_3, \sigma_2, \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t.$$

Als we veronderstellen dat $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ kunnen we dit vereenvoudigen tot

$$\bar{\sigma}_c \leq \sigma_3 \text{ en } \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_t.$$

Als we veronderstellen dat $\bar{\sigma}_c < 0 < \bar{\sigma}_t$ kunnen we dit herschrijven als

$$1 \geq \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c} \text{ en } \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} \leq 1.$$

Dit kunnen we samenvoegen tot

$$\max\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t}, \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c}\right) \leq 1.$$

- c De grensspanningshypothese van Mohr-Coulomb luidt

$$\frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\bar{\sigma}_c} \leq 1.$$

Met de bovenstaande veronderstelling kunnen we dit schrijven als

$$\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c} \leq 1.$$

Toevoegen aan de “unity check” geeft

$$\max\left(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t}, \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c}, \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_t} + \frac{\sigma_3}{\bar{\sigma}_c}\right) \leq 1$$

Uitwerking vraagstuk 3

- a Bij een fysisch niet-lineaire berekening is het materiaalgedrag niet-lineair. Bij een geometrisch niet-lineaire berekening zijn de kinematische vergelijkingen of de evenwichtsvergelijkingen niet-lineair. Dit laatste is van belang bij grote rotaties van de constructie-delen.
- | | |
|--|----------------------------|
| 1) plastische bezwijklast van een raamwerk | = fysisch niet-lineair |
| 2) doorbuiging van een gewapend betonnen vloer | = fysisch niet-lineair |
| 3) staafwerkmodel van een gewapend betonnen wandligger | = fysisch niet-lineair |
| 4) tweede orde verplaatsingen van een ongeschoord raamwerk | = geometrisch niet-lineair |
| 5) kiplast van een uitkragende slanke ligger | = geometrisch niet-lineair |
| 6) benodigde ductiliteit bij een aardbeving | = fysisch niet-lineair |
| 7) eigenfrequenties van een vlaggenmast | = lineair |
- b Het kan gebeuren een constructiedeel pas weerstand biedt aan een belasting nadat een verplaatsing is opgetreden. Bijvoorbeeld, twee staven liggen in elkaars verlengde zonder dat de tussenknoop zijdelings wordt gesteund. Bij lineaire berekening zal het programma constateren dat er geen zijdelingse stijfheid is en dus dat de verplaatsing van deze knoop onbepaald is en niet kan worden berekend. Bij een niet-lineaire berekening zal na de eerste verplaatsing toch zijdelingse stijfheid kunnen ontstaan waardoor de verplaatsing wel kan worden berekend.
- c De extra reductie van de stijfheid ontstaat door afwijkingen van de ideale situatie zoals walsspanningen, vormafwijkingen en onbedoelde excentriciteiten. Dit wordt in rekening gebracht door een gereduceerde buigstijfheid. De buigstijfheid is hierbij een functie van de normaaldrukkraft.

Tentamen : Toegepaste mechanica 2^e jaar
Materiaalmodellen en niet-lineaire mechanica

21 juni 2005
duur : 90 minuten

- d** Deel de spanningen, momenten en normaalkrachten door 0,86 voordat de constructiedelen opnieuw worden gedimensioneerd.