

POST HBO-OPLEIDINGEN

**Betonconstructeur BV
Staalconstructeur BmS**

Professional master of structural engineering

Toegepaste mechanica

**Materiaalmodellen en
niet-lineaire mechanica**

docent : dr. ir. P.C.J. Hoogenboom

TENTAMEN 2^e JAAR
duur : 90 minuten

OPMERKINGEN : *Vermeld op alle bladen van uw werk uw naam.*

: *Het tentamen bestaat uit 4 bladzijden inclusief dit voorblad.*

: *Al het studiemateriaal en aantekeningen mogen tijdens het tentamen worden geraadpleegd.*

: *Na afloop kunt u de uitwerking vinden op www.mechanics.citg.tudelft.nl/~pierre/2TM6.html*

**POST
HBO**

Vraagstuk 1 (30 minuten 3 punten)

Een gewapend betonnen funderingsksp wordt gemodelleerd met een eindige-elementenprogramma. Het model is driedimensionaal. De berekening is fysisch en geometrisch lineair. Het beton verbrijzelt bij een één-assige drukspanning van 32 N/mm². De treksterkte is 4 N/mm². De spanningen in een maatgevend punt zijn

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -39,4 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{yy} &= -25,9 \\ \sigma_{zz} &= -15,0 \\ \sigma_{yz} &= -8,6 \\ \sigma_{zx} &= -7,9 \\ \sigma_{xy} &= 17,7\end{aligned}$$

De eigenwaarden van de spanningstensor in dit punt zijn -51,7, -25,9, -2,75.

- Teken een elementair blokje met de spanningen op de zichtbare vlakjes. Teken tevens het bijbehorende assenstelsel.
- Zal het beton in het maatgevende punt bezwijken? Verklaar uw antwoord. Is wapening nodig in het maatgevende punt? Verklaar uw antwoord. U hoeft geen veiligheidsfactoren in rekening te brengen.
- Bij een onafhankelijk ingenieursbureau is de funderingsksp ook berekend. Hierbij is een ander assenstelsel gebruikt voor het elementenmodel. De gevonden spanningen in hetzelfde maatgevende punt staan hieronder. Is dit dezelfde spanningstoestand als hierboven?

$$\begin{aligned}\sigma_{kk} &= -25,5 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{ll} &= -33,8 \\ \sigma_{mm} &= -21,0 \\ \sigma_{lm} &= 21,4 \\ \sigma_{mk} &= 1,5 \\ \sigma_{kl} &= 9,9\end{aligned}$$

Handige formules

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Vraagstuk 2 (30 minuten 3 punten)

Sommige elementenprogramma's gebruiken de grensspanningshypothese van Ottosen.¹

$$a \frac{J_2}{f_c'^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c'} + b \frac{I_1}{f_c'} \leq 1$$

$$\lambda = k_1 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(k_2 \cos 3\theta)\right)$$

- In dit criterium zitten 3 parameter die kunnen worden berekend uit de spanningstoestand. Welke parameters zijn dit?
- In dit criterium zitten 4 parameters die experimenteel moeten worden bepaald. Welke parameters zijn dit?
- Hoeveel parameters moeten experimenteel worden bepaald bij de grensspanningshypothese van Von Mises?
- In de grensspanningshypothese van Ottosen zit die van Von Mises verstopt. Welke bijdrage is dit?

Vraagstuk 3 (30 minuten 4 punten)

- Een statische niet-lineaire elementenberekening wordt uitgevoerd met incrementen (belastingstappen) en iteraties. Wat kan er fout gaan als met te grote incrementen wordt gerekend? Wat is het nadeel van heel kleine incrementen?
- In 1979 schreef de Nederlander Eduard Riks een artikel over een methode die hij ontwikkelde voor niet-lineaire elementenberekeningen². In deze methode wordt het belastingsincrement aangepast zodat in de last-verplaatsingsruimte steeds dezelfde afstand wordt afgelegd. Met deze methode kan bijvoorbeeld worden berekend hoe een boog knikt of wat de ductiliteit van een doorgaande wandligger is. Naar dit artikel is maar liefst 288 keer verwezen in andere artikelen (citaties). Dit laat zien "Riks' method" een belangrijk probleem oploste. Geef de gebruikelijke naam voor de methode van Riks.

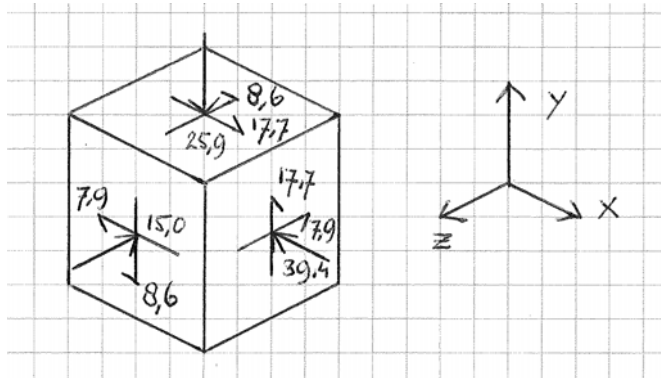
¹ Ottosen, N.S., "A failure criterion for concrete", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE* Vol. 103, 1977, pp. 527-535.

² Riks, E., "An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 15, 1979, pp. 524-551.

- c Als een raamwerk knikt dan kan het zijn dat een element knikt of dat meerdere elementen tegelijk knikken. In het laatste geval is het bepalen van de kniklengte op basis van normregels niet eenvoudig. Strikte toepassing van deze normregels – zoals een computer dat doet – kan het verkeerde resultaat geven. Hoe kan dit probleem worden opgelost? Kies één of meerdere van de volgende antwoorden. Wat is de snelste methode? Kies één van de volgende antwoorden.
- A Controleer de computerberekening door voor alle staven de kniklengte te schatten en zo nodig te corrigeren.
 - B Pas de Eurocode toe want die regels zijn wel goed.
 - C Maak een GNL berekening met gereduceerde stijfheid om vast te stellen of de constructie knikt voor belastingcombinaties behorende bij de uiterste grenstoestand.
 - D Maak een GNL berekening, meet de kniklengte van het computerscherm en vermenigvuldig de gemeten lengte met de schaal van afbeelding.
- d Bij een geometrisch niet-lineaire raamwerkberekening wordt vaak een gereduceerde stijfheid toegepast. Waar is dit voor nodig?

Uitwerking vraagstuk 1

a



b De hoofdspanningen zijn de eigenwaarden gesorteerd van groot naar klein $\sigma_1 = -2,75 \text{ N/mm}^2$,

$\sigma_2 = -25,9 \text{ N/mm}^2$, $\sigma_3 = -51,7 \text{ N/mm}^2$. Het criterium van Mohr-Coulomb is $\frac{\sigma_1}{\sigma_t} + \frac{\sigma_3}{\sigma_d} \leq 1$.

Substitutie geeft $\frac{-2,72}{4} + \frac{-51,7}{-32} = 0,93$. Het beton zal niet bezwijken. Drukwapening is dus niet nodig in het maatgevende punt. Trekwapening is ook niet nodig omdat alle hoofdspanningen negatief zijn.

c Eerste spanningstoestand

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -2,75 - 25,9 - 51,7 = -80,3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 = 2,75 \times 25,9 + 2,75 \times 51,7 + 25,9 \times 51,7 = 1550$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -2,75 \times 25,9 \times 51,7 = -3670$$

Tweede spanningstoestand

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -25,5 - 33,8 - 21,0 = -80,3$$

$$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$= 25,5 \times 33,8 + 25,5 \times 21,0 + 33,8 \times 21,0 - 21,4^2 - 1,5^2 - 9,9^2 = 1550$$

$$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} + 2\sigma_{xy}\sigma_{xz}\sigma_{yz} - \sigma_{xx}\sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy}\sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz}\sigma_{xy}^2$$

$$= -25,5 \times 33,8 \times 21,0 + 2 \times 21,4 \times 1,5 \times 9,9 + 25,5 \times 21,4^2 + 33,8 \times 1,5^2 + 21,0 \times 9,9^2 = -3650$$

De invarianten zijn hetzelfde (afgezien van afrondingsverschillen) dus de spanningstoestanden zijn hetzelfde.

Uitwerking vraagstuk 2

- a** J_2, I_1, θ
- b** $\frac{a}{f_c'^2}, \frac{b}{f_c'}, \frac{k_1}{f_c'}, k_2$
- c** 1, namelijk de éénassige vloeispanning σ_v
- d** Von Mises kunnen we schrijven als $\sqrt{3J_2} \leq \sigma_v$. Als we stellen $a = b = k_2 = 0$ en $\frac{k_1}{f_c'} = \frac{2}{\sigma_v}$ dan vereenvoudigt Ottosen in Von Mises.

Uitwerking vraagstuk 3

- a** Bij te grote incrementen kunnen de iteraties geen evenwichtstoestand vinden. Er treedt divergentie op. Bij heel kleine incrementen is de rekentijd heel groot.
- b** booglengte-sturing / arch length control
- c** Een oplossing is A, C of D. Het snelste is C.
- d** Dit is nodig om imperfecties in rekening te brengen.
 De stijfheid wordt zodanig gereduceerd dat de kniklast van de elementen overeenkomt met die bepaald met normregels. De normregels zijn gebaseerd op vele proeven op kolomen met in de praktijk voorkomende imperfecties.