

Tentamen Materiaalmodellen en Niet-lineaire Mechanica

docent: P.C.J. Hoogenboom

8 januari 2013, 18:00 tot 19:30 uur

Toegestaan is gebruik van dictaat, aantekeningen, boeken, calculator en een laptop-computer

Niet toegestaan is communiceren met anderen binnen of buiten de tentamenzaal

Uitwerking na afloop op <http://homepage.tudelft.nl/p3r3s/2TM6.html>

Vraagstuk 1 (30 minuten, 3 punten)

Een gewapend betonnen constructiedeel heeft in een maatgevend punt de onderstaande spanningstoestand. De druksterkte van het beton is 60 N/mm^2 . De treksterkte van het beton is 2 N/mm^2 . De treksterkte van de wapening is 450 N/mm^2 . De massa van de wapening is 7800 kg/m^3 . Veiligheidsfactoren zijn al in rekening gebracht.

$$\sigma_{xx} = -8 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = -8$$

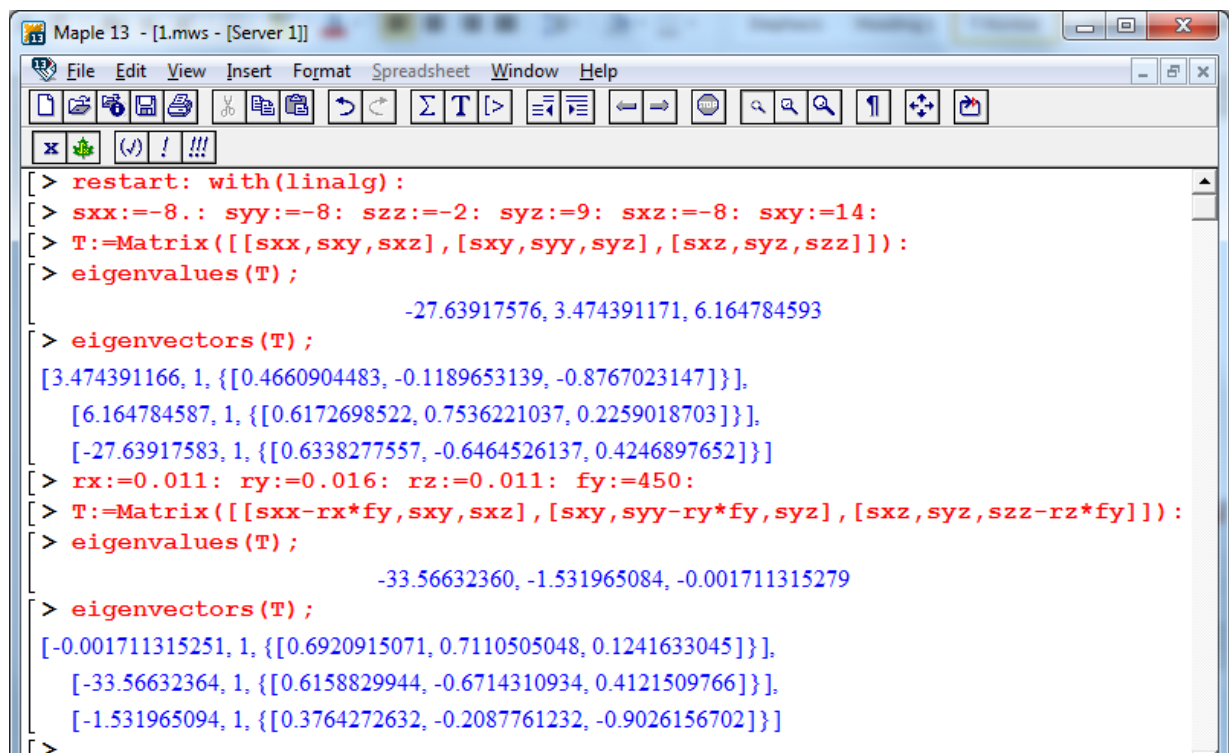
$$\sigma_{zz} = -2$$

$$\sigma_{yz} = 9$$

$$\sigma_{xz} = -8$$

$$\sigma_{xy} = 14$$

- Teken een elementair kubusje met de spanningen.
- Wat zijn de waarden van de hoofdspanningen in het kubusje? (zie figuur)



```
> restart: with(linalg):
> sxx:=-8.: syy:=-8.: szz:=-2.: syz:=9.: sxz:=-8.: sxy:=14:
> T:=Matrix([ [sxx,sxy,sxz], [sxy,syy,syz], [sxz,syz,szz] ]):
> eigenvalues(T);
-27.63917576, 3.474391171, 6.164784593
> eigenvectors(T);
[3.474391166, 1, {[0.4660904483, -0.1189653139, -0.8767023147]}],
[6.164784587, 1, {[0.6172698522, 0.7536221037, 0.2259018703]}],
[-27.63917583, 1, {[0.6338277557, -0.6464526137, 0.4246897652]}]
> rx:=0.011: ry:=0.016: rz:=0.011: fy:=450:
> T:=Matrix([ [sxx-rx*fy,sxy,sxz], [sxy,syy-ry*fy,syz], [sxz,syz,szz-rz*fy] ]):
> eigenvalues(T);
-33.56632360, -1.531965084, -0.001711315279
> eigenvectors(T);
[-0.001711315251, 1, {[0.6920915071, 0.7110505048, 0.1241633045]}],
[-33.56632364, 1, {[0.6158829944, -0.6714310934, 0.4121509766]}],
[-1.531965094, 1, {[0.3764272632, -0.2087761232, -0.9026156702]}]
>
```

c Hoeveel wapening is nodig als de wapeningsstaven in de hoofdrichtingen zijn geplaatst.

d Iemand stelt de volgende wapeningspercentages voor.

$$\rho_x = 1,1 \%,$$

$$\rho_y = 1,6 \%,$$

$$\rho_z = 1,1 \%.$$

Is dit voldoende? (zie figuur) Is dit minder wapening dan opgave 1c? Verklaar uw antwoorden.

e Is de druksterkte van het beton voldoende? Verklaar uw antwoord.

f In welke richting zal het beton scheuren? (De richting van een vlak wordt aangegeven door de vector loodrecht op dit vlak.)

Vraagstuk 2 (30 minuten, 3 punten)

a We kunnen de indices van een tensorgetal verwisselen. Bijvoorbeeld $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$. Hoe komt dit?

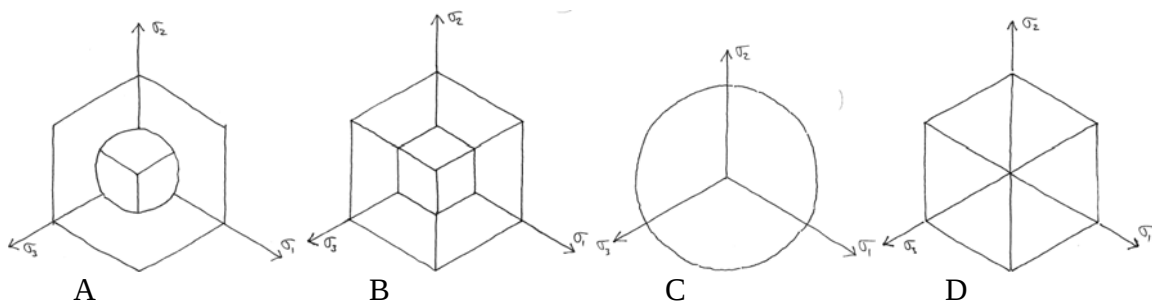
b Wat is de oplossing van het anagram CEIINOSSSTTUV?

c De dwarscontractiecoëfficiënt van gescheurd beton is 0. Hoe komt dit?

d Een computer kan een tweede orde tensor weergeven in elk gewenst assenstelsel. Welke formule wordt hiervoor geprogrammeerd? Verklaar de gebruikte symbolen.

e Een materiaal bezwijkt (vloeit of scheurt) als de spanning te groot wordt. Hoe weten we dat elastische rekken geen bezwijken veroorzaken?

f Hoe ziet de grensspanningshypothese voor ongewapend beton eruit geprojecteerd op het π -vlak. Kies A, B, C of D.

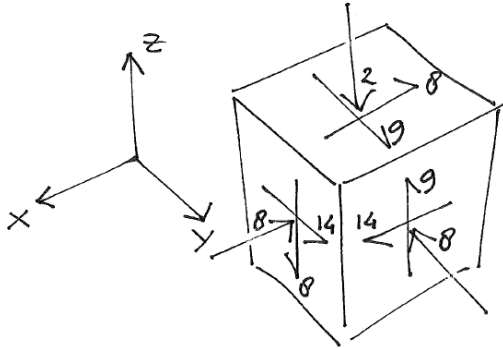


Vraagstuk 3 (30 minuten, 4 punten)

- a** Bij veel eindige-elementenprogramma's kunnen we bandbreedteoptimalisatie instellen. Op welk aspect van de berekening heeft dit invloed, bijvoorbeeld convergeren, nauwkeurigheid, rekentijd?
- b** Een lineair-elastische berekening van een eindige-elementenmodel op een bepaalde PC duurt 15 minuten. Stel dat we met hetzelfde model een niet-lineaire berekening willen uitvoeren (belastingsturing, 10 incrementen, max 10 iteraties per increment). Heeft deze PC voldoende geheugen en harde schijfruimte om een niet lineaire berekening te kunnen uitvoeren? Zo ja, hoe lang zal deze niet-lineaire berekening duren? Verklaar uw antwoorden.
- c** In Dr. Frame kan divergentie optreden. Betekent dit dat de constructie bij betreffende belasting bezwaken is? Hoe kan dit probleem worden opgelost?
- d** Dunne schaalconstructies moeten berekend worden met de niet-lineaire eindige-elementenmethode. Waarom is dit nodig?
- e** Bij niet-lineaire berekeningen van dunne schaalconstructies worden vorm-imperfecties toegepast. Hoe wordt de vorm van zo een imperfectie bepaald? Hoe wordt de amplitude van zo een imperfectie bepaald?

Antwoorden Vraagstuk 1

a



b $\sigma_1 = 6,16 \quad \sigma_2 = 3,47 \quad \sigma_3 = -27,64 \text{ N/mm}^2$

c In de eerste hoofdrichting is nodig $\frac{6,16}{450} = 0,0137 = 1,37\%$ wapening.

In de tweede hoofdrichting is nodig $\frac{3,47}{450} = 0,0077 = 0,77\%$ wapening.

In de derde hoofdrichting is geen wapening nodig.

De soortelijke massa van de totale wapening is $(0,0137 + 0,0077)7800 = 167 \text{ kg/m}^3$

d Ja, dit is voldoende omdat alle hoofdspanningen in het beton kleiner zijn dan 0.

Nee, $(0,011 + 0,016 + 0,011)7800 = 296 \text{ kg/m}^3$. Dit is meer dan 167 kg/m^3 .

e Ja, Opgave 1c: $\frac{-27,64}{-60} + \frac{0}{2} = 0,46 < 1$,

Opgave 1d: $\frac{-33,57}{-60} + \frac{-0,0017}{2} = 0,56 < 1$,

f Opgave 1c: Scheurvlakken loodrecht op richting $\begin{Bmatrix} 0,62 \\ 0,75 \\ 0,23 \end{Bmatrix}$ en loodrecht op richting $\begin{Bmatrix} 0,47 \\ -0,12 \\ -0,88 \end{Bmatrix}$

Opgave 1d: Scheurvlakken loodrecht op richting $\begin{Bmatrix} 0,69 \\ 0,71 \\ 0,12 \end{Bmatrix}$ en loodrecht op richting $\begin{Bmatrix} 0,38 \\ -0,21 \\ -0,90 \end{Bmatrix}$

Toegift

De scheurvlakken maken de volgende hoeken

$$\theta_1 = \arccos \frac{0,62 \times 0,69 + 0,75 \times 0,71 + 0,23 \times 0,12}{\sqrt{0,62^2 + 0,75^2 + 0,23^2} \times \sqrt{0,69^2 + 0,71^2 + 0,12^2}} = 0,137 \text{ rad} = 4^\circ$$

$$\theta_2 = \arccos \frac{0,47 \times 0,38 + (-0,12) \times (-0,21) + (-0,88) \times (-0,90)}{\sqrt{0,47^2 + (-0,12)^2 + (-0,88)^2} \times \sqrt{0,38^2 + (-0,21)^2 + (-0,90)^2}} = 0,128 \text{ rad} = 4^\circ$$

Het eerste scheurtje begint in de richting van opgave 1c. Naarmate deze scheur groeit draagt het beton minder en draagt de wapening meer. Aannemende dat wapening alleen in de x-, y- en z-richting is toegepast, groeit de scheur verder in de richting van opgave 1d. Men spreekt van scheurrotatie. Feitelijk roteert de scheur niet maar groeit de scheur in een andere richting. Echter, een “rotatie” van 4° is praktisch niet waarneembaar.

Antwoorden vraagstuk 2

- a Bij de schuifspanning komt dit doordat de momenten op een klein kubusje in evenwicht zijn. Bij de afschuifrek komt dit doordat het niet uitmaakt in welke volgorde de twee hoekjes worden opgeteld.
- b $UT \text{ TENSIO SIC VIS} = \text{Als de verlenging zo is de kracht} = \text{Wet van Hooke}$
- c Stel dat gewapend beton wordt gedrukt in een richting en loodrecht daarop wordt getrokken. In de drukrichting bevinden zich scheuren. De trekkracht wordt gedragen door de wapening. Het gedrukte beton zet uit in de trekrichting maar dit wordt opgenomen in de scheuren. Het gewapend beton als geheel zet niet uit in de dwarsrichting. Voor trek in beide richtingen geldt een soortgelijke redenatie.
- d $\sigma_n = T \sigma_o T^T$
 σ_o is de oude tensor
 σ_n is de nieuwe tensor
 T is de rotatiematrix
 T^T is de getransponeerde van de rotatiematrix
De elementen in de rotatiematrix zijn de cosinussen van de hoeken tussen de oude en de nieuwe assen.
- e De hypothese dat elastische rek bezwijken veroorzaakt is van Saint Venant. Tot nu toe is van geen enkel materiaal experimenteel vastgesteld dat het aan deze hypothese voldoet.
- f B

Antwoorden vraagstuk 3

- a Ruimtegebruik op de harde schijf en rekentijd.

- b** Ja, de berekening kan worden uitgevoerd omdat een niet-lineaire berekening ongeveer dezelfde hoeveelheid geheugen en harde schijf nodig heeft. (Tenzij heel veel rekenresultaten worden opgeslagen.) De niet-lineaire berekening zal korter duren dan $15 \text{ min.} \times 10 \times 10 = 1500 \text{ min.} = 25 \text{ uur.}$
- c** Vaak betekent dit in Dr. Frame dat de constructie bezwiken is maar dat hoeft niet. Divergentie kan ook andere oorzaken hebben, bijvoorbeeld een locale dip in de last-verplaatsingsgrafiek. Als divergentie een probleem is kan dit vaak opgelost worden met kleinere belastingstappen.
- d** Dit is nodig omdat bij knik van een schaal een ingewikkelde interactie plaats vindt tussen momenten, normaalkrachten, vervorming en imperfecties. Dit kan niet nauwkeurig worden berekend met de hand of met een lineaire elementenberekening. (Afgezien van sommige stalen silo's waarvoor ontwerpgrafieken beschikbaar zijn.)
- e** De vorm is de knikvorm. De amplitude wordt geschat, bijvoorbeeld op basis van bouweisen in een norm, op basis van metingen aan soortgelijke schalen of op basis van overleg met de aannemer.