

Tentamen **Materiaalmodellen**

30 juni 2015, 15:30 tot 17:00 uur

P.C.J. Hoogenboom

Toegestaan is gebruik van dictaat, aantekeningen, boeken, calculator, laptop-computer en een tablet. Niet toegestaan is communiceren met anderen binnen of buiten de tentamenzaal.

Vraag 1

Een gewapend betonnen constructiedeel heeft in een maatgevend punt de onderstaande spanningstoestand.

$$\sigma_{xx} = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{yy} = 4$$

$$\sigma_{zz} = -17$$

$$\sigma_{yz} = -3$$

$$\sigma_{xz} = 0$$

$$\sigma_{xy} = 12$$

De druksterkte van het beton is 30 N/mm².

De treksterkte van het beton is 2,5 N/mm².

De treksterkte van de wapening is 500 N/mm².

Veiligheidsfactoren zijn al in rekening gebracht.

a Teken een elementair kubusje met de optredende spanningen (0.7 punt)

b Wat is een vlakke spanningstoestand? (0.3 punt)

Heerst in het bovenstaande kubusje een vlakke spanningstoestand? (0.3 punt)

Stel dat we een Excel sheet willen schrijven. Hoe kunnen de hoofdspanningen worden berekend van een vlakke spanningstoestand in Excel? (0.3 punt)

c Stel dat we wapening in de hoofrichting van het bovenstaande maatgevende punt willen aanbrengen. In welke richting (vector) moet deze wapening wijzen? (zie figuur 1) (0.5 punt)

Hoeveel wapening is dan nodig? (0.5 punt)

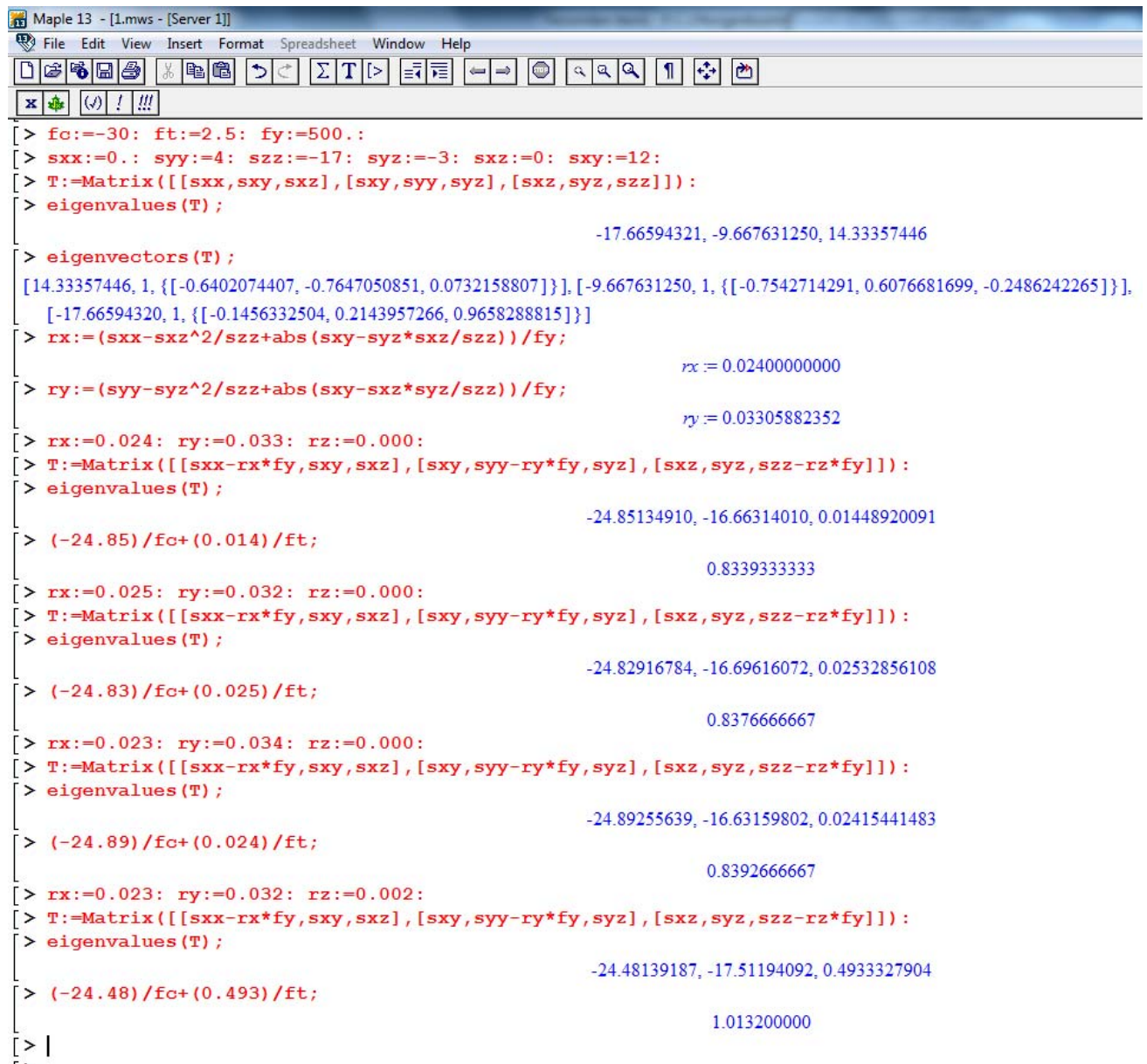
d Stel dat we wapening in de x-, y- en z-richting in het bovenstaande maatgevende punt willen aanbrengen. Op Wikipedia (www.wikipedia.com, reinforced solid) staan de volgende formules om de minimaal benodigde wapening te berekenen voor deze spanningssituatie.

$$\rho_x = \frac{\sigma_{xx} - \frac{\sigma_{xz}^2}{\sigma_{zz}} + \left| \sigma_{xy} - \frac{\sigma_{xz}\sigma_{yz}}{\sigma_{zz}} \right|}{f_y}, \quad \rho_y = \frac{\sigma_{yy} - \frac{\sigma_{yz}^2}{\sigma_{zz}} + \left| \sigma_{xy} - \frac{\sigma_{xz}\sigma_{yz}}{\sigma_{zz}} \right|}{f_y}, \quad \rho_z = 0$$

Het resultaat is $\rho_x = 2,4\%$, $\rho_y = 3,3\%$, $\rho_z = 0,0\%$.

Kloppen deze formules? (zie figuur 1) Verklaar uw antwoord. (0.5 punt)

Voldoen de betonspanningen in het maatgevend punt? (zie figuur 1) Verklaar uw antwoord. (0.5 punt)



```

Maple 13 - [1.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[Icons]
[Icons]

[> fc:=-30: ft:=2.5: fy:=500.:
> sxx:=0.: sy:=4: szz:=-17: syz:=-3: sxz:=0: sxy:=12:
> T:=Matrix([ [sxx,sxy,sxz], [sxy,syy,syz], [sxz,syz,szz] ]):
> eigenvalues(T);

-17.66594321, -9.667631250, 14.33357446

> eigenvectors(T);
[14.33357446, 1, {[ -0.6402074407, -0.7647050851, 0.0732158807 ]}], [-9.667631250, 1, {[ -0.7542714291, 0.6076681699, -0.2486242265 ]}],
[-17.66594320, 1, {[ -0.1456332504, 0.2143957266, 0.9658288815 ]}]

> rx:=(sxx-sxz^2/szz+abs(sxy-syz*sxz/szz))/fy;
rx:=0.02400000000

> ry:=(syy-syz^2/szz+abs(sxy-sxz*syz/szz))/fy;
ry:=0.03305882352

> rx:=0.024: ry:=0.033: rz:=0.000:
> T:=Matrix([ [sxx-rx*fy,sxy,sxz], [sxy,syy-ry*fy,syz], [sxz,syz,szz-rz*fy] ]):
> eigenvalues(T);

-24.85134910, -16.66314010, 0.01448920091

> (-24.85)/fc+(0.014)/ft;
0.8339333333

> rx:=0.025: ry:=0.032: rz:=0.000:
> T:=Matrix([ [sxx-rx*fy,sxy,sxz], [sxy,syy-ry*fy,syz], [sxz,syz,szz-rz*fy] ]):
> eigenvalues(T);

-24.82916784, -16.69616072, 0.02532856108

> (-24.83)/fc+(0.025)/ft;
0.8376666667

> rx:=0.023: ry:=0.034: rz:=0.000:
> T:=Matrix([ [sxx-rx*fy,sxy,sxz], [sxy,syy-ry*fy,syz], [sxz,syz,szz-rz*fy] ]):
> eigenvalues(T);

-24.89255639, -16.63159802, 0.02415441483

> (-24.89)/fc+(0.024)/ft;
0.8392666667

> rx:=0.023: ry:=0.032: rz:=0.002:
> T:=Matrix([ [sxx-rx*fy,sxy,sxz], [sxy,syy-ry*fy,syz], [sxz,syz,szz-rz*fy] ]):
> eigenvalues(T);

-24.48139187, -17.51194092, 0.4933327904

> (-24.48)/fc+(0.493)/ft;
1.013200000

> |
~

```

Figuur 1. Berekeningen in Maple

- e Spanning is betonspanning plus wapeningsspanning. Dit kan als volgt worden geschreven.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xxb}(1-\rho_x) & \sigma_{xyb} & \sigma_{xzb} \\ \sigma_{yxb} & \sigma_{yyb}(1-\rho_y) & \sigma_{yzb} \\ \sigma_{zxb} & \sigma_{zyb} & \sigma_{zzb}(1-\rho_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_y \rho_x & 0 & 0 \\ 0 & f_y \rho_y & 0 \\ 0 & 0 & f_y \rho_z \end{bmatrix}$$

Deze vergelijking is anders dan de vergelijking die is gebruikt in figuur 1.

Wat is wezenlijk anders? (0.4 punt).

In welke situatie is deze vergelijking beter dan die van figuur 1? (0.4 punt)

Vraag 2 (0.7 punt)

De vloeispanningshypothese van Von Mises wordt ook wel “J2 plasticity” genoemd.

Verklaar deze naam.

Vraag 3 (0.7 punt)

Tijdens een aardbeving op een staalconstructie kan de spanning veranderen van trek naar druk en weer terug. Stel dat we dit willen berekenen met een elementenprogramma (niet-lineair). De toegepaste staalsoort verstevigd bij het vloeien. Moeten we kiezen voor kinematische versteviging (kinematic hardening) of isotrope versteviging (isotropic hardening)? Verklaar uw antwoord.

Vraag 4 (0.7 punt)

Waarom wordt de grensspanningshypothese van Saint Venant weinig toegepast?

Vraag 5 (0.7 punt)

Wat is de betekenis van de volgende woorden?

grensspanningshypothese

vloeicontour

interactiediagram

limit state function

vloeimodel

bezwijkomhullende

tension cut off

Vraag 6 (0.7 punt)

Welke grensspanningshypothesen voorspellen bezwijken van de volgende materialen? (0.7 punt)

beton
staal
koper
plastic
grond
hout
composiet

Vraag 7

- a Bedenk zelf een grensspanningshypothese. Zorg dat uw hypothese niet afhankelijk is van de eenheden. (0.5 punt)
- b Is uw hypothese onafhankelijk van het assenstelsel? Verklaar uw antwoord. (0.5 punt)
- c Hoe kunnen we vaststellen of uw hypothese correct is? (0.5 punt)

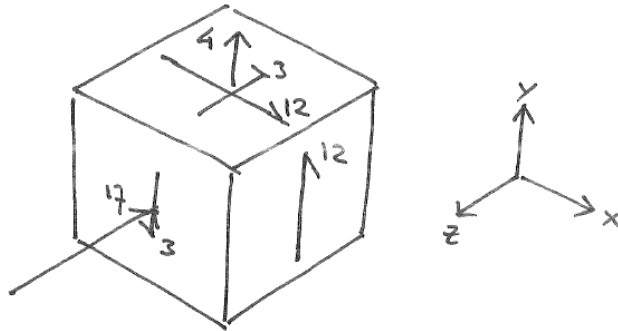
Vraag 8 (0.6 punt)

De Bresler-Pister-hypothese is

$$\sqrt{J_2} = A + B I_1 + C I_1^2 .$$

Hierin zijn de materiaalconstanten $A = 3,4 \text{ N/mm}^2$, $B = -0,54$ en $C = -0,0068 \text{ mm}^2/\text{N}$. Deze grensspanningshypothese is niet open aan de drukzijde. Laat dit zien. (0.7 punt)

1a



1b Definitie: Er heersen geen spanningen op twee overstaande vlakken.

Nee, geen vlakke spanningstoestand.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

1c

$$\begin{bmatrix} -0.640 \\ -0.765 \\ 0.0732 \end{bmatrix}$$

$$\frac{14,33}{500} = 2,9\%$$

1d In de berekening wordt de wapening gevarieerd. De totale hoeveelheid wordt gelijk gehouden maar een beetje anders verdeeld over de richtingen. Er heerst een heel kleine trekspanning in het beton. Bij elke variatie blijkt dat deze spanning groter wordt. Dus bij elke variatie is eigenlijk een beetje meer wapening nodig. Dus de ongevarieerde wapening is minimaal. Dus de formules kloppen.

Deze conclusie is niet helemaal zeker omdat 1) niet alle mogelijke variaties zijn geprobeerd en 2) deze wapening kan een lokaal minimum zijn en misschien is er een ander lokaal minimum dat nog kleiner is.

De betonspanningen bij de ongevarieerde wapening voldoen. Immers, 1) het Mohr-Coulomb criterium geeft een waarde kleiner dan één en 2) de trekspanning is verwaarloosbaar (Rankine en krimp-scheurtjes).

1e Extra zijn $(1 - \rho_x)$, $(1 - \rho_y)$ en $(1 - \rho_z)$.

Bij hoge wapeningspercentages.

2 Het Von Mises criterium kan geschreven worden als $\sqrt{3J_2} \leq f_y$.

- 3 Kinematische versteviging. Uit experimenten op staal blijkt dat de vloeicontour opschuift in plaats van groter wordt. Dit is van belang voor omkeerbelaastingen zoals aardbevingen.
- 4 Er is nog geen materiaal gevonden waarvan experimenten laten zien dat het volgens deze hypothese bezwijkt.
- 5 De combinatie van spanningen, krachten of momenten waarbij vloeien, scheuren of verbrijzelen optreedt.
- 6 beton Mohr-Coulomb gecombineerd met Rankine voor trek
 staal Von Mises
 koper Von Mises
 plastic Von Mises (Tresca)
 grond Mohr-Coulomb
 hout Tsai-Hill (Tsai-Wu)
 composite Tsai-Hill (Tsai-Wu)

7a

7b Als de hypothese is geformuleerd in hoofdspansingen of in invarianten is deze onafhankelijk van het assenstelsel.

7c Experimenten uitvoeren op een materiaal en kijken of bezwijken wordt voorspeld door mijn hypothese.

8 Stel we belasten langs de ruimtediagonaal in de drukrichting

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -k.$$

Als de vloeicontour gesloten is en we maken k groter dan moet er een moment komen dat we de vloeicontour passeren. Op dat moment geldt

$$\sqrt{J_2} = A + B I_1 + C I_1^2.$$

Uitwerking

$$\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}((-k + k)^2 + (-k + k)^2 + (-k + k)^2)} = 0$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = -k - k - k = -3k$$

Stel dat $k = 10 \text{ N/mm}^2$

$$\sqrt{J_2} = A + B I_1 + C I_1^2$$

$$0 = 3,4 - 0,54(-3k) - 0,0068(-3k)^2 = 3,4 - 0,54(-30) - 0,0068(-30)^2 = 13,5$$

Stel dat $k = 30 \text{ N/mm}^2$

$$\sqrt{J_2} = A + B I_1 + C I_1^2$$

$$0 = 3,4 - 0,54(-3k) - 0,0068(-3k)^2 = 3,4 - 0,54(-90) - 0,0068(-90)^2 = -3,08$$

Ergens tussen $k = 10$ en $k = 30$ is inderdaad aan het criterium $0 = 0$ voldaan. Dus de vloeicontour is inderdaad gesloten.