Een studie naar het constructieve gedrag van reciprocal frames gemaakt van resthout

Waarbij de focus ligt op het vergelijken van verschillende patronen waaruit een reciprocal frame opgebouwd kan zijn

8 juni 2022

Faculteit Civiele Techniek, TU Delft
CTB3000-16 Bachelor Eindwerk

Auteur:
Emma de Groen

Studentnummer:
5069920

Begeleiders:
Dr. ir. H.R. Schipper
Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom

TU Delft Delft University of Technology

Voorwoord

Voor u ligt een bachelor eindwerk over de invloed van verschillende patronen op het constructieve gedrag van reciprocal frames. Dit rapport is geschreven als afsluiting van de bachelor Civiele Techniek aan de TU Delft.

Deze scriptie is bestemd voor geïnteresseerden in de invloed van patronen op het gedrag van reciprocal frames. Het gaat hierbij om zowel koepel- als plaatvormige frames. Ook zal het onderwerp zowel theoretisch als modelmatig belicht worden. Geïnteresseerden in algemene informatie over reciprocal frames en de verbindingen kunnen deze informatie vinden in hoofdstuk 2 en 3. Lezers die meer belangstelling hebben voor fysieke schaalmodellen kunnen terecht in hoofdstuk 4 en 5. Tot slot is de vergelijking van de patronen te vinden in hoofdstuk 9.

Graag wil ik mijn begeleiders Dr. ir. H.R. Schipper en Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom bedanken voor hun goede hulp tijdens het schrijven van dit rapport. Daarnaast wil ik mw. Disseldorp-Van der Lubbe bedanken voor het beschikbaar stellen van de tekeningen van de Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk te Hoogmade.

Gouda, juni 2022
Emma de Groen

Samenvatting

In dit rapport is de volgende hoofdvraag beantwoord. *Wat is de invloed van verschillende patronen op het constructieve gedrag van reciprocal frames gemaakt van resthout?* Hiervoor is eerst een literatuurstudie gedaan naar wat reciprocal frames zijn. Vervolgens zijn er schaalmodellen gemaakt met verschillende patronen. Deze schaalmodellen zijn beproefd en vergeleken met computermodellen gemaakt in SCIA Engineer.

Reciprocal frames zijn constructies die opgebouwd zijn uit eenheden die bestaan uit elementen die samen een gesloten eenheid vormen. De eenheden kunnen verschillende vormen hebben. In dit rapport worden alleen driehoekige en vierkante eenheden onderzocht. Door de eenheden te draaien en spiegelen kunnen er met dezelfde eenheden verschillende patronen gemaakt worden.

De elementen kunnen op verschillende manieren met elkaar verbonden worden. Dit kan door gebruik te maken van bouten of inkepingen of door de elementen op elkaar te stapelen. Ook kan er gebruik gemaakt worden van balkdragers of kunnen de elementen aan elkaar geknoopt worden.

Als de elementen door middel van stapeling aan elkaar verbonden worden levert dit koepelvormige constructies op. Hierbij moet rekening gehouden worden dat de elementen onder de juiste hoek aan elkaar verbonden worden. Als dat niet gebeurd zullen de elementen geen gesloten eenheid vormen. Als de eenheden aan elkaar verbonden worden zijn de eenheden ten opzichte van elkaar getordeerd. Dit resulteert in dubbele buiging in de elementen.

Bij het maken van koepelvormige constructies zal het patroon niet hetzelfde zijn als bij tweedimensionale reciprocal frames. Dit wordt veroorzaakt door de kromming van de eenheden doordat de elementen verbonden zijn door stapeling. Bij frames die opgebouwd zijn uit vierkante eenheden bestaat daarnaast het gevaar dat de eenheden zullen vervormen doordat ze niet vormvast zijn.

Bij plaatvormige reciprocal frames kunnen de elementen verbonden worden door gebruik te maken van balkdragers. Hierdoor zullen alle elementen in hun sterke richting belast worden en zullen ze geen dubbele buiging ondervinden.

Van de plaatvormige varianten die onderzocht zijn is gebleken dat de varianten waar veel open ruimte aanwezig is tussen de elementen bijna twee keer zo veel doorbuigen als de varianten waarbij niet veel ruimte tussen de elementen aanwezig was. Qua spanningen die in de elementen zullen optreden verschillen de varianten niet veel van elkaar.

Inhoudsopgave

Voorwoord i

Samenvatting ii

1 Inleiding 1

2 Reciprocal frames 2
2.1 Wat zijn reciprocal frames? . . . 2
2.2 Patronen . . . 3
2.3 Fysieke modellen . . . 4

3 Verbinding van de elementen 6
3.1 Bouten . . . 6
3.1.1 Bouten en platen . . . 6
3.1.2 Penverbinding . . . 6
3.2 Inkepingen . . . 7
3.3 Stapeling . . . 7
3.4 Geknoopte verbinding . . . 8

4 Ontwerpuitgangspunten 10
4.1 Het resthout en de schaal . . . 10
4.2 Patronen . . . 10

5 Schaalmodellen van eenheden 12
5.1 Verhoudingen . . . 12

6 Schaalmodellen van koepels 13
6.1 Variant 1 - driehoekige eenheden . . . 14
6.2 Variant 2 - driehoekige eenheden . . . 15
6.3 Variant 3 - vierkante eenheden . . . 16
6.4 Variant 4 - vierkante eenheden . . . 17
6.5 Conclusie en aanpassingen . . . 18

7 Plaatvormige schaalmodellen 19
7.1 Materiaal en verhoudingen . . . 19
7.2 Methode . . . 19
7.3 Modellen tijdens het testen . . . 22
7.4 Resultaten en vergelijking met computer modellen . . . 23

8 Handberekeningen 25
8.1 Losse eenheden . . . 25
8.2 Volledige frames . . . 30
8.2.1 Omrekening naar werkelijkheid . . . 30
8.2.2 Spanningen in elementen . . . 31

9 Vergelijking 34
9.1 Beoordelingscriteria . . . 34
9.2 Resultaten . . . 35

10 Conclusie **36**

Literatuurlijst **37**

Bijlage A Tekeningen Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk **38**

Bijlage B Sterkte- en stijfheidsproeven **46**
B.1 Driepuntsbuigproef 46
B.2 Verbindingsproef 48

Bijlage C Bepaling gewicht, afmetingen en dichtheid elementen en verbindingen **51**

Bijlage D Doorbuiging schaalmodellen **53**

Bijlage E SCIA Engineer modellen **54**

1 Inleiding

Duurzaamheid is een thema dat ook in de bouw steeds belangrijker wordt. Daarom worden er steeds vaker bouwmaterialen hergebruikt als bestaande gebouwen gesloopt worden. Dit zorgt ervoor dat de impact op het milieu beperkt blijft doordat er minder nieuwe materialen gebruikt zullen worden in de nieuwe constructie. Er moet natuurlijk wel rekening gehouden worden met de nadelen van herbruikbare bouwmaterialen. In het geval van hout zal er bijvoorbeeld rekening gehouden moeten worden met verminderde capaciteit op de locaties waar bijvoorbeeld boutgaten zich bevinden (Brol e.a., 2015).

Reciprocal frames zijn constructies waarbij de elementen niet per se met bouten aan elkaar verbonden worden. Dit kan namelijk ook gedaan worden door middel van inkepingen in de elementen of door gebruik te maken van de wrijving die tussen de elementen ontstaat (Song e.a., 2013). Dit soort constructies is opgebouwd uit verschillende eenheden. Deze eenheden kunnen veel verschillende vormen hebben en doordat ze met elkaar gecombineerd kunnen worden zijn er enorm veel patronen mogelijk waarmee reciprocal frames gemaakt kunnen worden (Song e.a., 2013).

Er is eerder onderzoek gedaan naar de invloed het type verbinding en de overlappingslengte op het constructieve gedrag van reciprocal frames (Schrama, 2021), maar in dat onderzoek is niet onderzocht wat de invloed van verschillende patronen is. De hoofdvraag die in dit rapport beantwoord zal worden luidt daarom:
Wat is de invloed van verschillende patronen op het constructieve gedrag van reciprocal frames gemaakt van resthout?

Het doel van dit rapport is het beantwoorden van deze hoofdvraag. Dit zal gedaan worden aan de hand van een aantal deelvragen. Deze zijn hieronder opgesomd.

- Wat zijn reciprocal frames?
- Welke verschillende patronen zijn er mogelijk?
- Hoe zijn deze patronen te schematiseren?
- Wat is het effect van verschillende patronen op de doorbuiging van het frame?
- Wat is het effect van verschillende patronen op de spanningen die zullen optreden in de elementen?

Om deze deelvragen te beantwoorden zal er eerst een literatuurstudie gedaan worden naar wat reciprocal frames zijn. Vervolgens zullen er fysieke schaalmodellen gemaakt worden om de resterende vragen te beantwoorden. Deze modellen zullen beproefd worden om de doorbuiging van elke variant te bepalen. Daarnaast wordt er door het maken van modellen een inzicht verkregen hoe de constructies zich gedragen. Ook worden er handberekeningen gemaakt om de spanningen in de maatgevende doorsnedes te bepalen.

Het rapport zal eerst ingaan op koepelvormige reciprocal frames. De modellen van dit type frames zullen niet beproefd worden. Vervolgens worden plaatvormige frames besproken. Hiervan zijn modellen gemaakt die ook beproefd zijn.

In hoofdstuk 2 wordt uitgelegd wat reciprocal frames zijn en uit welke patronen deze constructies opgebouwd kunnen worden. Hoofdstuk 3 gaat in op de verschillende manieren waarop de elementen met elkaar verbonden kunnen worden. Vervolgens worden in hoofdstuk 4 de ontwerpuitgangspunten benoemd. Hoofdstuk 5, 6 en 7 gaan in op de gemaakte schaalmodellen. In hoofdstuk 8 worden handberekeningen uitgevoerd. Tot slot zijn de patronen in hoofdstuk 9 met elkaar verbonden.

2 Reciprocal frames

In dit hoofdstuk wordt het principe van reciprocal frames behandeld. In paragraaf 2.1 wordt uitgelegd wat een reciprocal frame is. Vervolgens wordt in paragraaf 2.2 ingegaan op de mogelijke patronen waaruit een reciprocal frame opgebouwd kan worden. Tot slot zijn in paragraaf 2.3 fysieke modellen te zien.

2.1 Wat zijn reciprocal frames?

Reciprocal frames zijn constructies die opgebouwd zijn uit lineaire elementen die elkaar op zo'n manier ondersteunen dat ze een gesloten eenheid vormen (Larsen, 2014). Om tot een gesloten eenheid te komen moet de constructie uit ten minste drie elementen bestaan (Song e.a., 2013). In figuur 1 zijn zelfgemaakte modellen te zien van een aantal verschillende reciprocal frame eenheden (RF-eenheden). In dit figuur worden de elementen in hun zwakke richting belast. Dit is niet hoe dit soort constructies in de werkelijkheid gemaakt zal worden, maar het geeft wel inzicht in het principe van reciprocal frames.

Zoals in figuur 1 te zien is komen de eenheden los van de grond. Dit komt doordat de elementen op elkaar gestapeld zijn om een gesloten eenheid te vormen. Als de elementen verbonden zouden worden door middel van balkdragers zou het frame tweedimensionaal worden. In hoofdstuk 3 wordt dieper ingegaan op de verschillende manieren waarop de elementen met elkaar verbonden kunnen worden.

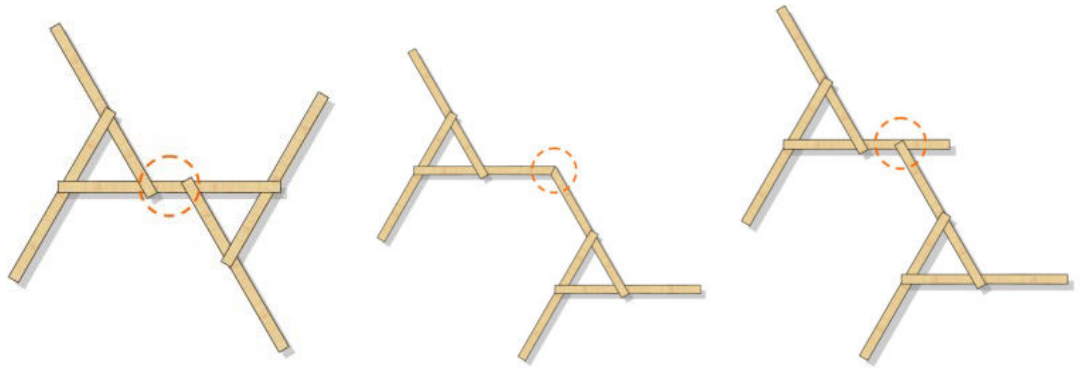


(a) Driehoekige RF-eenheid (b) Vierkante RF-eenheid

Figuur 1: Mogelijke RF-eenheden (eigen afbeelding)

Deze losse eenheden kunnen ook weer met elkaar verbonden worden om samen een grotere constructie te vormen. Dit kan op verschillende manieren gedaan worden, zie figuur 2. In figuur 2a zijn de twee RF-eenheden verbonden door middel van een gemeenschappelijk element. In figuur 2b delen de eenheden hetzelfde eindpunt. Tenslotte zijn de RF-eenheden in figuur 2c verbonden door middel van een T-verbinding. De meest gebruikelijke manier om de eenheden met elkaar te verbinden is door middel van een gemeenschappelijk element, dus de verbinding in figuur 2a (Song e.a., 2013).

Een overzicht van hoe de verbindingen er in de realiteit uit kunnen zien is te zien in hoofdstuk 3.

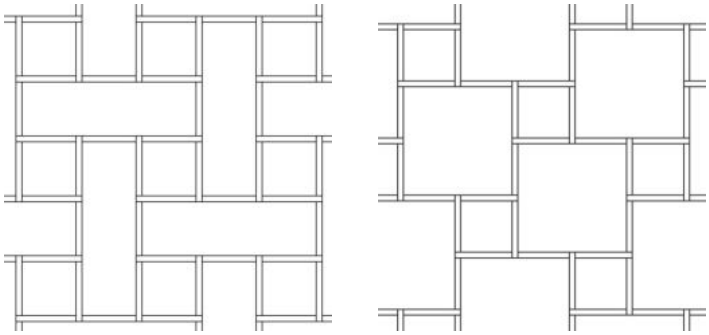


(a) (b) (c)

Figuur 2: Manieren waarop RF-eenheden verbonden kunnen worden (Song e.a., 2013)

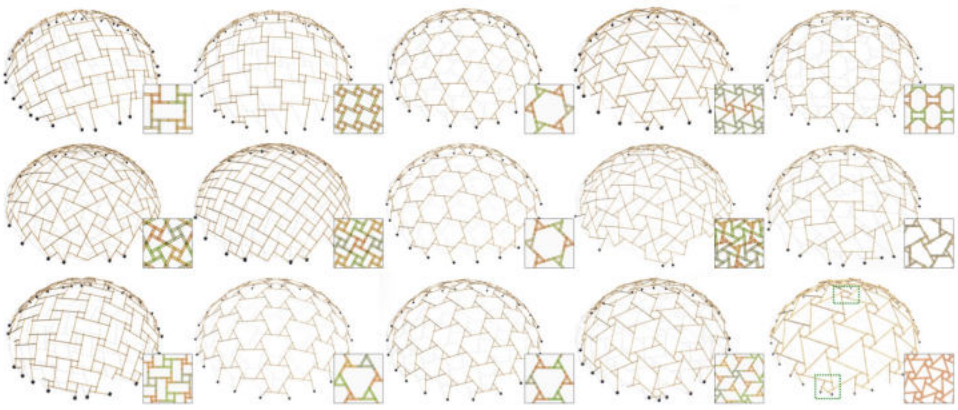
2.2 Patronen

Door losse RF-eenheden met elkaar te verbinden kan er een grotere constructie gemaakt worden. Dit kan gedaan worden door dezelfde eenheden met elkaar te verbinden, maar het is ook mogelijk om verschillende eenheden te verbinden. Zoals in figuur 3 te zien is kun je met dezelfde eenheden, in dit geval vierkante eenheden, verschillende patronen maken. Dit komt doordat de eenheden gespiegeld en gedraaid kunnen worden om nieuwe patronen te maken. In figuur 3 zijn de eenheden met elkaar verbonden door middel van een gemeenschappelijk element.



Figuur 3: Patronen van vierkante eenheden (eigen afbeelding)

In figuur 3 zijn de patronen tweedimensionaal getekend, maar als de elementen met elkaar verbonden worden door ze te stapelen zal de constructie driedimensionaal worden. Voorbeelden van driedimensionale constructies zijn weergegeven in figuur 4. In dit figuur zijn allerlei mogelijke patronen weergegeven. Ook is hier te zien dat zich een koepelvormige constructie zal vormen als de eenheden met elkaar verbonden worden door stapeling.



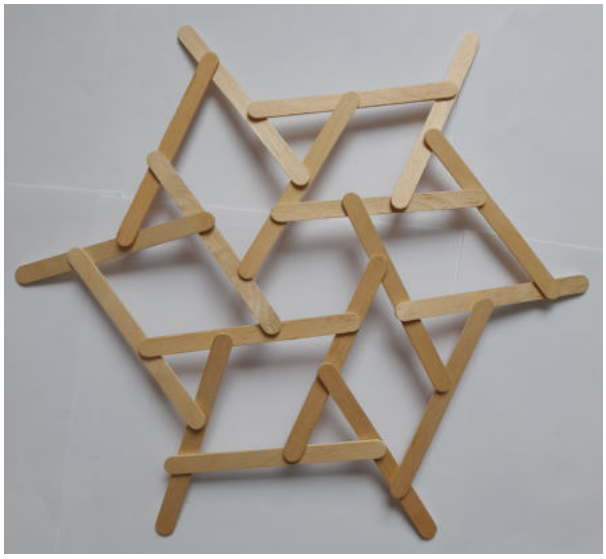
Figuur 4: Mogelijke patronen in 3D (Song e.a., 2013)

2.3 Fysieke modellen

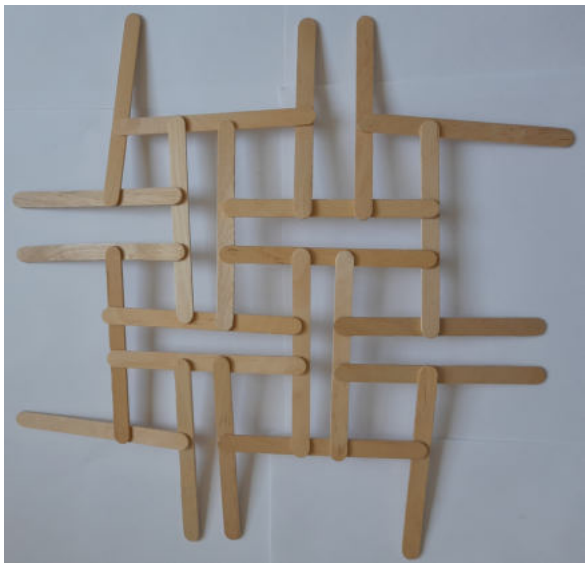
Om het principe van reciprocal frames beter te begrijpen is er een aantal verschillende modellen gemaakt met houtjes. Deze modellen zijn te zien in figuur 5. In dit figuur zijn de elementen met elkaar verbonden door ze op elkaar te stapelen. Hierdoor ontstaan er koepelvormige constructies. De patronen die in dit figuur te zien zijn zullen ook de patronen zijn die met elkaar vergeleken worden.



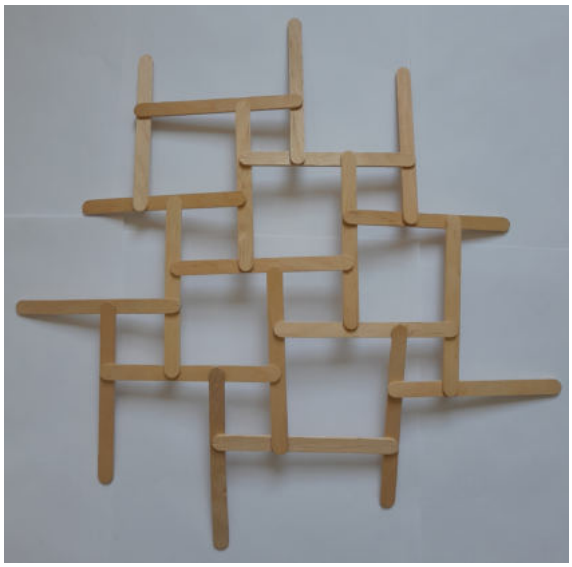
(a) Driehoekige eenheden 1



(b) Driehoekige eenheden 2



(c) Vierkante eenheden 1



(d) Vierkante eenheden 2

Figuur 5: Zelfgemaakte modellen (eigen afbeelding)

3 Verbinding van de elementen

De elementen in een reciprocal frame kunnen op verschillende manieren met elkaar verbonden worden. Bij gebruik van houten elementen kan dit door middel van bouten, inkepingen of door de elementen op elkaar te stapelen (Gustafsson, 2016). Ook kunnen de elementen aan elkaar verbonden worden door ze vast te knopen met bijvoorbeeld touw (Song e.a., 2013).

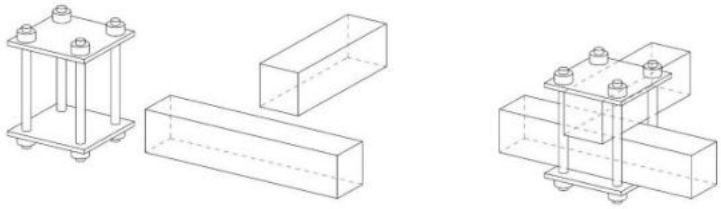
3.1 Bouten

Verbindingen met bouten kunnen op verschillende manieren gemaakt worden. Dit kan door middel van bouten in combinatie met platen of door de bout door de elementen heen te bevestigen.

3.1.1 Bouten en platen

In figuur 6 is te zien hoe twee elementen aan elkaar bevestigd kunnen worden met behulp van bouten en platen. Door de bouten aan te draaien zal de wrijving tussen de twee elementen toenemen. Een voordeel van dit type verbinding is dat de elementen intact blijven doordat de bouten niet door de elementen heen gaan (Gustafsson, 2016).

Als de bouten strak aangedraaid worden kan dit type verbinding beschouwd worden als een inklemming. Het bovenliggende element zal in dat geval een torsie moment uitoefenen op het element waar het aan verbonden is.



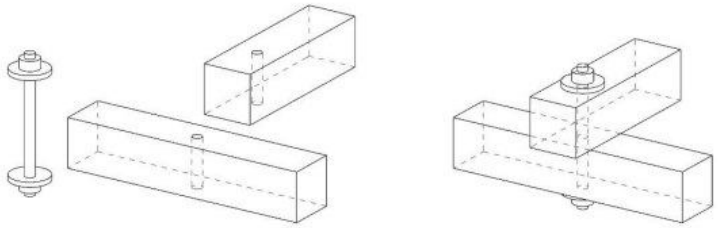
Figuur 6: Verbinding met bouten en platen (Gustafsson, 2016)

3.1.2 Penverbinding

In tegenstelling tot de verbinding met bouten en platen gaan de pennen bij dit type verbinding wel door de elementen heen. Een voorbeeld is te zien in figuur 7.

Bij dit type verbinding zal er een gat in de elementen geboord moeten worden waar de pen doorheen kan. Dit zorgt ervoor dat het element op deze locatie zwakker zal zijn en dus eerder kan bezwijken. Een ander nadeel van deze verbinding is dat het demonteren erg tijdrovend is (Gustafsson, 2016).

Doordat de pennen weinig tot geen momentcapaciteit hebben kan deze verbinding beschouwd worden als een scharnierende verbinding.



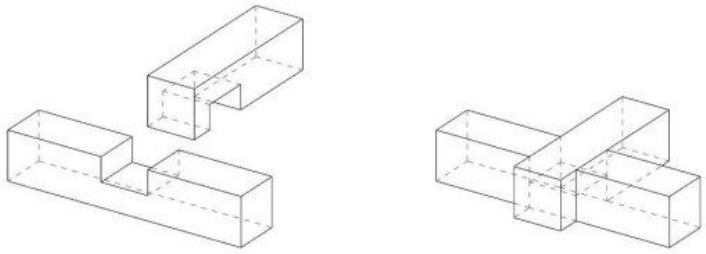
Figuur 7: Verbinding met pennen door de elementen heen (Gustafsson, 2016)

3.2 Inkepingen

Een andere manier om de elementen aan elkaar te verbinden is door middel van inkepingen in de elementen. Dit kan bijvoorbeeld door in beide elementen inkepingen te maken en deze in elkaar te leggen, zie figuur 8.

Een voordeel van dit type verbinding is dat de verbinding erg gemakkelijk te demonteren is doordat er geen bouten aanwezig zijn. Hierdoor blijven de elementen zo goed als onbeschadigd waardoor ze hergebruikt kunnen worden (Gustafsson, 2016).

Een nadeel van het gebruik van inkepingen is dat een deel van de doorsnede verloren gaat. Dit zorgt ervoor dat de doorsnede op het punt van de inkeping zwakker is. Als de krachten en spanningen in het element te groot worden zal het dus eerder bezwijken op de plaats van de inkeping (Brol e.a., 2015).



Figuur 8: Verbinding door middel van inkepingen (Gustafsson, 2016)

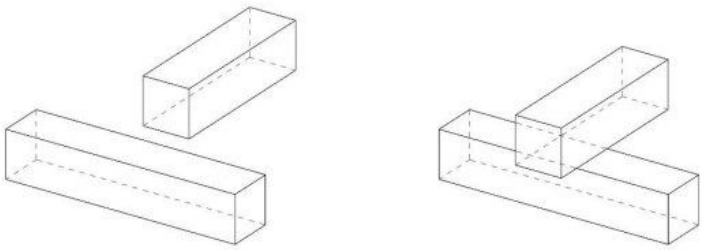
3.3 Stapeling

Als de elementen aan elkaar worden verbonden door middel van stapeling worden ze simpelweg op elkaar gelegd, zie figuur 9. Dit type verbinding werkt door middel van wrijving tussen de elementen (Gustafsson, 2016).

Een voordeel van dit soort verbinding is dat de elementen onbeschadigd zijn als de constructie afgebroken wordt en deze zonder problemen hergebruikt kunnen worden. Daar staat tegenover dat een nadeel van dit soort verbinding is dat de constructie pas stabiel is als alle elementen aanwezig zijn (Gustafsson, 2016).

Een ander nadeel is dat er gaten ontstaan tussen de elementen als deze onder een hoek staan. Dit zorgt ervoor dat het contactoppervlak van de elementen erg klein is waardoor er weinig wrijving tussen de elementen ontstaat. Hierdoor zijn de elementen niet erg goed verbonden. Dit kan voorkomen worden door een extra stukje hout toe te voegen aan de verbinding. Dit stukje hout dient als een wig waardoor de opening tussen de elementen opgevuld kan worden (Gustafsson, 2016).

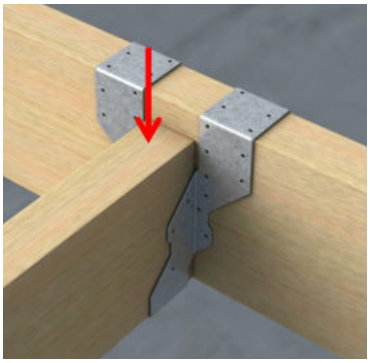
Doordat het bovenliggende element vrij kan roteren kan dit type verbinding beschouwd worden als een scharnier. Het onderliggende element zal alleen een verticale belasting maar geen torsie ondervinden door het bovenste element.



Figuur 9: Verbinding door middel van stapeling (Gustafsson, 2016)

Een andere variant van een verbinding door middel van stapeling is te zien in figuur 10. In dit figuur zijn de elementen verbonden door middel van balkdragers. Dit soort verbinding heeft als voordeel dat de elementen naast elkaar geplaatst kunnen worden in plaats van op elkaar. Hierdoor blijft de constructie twee dimensionaal. Dit is een erg goed type verbinding als er bijvoorbeeld een vloer gemaakt wordt van een reciprocal frame.

Wel moet hierbij opgemerkt worden dat dit type verbinding voornamelijk effectief is als het aangrenzende element wordt belast in de richting die in figuur 10 is aangegeven met een rode pijl. Als dit element in de tegenovergestelde richting belast wordt is de verbinding niet erg effectief.



Figuur 10: Balkdrager (Toolstation, 2022)

3.4 Geknoopte verbinding

Een verbinding die qua werking lijkt op de verbinding met bouten en platen is een geknoopte verbinding. Ook deze verbinding werkt door de elementen tegen elkaar te klemmen. Hierdoor wordt de wrijving tussen de elementen vergroot. Deze knopen kunnen gemaakt worden met touw, maar het kan bijvoorbeeld ook zoals in figuur 11 waar de houten elementen met ijzerdraad verbonden zijn aan de metalen elementen. Een nadeel van dit type verbinding is dat het erg tijdrovend is om alle elementen op deze manier met elkaar te verbinden.

In figuur 11 zijn ook gelaste verbindingen te zien tussen de grote metalen elementen. Dit type verbinding wordt in dit rapport niet behandeld omdat dit soort verbinding niet mogelijk is als er alleen gebruik wordt gemaakt van houten elementen.

Ondanks dat een geknoopte verbinding vergelijkbaar is met de verbinding met bouten en platen kan dit type niet beschouwd worden als een volledige inklemming. Dit komt doordat het materiaal waarmee de elementen aan elkaar geknoopt worden niet oneindig stijf is. Dit zal dus een beetje mee kunnen geven waardoor het niet beschouwd kan worden als een volledige inklemming.



Figuur 11: Knoopverbinding (Larsen, 2014)

4 Ontwerpuitgangspunten

Om de invloed van verschillende patronen op de doorbuiging van reciprocal frames te onderzoeken zijn er meerdere schaalmodellen gemaakt. In dit hoofdstuk wordt de algemene informatie beschreven aan de hand waarvan de schaalmodellen gefabriceerd zijn. Allereerst wordt ingegaan op het resthout, vervolgens op de verschillende patronen en tot slot zijn de belastingen benoemd waaraan de modellen onderworpen zullen worden.

4.1 Het resthout en de schaal

Doordat duurzaamheid ook in de bouw een steeds belangrijker thema wordt is ervoor gekozen om de reciprocal frames te ontwerpen aan de hand van een (fictieve) hoeveelheid resthout. Het hout dat gebruikt zal worden is het hout dat zich bevond in het dak van de Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk in Hoogmade. Deze hoeveelheid hout is gekozen omdat er bouwtekeningen van de kerk beschikbaar gesteld zijn waarop de afmetingen van de elementen duidelijk zichtbaar is, zie bijlage A.

Er is gewerkt met de houten gordingen uit de kerk. In tabel 1 is een overzicht van de hoeveelheid hout en de afmetingen te vinden. In de tekeningen is niet terug te vinden van welke houtsoort de gordingen gemaakt zijn. Er wordt aangenomen dat het constructiehout betreft en daarvoor mag sterkteklasse C24 aangehouden worden (Scharringa, 2021). Aan de hand van de afmetingen in tabel 1 is besloten om de schaalmodellen op schaal 1:20 te maken.

Tabel 1: Overzicht hoeveelheid resthout

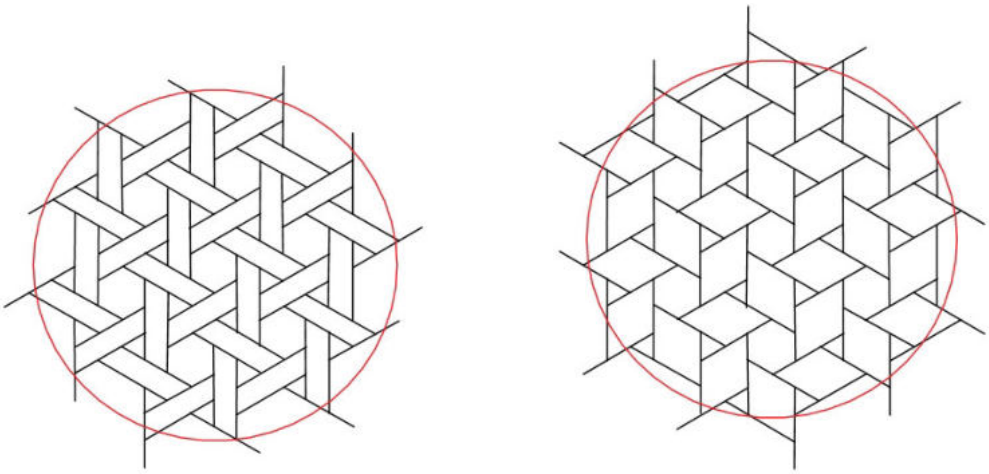
Profiel	80×220	[mm]
Lengte	3.47	[m]
Aantal	135	
Sterkteklasse	C24	

4.2 Patronen

Zoals in paragraaf 2.3 benoemd is zullen er vier patronen onderzocht worden. Deze patronen zijn te zien in figuur 12.

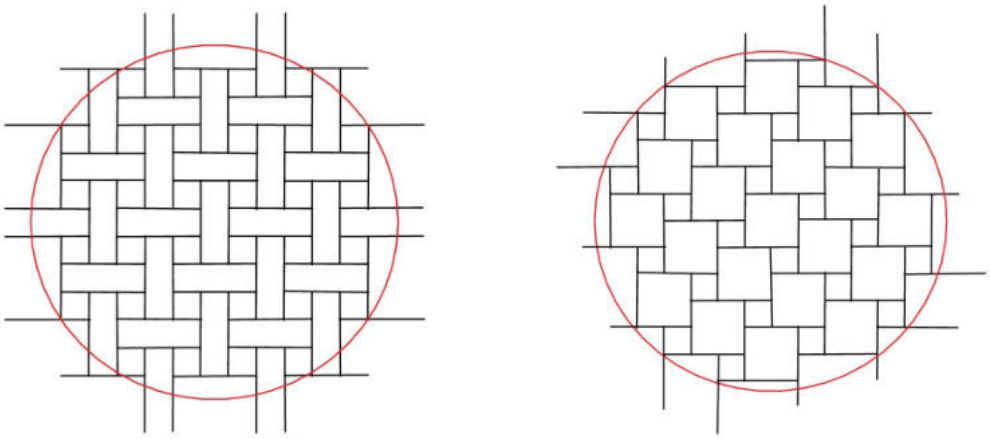
Om een goed onderzoek te doen naar de invloed van de patronen moeten alle constructies even groot zijn. Als dit niet het geval is worden de resultaten ook beïnvloed door de grootte van de frames en dan is het onderzoek niet valide. In elk subfiguur in figuur 12 is een rode cirkel te zien. Deze cirkel is in elk subfiguur even groot waaruit geconcludeerd kan worden dat de constructies zo goed als dezelfde dimensies zullen hebben.

In figuur 12 zijn de patronen twee dimensionaal getekend. De schaalmodellen die gemaakt worden zullen echter koepelvormig, dus driedimensionaal, zijn doordat de elementen verbonden worden door stapeling. Dit heeft ook invloed op de overspanning die met de frames behaald zal worden. Hierdoor bestaat er een kans dat de overspanningen niet allemaal hetzelfde zullen zijn. Dit is een van de redenen waarom er overgegaan is tot het maken van plaatvormige constructies. Deze keuze zal in paragraaf 6.5 verder toegelicht worden.



(a) Variant 1: driehoekige eenheden

(b) Variant 2: driehoekige eenheden



(c) Variant 3: vierkante eenheden

(d) Variant 4: vierkante eenheden

Figuur 12: Uiteindelijke patronen (eigen afbeelding)

In tabel 2 is een overzicht te zien van het aantal elementen en het aantal verbindingen per variant. Hieruit valt op te maken dat variant drie een grotere overspanning kan bereiken met minder materiaal. Deze variant is dus het meest efficiënt als alleen gekeken wordt naar het materiaalgebruik en het aantal verbindingen.

Tabel 2: Overzicht varianten

	Aantal elementen	Aantal verbindingen
Variant 1	72	132
Variant 2	72	132
Variant 3	76	132
Variant 4	60	104

5 Schaalmodellen van eenheden

In dit hoofdstuk wordt de bouw van losse eenheden besproken. Allereerst worden de verhoudingen van de schaalmodellen benoemd. Vervolgens wordt er ingegaan op de verbindingen tussen de elementen. Hierna zijn afbeeldingen weergegeven van de schaalmodellen die gemaakt zijn, eerst losse eenheden, vervolgens zijn meerdere eenheden met elkaar verbonden. Tot slot wordt er gereflecteerd op de bouw van de eerder benoemde modellen en zullen er wat aanpassingen besproken worden.

5.1 Verhoudingen

Allereerst is er begonnen met het maken van losse eenheden. Dit is gedaan om erachter te komen of de schaalmodellen gebouwd kunnen worden zoals gepland was of dat er tijdens het ontwerp zaken over het hoofd gezien zijn. Ook is dit een handige manier om de juiste hoeken te vinden waaronder de elementen verbonden moeten worden.

Deze losse eenheden zijn gemaakt van balsahout met een profiel van 4.7×10.5 [mm], zie bijlage C. Dit komt overeen met de eerder benoemde schaal van 1:20. Omdat de sterkte van balsahout vrij onbekend is zijn er driepuntsbuigproeven uitgevoerd om de elasticiteitsmodulus van het materiaal te bepalen, zie bijlage B.

Alle elementen hebben een lengte van 15 cm en zullen verbonden worden met kleine spijkertjes. Er is gekozen om alle elementen op $\frac{1}{3}^{\text{e}}$ van de totale lengte te laten overlappen, dus op 5 cm. De schaalmodellen van de losse eenheden zijn te zien in figuur 13.

Bij het verbinden van de elementen moet rekening gehouden worden met de hoek waaronder de spijkertjes geplaatst moeten worden. Als deze hoek niet juist is vormen de eenheden geen gesloten eenheid. Bij de driehoekige eenheden moeten de elementen onder een hoek van 60°verbonden worden. Bij de vierkante eenheden is dit een hoek van 42.5°.



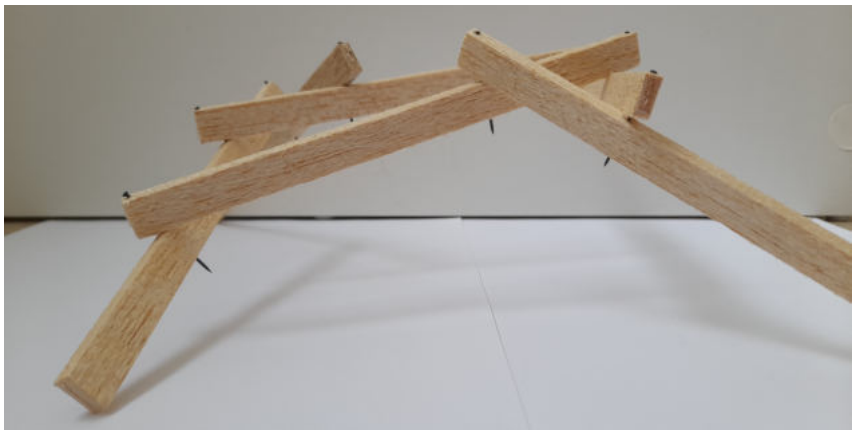
(a) Driehoekige eenheid (b) Vierkante eenheid

Figuur 13: Schaalmodellen van balsahout

6 Schaalmodellen van koepels

Nadat de modellen van de losse eenheden gemaakt zijn zijn deze met elkaar verbonden. Dit is gedaan om erachter te komen of de patronen echt zo in elkaar zitten zoals ze getekend zijn in figuur 12. Deze getekende patronen zijn tweedimensionaal, maar de koepels zullen driedimensionaal zijn doordat de elementen verbonden zijn door stapeling.

Als de driehoekige eenheden met elkaar verbonden worden valt op dat de eenheden ten opzichte van elkaar getordeerd zijn, zie figuur 14. Hierdoor worden de elementen niet alleen in hun sterke richting belast, maar ook in de zwakke richting. Dit zorgt voor dubbele buiging in de elementen.



Figuur 14: Getordeerde eenheden

6.1 Variant 1 - driehoekige eenheden

Het patroon voor variant 1 is te zien in figuur 12a. In dit figuur bestond het patroon uit driehoekige eenheden die als ze met elkaar verbonden zouden worden een zeshoek zouden vormen. Tijdens het bouwen is echter gebleken dat dit niet mogelijk is als het model drie dimensionaal gemaakt wordt. Omdat de driehoekige eenheden een kromming bevatten doordat de elementen verbonden zijn door stapeling zullen de eenheden samen een vijfhoek vormen, zie figuur 15.



Figuur 15: Bovenaanzicht variant 1

6.2 Variant 2 - driehoekige eenheden

Het patroon voor variant 2 is te zien in figuur 12b. Ook deze variant is opgebouwd uit driehoekige eenheden. Voor deze variant geldt hetzelfde als voor variant 1. Het patroon bestaan in 2D uit driehoekige eenheden die een zeshoek vormen, maar in 3D vormen de eenheden een vijfhoek, zie figuur 16.



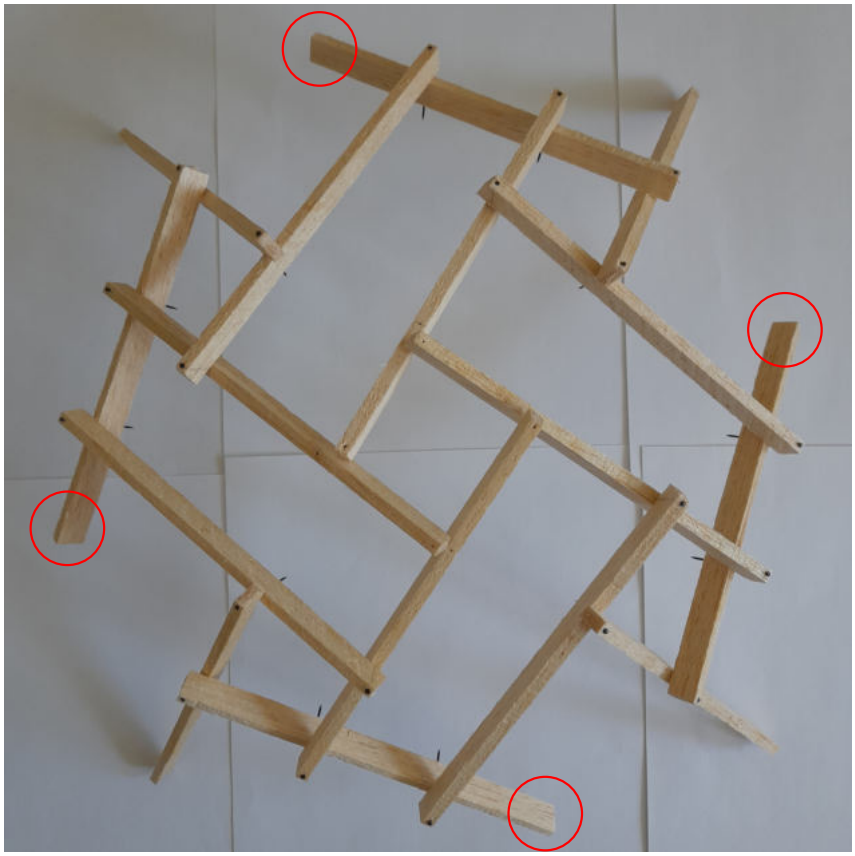
Figuur 16: Bovenaanzicht variant 2

6.3 Variant 3 - vierkante eenheden

Het patroon voor variant 2 is te zien in figuur 12c. Deze variant is opgebouwd uit vierkante eenheden. Tijdens het bouwen is opgemerkt dat de vierkante eenheden niet vormvast zijn. Deze zijn makkelijk te vervormen waardoor ze ruitvormig worden in plaats van vierkant.

Ook is gebleken dat de elementen niet overal goed op elkaar aansluiten. In het midden van figuur 17 is te zien dat de eenheden elkaar niet volledig overlappen. Om dit te voorkomen zal per eenheid één van de elementen een centimeter langer moeten zijn. In dat geval zullen de eenheden elkaar genoeg overlappen om een verbinding te kunnen vormen.

Ook raken maar vier elementen de grond. De elementen met een rode cirkel in figuur 17 zweven een stuk boven de grond. Om deze elementen wel als steunpunt te kunnen gebruiken zouden ze verlengd moeten worden.

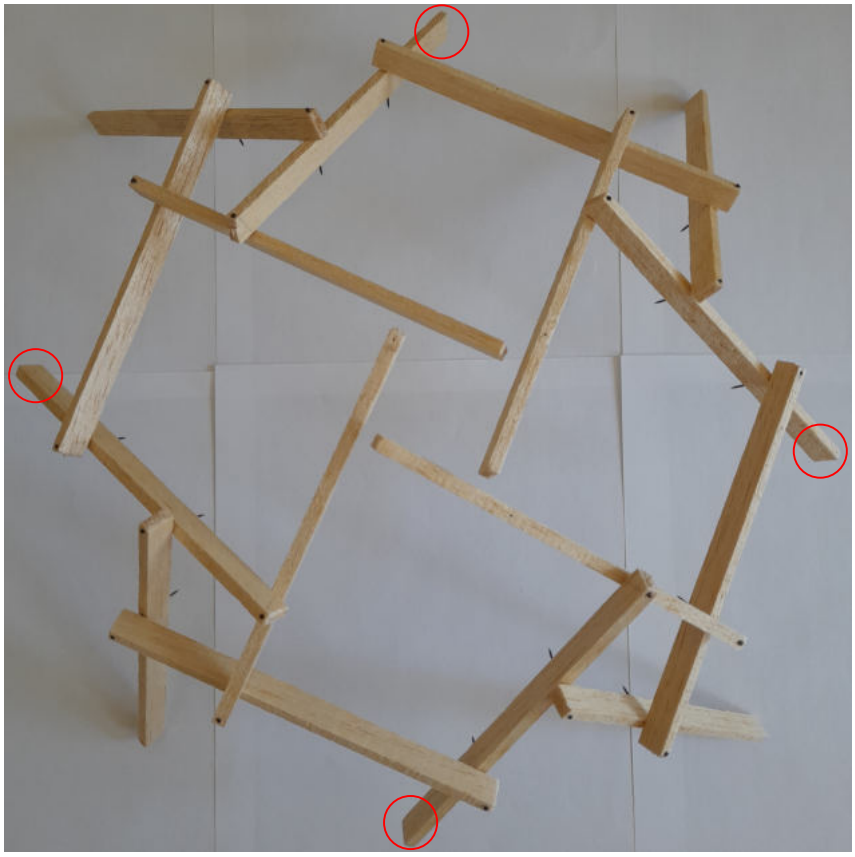


Figuur 17: Bovenaanzicht variant 3

6.4 Variant 4 - vierkante eenheden

Het patroon waaruit variant 4 opgebouwd zal zijn is te zien in figuur 12d. Net als variant 3 is ook deze variant opgebouwd uit vierkante eenheden. Een bovenaanzicht van variant 4 is te zien in figuur 18.

In dit figuur is duidelijk te zien dat de elementen in het midden van de afbeelding niet op elkaar aansluiten. Deze elementen zullen dus verlengd moeten worden om een gesloten constructie te vormen. Ook is te zien dat het patroon niet meer uit alleen vierkanten bestaat. Als de eenheden op deze manier aan elkaar verbonden worden zullen ze ruitvormig worden. Net als bij variant 3 zijn er bij deze variant ook eenheden die de grond niet raken. Deze zijn aangegeven met een rode cirkel in figuur 18.



Figuur 18: Bovenaanzicht variant 4

6.5 Conclusie en aanpassingen

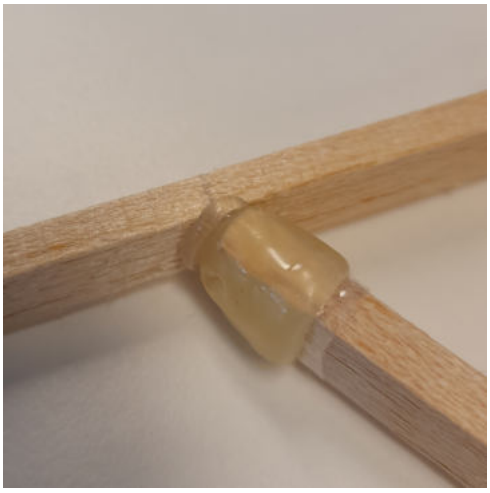
Door meerdere eenheden met elkaar te verbinden zijn dingen aan het licht gekomen die niet voorzien waren. Zo is gebleken dat de driehoekige eenheden in variant 1 en 2 een vijfhoek vormen in plaats van een zeshoek. Dit zou geen problemen opleveren als de constructie verder uitgebreid zou worden. Er kan namelijk verder gebouwd worden met driehoekige eenheden die ook weer vijfhoeken zouden vormen.

Bij variant 3 en 4 daarentegen zijn er grotere problemen aan het licht gekomen. Doordat de vierkante eenheden niet vormvast zijn zullen ze snel ruitvormig worden. Hierdoor zullen de constructies niet meer symmetrisch zijn en zullen de krachten niet gelijkmatig verdeeld worden. Dit zou voorkomen kunnen worden door een schoor aan te brengen in elke vierkante eenheid. Ook is gebleken dat de elementen niet op elkaar aansluiten als er een aantal eenheden met elkaar worden verbonden. Om dit te voorkomen zouden een aantal elementen langer moeten zijn. Als de constructie uitgebreid zou worden zou ditzelfde probleem echter weer opspelen. Hierdoor is het erg lastig om te voorspellen wat er gaat gebeuren als er meer eenheden verbonden worden. Het zou meer weghebben van een experiment waarbij steeds meer eenheden met elkaar verbonden worden, dan dat er een constructie gebouwd wordt.

Door de problemen die opspelen bij het maken van variant 3 en 4 is besloten om in de rest van dit rapport te focussen op plaatvormige reciprocal frames. Hierbij zullen de elementen met elkaar verbonden worden door middel van balkdragers. Door dit type verbinding toe te passen zal de constructie twee dimensionaal blijven (zie hoofdstuk 3). Dit zal echter wel een effect hebben op de krachtsafdracht van de constructies. Waar een koepel de kracht voornamelijk overdraagt door normaalkracht in de elementen, zal een plaat de krachten vooral overdragen door dwarskracht en buiging (Kohlhammer en Kotnik, 2018).

De balkdragers zullen in de schaalmodellen gemaakt worden met behulp van een lijmpistool. Een voorbeeld van een schaalmodel van een balkdrager is te zien in figuur 19. De balkdragers zullen aan de elementen gelijmd worden.

Omdat de sterkte van deze verbindingen niet bekend is zullen er eerst proeven uitgevoerd worden om vast te stellen wat de sterkte is van dit type verbinding. Ook kan hierdoor het bezwijkmechanisme van de verbindingen vastgesteld worden. De reportage van deze proef is te zien in bijlage B.



Figuur 19: Schaalmodel van een balkdrager

7 Plaatvormige schaalmodellen

In dit hoofdstuk wordt ingegaan op de plaatvormige schaalmodellen. Allereerst worden het materiaal en de verhoudingen besproken. Vervolgens zal de methode toegelicht worden die gebruikt zal worden tijdens het beproeven van de modellen. Daarna worden de modellen getest en worden de resultaten besproken.

7.1 Materiaal en verhoudingen

De schaalmodellen van de frames zullen ook gemaakt worden van balsahout. De eigenschappen van deze houtsoort zijn niet geheel vergelijkbaar met het materiaal waaruit de gordingen van de Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk bestaan. Dit komt doordat balsahout een veel kleiner soortelijk gewicht heeft waardoor ook de sterkte minder zal zijn. Dit zal echter geen probleem zijn omdat de constructies vergeleken worden op stijfheid. De resultaten zullen niet hetzelfde zijn als de proeven uitgevoerd worden met een andere houtsoort, maar op deze manier kan wel de invloed van de verschillende patronen onderzocht worden.

Net als bij de schaalmodellen van de eenheden (hoofdstuk 5) zullen de elementen in dit geval ook een lengte hebben van 15 cm, dus de modellen zijn op schaal 1:20. Zoals benoemd in paragraaf 6.5 zullen de elementen verbonden worden door middel van balkdragers, zie figuur 19 in de eerdergenoemde paragraaf. Deze balkdragers zullen ervoor zorgen dat de elementen scharnierend opgelegd zijn. De verbindingen zullen wel een klein moment op kunnen nemen, maar dat zal verwaarloosbaar zijn. De balkdragers zullen elke 5 cm aan de elementen verbonden worden. Dit wordt bij elk patroon gedaan zodat deze lengte bij elk patroon gelijk is.

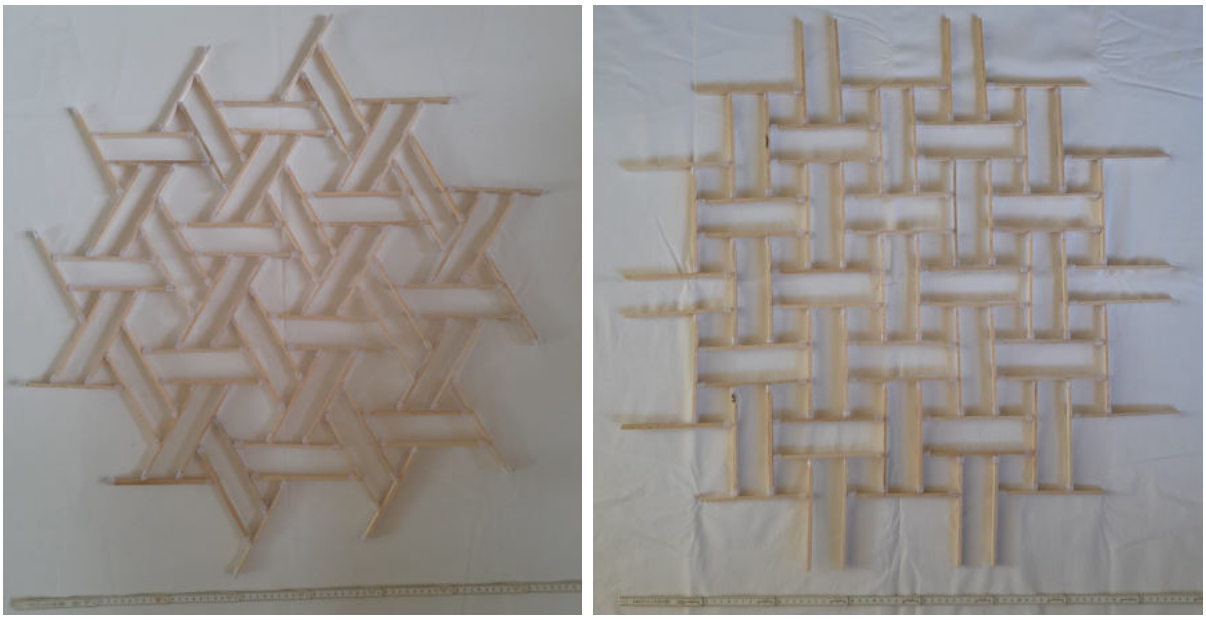
7.2 Methode

Grootte van de frames

Om de doorbuiging van de frames te kunnen vergelijken moeten de overspanningen van alle varianten zo goed als hetzelfde zijn. Als dit niet het geval is heeft de overspanning ook een invloed op de doorbuiging. Hoe groter de overspanning, hoe meer de constructie zal doorbuigen onder dezelfde belasting.

Om de frames eenzelfde overspanning te laten behalen zijn de patronen uitgetekend. Zoals in figuur 12 te zien is zijn de patronen getekend in rode cirkels. Deze cirkels zijn in elke figuur even groot waardoor de frames eenzelfde overspanning zullen behalen.

De modellen die beproefd zijn zijn te zien in figuur 20. De overspanning van beide frames is 80 cm. Doordat deze frames op schaal 1:20 gemaakt zijn zullen de constructies in werkelijkheid een overspanning van 16 [m] halen. Alleen van variant 1 en 3 zijn fysieke modellen gemaakt. Variant 2 en 4 zijn alleen digitaal gemodelleerd.



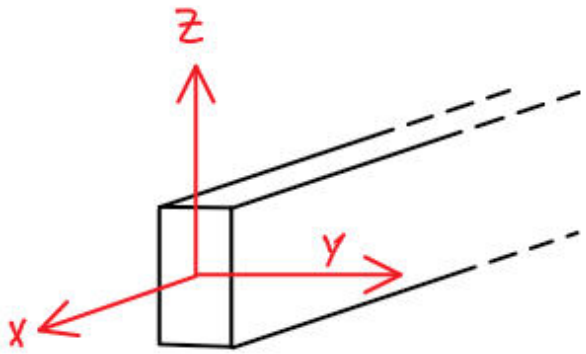
(a) Variant 1 (b) Variant 3

Figuur 20: Modellen die beproefd zijn

Belasting
De frames worden alleen belast met een symmetrische verticale belasting. Hier is voor gekozen om ervoor te zorgen dat de belasting gelijkmatig over de opleggingen verdeeld kan worden. Als er ook een horizontale belasting aanwezig zou zijn zouden de opleggingen een moment op moeten nemen waardoor de oplegreacties niet voor elke oplegging hetzelfde zullen zijn.

Er is van tevoren niet vastgesteld aan welke belasting de constructies onderworpen zullen worden. Dit is gedaan zodat de belasting langzaamaan opgevoerd kan worden door gewichtjes aan de frames te hangen. Dit is gedaan totdat er een duidelijk meetbare doorbuiging zichtbaar is. In de praktijk zijn er zakjes aan de frames verbonden. Deze zakjes zijn langzaamaan steeds meer gevuld met gewicht.

Proefopstelling
Tijdens het beproeven zijn de frames scharnierend verbonden aan een bodemframe. Dit is gedaan om te voorkomen dat de opleggingen weg kunnen rollen. Als dit wel gebeurd zal de doorbuiging niet ontstaan door de buiging van de elementen, maar door het wegschuiven van de opleggingen. De scharnierende opleggingen zijn gerealiseerd door de elementen die opgelegd zijn tussen spijkers te plaatsen. Dit verhindert de translatie van de elementen. Ook zorgt dit ervoor dat de elementen alleen kunnen roteren om de y-as. Dit resulteert dus in een gaffeloplegging, zie figuur 21. Dit type oplegging zorgt ervoor dat de elementen wel een wringend moment op kunnen nemen.



Figuur 21: Assendefinitie (eigen afbeelding)

Het bodemframe bestaat uit houten latten die aan de uiteindes van de frames bevestigd zijn, zie figuur 22. Doordat het bodemframe gemaakt is van hout met een veel grotere stijfheid dan de frames zelf zal de doorbuiging van het bodemframe verwaarloosbaar zijn als de reciprocal frames belast worden. Hierdoor zal het niet van invloed zijn op de metingen. Zoals in dit figuur te zien is zijn de vorm van beide bodemframes niet gelijk. De totale oppervlakte die de reciprocal frames overspannen zijn wel zo goed als hetzelfde, dus daarom kunnen de patronen op deze manier vergeleken worden.

De volledige proefopstelling is te zien in figuur 23. Hierbij valt op dat er een rood koord is gespannen boven het frame. Dit is gedaan zodat de doorbuiging in het midden van het frame gemeten kan worden ten opzichte van het koord. Ook is in dit figuur te zien dat de zakjes opgehangen zijn aan het midden van de elementen. Deze locaties zijn aangegeven met een groene stip. Elk element is belast met uitzondering van de elementen die naar de opleggingen leiden. Dit is bij elke geteste variant aangehouden.

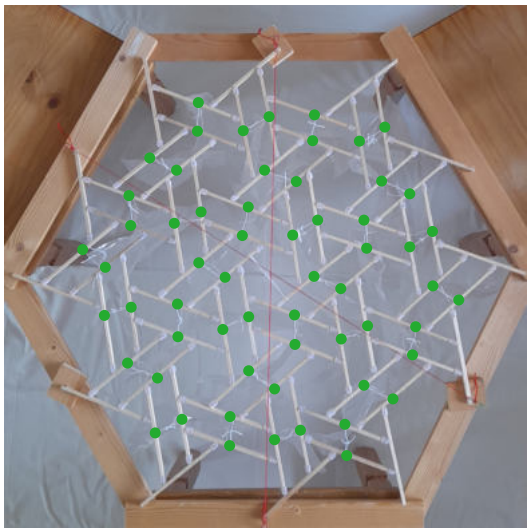


(a) Variant 1

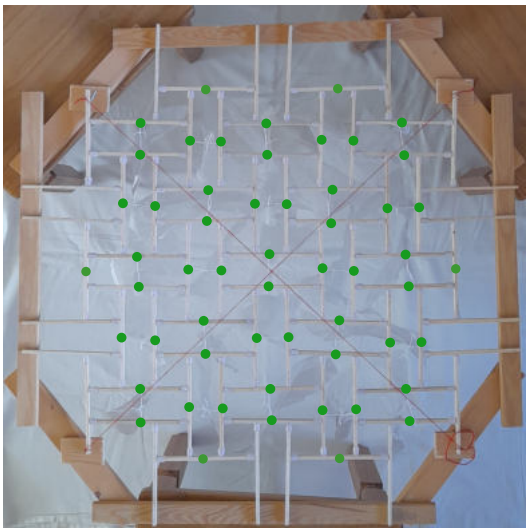


(b) Variant 3

Figuur 22: Bodemframes



(a) Variant 1



(b) Variant 3

Figuur 23: Proefopstelling

7.3 Modellen tijdens het testen

Zoals eerder benoemd is is de belasting steeds verder opgevoerd totdat er een duidelijk meetbare doorbuiging zichtbaar was. Dit bleek het geval bij een belasting van 1230 [g] oftewel 12.07 [N]. In figuur 24 is variant 1 te zien voordat het frame belast is en nadat de volledige belasting toegevoegd is. In deze figuren is goed te zien dat het frame doorbuigt onder de toegevoegde belasting. In figuur 25 is hetzelfde te zien voor variant 3. Doordat beide foto's in figuur 25 niet loodrecht op de zijkant van het frame genomen zijn lijkt de doorbuiging hier velen malen groter dan bij variant 1. Dit is echter niet het geval, zie paragraaf 7.4.

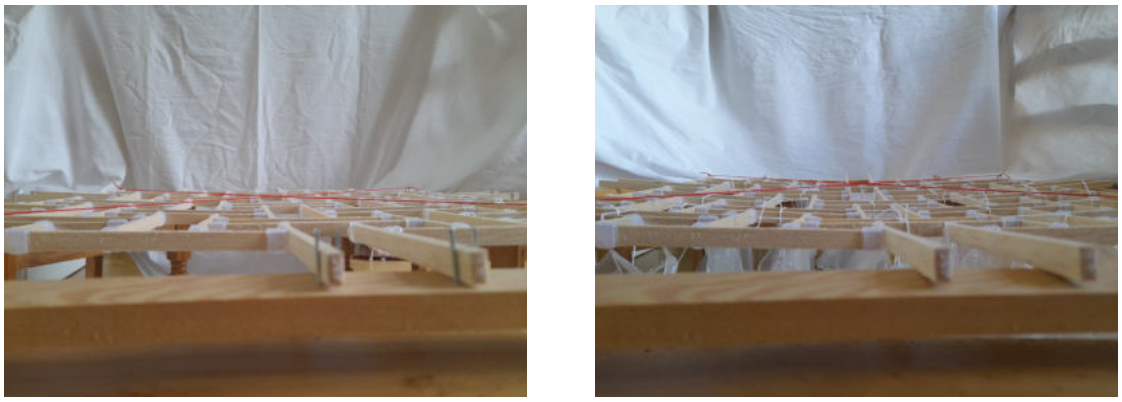


(a) m = 0 [g]



(b) m = 1230 [g]

Figuur 24: Variant 1 tijdens de proef



(a) m = 0 [g] (b) m = 1230 [g]

Figuur 25: Variant 3 tijdens de proef

7.4 Resultaten en vergelijking met computer modellen

De gemeten doorbuiging van de frames is vergeleken met computermodellen. Deze modellen zijn gemaakt met SCIA Engineer. Deze modellen zijn te zien in bijlage E. In SCIA Engineer is balsahout niet beschikbaar als materiaal. Er is daarom handmatig een materiaal toegevoegd. Dit materiaal heeft een elasticiteitsmodulus van $E = 2402$ [N/mm^2] (zie bijlage B) en een dichtheid van $\rho = 135$ [kg/m^3] (zie bijlage C).

In de computermodellen zijn de verbindingen gemodelleerd met een rotatieveer. De verbindingen zijn namelijk niet volledig ingeklemd, maar ze geven wel weerstand tegen roteren. Om de computermodellen een realistische output te laten genereren zijn de rotatieveren gekalibreerd. Dit heeft een veerstijfheid opgeleverd van 11 [Nm/rad]. Als deze waarde voor de stijfheid wordt toegepast bij zowel de staafaansluitingen als de opleggingen blijken de waardes voor de doorbuiging overeen te komen met de gemeten waardes uit de praktijk. Omdat deze veerstijfheden een realistische waarde geven voor de doorbuiging van de schaalmodellen zijn deze waardes ook toegepast bij de computermodellen van de varianten die niet fysiek nagemaakt zijn.

In de computermodellen is elk element belast met eigengewicht. Daarnaast is elk element, met uitzondering van de elementen die naar de opleggingen leiden, belast met een externe belasting. Hier is voor gekozen omdat dit ook gedaan is bij het beproeven van de schaalmodellen. Het eigengewicht van de elementen is zelf door SCIA Engineer bepaald. De externe belasting is bepaald door de totale externe belasting te delen door het aantal belaste staven. Deze belastingen zijn te zien in tabel 3.

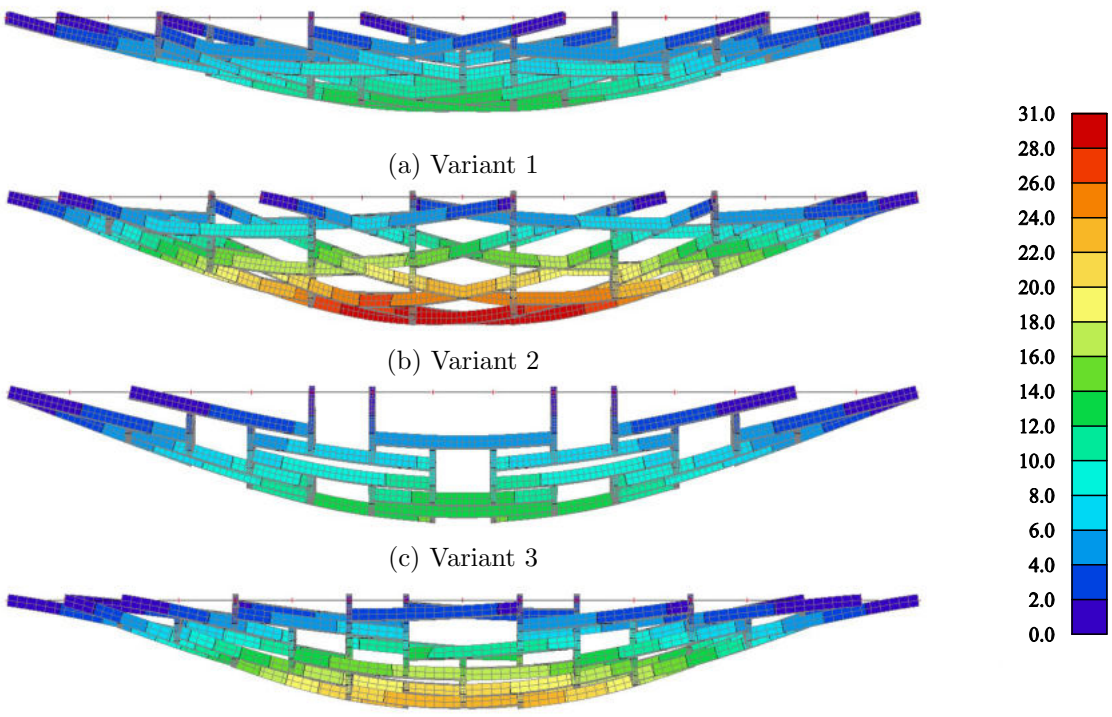
Variant	Externe belasting [N]
1	0.201
2	0.201
3	0.215
4	0.274

Tabel 3: Externe belastingen SCIA Engineer

Een vergelijking van de resultaten van de doorbuiging is te zien in tabel 4. Een uitgebreider overzicht van de gemeten doorbuigingen van de schaalmodellen is te vinden in bijlage D. In figuur 26 zijn de resultaten van de computermodellen weergegeven. Hierbij is de doorbuiging weergegeven in millimeter aan de hand van de schaalverdeling naast de figuur.

Tabel 4: Doorbuiging fysieke en computermodellen

Variant	Fysiek model [mm]	Digitaal model [mm]
1	14	13.7
2	-	30.6
3	14	14.3
4	-	23.4



(a) Variant 1

(b) Variant 2

(c) Variant 3

(d) Variant 4

Figuur 26: Resultaten computermodellen (eigen afbeelding)

8 Handberekeningen

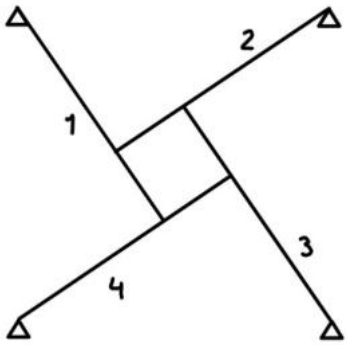
In dit hoofdstuk worden handberekeningen uitgevoerd om de verdelingen van het moment en dwarskracht in de elementen te bepalen. Dit wordt eerst gedaan voor losse eenheden. Deze berekeningen worden gecontroleerd met MatrixFrame. Vervolgens worden handberekeningen uitgevoerd voor de volledige frames. Hierbij worden de spanningen in de maatgevende elementen berekend. Dit wordt gedaan voor alle vier de varianten.

8.1 Losse eenheden

Als gekeken wordt naar een losse eenheid valt op te merken dat er altijd even veel elementen als opleggingen zijn. Het maakt hierbij niet uit welke vorm de eenheid heeft. Ook is een RF-eenheid altijd puntsymmetrisch om het middelpunt. Dit zorgt ervoor dat elke verticale oplegreactie gelijk is als de constructie alleen verticaal belast wordt.

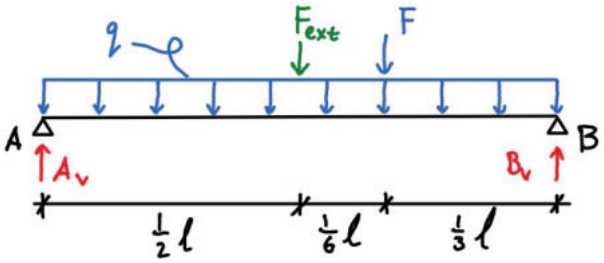
Als gekeken wordt naar de eenheid in figuur 27 kan van elk element een mechanica-schema opgesteld worden. Aan de hand van dit schema kunnen het maximale moment, de maximale dwarskracht en de normaalkracht per element bepaald worden.

Er zijn een aantal verschillende mechanica-schema's mogelijk. Dit hangt er namelijk vanaf hoe de elementen met elkaar verbonden worden. Ze kunnen scharnierend opgelegd worden, maar ook volledig ingeklemd. Er is ook een tussenoplossing mogelijk waarbij de oplegging geschematiseerd kan worden door middel van een rotatieveer. In dit rapport worden alleen scharnierende opleggingen beschouwd. De elementen zijn verbonden door middel van balkdragers, dus de constructie blijft twee dimensionaal.



Figuur 27: Bovenaanzicht vierkante eenheid (eigen afbeelding)

Mechanica-schema
In figuur 28 is het mechanica-schema te zien van een element die aan beide uiteindes scharnierend opgelegd is. Hierbij is aangenomen dat de kracht F de belasting is die door het aangrenzende element op het hoofdelement uitgeoefend wordt. Ook is aangenomen dat deze kracht aangrijpt op $\frac{1}{3}l$. Dit is de kracht die uitgeoefend wordt door een element die aan dit element verbonden is. Alle eenheden worden belast met eenzelfde verdeelde belasting q, namelijk het eigen gewicht van de elementen. Daarnaast wordt elk element in het midden belast met een externe kracht F_{ext}. Deze kracht representeert de externe belasting waarmee de schaalmodellen zijn belast.



Figuur 28: Mechanica-schema (eigen afbeelding)

Oplegreacties

Allereerst kan A_v berekend worden. Dit volgt uit het feit dat de eenheid puntsymmetrisch is. De eenheid bestaat uit n elementen met lengte l die allen belast worden met een verdeelde belasting q en puntlast F_{ext}. Ook heeft de eenheid n opleggingen. Doordat de eenheid puntsymmetrisch is zal er in elke oplegging eenzelfde verticale oplegreactie zijn. De grootte van deze oplegreactie is berekend in vergelijking 1.

$$A_v = \frac{n \cdot q \cdot l + n \cdot F_{ext}}{n} = q \cdot l + F_{ext} \tag{1}$$

Vervolgens kan de kracht F uitgedrukt worden in q en l. Hiervoor wordt de momentensom om punt B genomen. Omdat dit een scharnierende oplegging is is het moment op dit punt gelijk aan 0. Samen met het feit dat $A_v = q \cdot l + F_{ext}$ resulteert dit in de onderstaande vergelijkingen.

$$\begin{aligned}
M|_B &= A_v \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot F_{ext} \cdot l - \frac{1}{3} \cdot F \cdot l = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot F \cdot l = A_v \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l^2 - \frac{1}{2} \cdot F_{ext} \cdot l \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot F = q \cdot l + F_{ext} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l - \frac{1}{2} \cdot F_{ext} \\
&\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot F = \frac{1}{2} \cdot q \cdot l + \frac{1}{2} \cdot F_{ext} \\
&\Rightarrow F = \frac{3}{2} \cdot q \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F_{ext}
\end{aligned}$$

Tenslotte kan oplegreactie B_v berekend worden aan de hand van verticaal evenwicht. In combinatie met $A_v = q \cdot l + F_{ext}$ en $F = \frac{3}{2} \cdot q \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F_{ext}$ geeft dit de onderstaande vergelijkingen. Hierbij valt op dat B_v gelijk is aan F. De aanname dat F de kracht is die door het aangrenzende element op het hoofdelement uitgeoefend wordt is dus correct.

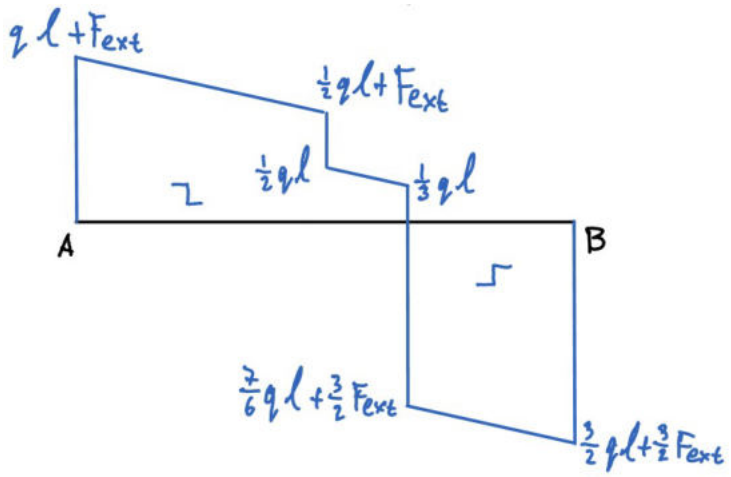
$$\begin{aligned}
\sum F_v &= A_v + B_v - q \cdot l - F_{ext} - F = 0 \\
&\Rightarrow B_v = q \cdot l + F_{ext} + F - A_v \\
&\Rightarrow B_v = \cancel{q \cdot l} + \cancel{F_{ext}} + \frac{3}{2} \cdot q \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F_{ext} - \cancel{q \cdot l} - \cancel{F_{ext}} \\
&\Rightarrow B_v = \frac{3}{2} \cdot q \cdot l + \frac{3}{2} \cdot F_{ext} = F
\end{aligned}$$

Dwarskrachtenlijn
Ook voor de bepaling van de dwarskrachten lijn wordt eerst de verdeelde belasting in acht genomen en daarna de puntlasten. Uiteindelijk worden deze drie verdelingen bij elkaar opgeteld om tot de totale dwarskrachtenlijn te komen. Deze uiteindelijke verdeling is te zien in figuur 29.

De verdeelde belasting q zorgt voor een lineair verloop van de dwarskrachtenlijn. Deze zal bij punt A gelijk zijn aan $+\frac{1}{2} \cdot q \cdot l$ en bij punt B $-\frac{1}{2} \cdot q \cdot l$.

De puntlast F zorgt voor een constante verdeling van de dwarskrachtenlijn. Bij punt A zal deze gelijk zijn aan $+\frac{1}{3} \cdot F$, dus $+\frac{1}{2} \cdot q \cdot l + \frac{1}{2} \cdot F_{ext}$ en bij punt B $-\frac{2}{3} \cdot F$, dus $-q \cdot l - F_{ext}$.

De externe puntlast F_{ext} zal net als de puntlast F zorgen voor een constante verdeling van de dwarskrachten. Bij punt A zal deze gelijk zijn aan $+\frac{1}{2} \cdot F_{ext}$ en bij punt B $-\frac{1}{2} \cdot F_{ext}$.



Figuur 29: Dwarskrachtenlijn (eigen afbeelding)

Momentenlijn
Ook om de momentenlijn te bepalen zijn de verdeelde belasting en de puntlast afzonderlijk bekeken. De verdelingen ten behoeve van alle belastingen zijn daarna opgeteld om tot de uiteindelijke momentenlijn te komen. De samengestelde momentenlijn is te zien in figuur 30. Hierbij zijn M_1 en M_2 berekend aan de hand van vergelijking 2 en 3. Op de locaties van M_1 en M_2 zit een knik in de momentenlijn. Dit komt doordat dit de locaties zijn waar de puntlasten aangrijpen. Tussen deze twee locaties zal het verloop van de momentenlijn parabolisch zijn. Dit wordt veroorzaakt door de verdeelde belasting.

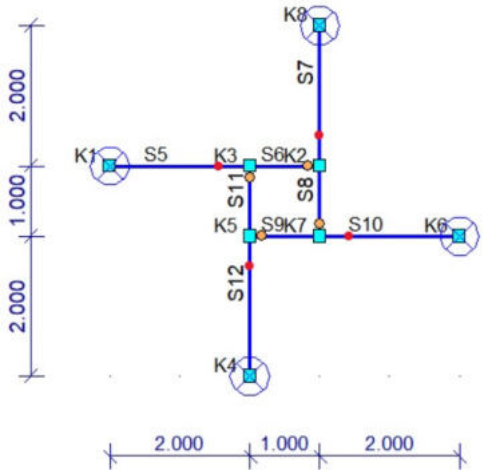
$$
\begin{aligned}
M_1 &= M_q\left(x = \frac{1}{2}l\right) + M_F\left(x = \frac{1}{2}l\right) + M_{F_{ext}}\left(x = \frac{1}{2}l\right) \\
&= \left(\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot q \cdot l^2 + \frac{1}{4} \cdot F_{ext} \cdot l\right) + \left(\frac{1}{4} \cdot F_{ext} \cdot l\right) \\
&= \frac{3}{8} \cdot q \cdot l^2 + \frac{1}{2} \cdot F_{ext} \cdot l
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
M_2 &= M_q\left(x=\frac{2}{3}l\right)+M_F\left(x=\frac{2}{3}l\right)+M_{F_{ext}}\left(x=\frac{2}{3}l\right) \\
&= \left(\frac{1}{9}\cdot q\cdot l^2\right)+\left(\frac{1}{3}\cdot q\cdot l^2+\frac{1}{3}\cdot F_{ext}\cdot l\right)+\left(\frac{1}{6}\cdot F_{ext}\cdot l\right) \\
&= \frac{4}{9}\cdot q\cdot l^2+\frac{1}{2}\cdot F_{ext}\cdot l
\end{aligned}
\tag{3}
$$



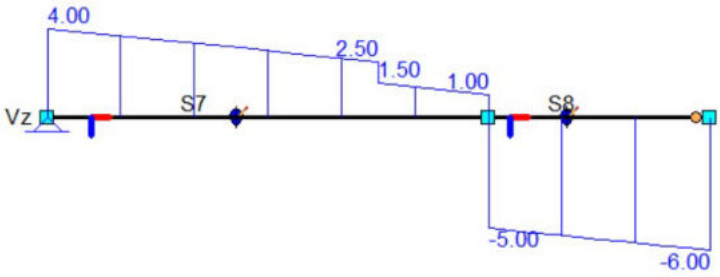
Figuur 30: Momentenlijn (eigen afbeelding)

Controle met MatrixFrame
Om te controleren of de handberekeningen correct zijn uitgevoerd is de constructie ingevoerd in MatrixFrame. De ingevoerde constructie is weergegeven in figuur 31. Elk van de elementen wordt over de gehele lengte belast met een verdeelde belasting $q = 1$ $[kN/m]$. Daarnaast zijn bevindt zicht op de locaties van de rode stippen een puntlast $F_{ext} = 1$ [kN].



Figuur 31: MatrixFrame model

In figuur 32 is de controle van de dwarskrachtenlijn weergegeven. Met $q = 1$ $[kN/m]$, $F_{ext} = 1$ $[kN]$ en $l = 3$ $[m]$ komt deze dwarskrachtenlijn overeen met de berekende lijn in figuur 29.



Figuur 32: Controle dwarskrachtenlijn

In figuur 33 is de controle van de momentenlijn weergegeven. Met $q = 1$ $[kN/m]$, $F_{ext} = 1$ $[kN]$ en $l = 3$ $[m]$ komt deze momentenlijn overeen met de berekende lijn in figuur 30.



Figuur 33: Controle momentenlijn

8.2 Volledige frames

Nu de handberekeningen gecontroleerd zijn met MatrixFrame kan er begonnen worden met de berekening van de doorsnedekrachten in de volledige frames. Hierbij wordt alleen gefocust op de spanningen die in de elementen zullen optreden. Over de verbindingen kunnen geen conclusies getrokken worden omdat de verbindingen in de schaalmodellen niet geheel representatief zijn voor de werkelijkheid. De spanningen zullen worden berekend voor de werkelijke constructies. Hiervoor dienen de resultaten van de tests eerst omgerekend te worden naar de realiteit. Bij deze berekeningen zijn de frames geschematiseerd als liggers op twee steunpunten.

8.2.1 Omrekening naar werkelijkheid

Allereerst de grootte van de werkelijke frames. De schaalmodellen zijn op schaal 1:20 gemaakt en overspannen een lengte van 80 cm. Dit vertaalt zich naar frames die in de werkelijkheid 16 meter zullen overspannen. Doordat de frames cirkelvormig zijn beslaan deze een oppervlakte van $\frac{1}{4}\pi \cdot 16^2 = 201$ m^2. Elk element in de schaalmodellen heeft een lengte van 15 cm wat in de werkelijkheid overeenkomt met elementen met een lengte van 3 meter.

Ook de belastingen dienen omgerekend te worden naar de werkelijke situatie. Met behulp van het vergeet-me-nietje voor de doorbuiging van een ligger op twee steunpunten (vergelijking 4 (TU Delft, 2013)) kan de verhouding van de belasting bepaald worden. Dit is te zien in vergelijking 5 waar de schaal 1:20 is toegepast. Ook is in deze vergelijkingen aangenomen dat de doorsnede rechthoekig is. Verder zijn de materiaaleigenschappen hier algemeen gehouden. Dit houdt in dat het materiaal van het schaalmodel een andere E-modulus kan hebben dan de werkelijke constructie. Dit is in dit rapport ook het geval. De schaalmodellen zijn namelijk van balsahout terwijl wordt aangenomen dat het resthout Europees naaldhout is van sterkteklasse C24.

$$w = \frac{1}{48}\frac{Fl^3}{EI} \quad \text{met} \quad I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \tag{4}$$

$$\frac{1}{20} \cdot w_{\text{werkelijkheid}} = w_{\text{schaalmodel}} \tag{5}$$

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{1\!\!\!/}{48\!\!\!/}\frac{Fl^3}{EI} = \frac{1\!\!\!/}{48\!\!\!/}\frac{F_{\text{schaalmodel}} \cdot l^3_{\text{schaalmodel}}}{EI_{\text{schaalmodel}}}$$

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{F\cancel{l^3}}{E_{\text{werkelijkheid}} \cdot \frac{1\!\!\!/}{12\!\!\!/} \cdot \cancel{b} \cdot \cancel{h^3}} = \frac{F_{\text{schaalmodel}} \cdot \left(\frac{\cancel{l}}{20}\right)^3}{E_{\text{schaalmodel}} \cdot \frac{1\!\!\!/}{12\!\!\!/} \cdot \frac{\cancel{b}}{20} \cdot \left(\frac{\cancel{h}}{20}\right)^3}$$

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{F}{E_{\text{werkelijkheid}}} = \frac{F_{\text{schaalmodel}} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{20}\right)^3}}{E_{\text{schaalmodel}} \cdot \frac{1}{20} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{20}\right)^3}}$$

$$F = 400 \cdot F_{\text{schaalmodel}} \cdot \frac{E_{\text{werkelijkheid}}}{E_{\text{schaalmodel}}}$$

Met $F_{\text{schaalmodel}} = 12.07\,[N]$, $E_{\text{schaalmodel}} = 2402\,[N/mm^2]$ en $E_{\text{werkelijkheid}} = 11000\,[N/mm^2]$ geeft dit een werkelijke belasting van $F = 22085\,[N]$.

Volgens de Eurocode is een dakbelasting gelijk aan 1 $[kN/m^2]$ (TU Delft, 2013). Omdat de frames in werkelijkheid een oppervlakte zullen hebben van 201 $[m^2]$ zal dat resulteren in een dakbelasting van 201 [kN]. Deze belasting is bijna tien maal zo groot als de berekende belasting aan de hand van de proeven die uitgevoerd zijn op de schaalmodellen.

8.2.2 Spanningen in elementen

Doordat de frames tweedimensionaal zijn zullen ze zich gedragen als platen. Net als bij platen zullen de krachten in de frames voornamelijk overgedragen worden door dwarskracht en buiging. Het moment in het midden van het frame zal maatgevend zijn, maar ook de schuifspanningen bij de opleggingen worden gecontroleerd.

Schuifspanningen

Doordat de constructies puntsymmetrisch zijn zullen de verticale oplegreacties bij elke oplegging dezelfde grootte hebben. De grootte van deze oplegreacties kan bepaald worden door alle belastingen op te tellen en te delen door het aantal opleggingen. De totale belasting hangt af van het eigen gewicht van de elementen en verbindingen en ook van de toegevoegde belasting. Deze toegevoegde belasting zal voor elk frame gelijk zijn, namelijk een belasting van $F = 22085$ $[N]$. Een overzicht van de variabelen per variant is te zien in tabel 5.

Tabel 5: Overzicht verschillende varianten

	Aantal opleggingen	Aantal elementen	Aantal verbindingen
Variant 1	12	72	132
Variant 2	12	72	132
Variant 3	20	76	132
Variant 4	16	60	104

De oplegreacties, $R_{\text{verticaal}}$, kunnen berekend worden aan de hand van vergelijking 6. Om de oplegreacties te bepalen zijn belastingsfactoren meegenomen. De eigen gewichten zijn vermenigvuldigd met $\gamma_G = 1.35$ omdat deze belastingen ongunstig zijn. De externe belasting wordt beschouwd als een variabele belasting en is daarom vermenigvuldigd met $\gamma_Q = 1.5$ (TU Delft, 2013).

$$R_{verticaal} = \frac{\gamma \cdot (\#elementen \cdot F_{eg\ element} + \#verbindingen \cdot F_{eg\ verbinding}) + \gamma \cdot F_{toegevoegd}}{\#opleggingen} \tag{6}$$

Met een eigen gewicht van de elementen van 181 $[N]$, van de balkdragers van 4.7 $[N]$ (Haspl, 2022) en een externe belasting van $F_{toegevoegd} = 22085$ $[N]$ resulteert dit in de volgende waardes voor de oplegreacties:
Variant 1: $R_{verticaal} = 4299$ [N]
Variant 2: $R_{verticaal} = 4299$ [N]
Variant 3: $R_{verticaal} = 2628$ [N]
Variant 4: $R_{verticaal} = 3030$ [N]

Deze oplegreacties zijn gelijk aan de maximale dwarskrachten die zullen optreden in de elementen. Aan de hand van deze krachten kunnen de schuifspanningen in de elementen berekend worden. Dit kan gedaan worden aan de hand van vergelijking 7. Hierbij is V_d gelijk aan $R_{verticaal}$, $f_{v;k} = 4.0$ $[N/mm^2]$, $k_{mod} = 0.8$ en $\gamma_M = 1.3$ (TU Delft, 2013). Hierbij is aangenomen dat de externe belasting een middellange termijn belasting is. De waardes voor b en h zijn respectievelijk 80 en 220 [mm], zie bijlage A.

$$\tau_d = \frac{3 \cdot V_d}{2 \cdot b \cdot h} < f_{v;d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{v;k}}{\gamma_M} = 0.8 \cdot \frac{4.0}{1.3} = 2.5\ [N/mm^2] \tag{7}$$

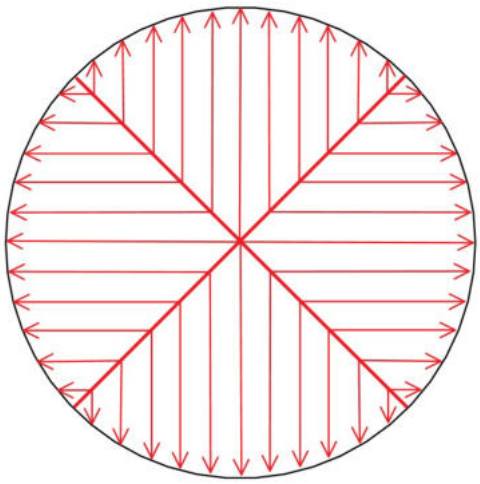
Dit resulteert in de volgende schuifspanningen:
Variant 1: $\tau_d = 0.37$ [N/mm^2]
Variant 2: $\tau_d = 0.37$ [N/mm^2]
Variant 3: $\tau_d = 0.22$ [N/mm^2]
Variant 4: $\tau_d = 0.26$ [N/mm^2]

De schuifspanningen zijn allemaal ruim kleiner dan $f_{v;d}$, dus de elementen zullen niet bezwijken op afschuiving ter plekke van de opleggingen. Dit is ook niet gebeurd bij het beproeven van de schaalmodellen.

Buiging

Het midden van het frame zal het grootste moment ondervinden. Om dit moment te berekenen zijn de frames geschematiseerd als cirkels met een diameter van 16 meter, zie figuur 34. In dit figuur is te zien dat de cirkel is opgedeeld in vier gelijke delen. Elk cirkeldeel draagt een kwart van de totale belasting. Dit betekent dat de helft van de totale belasting in de horizontale richting van figuur 34 afgedragen wordt en de helft in de verticale richting.

Voor het berekenen van het maximale moment is zowel het eigen gewicht als de externe belasting beschouwd als een gelijkmatig verdeelde belasting. Voor de berekening van de verdeelde belasting ten behoeve van het eigen gewicht zijn is het totale eigen gewicht gedeeld door de oppervlakte van de cirkel, dus 201 [m^2]. Deze procedure is ook gevolgd om de verdeelde belasting ten behoeve van de externe belasting te bepalen. Een overzicht van de belastingen per variant zijn te zien in figuur 6. Bij de berekening van de totale belasting zijn de belastingsfactoren 1.35 en 1.5 in acht genomen.



Figuur 34: Schematisatie krachtsafdracht frames

Tabel 6: Overzicht belastingen

Variant	Belasting t.b.v. eigen gewicht [N/m^2]	Belasting t.b.v. externe belasting [N/m^2]	Totale belasting [N/m^2]
1	68.01	109.8	256.6
2	68.01	109.8	256.6
3	71.62	109.8	261.4
4	56.54	109.8	241.1

De totale belastingen zijn omgezet naar een lijnlast door te vermenigvuldigen met de helft van de oppervlakte van de cirkels en te delen door de overspanning, dus $X \cdot \frac{0.5 \cdot 201}{16}$ waarbij X de totale belasting representeert.

Deze lijnlasten zijn gebruikt om het moment in het midden van de frames te berekenen. Dit is gedaan met behulp van de formule $M = \frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2$. Hierbij is q de lijnlast die beschreven staat in de vorige alinea en $l = 16$ meter, namelijk de overspanning van het frame. De momenten zijn vervolgens omgerekend tot spanningen door te delen door het weerstandsmoment, zie vergelijking 8. Het weerstandsmoment is berekend met de breedte van twee elementen, dus met $b = 160$ $[mm]$ en $h = 220$ $[mm]$. Hier is voor gekozen omdat het maximale moment uitgeoefend zal worden op de twee elementen die zich in het midden van het frame zullen bevinden. Beide elementen zullen de helft van het totale moment voor hun rekening nemen. Een overzicht van de uiteindelijke momenten en de spanningen in de middelste twee elementen is te zien in tabel 7.

$$W = \frac{1}{6} \cdot b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 160 \cdot 220^2 = 1290667 \ [mm^3] \tag{8}$$

Tabel 7: Overzicht momenten en spanningen

Variant	Moment $\times 10^7$ $[Nmm]$	σ_m $[N/m^2]$
1	5.16	39.97
2	5.16	39.97
3	5.26	40.73
4	4.85	37.56

De berekende spanningen worden getoetst aan de hand van de $f_{m;d}$ van het hout. $f_{m;d}$ is berekend aan de hand van vergelijking 9. Uit deze toetsing blijkt dat alle varianten zullen bezwijken op buiging. De unity-check bevindt zich namelijk tussen de 2.5 en 2.75 terwijl een unity-check onder de 1.0 een garantie biedt voor een veilige constructie.

$$f_{m;d} = k_{mod} \cdot \frac{f_{m;k}}{\gamma_M} = 0.8 \cdot \frac{24}{1.3} = 14.8 \ [N/mm^2] \tag{9}$$

9 Vergelijking

In dit hoofdstuk worden de varianten met elkaar vergeleken. Hiervoor zijn eerst beoordelingscriteria opgesteld. Aan deze criteria is een gewicht toegekend en aan de hand van hoe elke variant scoort zijn conclusies getrokken.

9.1 Beoordelingscriteria

De varianten zullen beoordeeld worden op basis van het materiaalgebruik, de complexiteit van het patroon, de doorbuiging en de spanningen in het materiaal. Dit is gedaan op basis van de informatie in hoofdstuk 4, de resultaten uit paragraaf 7.4 en de handberekeningen voor de spanningen uit paragraaf 8.2.2.

Materiaalgebruik

Zoals in tabel 2 in hoofdstuk 4 te zien is bevatten variant 1 en 2 precies dezelfde hoeveelheid materiaal bevatten. Het enige verschil tussen deze patronen is de oriëntatie van de eenheden. Ook variant 3 bevat zo goed als evenveel materiaal als variant 1 en 2. Variant 4 is echter opgebouwd uit significant minder elementen en verbindingen. Dit patroon kan dus een grotere overspanning behalen met het zelfde materiaalgebruik. Dit heeft als nadeel dat er vergeleken met de andere varianten meer open ruimte tussen de elementen aanwezig is. Dit heeft een grote invloed op de doorbuiging van her frame.

Complexiteit van het patroon

De complexiteit van de patronen is een subjectief beoordelingscriterium. Wel kan er gezegd worden dat alle patronen opgebouwd zijn uit gelijkvormige eenheden. Hierdoor hoeft er geen rekening gehouden te worden met verschillende hoeken waaronder de elementen verbonden moeten worden. De verbindingen zullen voor variant 3 en 4 gemakkelijker gefabriceerd kunnen worden omdat de elementen in deze variant loodrecht met elkaar verbonden zijn doordat deze varianten opgebouwd zijn uit vierkante eenheden. Voor de frames die bestaan uit driehoekige eenheden, variant 1 en 2, zal de fabricage wat meer tijd vergen. De eenheden moeten namelijk schuin afgezaagd worden en er zal gebruik gemaakt moeten worden van balkdragers die de elementen onder een hoek van 60°kunnen verbinden.

Daar staat tegenover dat de driehoekige eenheden wel vormvast zijn. Als deze met elkaar verbonden worden levert dat ook een vormvaste constructie op. Bij de patronen die opgebouwd zijn uit vierkante eenheden is dit niet het geval. Zoals in paragraaf 6 duidelijk wordt levert dit vooral problemen op bij het maken van koepelvormige reciprocal frames. Dit kan opgelost worden door de eenheden te schoren. Dit zorgt er echter wel voor dat het bouwproces arbeidsintensiever wordt.

Als deze punten tegen elkaar afgewogen worden is besloten dat de varianten die opgebouwd zijn uit driehoekige eenheden iets complexer zijn om te maken.

Doorbuiging

De computermodellen uit paragraaf 7.4 schetsen een duidelijk beeld van de doorbuiging van de verschillende patronen onder eenzelfde belasting. Uit tabel 4 volgt dat variant 2 en 4 een ruim twee maal grotere doorbuiging ondervinden dan variant 1 en 3. Dit is te verklaren doordat er bij deze patronen meer open ruimte aanwezig is tussen de elementen.

Opvallend is dat variant 1 en 2 eenzelfde hoeveelheid materiaal bevatten, maar dat de oriëntatie van de eenheden een zeer grote invloed heeft op de doorbuiging van de frames.

Hierbij moet wel vermeld worden dat geen enkel schaalmodel aan de doorbuigingseis van $w_{max} = \frac{l}{250}$ voldoet. Dit komt doordat de modellen zijn belast totdat er een duidelijk meetbare doorbuiging zichtbaar was. Dit bleek zo te zijn bij een externe belasting van 12.07 [N]. Dit komt overeen met een belasting in de werkelijkheid van 22085 [N] oftewel 22.085 [kN]. Deze belasting is veel kleiner dan een standaard dakbelasting van 1 [kN/m^2]. Dit betekent dat geen van de onderzochte constructies een goed alternatief is om een overspanning van 16 meter te overspannen.

Spanningen

Als wordt gekeken naar de schuifspanningen in de elementen ter plekke van de opleggingen kan geconcludeerd worden dat varianten 1 en 2 de hoogste schuifspanningen bevatten. Dit wordt voornamelijk veroorzaakt doordat deze varianten minder opleggingen bevatten dan de andere twee varianten. Eenzelfde redenatie kan worden toegepast bij variant 3. Deze variant bevat de laagste schuifspanningen ter plaatse van de opleggingen omdat deze variant meer opleggingen bevat.

Als de spanningen door buiging in acht worden genomen valt op dat geen enkele variant aan de eisen voldoet; de unity-check is voor elke variant ruim groter dan 1.0. De elementen in variant 3 ondervinden de grootste spanningen door buiging en die in variant 4 de kleinste. De groottes van de spanningen in de elementen liggen wel dicht bij elkaar, dus op basis hiervan kunnen geen duidelijke conclusies getrokken worden.

9.2 Resultaten

Op basis van de bovenstaande beoordelingscriteria is aan elke variant een score toegekend. Deze scores lopen van 1 tot en met 4. Deze scores zijn toegekend door de varianten te ordenen van best scorend tot slechtst scorend. De best scorende variant krijgt 1 punt, de slechtst scorende 4 punten.

Ook heeft elk criterium een gewicht gekregen. Hoe hoger het gewicht, hoe zwaarder het criterium meetelt. De varianten worden ten opzichte van elkaar beoordeeld. Dit houdt in dat ze niet beoordeeld zijn aan de hand van de eisen die in de Eurocode gesteld worden. Aan varianten die even goed scoren zijn dezelfde cijfers toegekend.

Uiteindelijk zijn alle cijfers per variant bij elkaar opgeteld. Hoe lager de score, hoe beter de variant scoort. De resultaten zijn te zien in tabel 8. Omdat uit de berekeningen van de spanningen door het buigend moment is gebleken dat geen enkele variant voldoet heeft dit criterium een lagere weging gekregen dan de schuifspanningen.

	Materiaalgebruik	Complexiteit	Doorbuiging	τ_d	σ_m	
Weging	1	1	3	2	1	Totaalscore
Variant 1	2	2	1	3	2	15
Variant 2	2	2	4	3	2	24
Variant 3	3	1	2	1	3	15
Variant 4	1	1	3	2	1	16

Tabel 8: Vergelijking van de patronen

10 Conclusie

Een reciprocal frame is een wederkerige constructie die opgebouwd is uit lineaire elementen. Deze elementen ondersteunen elkaar op zo'n manier dat ze een gesloten eenheid vormen. Deze eenheden kunnen veel verschillende vormen hebben; de enige voorwaarde die aan RF-eenheden gesteld wordt is dat ze opgebouwd zijn uit tenminste drie elementen. Dit is het minimale aantal elementen dat nodig is om een gesloten eenheid te vormen.

De elementen in reciprocal frames kunnen op verschillende manieren aan elkaar verbonden worden. Als de elementen op elkaar gestapeld worden levert dit koepelvormige frames op. Als er gekozen wordt voor een verbinding met balkdragers zal het reciprocal frame plaatvormig zijn. Omdat beide mogelijkheden onderzocht zijn zal de conclusie uit twee delen bestaan.

Allereerst de conclusie die getrokken kan worden uit het onderzoek naar koepelvormige reciprocal frames. Als de eenheden met elkaar verbonden worden om een grotere constructie te vormen zijn de eenheden ten opzichte van elkaar getordeerd. Hierdoor worden de elementen in zowel hun sterke als hun zwakke richting belast en ondervinden ze dubbele buiging. Ook zullen de patronen niet hetzelfde zijn als hoe ze tweedimensionaal getekend zijn. Dit wordt veroorzaakt door de kromming van de eenheden. Voor patronen die bestaan uit vierkante eenheden moet daarnaast ook rekening gehouden worden met het feit dat de eenheden niet vormvast zijn. Hierdoor is het erg lastig om een koepel te maken van alleen vierkante eenheden omdat ze al snel ruitvormig zullen worden. Dit kan voor instabiliteit van de koepel zorgen.

Vervolgens de conclusie die getrokken kan worden uit het onderzoek naar plaatvormige reciprocal frames. Vooral als gekeken wordt naar de doorbuiging van de verschillende varianten onder eenzelfde belasting worden er grote verschillen zichtbaar. De patronen waar relatief veel open ruimte tussen de elementen zit buigen zo'n twee keer zoveel door als de patronen waar deze ruimte veel kleiner is. Dit betekend dat variant 1 en 3 beter scoren op basis van het criterium voor doorbuiging. Qua spanningen in de elementen verschillen de onderzochte patronen niet erg veel van elkaar. Wel valt op dat geen enkel patroon aan de eisen voor buigende momenten voldoet. Dit kan komen doordat de overspanning te groot is voor het gebruikte profiel of omdat de momenten in de elementen niet op de juiste manier berekend zijn.

Dit rapport heeft zich voornamelijk gefocust op het gedrag van plaatvormige reciprocal frames. In vervolgonderzoek kunnen ook koepelvormige frames onderzocht worden. Dit kan gedaan worden door het maken en beproeven van fysieke schaalmodellen, maar er kunnen ook alleen computermodellen gemaakt worden.

Daarnaast kan dit onderzoek herhaalt worden voor andere overspanningen of andere profielen van de elementen. Voor patronen die bestaan uit vierkante eenheden is al onderzoek gedaan naar de maximaal haalbare overspanning; voor driehoekige eenheden is dit onderzoek nog niet uitgevoerd. Als er onderzoek gedaan wordt met behulp van digitale modellen kunnen de profieleneigenschappen ook eenvoudig gevarieerd worden.

Referenties

Brol, J., Dawczynski, S. & Adamczyk, K. Possibilities of timber structural members reuse. In: Shatis '15; 3rd International Conference on Structural Health Assessment of Timber Structures. Wroclaw - Poland, 2015, september.

Gustafsson, J. (2016). *Connections in Timber Reciprocal Frames* (masterscriptie). CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY. Gothenburg, Sweden.

Haspl. (2022). Joist hanger type 1 80x200x2,0. Geraadpleegd op 2 juni 2022, van https://www.haspl.eu/en/joist-hanger-type-1-80x200x2-0.html

Kohlhammer, T. & Kotnik, T. (2018). Systemic Behaviour of Plane Reciprocal Frame Structures. *Structural Engineering International*, *21*(1), 80–86. https://doi.org/10.2749/101686611X12910257102596

Larsen, O. P. (2014). Reciprocal Frame (RF) Structures: Real and Exploratory. *Nexus Network Journal*, *16*, 119–134. https://doi.org/10.1007/s00004-014-0181-0

Scharringa, J. (2021). *Gebruik van afvalhout voor grote overspanningen met behulp van reciprocal frames*.

Schrama, W. (2021). *A structural analysis of timber reciprocal frames*.

Song, P., Fu, C.-W., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J. & Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics*, *32*(4), 1–13. https://doi.org/10.1145/2461912.2461915

Toolstation. (2022). Timber to Timber Joist Hanger 47 x 272mm. Geraadpleegd op 4 mei 2022, van https://www.toolstation.com/timber-to-timber-joist-hanger/p43424

TU Delft. (2013). *Quick Reference*.

Wood solutions. (2022). *Information about balsa wood*. Geraadpleegd op 25 mei 2022, van https://www.woodsolutions.com.au/wood-species/hardwood/balsa

A Tekeningen Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk

Op de volgende paginas zijn de bouwtekeningen van de Onze-Lieve-Vrouw-Geboortekerk in Hoogmade te zien.

271 R·K KERK
BLAD O·L·V·GEBOORTE
1 HOOGMADE

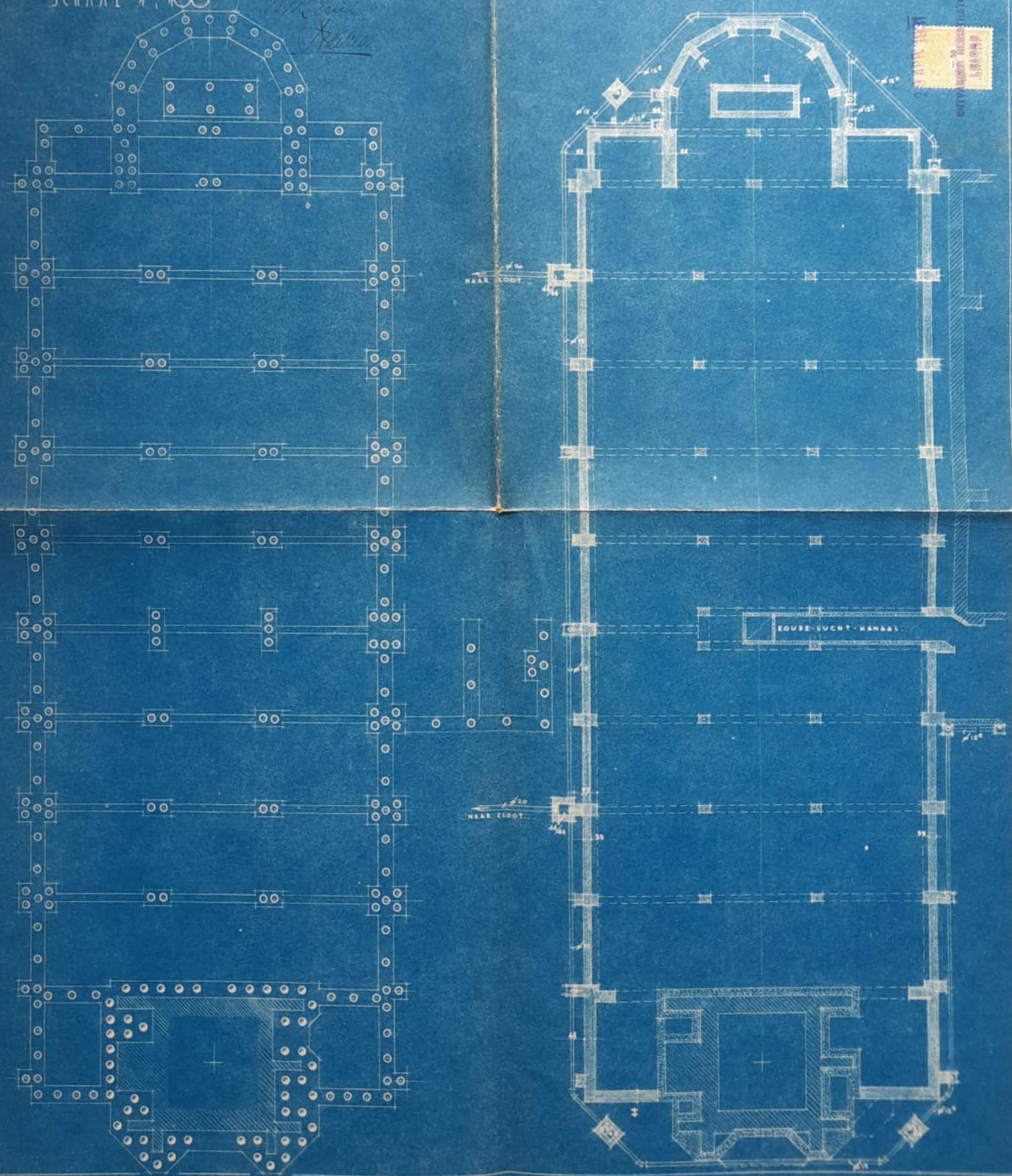
PALENPLAN
FUNDEERING
SCHAAL 1:100

Hoogmade 29 April 1931.
De Aanbesteder: [illegible]
[illegible] Salm[illegible] [illegible] Hoogeveen
[illegible] [illegible] [illegible]

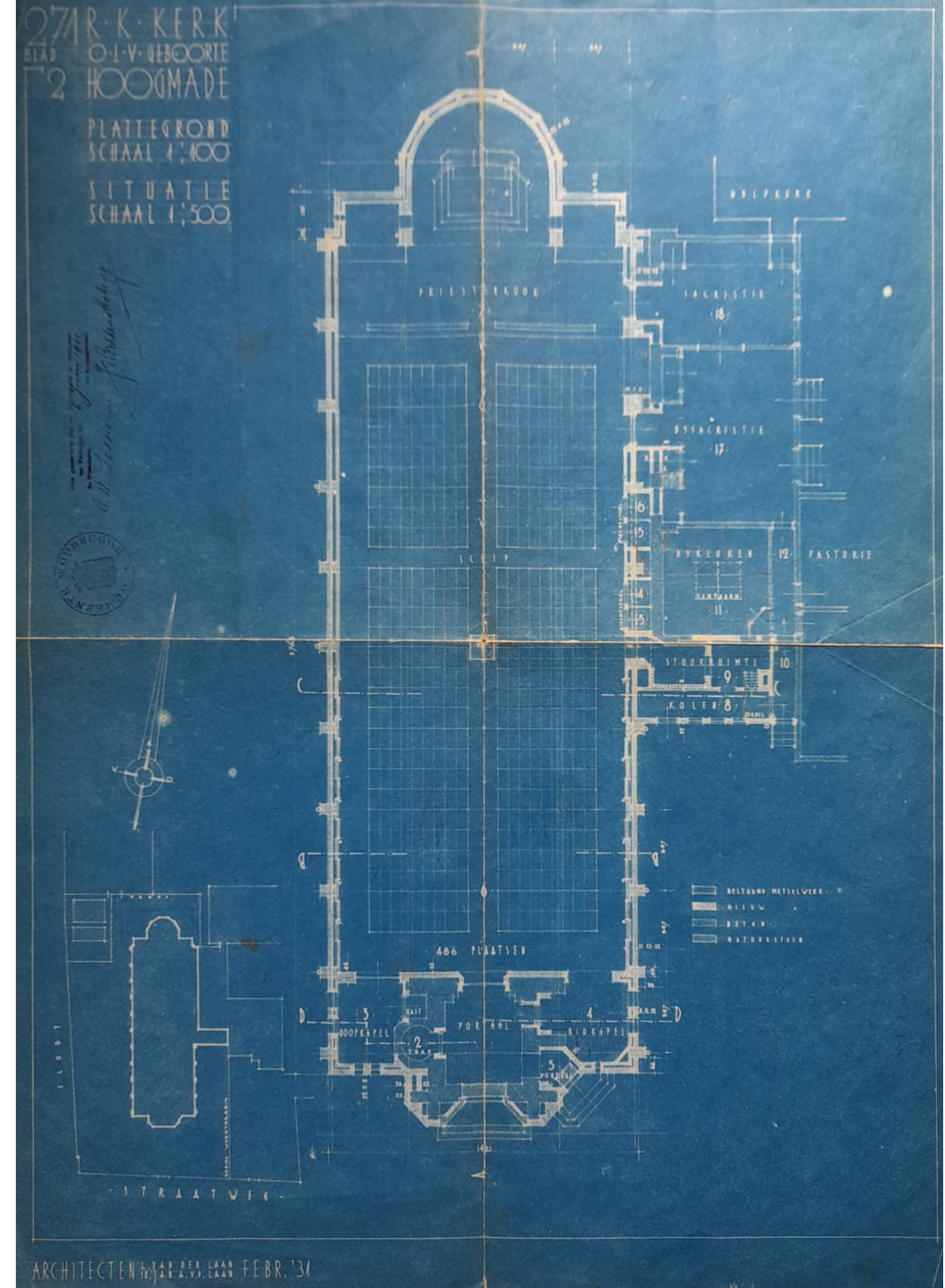
De aannemster:
[illegible]
[illegible]

29 APR 1931
1.50
ONTVANGER REGISTRATIE
LEIDEN

29 APR 1931
—.50
ONTVANGER REGISTRATIE
LEIDEN



ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN IR. JAN A. VD. LAAN FEBR. '31

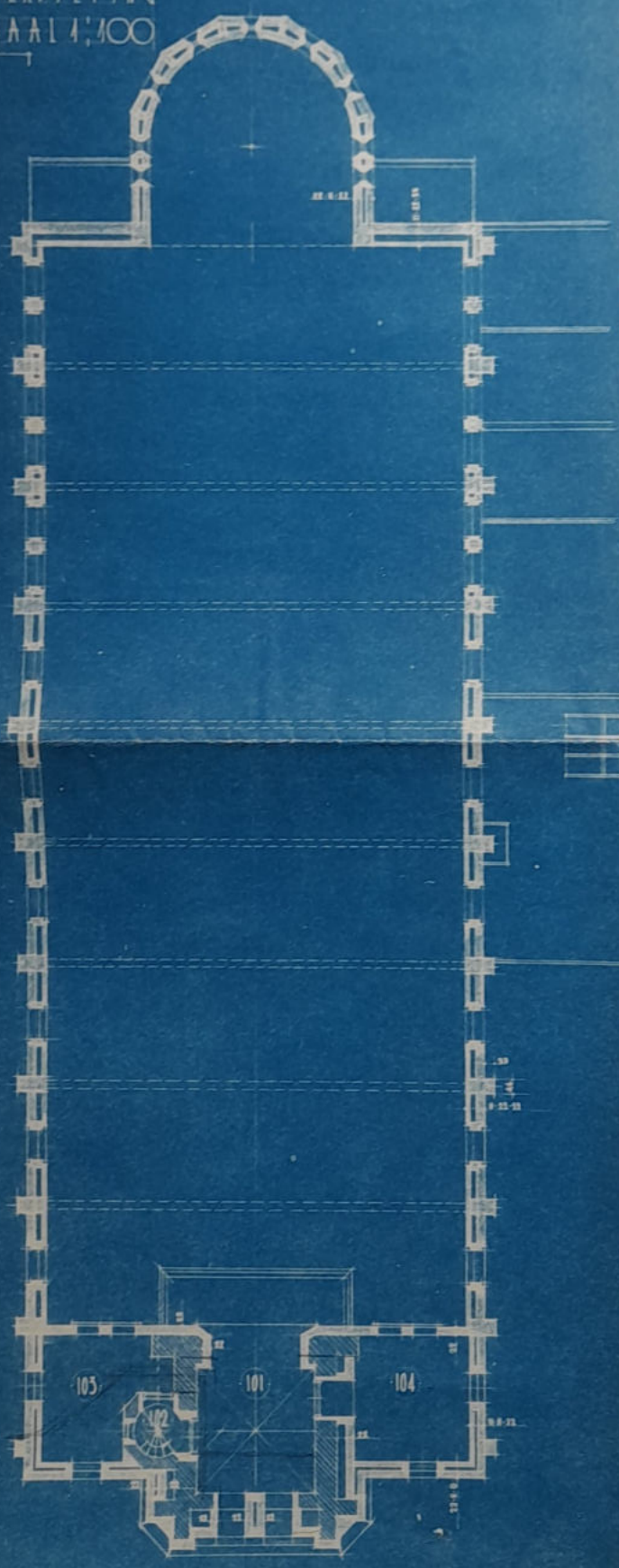


271 R·K·KERK
BLAD O·L·V·GEBOORTE
2 HOOGMADE
PLATTEGROND
SCHAAL 1:100
SITUATIE
SCHAAL 1:500
PRIESTERKOOR
SACRISTIE
18
BYSACRISTIE
17
SCHIP
BYKEUKEN
12
PASTORIE
11
STOOKRUIMTE
10
9
KOLEN
8
486 PLAATSEN
3
DOOPKAPEL
2
TRAP
PORTAAL
4
BIDKAPEL
5
PORTAAL
DESTAAND METSELWERK
NIEUW
BETON
NATUURSTEEN
STRAATWEG
ARCHITECTEN A. VAN DER LAAN
FR. JAN A. V.D. LAAN
FEBR. '31

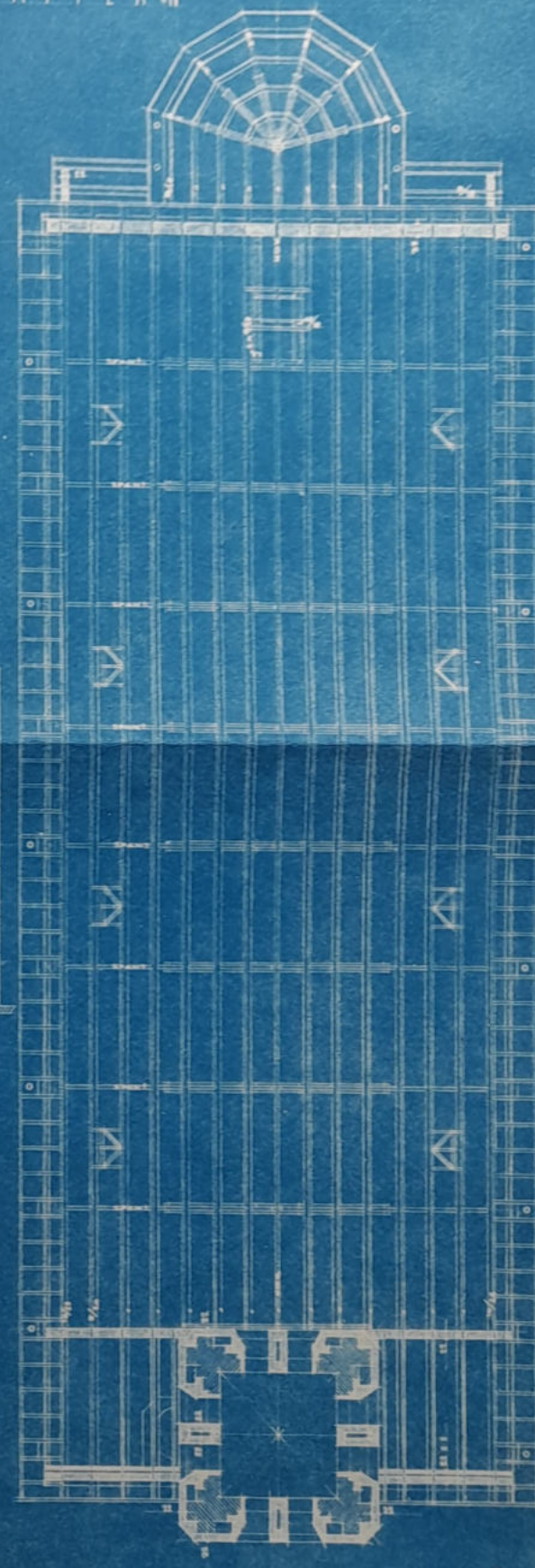
27
BLAD 3

R·K·KERK
O·L·V·GEBOORTE
HOOGMADE

4E VERDIEPING
SCHAAL 1:100



KAPPLAAN

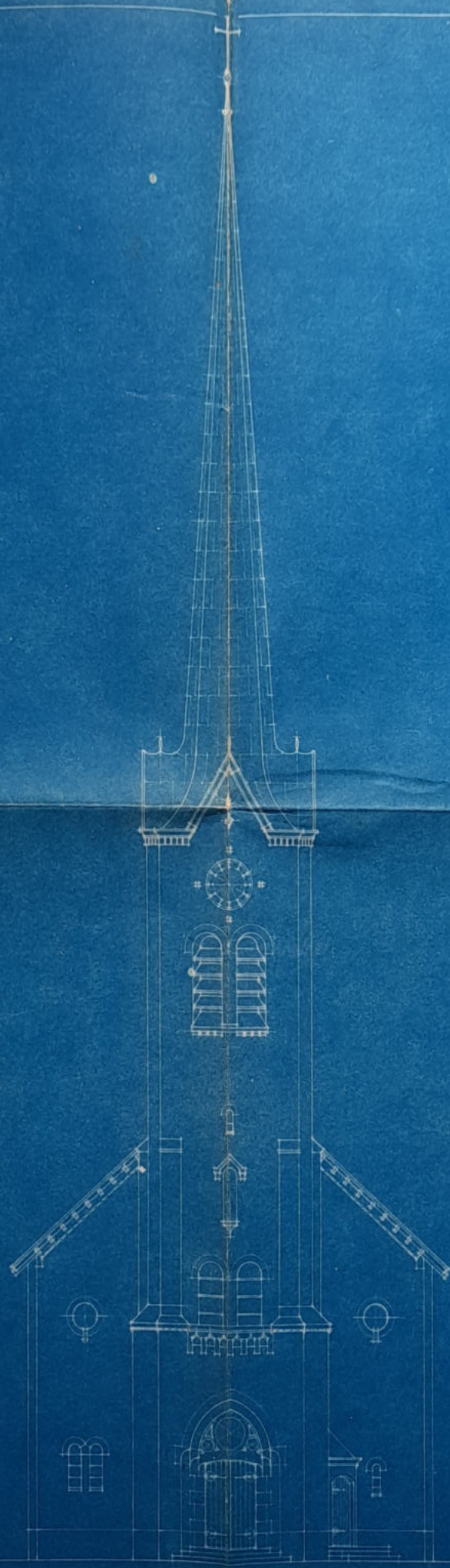


ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN EN JAN A. V.D. LAAN FEBR. '34

27/4 BLAD

R·K·KERK
O·L·V· GEBOORTE
HOOGMADE

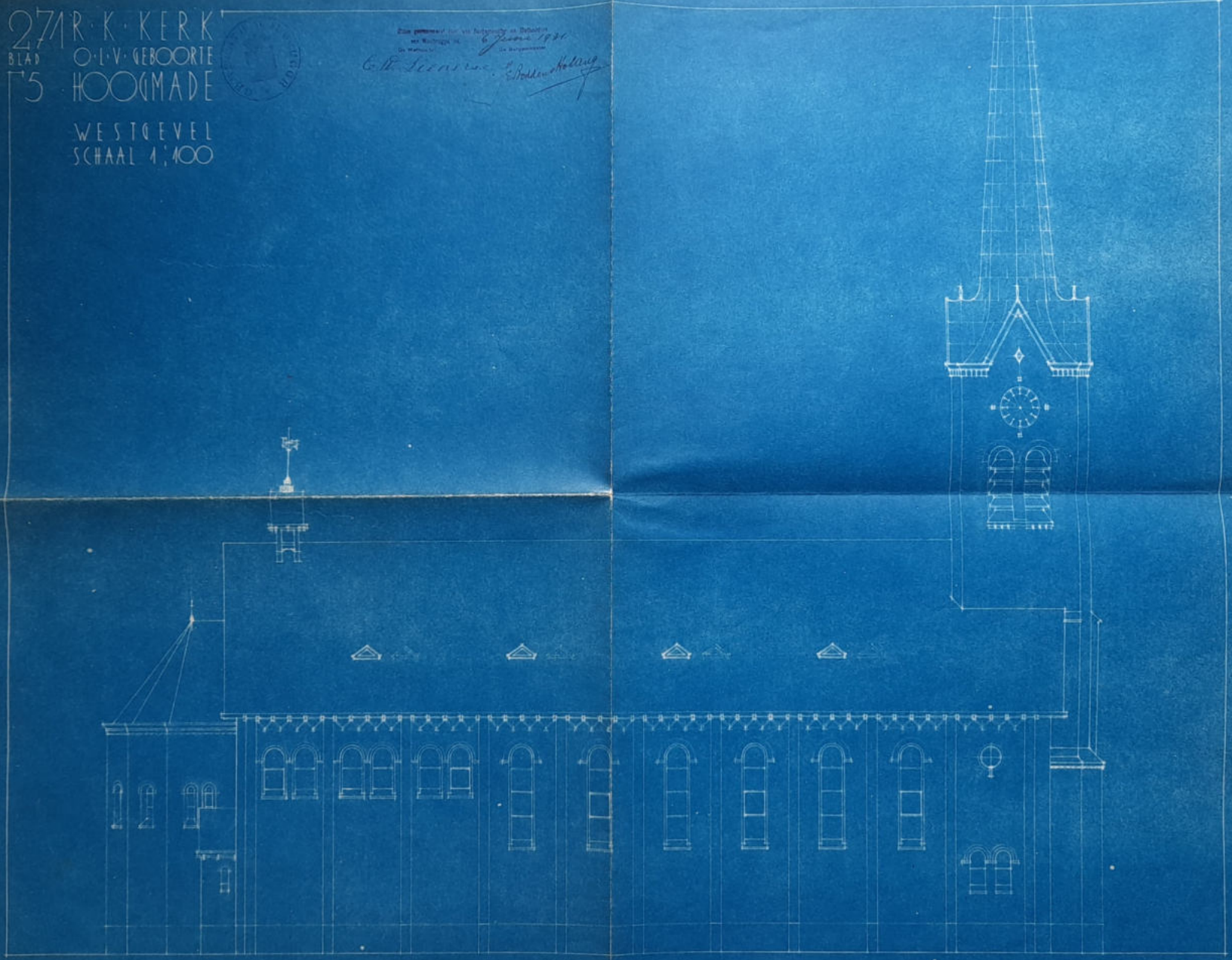
VOORGEVEL
SCHAAL 1:100



ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN IR. JAN A. VD. LAAN FEBR. '31

271 R·K·KERK
BLAD O·L·V·GEBOORTE
T5 HOOGMADE

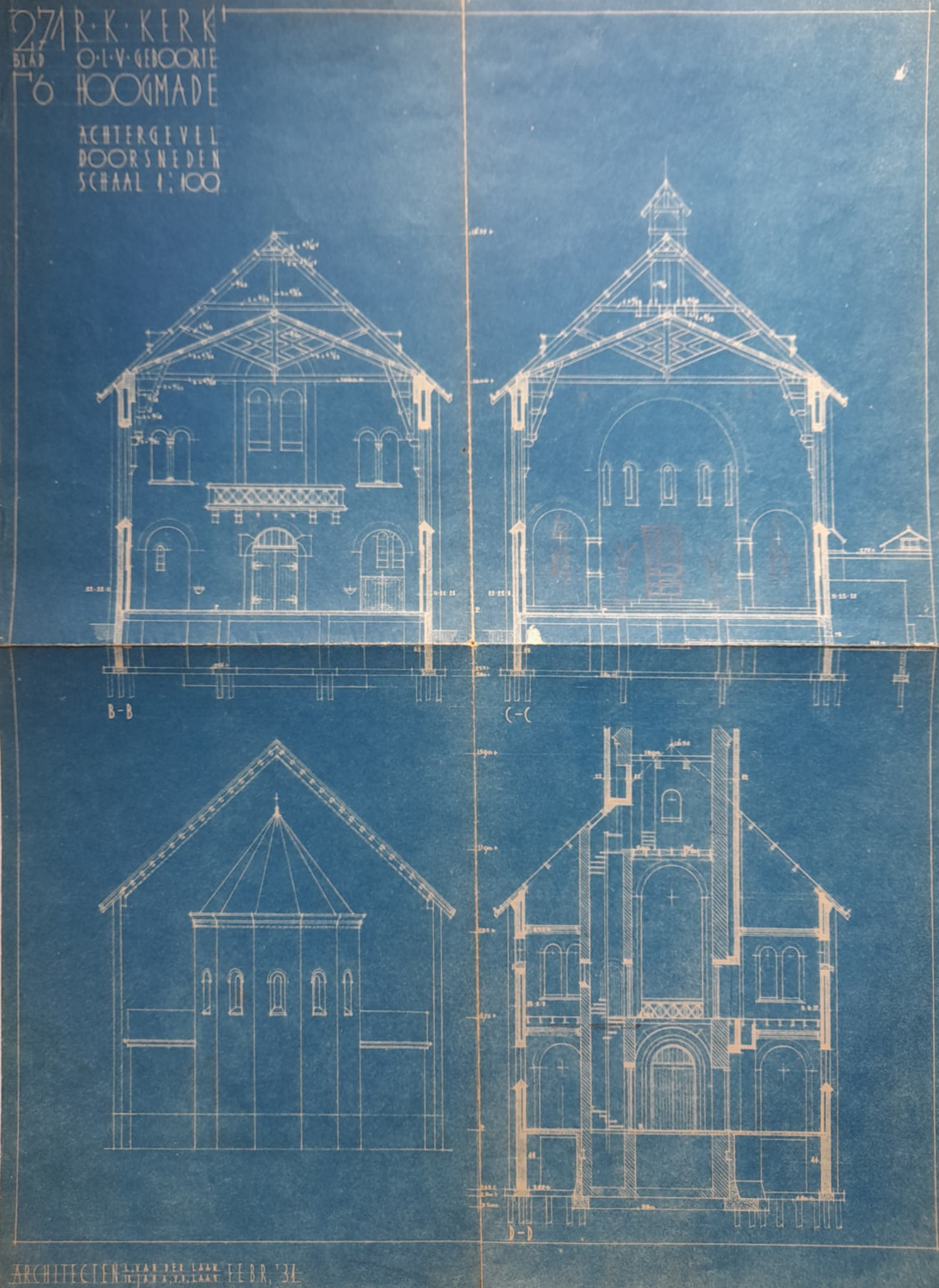
WESTGEVEL
SCHAAL 1:100



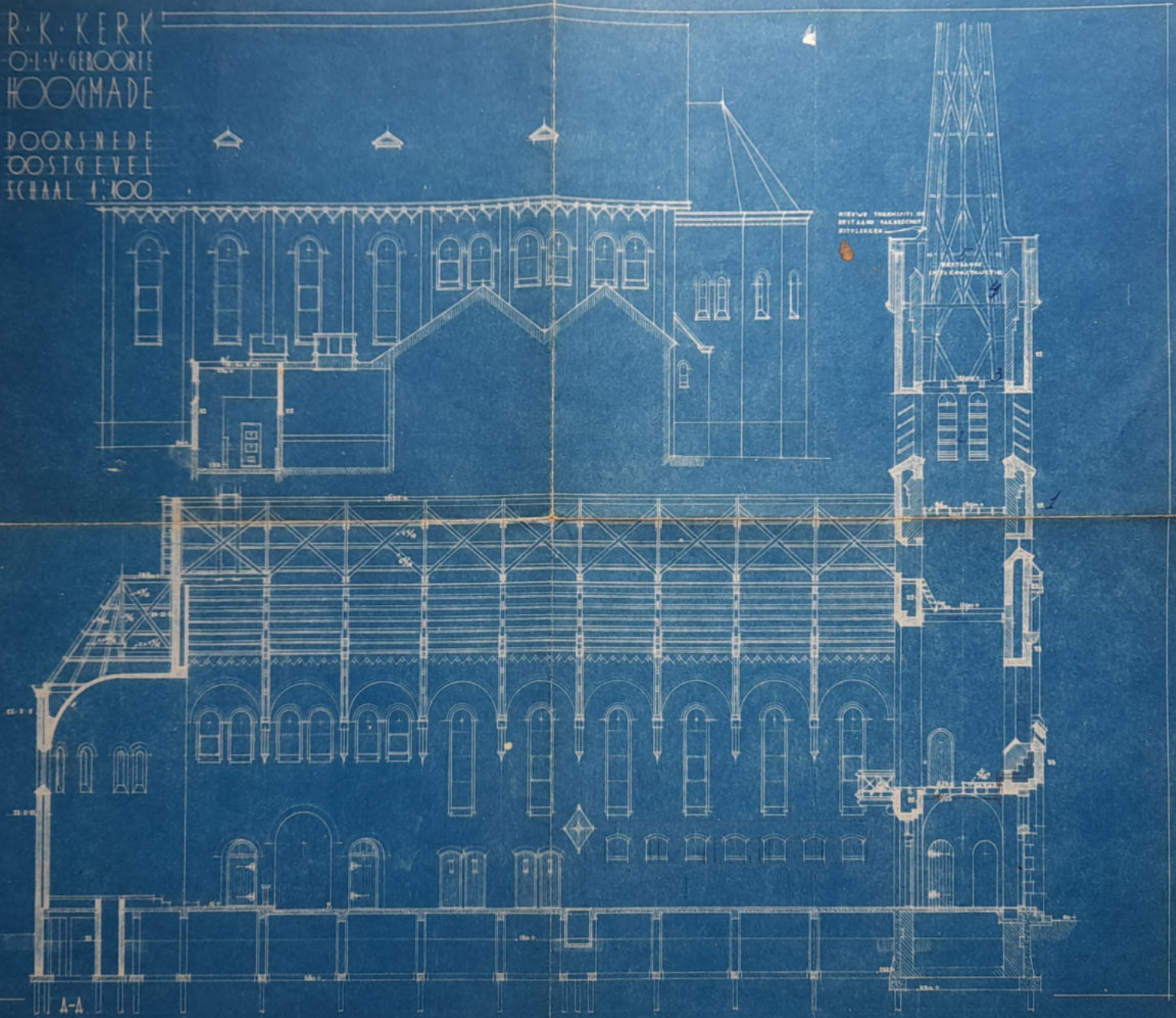
ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN
TE JAN & VR LAAN FEBR. '31

271 R·K·KERK
BLAD O·L·V·GEBOORTE
F6 HOOGMADE

ACHTERGEVEL
DOORSNEDEN
SCHAAL 1:100



ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN JR. JAN A. V.D. LAAN FEBR. '31



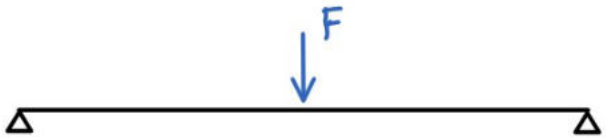
271 R·K·KERK
BLAD O·L·V·GEBOORTE
7 HOOGMADE
DOORSNEDE
OOSTGEVEL
SCHAAL 1:100
A-A
ARCHITECTEN L. VAN DER LAAN IR. J.A.N. A.V.D. LAAN FEBR. '31

B Sterkte- en stijfheidsproeven

Omdat de stijfheid van het balsahout en de sterkte van de verbindingen niet bekend zijn zijn deze door middel van proeven bepaald. Eerst wordt ingegaan op de dreipuntsbuigproef waarmee de stijfheid van het balsahout bepaald is. Vervolgens is de proef beschreven waarmee de sterkte van de verbindingen bepaald is.

B.1 Driepuntsbuigproef

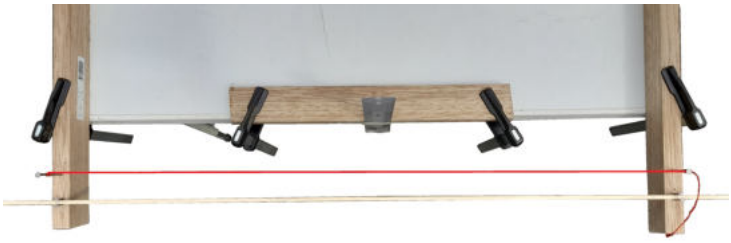
Om de stijfheid van het balsahout te bepalen zijn driepuntsbuigproeven uitgevoerd. Dit is gedaan voor drie verschillende houten latjes. De resultaten van deze proeven zijn gemiddeld om een realistische waarde voor de stijfheid te krijgen. Het mecahnicaschema voor deze proef is te zien in figuur 35.



Figuur 35: Mechanica-schema driepuntsbuigproef

Proefopstelling

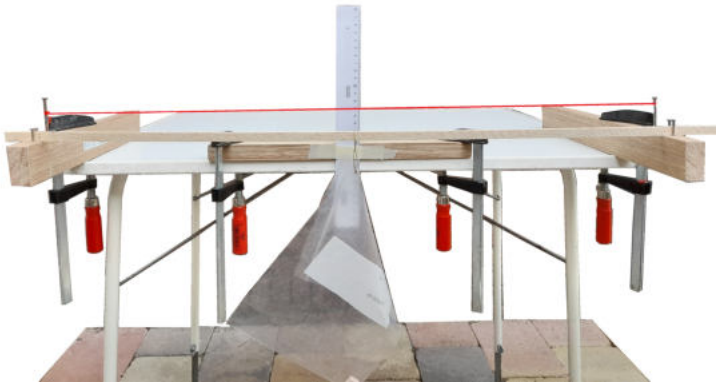
Een boven- en zijaanzicht van de proefopstelling zijn te zien in figuur 36 en 37. Zoals in deze figuren te zien is zijn er twee houten latten aan de tafel vastgeklemd. Deze dienen ter ondersteuning van het proefstuk zodat deze zonder belemmering van de tafel door kan buigen. Ook is in deze figuren te zien dat het proefstuk zijdelings ondersteund is door spijkers aan weerszijde van het proefstuk. Deze ondersteuning is noodzakelijk zodat het proefstuk niet kan bezwijken door kipinstabiliteit. Ook is in beide figuren een rood touwt zichtbaar. Deze bleek niet van toepassing voor de metingen.



Figuur 36: Bovenaanzicht proefopstelling

Methode

Tijdens het uitvoeren van deze proef is het proefstuk in het midden belast. De belasting is aangebracht door een plastic zak in het midden aan het proefstuk te hangen, zie figuur 37. Deze zak kan gevuld worden met gewichten waardoor de belasting langzaamaan opgevoerd kan worden.



Figuur 37: Tijdens de test

Resultaten

Aan de hand van de resultaten van de driepuntsbuigproef zijn de elasticiteitsmoduli van de houten proefstukken bepaald. Dit is gedaan met behulp van formule 10, het vergeet-me-nietje voor de doorbuiging van een ligger op twee steunpunten. Als deze formule omgeschreven wordt verkrijgt met formule 11. Aan de hand van deze formule zijn de E-moduli van de proefstukken bepaald. Voor elk proefstuk geldt $l = 713$ [mm] en $I = \frac{1}{12}b \cdot h^3$ met $b = 4.7$ [mm] en $h = 10.5$ [mm]. De resultaten van de driepuntsbuigproef inclusief de E-moduli van de proefstukken zijn weergegeven in tabel 9. De gemiddelde elasticiteitsmodulus van de proefstukken zou een grootte moeten hebben van tussen de 1.8 en 6.4 [GPa] (Wood solutions, 2022). Dit blijkt goed overeen te komen met de resultaten uit deze proef.

$$w = \frac{1}{48}\frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} \qquad \text{(TU Delft, 2013)} \tag{10}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{48}\frac{F \cdot l^3}{w \cdot I} \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Tabel 9: Resultaten driepuntsbuigproef

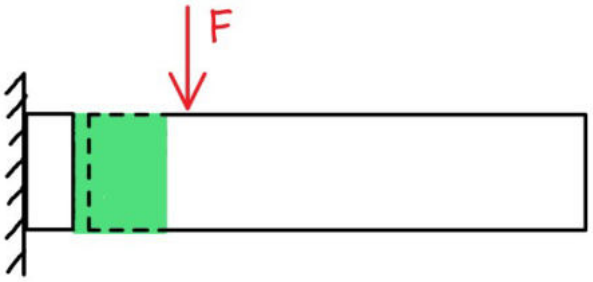
Proefstuk nummer	F [g]	F [N]	w [mm]	E [N/mm^2]
1	202	1.98	16	2063
2	246	2.41	15	2680
3	196	1.92	13	2463
			Gemiddelde	2402

B.2 Verbindingsproef

Om de sterkte van de gelijmde verbindingen te bepalen zijn er een aantal proeven uitgevoerd. Dit is gedaan voor acht verbindingen; vier verbindingen van driehoekige eenheden en vier van vierkante eenheden. Er zijn verbindingen van beide type eenheden getest om te onderzoeken of er een verband is tussen de hoek waaronder de elementen verbonden zijn en de sterkte van de verbindingen.

Mechanica-schema

Tijdens de verbindingsproef moet het hoofd-element niet kunnen roteren. Daarom is dit element ingeklemd. Daarnaast is ervoor gekozen om het aangrenzende element uitkragend te laten zijn. In de werkelijke constructie zal dit element redelijk vrij kunnen bewegen, dus een uitkraging is een goede schematisatie. Het mechanica-schema voor deze proef is te zien in figuur 38. In dit figuur is de verbinding weergegeven in het groen. Het gestippelde deel van het aangrenzende element zal zich in de verbinding bevinden. Ook is de locatie van de belasting aangegeven.



Figuur 38: Mechanica-schema verbindingsproef

Proefopstelling

De proefopstelling die gebruikt is is te zien in figuur 39. Zoals in dit figuur te zien is wordt het hoofd-element van de verbinding vastgeklemd aan een houten lat. Deze lat dient alleen ter ondersteuning om het hoofd-element vast te kunnen klemmen. Dit element dient vastgeklemd te worden zodat het niet gaat roteren als het aangrenzende element belast wordt.



(a) Bovenaanzicht (b) Zijaanzicht

Figuur 39: Proefopstelling verbindingsproef

Methode

Omdat de verbinding voornamelijk op dwarskracht belast zal worden zal dat in deze proef ook het geval zijn. De belasting zal daarom dicht bij de verbinding aangebracht worden op het aangrenzende element. Dit is gerealiseerd door dicht bij de verbinding een zak aan te brengen waar de belasting in gelegd kan worden, zie figuur 40. Er is steeds meer belasting toegevoegd totdat de verbinding is bezweken. Na afloop is de belasting die de verbinding nog net kon weerstaan gewogen.



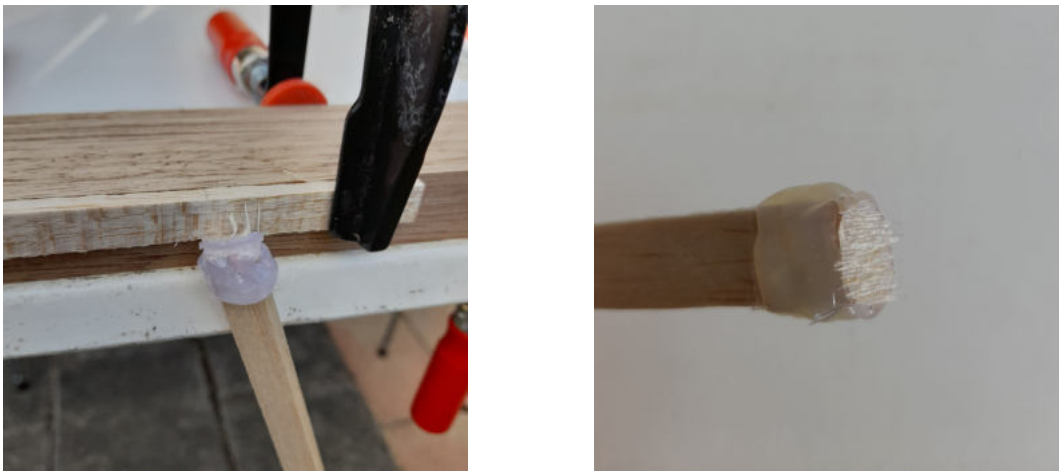
Figuur 40: Tijdens de test

Resultaten

In tabel 10 zijn de resultaten van de proeven te zien. Deze resultaten zijn opgesplitst in de resultaten van de verbindingen van de driehoekige en de vierkante eenheden. In deze tabel staat "Massa"voor de massa die de verbinding kon weerstaan op het punt dat het nog net niet bezweek. Uit deze tabel kan de conclusie getrokken worden dat de verbindingen van de driehoekige eenheden iets sterker zijn dan die van de vierkante eenheden. De verschillen in de resultaten zullen echter niet alleen veroorzaakt zijn door de verschillende hoeken waaronder de elementen verbonden waren. Doordat de verbindingen

handgemaakt zijn zijn ze niet identiek. Zo kunnen de contactvlakken van het hout en de lijm verschillen in grootte. Bij een groter contactvlak zal de verbinding sterker zijn. Dit maakt het lastig om juiste conclusies te trekken uit de resultaten.

In alle gevallen is het niet de verbinding zelf die bezweken is, maar het hout waar de verbinding aan vast gelijmd is. Dit is te zien in figuur 41. In figuur 41b is goed te zien dat het hout bezweken is. Dit kan verklaard worden door het feit dat het hout in een zeer zwakke richting belast wordt. Doordat er een dwarskracht aangebracht wordt op de zijkant van het hout zullen de houtvezels op dit punt van elkaar af willen schuiven. Onder dit type belasting zal het hout veel zwakker zijn dan wanneer het over de gehele doorsnede belast zal worden. Dit is ook terug te zien in de resultaten.



(a) Bezweken verbinding (b) Close-up

Figuur 41: Afbeeldingen van het bezwijkvlak

Tabel 10: Resultaten verbindingsproef

Driehoekige eenheid		
Proefstuk nummer	**Massa [g]**	**Belasting [N]**
1	266	2.61
2	506	4.96
3	392	3.85
4	626	6.14
Gemiddelde	448	4.39
Standaarddeviatie	154	1.51
Vierkante eenheid		
Proefstuk nummer	**Massa [g]**	**Belasting [N]**
1	476	4.67
2	500	4.91
3	344	3.37
4	334	3.28
Gemiddelde	414	4.06
Standaarddeviatie	87	0.85

C Bepaling gewicht, afmetingen en dichtheid elementen en verbindingen

In deze bijlage worden de gewichtsbepalingen van de elementen en de verbindingen besproken. Ook zijn hier de afmetingen van de elementen bepaald. Tot slot is de dichtheid van het balsahout bepaald.

Gewichtsbepalingen

Voor de bepaling van het gewicht van de elementen en verbindingen zijn van een aantal elementen en verbindingen de massa's bepaald. In combinatie met $g = 9.81$ [m/s^2] zijn de massa's omgerekend naar gewichten.

Elementen

Om de massa's van de elementen te bepalen zijn deze gewogen met een keukenweegschaal. Deze weegschaal heeft een nauwkeurigheid van 2 [g]. Om de massa's zo nauwkeurig mogelijk te bepalen zijn er meerdere elementen tegelijk op de weegschaal gelegd. Vervolgens is de gemeten massa gedeeld door het aantal elementen om de massa per element te verkrijgen. Dit is vijf keer herhaald waarbij het aantal elementen dat per keer gewogen is is gevarieerd. De resultaten zijn gerapporteerd in tabel 11.

Tabel 11: Gewichtsbepaling elementen

Aantal elementen	Massa [g]	Massa per element [g]	Gewicht $\times 10^{-3}$ [N]
30	28	0.93	9.16
30	30	1.00	9.81
40	42	1.05	10.3
40	38	0.95	9.32
50	54	1.08	10.6
Gemiddelde		1.00	9.84
Standaarddeviatie		0.06	0.62

Verbindingen

Ook voor de verbindingen geldt dat deze gewogen zijn met een keukenweegschaal. Dezelfde procedure is gevolgd als bij het bepalen van de massa's van de elementen. Omdat deze verbindingen stukken lichter zijn dan de elementen zijn er meer verbindingen tegelijk op de weegschaal gelegd om de meetfout te reduceren. Doordat de weegschaal niet heel nauwkeurig is moet hier rekening gehouden worden met een grotere meetfout. Ook deze metingen zijn vijf keer herhaald met verschillende aantallen verbindingen. De resultaten zijn gerapporteerd in tabel 12.

Tabel 12: Gewichtsbepaling verbindingen

Aantal verbindingen	Massa [g]	Massa per verbinding [g]	Gewicht $\times 10^{-3}$ [N]
50	32	0.64	6.28
55	34	0.62	6.06
53	34	0.64	6.29
63	40	0.63	6.23
60	40	0.67	6.54
Gemiddelde		0.64	6.28
Standaarddeviatie		0.02	0.17

Bepaling afmetingen elementen

Voor het bepalen van de schuifspanningen die zullen optreden in de elementen zijn de hoogte en breedte van de elementen bepaald. Deze metingen zijn gedaan met behulp van een liniaal waarbij de afmetingen op 0.5 [mm] nauwkeurig afgelezen kunnen worden. Er zijn tien verschillende elementen gemeten en de gemeten waardes zijn te zien in tabel 13. In deze tabel zijn ook de gemiddelde waardes terug te vinden. Dit zijn de waardes die gebruikt zijn in de berekeningen.

Tabel 13: Afmetingen elementen

Element nummer	b [mm]	h [mm]
1	4.5	10.5
2	4.5	10.5
3	5.5	10.5
4	4.5	10.5
5	5.0	10.5
6	4.0	10.5
7	5.0	10.5
8	4.5	10.5
9	5.0	10.5
10	4.0	10.5
Gemiddelde	4.7	10.5
Standaarddeviatie	0.47	0.00

Dichtheidsbepaling balsahout

Met behulp van de gemiddelde massa en de afmetingen van de elementen is de dichtheid van het balsahout bepaald. Dit is gedaan aan de hand van vergelijking 13. Hierbij moet benoemd worden dat het volume van de elementen is gebruikt in de berekening. Dit volume zal echter niet alleen hout zijn; het zal ook lucht bevatten. Dat is in deze berekening buiten beschouwing gelaten.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l \cdot b \cdot h} = \frac{1.00 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-2} \cdot 4.7 \times 10^{-3} \cdot 10.5 \times 10^{-3}} = 135 \text{ [kg/m}^3\text{]} \qquad (13)$$

D Doorbuiging schaalmodellen

In tabel 14 en 15 zijn de resultaten van de doorbuigingsproef van de schaalmodellen te zien. De belasting die in deze tabellen te zien is is de totale belasting die het frame ondervindt. Dit is berekend aan de hand van $g = 9.81$ [m/s^2].

Zoals in deze tabellen te zien is zijn de belastingstappen niet even groot geweest. Dit is veroorzaakt door het feit dat de varianten niet met evenveel puntlasten belast zijn. De uiteindelijke belasting is wel voor beide varianten gelijk.

Tabel 14: Doorbuiging variant 1

Belasting [kg]	Belasting [N]	Hoogte t.o.v. rood koord [mm]	Doorbuiging [mm]
0.000	0.000	6	-
0.164	1.609	8	2
0.328	3.218	10	4
0.492	4.827	12	6
0.656	6.435	14	8
0.820	8.044	15	9
0.984	9.653	17	11
1.148	11.26	19	13
1.230	12.07	20	14

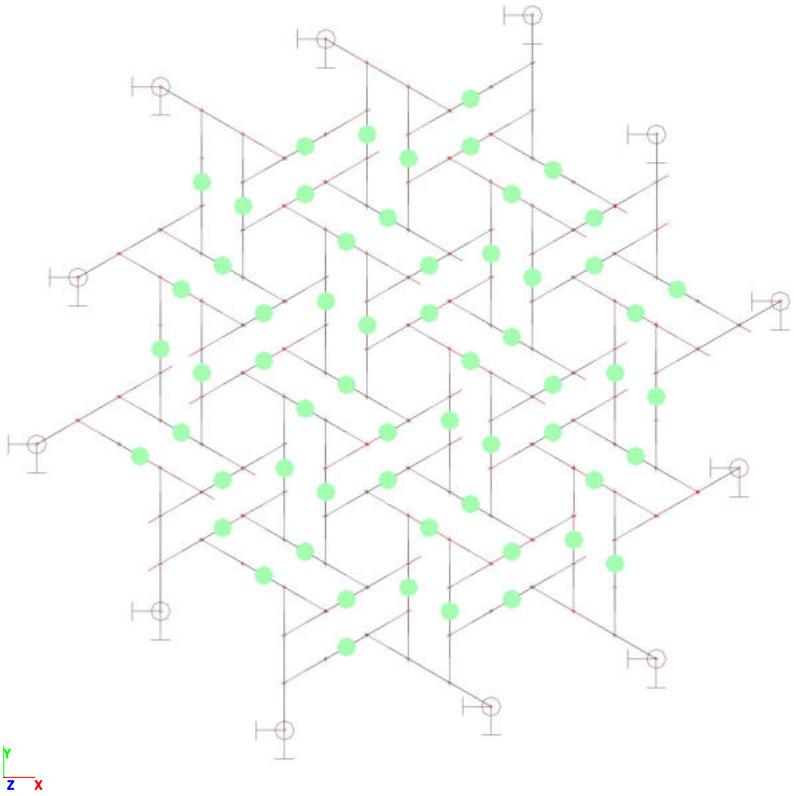
Tabel 15: Doorbuiging variant 3

Belasting [kg]	Belasting [N]	Hoogte t.o.v. rood koord [mm]	Doorbuiging [mm]
0.000	0.000	11	-
0.137	1.341	13	2
0.273	2.681	15	4
0.410	4.022	16	5
0.547	5.363	17	6
0.683	6.704	19	8
0.820	8.044	20	9
0.957	9.385	21	10
1.093	10.73	23	12
1.230	12.07	25	14

E SCIA Engineer modellen

In deze bijlage zijn de computermodellen van de vier varianten weergegeven. Hierbij is ook een overzicht van de knopen toegevoegd. In sommige modellen zijn dubbele knopen aanwezig. In dat geval zijn er twee knopen op hetzelfde punt geplaatst. Dit heeft geen invloed op de resultaten, maar zorgt er wel voor dat het overzicht van de knopen uitgebreider is.

Variant 1



Figuur 42: Variant 1

Knoopoverzicht

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K1	0.000	5.000	0.000
K2	0.000	0.000	0.000
K4	8.660	10.000	0.000
K6	12.990	12.500	0.000
K8	12.990	7.500	0.000
K9	12.990	17.500	0.000
K10	12.990	22.500	0.000
K11	17.320	5.000	0.000
K12	21.650	2.500	0.000
K13	17.320	10.000	0.000
K14	17.320	15.000	0.000
K15	17.320	20.000	0.000
K16	0.000	10.000	0.000
K17	0.000	15.000	0.000
K18	4.330	7.500	0.000
K19	4.330	12.500	0.000
K20	8.660	15.000	0.000
K21	12.990	17.500	0.000
K22	0.000	15.000	0.000
K23	-4.330	17.500	0.000
K24	-8.660	20.000	0.000
K25	4.330	17.500	0.000
K26	0.000	20.000	0.000
K27	-4.330	22.500	0.000
K28	4.330	22.500	0.000
K29	4.330	27.500	0.000
K30	4.330	32.500	0.000
K31	0.000	25.000	0.000
K32	0.000	30.000	0.000
K33	0.000	35.000	0.000
K34	-4.330	22.500	0.000
K35	-12.990	17.500	0.000
K36	8.660	25.000	0.000
K37	12.991	27.500	0.000
K38	17.321	30.000	0.000
K39	8.660	30.000	0.000
K40	12.991	32.500	0.000
K41	17.321	35.000	0.000
K42	12.990	22.500	0.000
K43	17.320	20.000	0.000
K44	21.650	17.500	0.000
K45	17.321	25.000	0.000
K46	21.651	22.500	0.000
K47	25.980	20.000	0.000
K48	8.660	30.000	0.000
K49	-4.330	37.500	0.000
K50	8.661	35.000	0.000
K51	4.331	37.500	0.000
K52	0.000	40.000	0.000
K53	21.650	17.500	0.000
K54	25.980	20.000	0.000
K55	30.310	22.500	0.000
K56	21.650	12.500	0.000
K57	25.980	15.000	0.000
K58	30.310	17.500	0.000
K59	17.321	30.000	0.000
K60	17.321	35.000	0.000
K61	17.321	40.000	0.000
K62	21.651	27.500	0.000
K63	21.651	32.500	0.000
K64	21.651	37.500	0.000
K65	30.341	27.483	0.000
K66	25.981	30.000	0.000
K67	30.311	32.500	0.000
K68	34.641	35.000	0.000
K69	25.981	35.000	0.000
K70	30.311	37.500	0.000
K71	34.641	40.000	0.000
K72	30.311	27.500	0.000
K73	34.641	25.000	0.000
K74	38.971	22.500	0.000
K75	34.641	30.000	0.000
K76	38.971	27.500	0.000
K77	43.301	25.000	0.000
K78	30.310	12.500	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K79	30.310	17.500	0.000
K80	34.640	20.000	0.000
K81	34.640	25.000	0.000
K82	34.640	15.000	0.000
K86	30.310	22.429	0.000
K87	34.640	10.000	0.000
K88	30.310	12.500	0.000
K89	38.970	7.500	0.000
K90	34.641	35.000	0.000
K91	34.641	40.000	0.000
K92	34.641	45.000	0.000
K93	38.971	32.500	0.000
K94	38.971	37.500	0.000
K95	38.971	42.500	0.000
K96	8.661	40.000	0.000
K97	8.661	45.000	0.000
K98	8.661	50.000	0.000
K99	4.331	42.500	0.000
K100	4.331	47.500	0.000
K101	4.331	52.500	0.000
K102	38.970	22.500	0.000
K103	43.300	25.000	0.000
K104	47.630	27.500	0.000
K105	12.991	42.500	0.000
K106	17.321	45.000	0.000
K107	21.651	47.500	0.000
K108	12.991	47.500	0.000
K109	17.321	50.000	0.000
K110	21.651	52.500	0.000
K114	43.301	40.000	0.000
K115	47.631	42.500	0.000
K116	51.961	45.000	0.000
K117	30.311	47.500	0.000
K118	34.641	45.000	0.000
K119	38.971	42.500	0.000
K120	43.301	40.000	0.000
K121	34.642	50.000	0.000
K122	38.972	47.500	0.000
K123	43.302	45.000	0.000
K124	47.632	42.500	0.000
K125	12.991	42.500	0.000
K126	17.321	40.000	0.000
K127	21.651	37.500	0.000
K128	25.981	35.000	0.000
K129	17.321	45.000	0.000
K130	21.651	42.500	0.000
K131	25.981	40.000	0.000
K132	30.311	37.500	0.000
K133	25.981	50.000	0.000
K134	25.981	55.000	0.000
K135	25.981	45.000	0.000
K136	21.651	52.500	0.000
K137	21.651	57.500	0.000
K138	21.651	47.500	0.000
K142	38.972	57.500	0.000
K143	38.972	62.500	0.000
K144	38.972	52.500	0.000
K145	38.972	52.500	0.000
K146	30.312	52.500	0.000
K147	34.642	55.000	0.000
K148	38.972	57.500	0.000
K149	-8.660	35.000	0.000
K150	0.000	40.000	0.000
K151	-8.660	40.000	0.000
K152	-4.330	42.500	0.000
K153	0.000	45.000	0.000
K154	-12.990	22.500	0.000
K155	-8.660	25.000	0.000
K156	-4.330	27.500	0.000
K157	25.982	55.000	0.000
K158	30.312	52.500	0.000
K159	21.652	57.500	0.000
K160	17.322	60.000	0.000
K161	30.312	57.500	0.000
K162	34.642	55.000	0.000

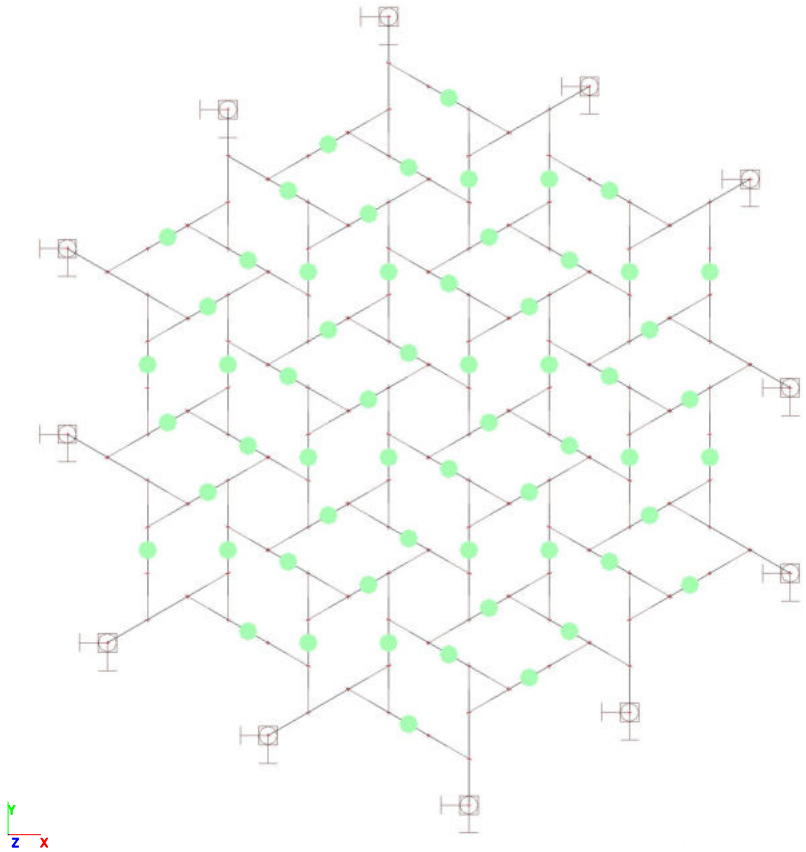
Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K163	25.982	60.000	0.000
K164	21.652	62.500	0.000
K165	12.991	52.500	0.000
K166	17.321	50.000	0.000
K167	8.661	55.000	0.000
K168	4.331	57.500	0.000
K169	8.661	50.000	0.000
K170	12.991	47.500	0.000
K171	4.331	52.500	0.000
K172	0.001	55.000	0.000
K173	-8.659	30.000	0.000
K174	-4.329	27.500	0.000
K175	-12.989	32.500	0.000
K176	-17.319	35.000	0.000
K177	-12.989	27.500	0.000
K178	-8.659	25.000	0.000
K179	-17.319	30.000	0.000
K180	-21.649	32.500	0.000
K181	-12.990	12.500	0.000
K182	-12.990	17.500	0.000
K183	-12.990	22.500	0.000
K184	-12.990	27.500	0.000
K185	-8.659	35.000	0.000
K186	-8.659	40.000	0.000
K187	-8.659	45.000	0.000
K188	-12.989	37.500	0.000
K189	-12.989	42.500	0.000
K190	-12.989	47.500	0.000
K191	12.991	57.500	0.000
K192	12.991	62.500	0.000
K193	12.991	67.500	0.000
K194	8.661	60.000	0.000
K195	8.661	65.000	0.000
K196	8.661	70.000	0.000
K197	-4.328	52.500	0.000
K198	0.002	55.000	0.000
K199	4.332	57.500	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K200	8.662	60.000	0.000
K201	-25.979	30.000	0.000
K202	-21.649	32.500	0.000
K203	-17.319	35.000	0.000
K204	-12.989	37.500	0.000
K205	17.321	60.000	0.000
K206	21.651	62.500	0.000
K207	25.981	65.000	0.000
K208	12.992	62.500	0.000
K210	21.652	67.500	0.000
K212	-8.660	45.000	0.000
K213	-12.990	47.500	0.000
K214	-17.320	50.000	0.000
K215	-4.330	47.500	0.000
K216	-8.660	50.000	0.000
K217	-12.990	52.500	0.000
K218	12.992	67.500	0.000
K219	8.662	70.000	0.000
K220	4.332	72.500	0.000
K221	25.982	70.000	0.000
K222	25.982	75.000	0.000
K223	25.982	65.000	0.000
K224	-4.330	57.500	0.000
K225	-4.329	62.500	0.000
K226	-4.330	52.500	0.000
K227	-8.660	60.000	0.000
K228	-8.659	65.000	0.000
K229	-8.660	55.000	0.000
K230	-4.329	57.500	0.000
K231	0.001	60.000	0.000
K232	4.331	62.500	0.000
K233	-21.650	47.500	0.000
K234	-17.320	50.000	0.000
K235	-4.329	62.500	0.000
K236	-12.989	67.500	0.000
K237	-8.659	65.000	0.000
K238	17.322	65.000	0.000

Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Variant 2



Figuur 43: Variant 2

Knoopoverzicht

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K1	0.000	0.000	0.000
K2	0.000	5.000	0.000
K3	0.000	10.000	0.000
K4	0.000	15.000	0.000
K9	4.330	12.500	0.000
K10	8.660	15.000	0.000
K11	12.990	17.500	0.000
K12	-4.330	17.500	0.000
K13	-8.660	20.000	0.000
K14	-4.330	7.500	0.000
K15	-8.660	10.000	0.000
K16	-12.990	12.500	0.000
K17	17.321	15.000	0.000
K18	8.660	20.000	0.000
K19	4.330	22.500	0.000
K20	-21.651	7.500	0.000
K21	-17.321	10.000	0.000
K22	-8.660	15.000	0.000
K23	0.000	20.000	0.000
K24	8.660	25.000	0.000
K25	-8.660	25.000	0.000
K26	8.660	30.000	0.000
K27	8.660	35.000	0.000
K28	0.000	25.000	0.000
K29	0.000	30.000	0.000
K30	0.000	35.000	0.000
K31	-17.321	15.000	0.000
K32	-17.321	20.000	0.000
K33	-17.321	25.000	0.000
K34	-4.330	27.500	0.000
K40	-12.990	22.500	0.000
K41	12.990	37.500	0.000
K42	4.330	32.500	0.000
K43	-4.330	37.500	0.000
K44	-8.660	40.000	0.000
K45	-21.651	27.500	0.000
K46	-25.981	30.000	0.000
K47	-17.321	30.000	0.000
K48	-12.990	32.500	0.000
K49	-8.660	35.000	0.000
K50	-8.660	45.000	0.000
K51	-8.660	30.000	0.000
K52	0.000	40.000	0.000
K53	4.330	42.500	0.000
K54	8.660	45.000	0.000
K55	8.660	50.000	0.000
K56	8.660	55.000	0.000
K57	8.660	40.000	0.000
K58	17.321	35.000	0.000
K59	-38.971	17.500	0.000
K60	-34.641	20.000	0.000
K61	-30.311	22.500	0.000
K62	-25.981	25.000	0.000
K63	-25.981	35.000	0.000
K64	-25.981	20.000	0.000
K65	-21.651	17.500	0.000
K66	12.990	27.500	0.000
K67	17.321	25.000	0.000
K68	21.651	22.500	0.000
K69	17.321	20.000	0.000
K70	17.321	10.000	0.000
K71	25.981	25.000	0.000
K72	30.311	27.500	0.000
K73	12.990	47.500	0.000
K74	17.321	45.000	0.000
K75	21.651	42.500	0.000
K76	17.321	40.000	0.000
K77	17.321	30.000	0.000
K78	25.981	45.000	0.000
K79	30.311	47.500	0.000
K80	-21.651	47.500	0.000
K81	-25.981	50.000	0.000
K82	-17.321	45.000	0.000
K83	-12.990	42.500	0.000
K84	-17.321	40.000	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K85	-17.321	35.000	0.000
K86	-4.330	47.500	0.000
K87	-4.330	57.500	0.000
K88	-8.660	60.000	0.000
K89	0.000	55.000	0.000
K90	4.330	52.500	0.000
K91	0.000	50.000	0.000
K92	0.000	45.000	0.000
K93	12.990	57.500	0.000
K94	-38.971	37.500	0.000
K95	-43.301	40.000	0.000
K96	-34.641	35.000	0.000
K97	-30.311	32.500	0.000
K98	-34.641	30.000	0.000
K99	-34.641	25.000	0.000
K100	-21.651	37.500	0.000
K101	21.651	32.500	0.000
K102	25.981	35.000	0.000
K103	25.981	40.000	0.000
K104	25.981	30.000	0.000
K105	34.641	25.000	0.000
K106	17.321	50.000	0.000
K107	21.651	52.500	0.000
K108	25.981	55.000	0.000
K109	25.981	60.000	0.000
K110	25.981	65.000	0.000
K111	25.981	50.000	0.000
K112	34.641	45.000	0.000
K113	-17.321	50.000	0.000
K114	-12.990	52.500	0.000
K115	-8.660	55.000	0.000
K116	-8.660	65.000	0.000
K117	-8.660	50.000	0.000
K118	-34.641	40.000	0.000
K119	-30.311	42.500	0.000
K120	-25.981	45.000	0.000
K121	-25.981	55.000	0.000
K122	-25.981	40.000	0.000
K123	0.000	60.000	0.000
K124	4.330	62.500	0.000
K125	8.660	65.000	0.000
K126	8.660	70.000	0.000
K127	8.660	75.000	0.000
K128	8.660	60.000	0.000
K129	17.321	55.000	0.000
K130	17.321	60.000	0.000
K131	17.321	65.000	0.000
K132	12.990	67.500	0.000
K133	21.651	62.500	0.000
K134	30.311	67.500	0.000
K135	-34.641	45.000	0.000
K136	-34.641	50.000	0.000
K137	-34.641	55.000	0.000
K138	-38.971	57.500	0.000
K139	-43.301	60.000	0.000
K140	-30.311	52.500	0.000
K141	-21.651	57.500	0.000
K142	-17.321	55.000	0.000
K143	-17.321	60.000	0.000
K144	-17.321	65.000	0.000
K145	-21.651	67.500	0.000
K146	-25.981	70.000	0.000
K147	-12.990	62.500	0.000
K148	-4.330	67.500	0.000
K149	0.000	65.000	0.000
K150	0.000	70.000	0.000
K151	0.000	75.000	0.000
K152	-4.330	77.500	0.000
K153	-8.660	80.000	0.000
K154	4.330	72.500	0.000
K155	12.990	77.500	0.000
K156	-34.641	60.000	0.000
K157	-30.311	62.500	0.000
K158	-25.981	65.000	0.000
K159	-25.981	75.000	0.000

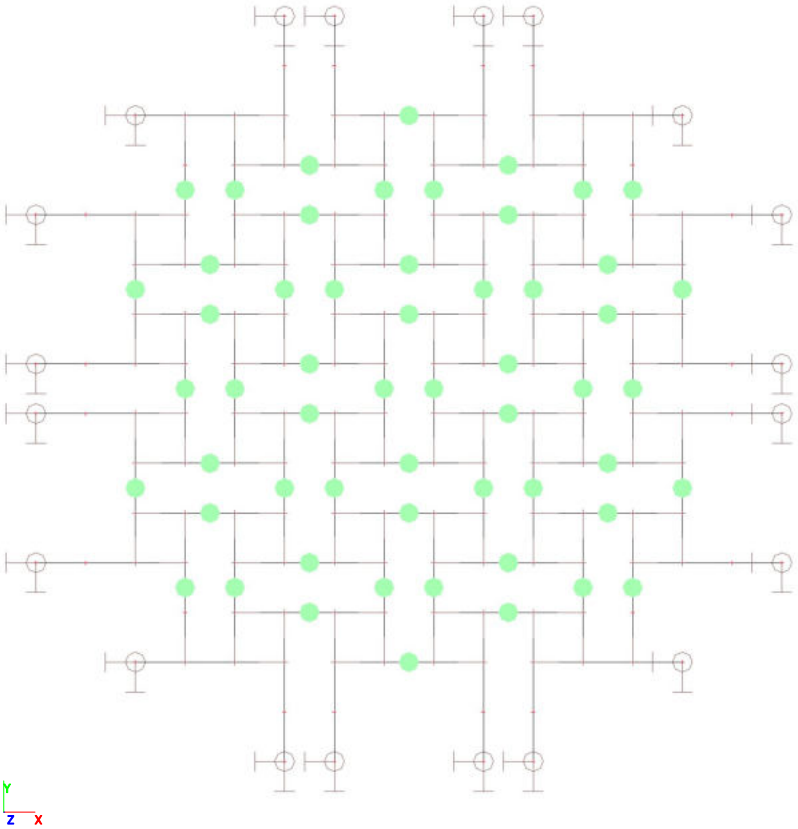
Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K160	-25.981	60.000	0.000
K161	-17.321	70.000	0.000
K162	-12.990	72.500	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K163	-8.660	75.000	0.000
K164	-8.660	85.000	0.000
K165	-8.660	70.000	0.000

Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Variant 3



Figuur 44: Variant 3

Knoopoverzicht

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K1	0.000	0.000	0.000
K2	0.000	10.000	0.000
K3	0.000	15.000	0.000
K4	-5.000	10.000	0.000
K5	-10.000	10.000	0.000
K6	-15.000	10.000	0.000
K7	-5.000	15.000	0.000
K8	-5.000	20.000	0.000
K9	-5.000	25.000	0.000
K10	5.000	15.000	0.000
K11	10.000	15.000	0.000
K12	0.000	20.000	0.000
K13	5.000	20.000	0.000
K14	10.000	20.000	0.000
K15	-10.000	15.000	0.000
K16	-10.000	20.000	0.000
K17	-10.000	25.000	0.000
K18	-15.000	25.000	0.000
K19	0.000	25.000	0.000
K20	0.000	30.000	0.000
K21	0.000	35.000	0.000
K22	5.000	25.000	0.000
K23	5.000	30.000	0.000
K24	5.000	35.000	0.000
K25	10.000	25.000	0.000
K26	15.000	25.000	0.000
K27	20.000	25.000	0.000
K28	10.000	10.000	0.000
K29	5.000	10.000	0.000
K30	15.000	10.000	0.000
K31	20.000	10.000	0.000
K32	5.000	5.000	0.000
K33	5.000	0.000	0.000
K34	-15.000	15.000	0.000
K35	-20.000	15.000	0.000
K36	-25.000	15.000	0.000
K37	-15.000	5.000	0.000
K38	-15.000	0.000	0.000
K39	-10.000	5.000	0.000
K40	-5.000	5.000	0.000
K41	0.000	5.000	0.000
K42	-10.000	0.000	0.000
K43	-10.000	-5.000	0.000
K44	-10.000	-10.000	0.000
K45	-20.000	0.000	0.000
K46	-25.000	0.000	0.000
K47	-5.000	0.000	0.000
K48	-5.000	-5.000	0.000
K49	-5.000	-10.000	0.000
K50	10.000	0.000	0.000
K51	10.000	5.000	0.000
K52	15.000	5.000	0.000
K53	20.000	5.000	0.000
K54	10.000	-5.000	0.000
K55	10.000	-10.000	0.000
K56	0.000	-5.000	0.000
K57	5.000	-5.000	0.000
K58	0.000	-10.000	0.000
K59	0.000	-15.000	0.000
K60	0.000	-20.000	0.000
K61	-15.000	-10.000	0.000
K62	5.000	-10.000	0.000
K63	5.000	-15.000	0.000
K64	5.000	-20.000	0.000
K65	15.000	-10.000	0.000
K66	20.000	-10.000	0.000
K67	15.000	-5.000	0.000
K68	15.000	0.000	0.000
K69	20.000	0.000	0.000
K70	25.000	0.000	0.000
K71	30.000	0.000	0.000
K72	20.000	15.000	0.000
K73	15.000	15.000	0.000
K74	15.000	20.000	0.000
K75	25.000	15.000	0.000
K76	30.000	15.000	0.000
K77	20.000	20.000	0.000
K78	25.000	20.000	0.000
K79	30.000	20.000	0.000
K80	20.000	30.000	0.000
K81	20.000	35.000	0.000
K82	25.000	35.000	0.000
K83	25.000	30.000	0.000
K84	25.000	25.000	0.000
K85	30.000	25.000	0.000
K86	35.000	25.000	0.000
K87	40.000	25.000	0.000
K88	30.000	10.000	0.000
K89	25.000	10.000	0.000
K90	25.000	5.000	0.000
K91	30.000	5.000	0.000
K92	35.000	5.000	0.000
K93	40.000	5.000	0.000
K94	35.000	10.000	0.000
K95	40.000	10.000	0.000
K96	35.000	15.000	0.000
K97	35.000	20.000	0.000
K98	40.000	15.000	0.000
K99	45.000	15.000	0.000
K100	50.000	15.000	0.000
K101	40.000	0.000	0.000
K102	35.000	0.000	0.000
K103	35.000	-5.000	0.000
K104	35.000	-10.000	0.000
K105	30.000	-10.000	0.000
K106	30.000	-5.000	0.000
K107	45.000	0.000	0.000
K108	50.000	0.000	0.000
K109	25.000	-5.000	0.000
K110	20.000	-5.000	0.000
K111	20.000	-15.000	0.000
K112	20.000	-20.000	0.000
K113	25.000	-10.000	0.000
K114	25.000	-15.000	0.000
K115	25.000	-20.000	0.000
K116	40.000	-10.000	0.000
K117	40.000	-5.000	0.000
K118	45.000	-5.000	0.000
K119	50.000	-5.000	0.000
K120	40.000	-15.000	0.000
K121	40.000	-20.000	0.000
K122	35.000	-20.000	0.000
K123	45.000	-20.000	0.000
K124	50.000	-20.000	0.000
K125	35.000	-15.000	0.000
K126	30.000	-15.000	0.000
K127	30.000	-20.000	0.000
K128	30.000	-25.000	0.000
K129	30.000	-30.000	0.000
K130	35.000	-30.000	0.000
K131	35.000	-25.000	0.000
K132	15.000	-20.000	0.000
K133	15.000	-15.000	0.000
K134	10.000	-15.000	0.000
K135	10.000	-20.000	0.000
K136	10.000	-25.000	0.000
K137	15.000	-25.000	0.000
K138	15.000	-30.000	0.000
K139	10.000	-30.000	0.000
K140	20.000	-25.000	0.000
K141	25.000	-25.000	0.000
K142	40.000	-30.000	0.000
K143	25.000	-30.000	0.000
K144	25.000	-35.000	0.000
K145	25.000	-40.000	0.000
K146	20.000	-30.000	0.000
K147	20.000	-35.000	0.000
K148	20.000	-40.000	0.000
K149	5.000	-30.000	0.000
K150	5.000	-25.000	0.000

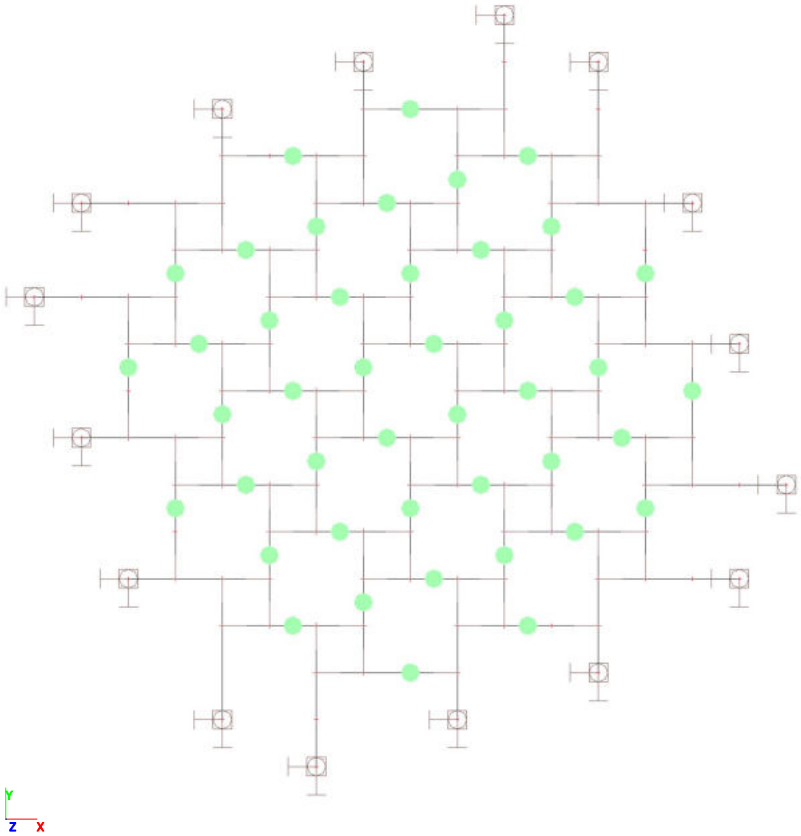
Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K151	0.000	-25.000	0.000
K152	-5.000	-25.000	0.000
K153	-5.000	-20.000	0.000
K154	5.000	-35.000	0.000
K155	5.000	-40.000	0.000
K156	0.000	-40.000	0.000
K157	0.000	-35.000	0.000
K158	0.000	-30.000	0.000
K159	-5.000	-30.000	0.000
K160	-10.000	-30.000	0.000
K161	-15.000	-30.000	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K162	-5.000	-15.000	0.000
K163	-15.000	-15.000	0.000
K164	-10.000	-15.000	0.000
K165	-10.000	-20.000	0.000
K166	-10.000	-25.000	0.000
K167	-15.000	-20.000	0.000
K168	-20.000	-20.000	0.000
K169	-25.000	-20.000	0.000
K170	-15.000	-5.000	0.000
K171	-20.000	-5.000	0.000
K172	-25.000	-5.000	0.000

Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie

Variant 4



Figuur 45: Variant 4

Knoopoverzicht

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K1	0.000	0.000	0.000
K2	5.000	0.000	0.000
K3	10.000	0.000	0.000
K4	15.000	0.000	0.000
K5	10.000	-5.000	0.000
K6	10.000	-10.000	0.000
K7	10.000	-15.000	0.000
K8	15.000	-5.000	0.000
K9	20.000	-5.000	0.000
K10	25.000	-5.000	0.000
K11	15.000	5.000	0.000
K12	15.000	10.000	0.000
K13	20.000	5.000	0.000
K14	25.000	5.000	0.000
K15	30.000	5.000	0.000
K16	25.000	0.000	0.000
K17	25.000	-10.000	0.000
K18	30.000	0.000	0.000
K19	35.000	0.000	0.000
K20	40.000	0.000	0.000
K21	30.000	10.000	0.000
K22	30.000	15.000	0.000
K23	35.000	-5.000	0.000
K24	35.000	-10.000	0.000
K25	35.000	-15.000	0.000
K26	30.000	-10.000	0.000
K27	20.000	-10.000	0.000
K28	30.000	-15.000	0.000
K29	30.000	-20.000	0.000
K30	30.000	-25.000	0.000
K31	40.000	-15.000	0.000
K32	45.000	-15.000	0.000
K33	20.000	-15.000	0.000
K34	20.000	-20.000	0.000
K35	15.000	-15.000	0.000
K36	5.000	-15.000	0.000
K37	15.000	-20.000	0.000
K38	15.000	-25.000	0.000
K39	15.000	-30.000	0.000
K40	25.000	-20.000	0.000
K41	40.000	-5.000	0.000
K42	45.000	-5.000	0.000
K43	50.000	-5.000	0.000
K44	40.000	5.000	0.000
K45	40.000	10.000	0.000
K46	45.000	10.000	0.000
K47	45.000	15.000	0.000
K48	45.000	20.000	0.000
K49	45.000	5.000	0.000
K50	50.000	5.000	0.000
K51	55.000	5.000	0.000
K52	50.000	0.000	0.000
K53	50.000	-10.000	0.000
K54	45.000	-10.000	0.000
K55	45.000	-20.000	0.000
K56	55.000	-10.000	0.000
K57	60.000	-10.000	0.000
K58	55.000	0.000	0.000
K59	60.000	0.000	0.000
K60	65.000	0.000	0.000
K61	55.000	10.000	0.000
K62	55.000	15.000	0.000
K63	60.000	-5.000	0.000
K64	60.000	-15.000	0.000
K65	55.000	-15.000	0.000
K66	55.000	-20.000	0.000

Naam	Coördinaat X [cm]	Coördinaat Y [cm]	Coördinaat Z [cm]
K67	55.000	-25.000	0.000
K68	65.000	-15.000	0.000
K69	70.000	-15.000	0.000
K70	50.000	-20.000	0.000
K71	40.000	-20.000	0.000
K72	40.000	-25.000	0.000
K73	40.000	-30.000	0.000
K74	50.000	-25.000	0.000
K75	50.000	-30.000	0.000
K76	50.000	-35.000	0.000
K77	60.000	-25.000	0.000
K78	65.000	-25.000	0.000
K79	45.000	-30.000	0.000
K80	35.000	-30.000	0.000
K81	35.000	-25.000	0.000
K82	25.000	-25.000	0.000
K83	25.000	-30.000	0.000
K84	25.000	-35.000	0.000
K85	35.000	-35.000	0.000
K86	35.000	-40.000	0.000
K87	65.000	-30.000	0.000
K88	60.000	-30.000	0.000
K89	60.000	-35.000	0.000
K90	60.000	-40.000	0.000
K91	70.000	-30.000	0.000
K92	75.000	-30.000	0.000
K93	55.000	-35.000	0.000
K94	45.000	-35.000	0.000
K95	45.000	-40.000	0.000
K96	45.000	-45.000	0.000
K97	55.000	-40.000	0.000
K98	55.000	-45.000	0.000
K99	55.000	-50.000	0.000
K100	65.000	-40.000	0.000
K101	70.000	-40.000	0.000
K102	50.000	-45.000	0.000
K103	40.000	-45.000	0.000
K104	40.000	-40.000	0.000
K105	30.000	-40.000	0.000
K106	40.000	-50.000	0.000
K107	40.000	-55.000	0.000
K108	30.000	-50.000	0.000
K109	25.000	-50.000	0.000
K110	30.000	-45.000	0.000
K111	30.000	-35.000	0.000
K112	20.000	-35.000	0.000
K113	20.000	-30.000	0.000
K114	10.000	-30.000	0.000
K115	20.000	-40.000	0.000
K116	20.000	-45.000	0.000
K117	25.000	-45.000	0.000
K118	15.000	-45.000	0.000
K119	25.000	-55.000	0.000
K120	25.000	-60.000	0.000
K121	15.000	-40.000	0.000
K122	10.000	-40.000	0.000
K123	5.000	-40.000	0.000
K124	10.000	-35.000	0.000
K125	10.000	-25.000	0.000
K126	5.000	-25.000	0.000
K127	0.000	-25.000	0.000
K128	5.000	-20.000	0.000
K129	5.000	-10.000	0.000
K130	0.000	-10.000	0.000
K131	-5.000	-10.000	0.000
K132	15.000	-55.000	0.000

Studentenversie
Studentenversie
Studentenversie