Koepels in de rondte bekeken

Moustapha el Marini, 1504614

Delft, juni 22

2011

Dit verslag is gemaakt in het kader van het vak CT3000-09 aan de TU Delft.

Bachelor Eindwerk





Inhoudsopgave

1 Voorwoord
2 Inleiding
3 Bestaande koepels
3.1 Betonnen koepel
3.2 Houten koepel
3.3 Glazen koepel
3.4 Conclusie
4 Koepel in SCIA
5 Theorie
5.1 Knikspanning
5.2 Afleiding oppervlakte van een koepel
5.3 Volume van een koepel
5.4 MAPLE sheet
6 Optimale koepelvorm
6.1 Resultaten
6.2 Conclusie
7 Seismische belasting
7.1 Theorie seismische belasting
7.2 Maatregelen tegen aardbevingen
7.3 Seismische metingen
7.4 Seismisch spectrum
8 Dynamica in SCIA
8.1 Procedure
8.2 Resultaten
8.3 Conclusie
9 Conclusie
10 Nawoord
11 Literatuurlijst

1 Voorwoord

Vooraf was de bedoeling dat dit verslag niet te langdradig moest worden, kort maar krachtig is het motto. Een afbeelding zegt meer dan 1000 woorden, dus vandaar dat dit verslag veel afbeeldingen en figuren bevat met zo weinig mogelijk tekst.

De indeling van het verslag ziet er als volgt uit, eerst een hoofdstuk met de procedure waarin duidelijk wordt gemaakt wat ik allemaal gedaan heb om tot resultaten te komen. Daarna een hoofdstuk waarin de resultaten ter sprake komen, hierin evalueer ik meteen de resultaten met als kijkhoek de aannamen die gedaan zijn. Daarna zullen enkele "extra" punten onderzocht worden met betrekking tot koepels, denk bijvoorbeeld aan een andere keuze van materialen. Wat mij het meest pakt is de dynamica in verband met een koepel, en dan heb ik het vooral over aardbevingen. Wat gebeurt er wanneer een koepel wordt getroffen door een aardbeving? Een kort onderzoek zal in een apart hoofdstuk worden toegelicht.

Ik zou mijn dank willen betuigen aan mijn begeleiders die mij erg goed hebben geholpen tijdens de totstandkoming van dit verslag.

Dit verslag is geschreven in kader van het vak CT3000-09, het Bachelor Eindwerk aan de Civiele technische opleiding op TU Delft.

2 Inleiding

Koepels zijn door de jaren heen meerdere malen gebouwd, zodoende is er een groot scala aan verschillende koepels. De verschillen kunnen liggen in materiaalsoort, geometrie maar bijvoorbeeld ook in functie. In dit verslag zal, zonder dat het enige verbazing oproept bij de lezer, vooral gefocust worden op de geometrie en daaruit vloeiende krachten.

Zoals in bovenstaande vermeld zijn er heel veel koepels op de wereld, maar welke is of komt in de buurt van de optimale koepelvorm. Er zijn vele ontwerpregels als het gaat om andere soorten gebouwen, maar op het gebied van koepels is er verbazingwekkend weinig te vinden.

Aan de “optimale koepelvorm” zullen we eerst een definitie geven, want men kan zich afvragen op welk gebied een koepel optimaal moet zijn. De optimale koepelvorm is die vorm, waarbij in de koepel louter en alleen druk heerst en de inhoud van het gekozen bouwmateriaal minimaal is. Andere materiaalkeuzes en aardbevingen zijn twee andere aspecten die ik in dit verslag zal beschouwen.

Voor het doorrekenen van de koepel s gebruik gemaakt van SCIA Engineering. Dit is een Eindige Elementen Methode (EEM) programma waar gebruik van wordt gemaakt door ingenieurs in het bedrijfsleven. Om duidelijk te maken wat precies gedaan is met SCIA is er een hoofdstuk geschreven waarin dat duidelijk wordt gemaakt aan de hand van screenshots en tekst. Daarnaast is ook gebruik gemaakt van MAPLE om eventuele handberekeningen snel uit te voeren.

3 Bestaande koepels

Vraag een persoon wat de mooiste vormen zijn als het gaat om de geometrie van gebouwen en de koepel zal in de top drie van zijn lijst voor komen. De koepel is een heel mooie en vooral interessante vorm. Door de eeuwen heen zijn er heel wat koepels gebouwd door de mensheid, zowel voor functionele als symbolische doeleinden.

Koepels komen veelvuldig voor in het Midden – Oosten, denk aan de koepels op moskeeën. Ook in het westen komen koepels uit de oudheid vaak voor, in de Romeinse tijd was de koepel bijvoorbeeld een van de meest favoriete bouwvorm. Koepels hebben natuurlijk allemaal één overeenkomst: die welbekende vorm. Maar in dit hoofdstuk gaan we naar verschillen kijken, om precies te zijn één verschil: het soort materiaal waarmee een koepel is gebouwd.

3.1 Betonnen koepel

Mooi voorbeeld van een koepel uit die tijd is het Pantheon te Italië (Fig. 1). Het Pantheon bestaat nu ongeveer 2000 jaar en heeft een betonnen koepel die al jaren lang de natuur en de mens heeft doorstaan. De enige reden dat de koepel niet door de mens is gesloopt komt, doordat het tot een kerk was omgevormd. Het zou als heiligschennis worden gezien als iemand er aan ging zitten. De natuur heeft er meerdere malen aardbevingen op losgelaten, maar wonder boven wonder heeft de koepel het zonder grote "betonscheuren" gered.



Figuur 1 Pantheon, bron: http://famouswonders.com/pantheon-in-rome/

Tijdens de bouw van het Pantheon hebben de Romeinen getracht de koepel zo licht mogelijk te maken. Dit hebben ze gedaan door gebruik te maken van een ander soort beton (materiaal) dan in de rest van het gebouw.

De aardbevingen die de koepel van het Pantheon heeft doorstaan doet zich meteen afvragen hoe het komt dat deze koepel "aardbeving bestendig" is, wat voor effect aardbevingen op een koepel hebben en hoe dat zich vertaalt in de constructie. Vandaar dat er een hoofdstuk aan bod komt over aardbevingen op koepels.

Het Pantheon is één uit vele betonnen koepels. Veelal wordt gekozen om koepels uit beton te maken. Dit komt omdat de werking van koepels berust op drukkrachten. Een van de eigenschappen van beton is dat het drukkrachten goed kan opnemen.

3.2 Houten koepel

Dat wil natuurlijk niet zeggen dat er geen koepels bestaan die uit andere materialen gemaakt zijn. Een van deze voorbeelden is de Tacoma dome (Fig. 2) in Amerika. Zie onderstaande figuur voor een impressie.



Figuur 2 Tacoma Dome, bron: http://www.ohlarenaguide.com/oldwhl.htm

De Tacoma dome is een van de grootste houten constructie ter wereld met zijn 161.5 meter diameter en een hoogte van 48 meter. Doordat een koepel geen kolommen nodig heeft als ondersteuning is er een voordeel wat betreft ruimtegebruik. Deze zaal kan dan ook gebruikt voor verschillende doeleinden, evenementen, concerten, football – wedstrijden etc.

Deze houten koepel is een geodetische koepel (Fig. 3). Dit soort koepels hebben een constructie die zo licht is dat het zichzelf kan dragen zonder verdere ondersteuning, zoals boven vermeld. Een geodetische koepel berust op het volgende principe: een projectie van een regelmatig twintigvlak, ook wel een icosahedron genoemd, op een bol. Elk van de vlakken is verder onderverdeeld in driehoeken. In de figuur hiernaast is een voorbeeld te zien van een koepel waarbij dit principe is gebruikt. Door deze manier van bouwen heeft de constructie dus geen verdere ondersteuning nodig.



Figuur 3 Geodetische koepel bron: http://contemporarydesignandarchitecture.blogspot.com/2011/05/like-spaces-interior-of-geodesic-dome.html

Er is gebruik gemaakt van gelamineerd hout. Gelamineerd hout is opgebouwd uit verschillende lagen hout. Principe hierin is dat een stuk "foutloos" hout wordt gesneden uit een groter deel, en wordt toegevoegd aan andere stukken "foutloos" hout.

Het gebruik van gelamineerd hout kent zijn voordelen en nadelen. Het is bijvoorbeeld erg duurzaam, goede sterkte – gewicht verhouding, goede brandwerendheid, esthetisch etc. Nadelen kunnen zijn dat het relatief gezien niet sterk genoeg is (in vergelijking met beton bijvoorbeeld), maatregelen tegen brand, onderhoud etc.

Wanneer de voordelen zwaarder meewegen dan de nadelen kan toch gekozen worden voor een houten koepel. Dan is de Tacoma dome een mooi voorbeeld van een houten constructie die zowel functioneel als esthetisch is.

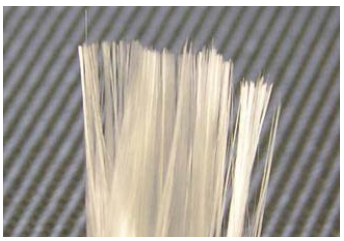
3.3 Glazen koepel

Andere soort koepels die men ook vaak tegenkomt naast betonnen en houten koepels zijn glazen koepels. De grootste "glazen" koepel ter wereld op dit moment is onderdeel van de Al Fateh Grand Mosque (Fig. 4) in Bahrein. Onderstaand plaatje laat de koepel zien.



Figuur 4 Grand Mosque, glazen koepel, bron: http://www.travelpod.com/travel-photo/silverfox41/qatar-1/1169098500/bahrain_002.jpg/tpod.html

In deze figuur is de glazen koepel te zien. Dit glas is niet zomaar glas, maar speciale glasvezel (Fig. 5). Mede door de keuze voor glasvezel is men er in geslaagd om een diameter van 24 meter te bereiken. Glasvezel heeft bepaalde chemische eigenschappen die het tot een interessant bouwmateriaal maken. Het is bijvoorbeeld onbrandbaar, kan zeer sterke trekkrachten ondergaan, kan relatief gezien drukkrachten goed ondergaan, is esthetisch en ook heel erg duurzaam (groot deel kan gerecycled worden).



Figuur 5 Glasvezel, bron: http://www.ecohouseagent.com/energy-saving-insulation

3.4 Conclusie

Een koepel kan dus uit verschillende materialen gemaakt worden. Constructief gezien is het allemaal mogelijk. De keuze voor een bouwmateriaal hangt puur af van de randvoorwaarden en eisen die gesteld worden aan een koepel op een bepaalde plek.

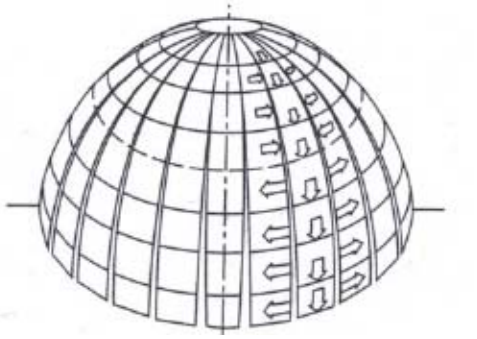
In Bahrein is gekozen voor een glazen koepel, dit heeft waarschijnlijk te maken met de duurzaamheid en chemische eigenschappen van het materiaal. Voor de Tacoma Dome is gekozen voor hout, dit voegt iets toe aan de sfeer die daar hangt tijdens de vele evenementen. In de Pantheon is gekozen voor beton, dit werd waarschijnlijk gedaan omdat de technologie toen nog niet zo ver was. Maar het laat wel zien dat de Romeinen erg ver waren, gezien het feit dat het Pantheon nog overeind staat. Betonnen koepels zijn natuurlijk ook erg praktisch vanwege de sterkte, fabricatie en bouw.

Een keuze voor een bouwmateriaal hangt dus erg af van de verschillende eigenschappen waar een koepel aan moet voldoen. In het ene geval kan een ander soort materiaal beter zijn dan de andere, er zal moeten gekeken worden naar alle randvoorwaarden.

4 Koepel in SCIA

In de rest van dit verslag gaan we uit van een betonnen koepel. Er is geen duidelijk voorbeeld van de meest optimale koepelvorm. Er is nooit een eenduidige ontwerpregel gemaakt waarbij de beste vorm van de koepel wordt omschreven. Bij het berekenen van een koepel kunnen verschillende methoden gebruikt worden, bijvoorbeeld grafische of analytische methoden. De methode die in dit verslag zal worden gebruikt is gebaseerd op het gebruik van een Eindige Elementen methode, het SCIA programma.

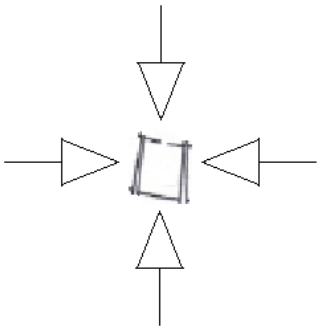
Een koepel kan gezien worden als een schaal waarin geen (of alleen relatief kleine) trekkrachten kunnen worden opgenomen. De koepel zal zich gedragen als een membraan, dat wil zeggen belastingen kunnen alleen worden afgedragen door schijfkrachten. Er zijn twee soorten schijfkrachten (Fig. 6) in een koepel, ringkrachten van top naar voet en ringkrachten evenwijdig aan de straal van het ondervlak.



Figuur 6 Krachten in koepel, bron: D.L Schodek, Structures, 6de druk, Pearson Prentice-Hall, 2008

De membraantheorie voor een koepel kan alleen gebruikt worden wanneer er sprake is van een homogeen materiaalgebruik en een gelijkblijvende belasting. Zodra er sprake is van de volgende punten is het niet meer verantwoord om de membraantheorie toe te passen:

- Inklemmingen
- Veranderingen in geometrie (tekenwisseling van kromming en/of dikte)
- Geconcentreerde belastingen



Figuur 7 Krachten in één punt, bron: gemaakt in Paint

In een optimale koepel werken er alleen drukkrachten. Op elke punt van een koepel werken even grote en tegengestelde krachten (Fig. 7). De spanningen die daaruit ontstaan zijn drukspanningen. Koepels die onder drukspanningen hebben de grootste kans van bezwijken door knikproblemen. Vandaar dat verderop in het verslag gebruik zal worden gemaakt van een formule waarin de knikspanning in voor komt.

Een belangrijk hulpprogramma, in het oplossen van dit probleem, kan SCIA zijn. In principe worden een aantal keer precies dezelfde handelingen met dit programma gedaan, zodat aan het eind een mooie tabel gemaakt kan worden waarin duidelijk af te lezen is welke koepel de maatgevende is. Deze handelingen worden hier één keer duidelijk gemaakt aan hand van afbeeldingen en verklarende tekst. Zo wordt duidelijk gemaakt wat er precies gedaan is om tot een resultaat te komen.

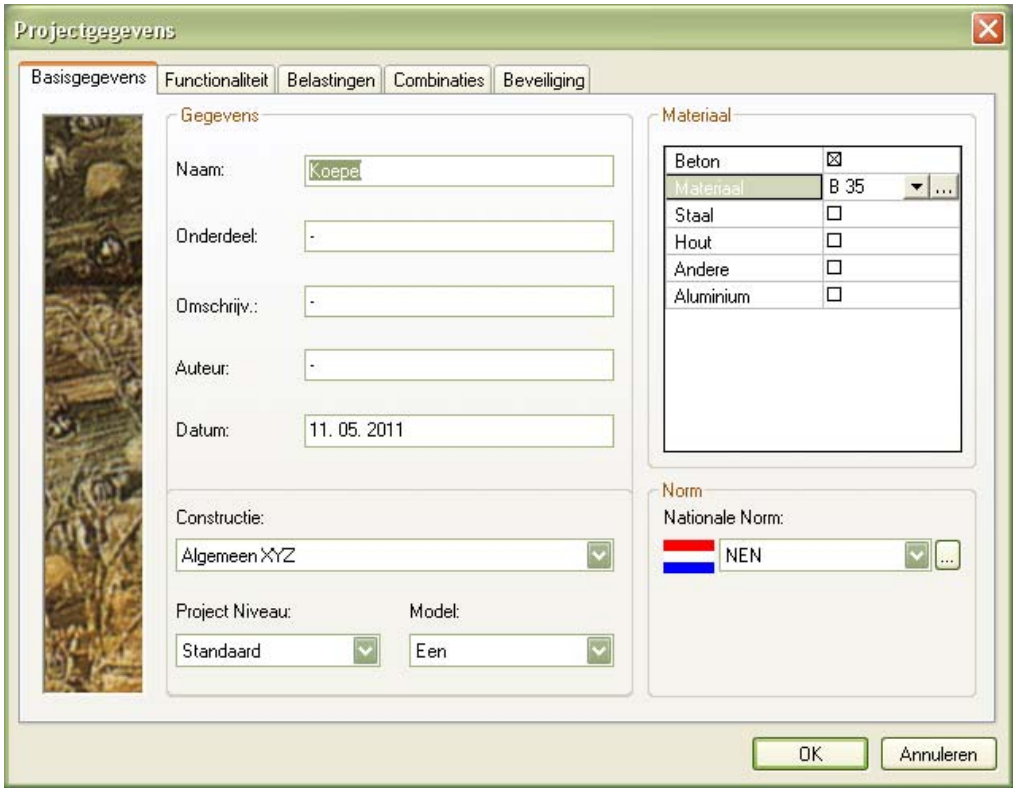
De eerste stap was om een koepel in SCIA te zetten, zodat de benodigde informatie kon worden verkregen voor de rest van de berekeningen. Voordat ik begon met het invoeren van de koepel moesten eerst bepaalde aannames worden gemaakt, namelijk:

- De koepel heeft een parabolische vorm.
- De hoogte zal steeds variëren terwijl de overspanning hetzelfde zal blijven.
- De dikte wordt bij het invoeren gelijk genomen aan 200 mm. Uit de berekende spanningen wordt de benodigde dikte berekend. De dikte van het eindige

elementenmodel is overal hetzelfde en deze hoeft niet te worden aangepast omdat de spanning niet afhangt van de dikte. Immers een grotere dikte geeft meer belasting maar ook meer stijfheid.

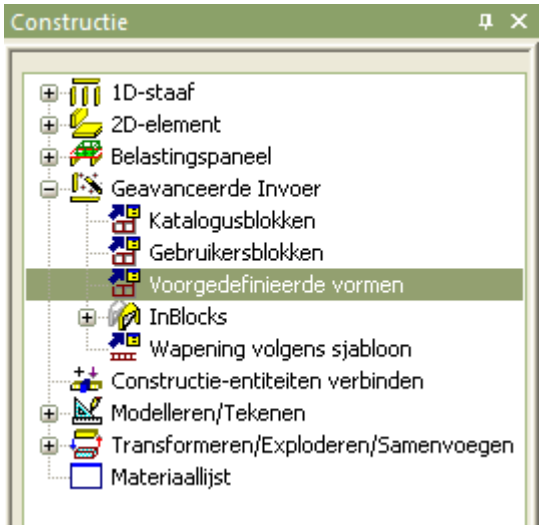
- De koepel wordt gemaakt van beton, om precies te zijn B35 beton.

Bij het opstarten van SCIA wordt er eerst gekozen voor een nieuw bestand. Daarna wordt gevraagd om een paar algemene dingen, zoals de soorten materialen waarmee gewerkt wordt en met welke normen gewerkt wordt.



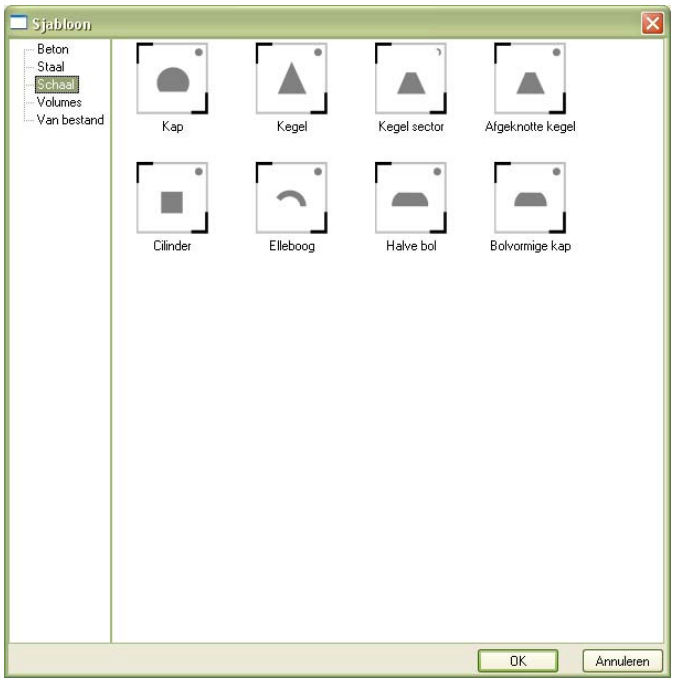
Figuur 8 SCIA printscreen, bron: SCIA

In de afbeelding kunt u zien dat ik gekozen voor heb B35 beton, met een constructie in alle drie de assen (XYZ), ik ga werken met de NEN – normen.



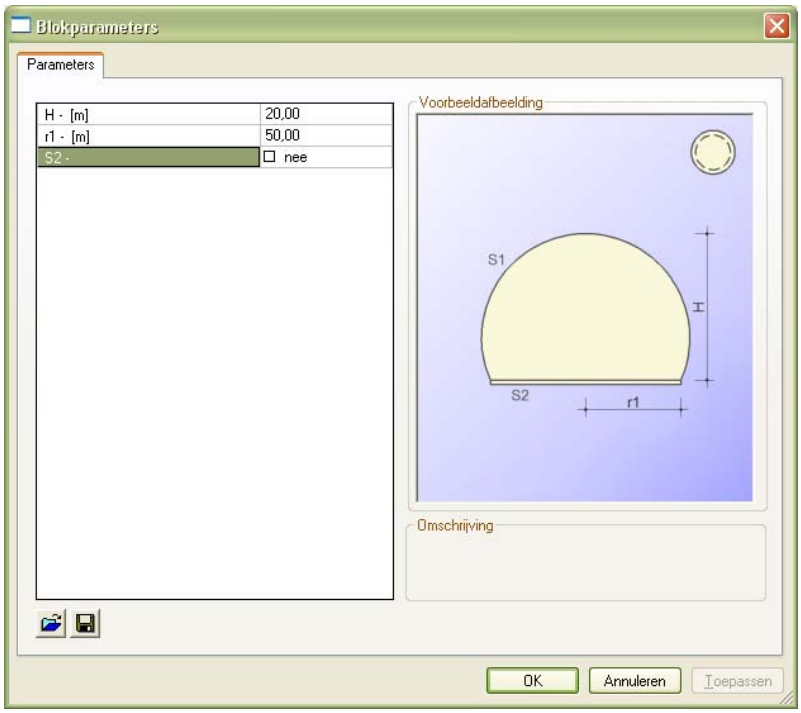
Daarna kan de constructie worden ingevoerd, in SCIA zijn talloze functies te vinden om 1D en 2D modellen te tekenen. Ik heb met een van deze functies op een eenvoudige wijze de koepel weten in te voeren. Met behulp van deze functie kunnen voorgedefinieerde vormen worden ingevoerd.

Figuur 9 SCIA printscreen, bron: SCIA



Dan komt het volgende scherm tevoorschijn, de volgende stap is het kiezen voor schaal. Daarna moet er voor kap gekozen worden om de eigenschappen in te voeren voor de koepel.

Figuur 10 SCIA printscreen, bron: SCIA



In dit venster kan de hoogte en de straal worden ingevoerd. Ook kan er gekozen worden voor een "bodem". In dit geval kies ik voor een hoogte van 20 meter en een straal van 50 meter (dwz dat de diameter van het bodemvlak 100 meter is).

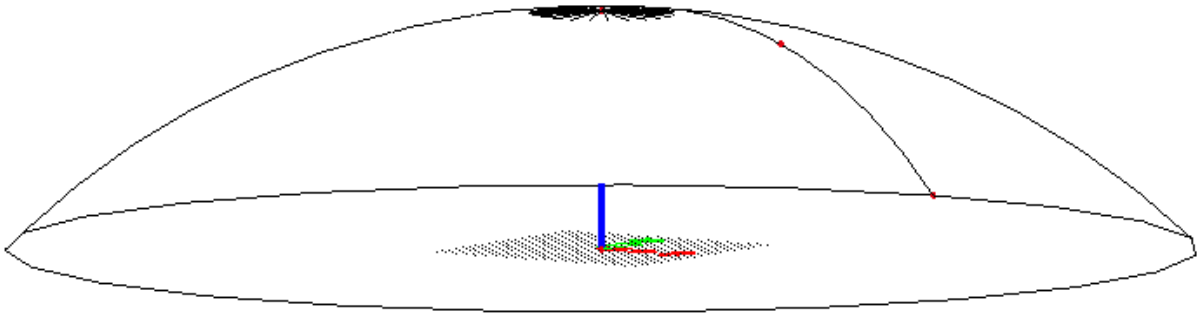
Figuur 11 SCIA printscreen, bron: SCIA



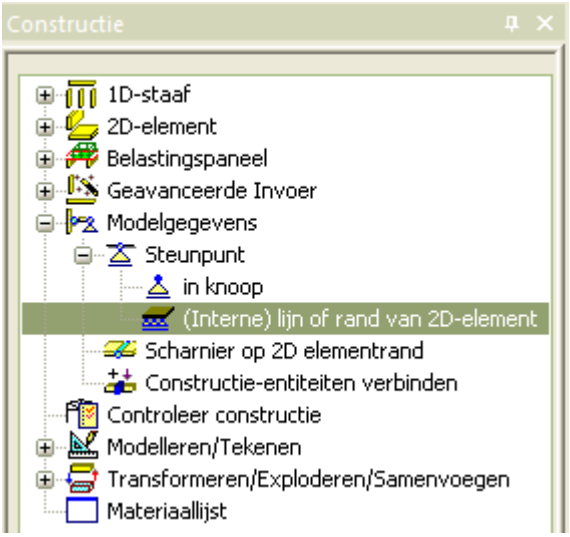
Volgende stap is het punt kiezen waar de koepel geplaatst wordt in de rooster van SCIA. Gekozen wordt voor de oorsprong van het rooster, dus 0;0;0.

Figuur 12 SCIA printscreen, bron: SCIA

Hiermee wordt de onderstaande koepel verkregen.

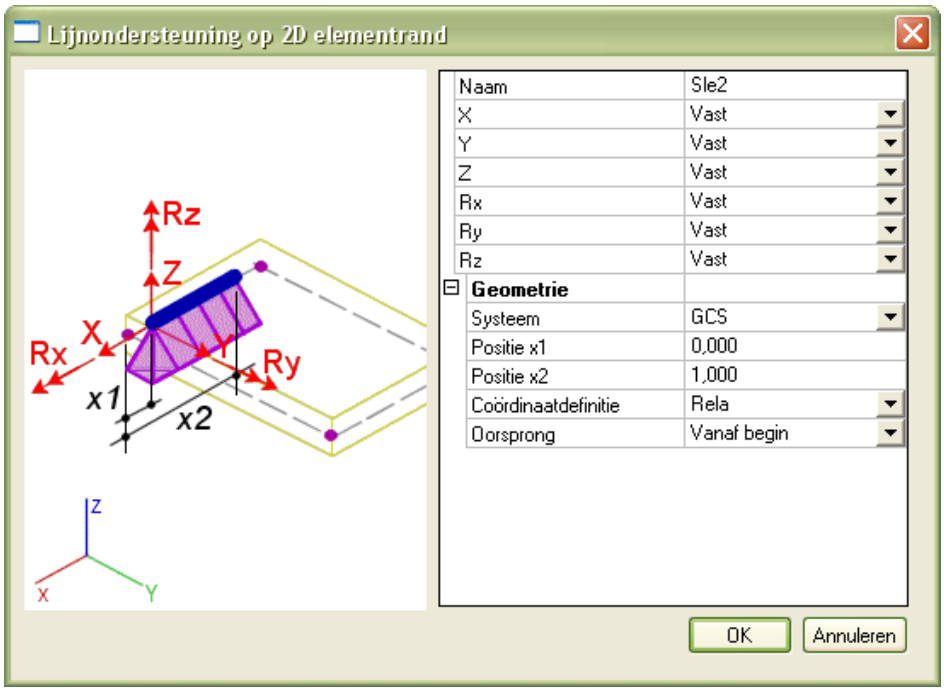


Figuur 13 SCIA printscreen, bron: SCIA



De volgende stap is het kiezen van een oplegging, want zonder een oplegging kunnen er geen sterkteberekeningen worden gemaakt door SCIA. Hiervoor kijken we onder het kopje Modelgegevens – steunpunten.

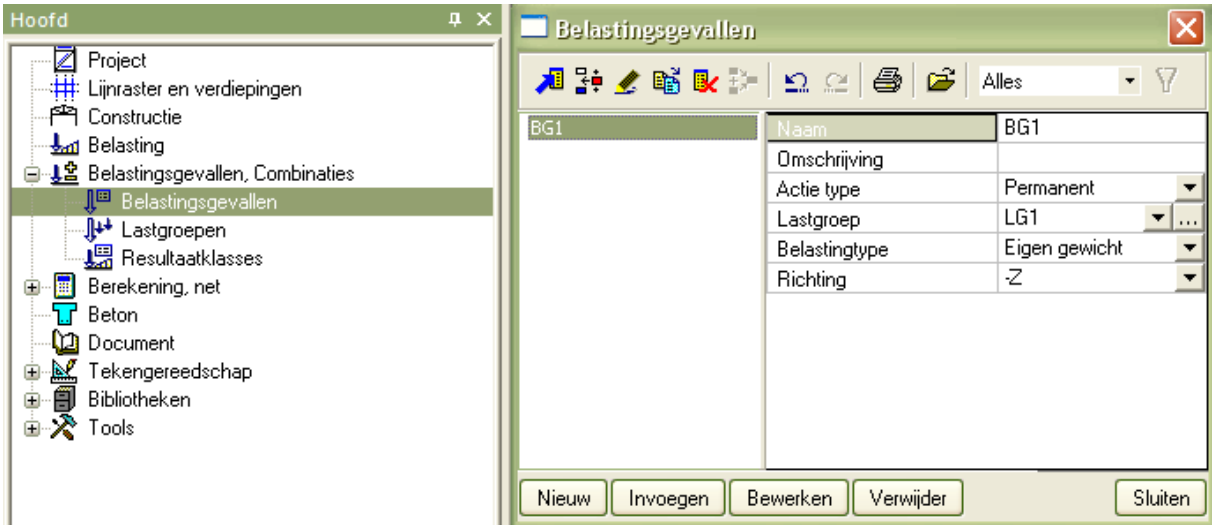
Figuur 14 SCIA printscreen, bron: SCIA



Hier is er de mogelijkheid om de zes vrijheidsgraden vast, vrij of verend te zetten. Ik kies voor een inklemming op de gehele onderrand van de koepel.

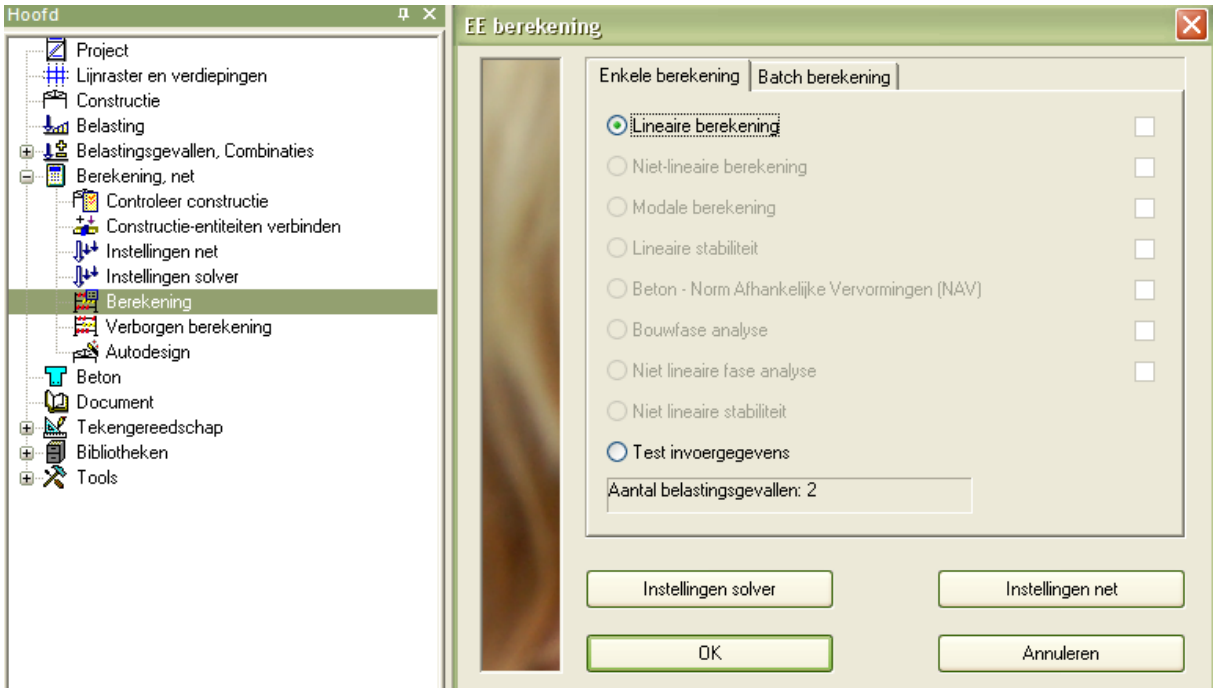
Figuur 15 SCIA printscreen, bron: SCIA

Zonder een belasting die op de constructie werkt kunnen er ook geen berekeningen worden gedaan. De optimale koepelvorm wil ik bepalen onder zijn eigen gewicht. Dit kan door onder het kopje Belastinggevallen bij belastingtype te kiezen voor “eigen gewicht”.

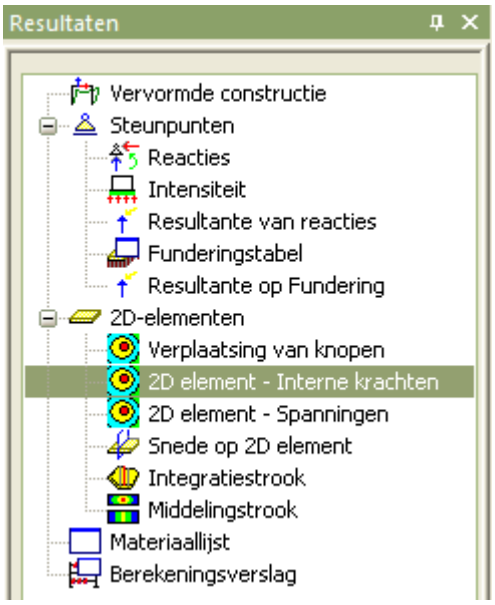


Figuur 16 SCIA printscreen, bron: SCIA

De laatste stap is nu het berekenen. “Berekeningen” verschijnt er een venster waarin gekozen kan worden voor verschillende soorten berekeningen. De lineaire berekening is in dit geval van toepassing. Met een simpele druk op de knop “OK” worden deze berekeningen uitgevoerd door SCIA.



Figuur 17 SCIA printscreen, bron: SCIA



In het scherm hiernaast kan gekozen worden voor verschillende resultaten. De resultaten bevatten oplegreacties, momentenspanningen, Von Mises spanningen, verplaatsingen etc. Wij gaan gebruik maken van de interne krachten.

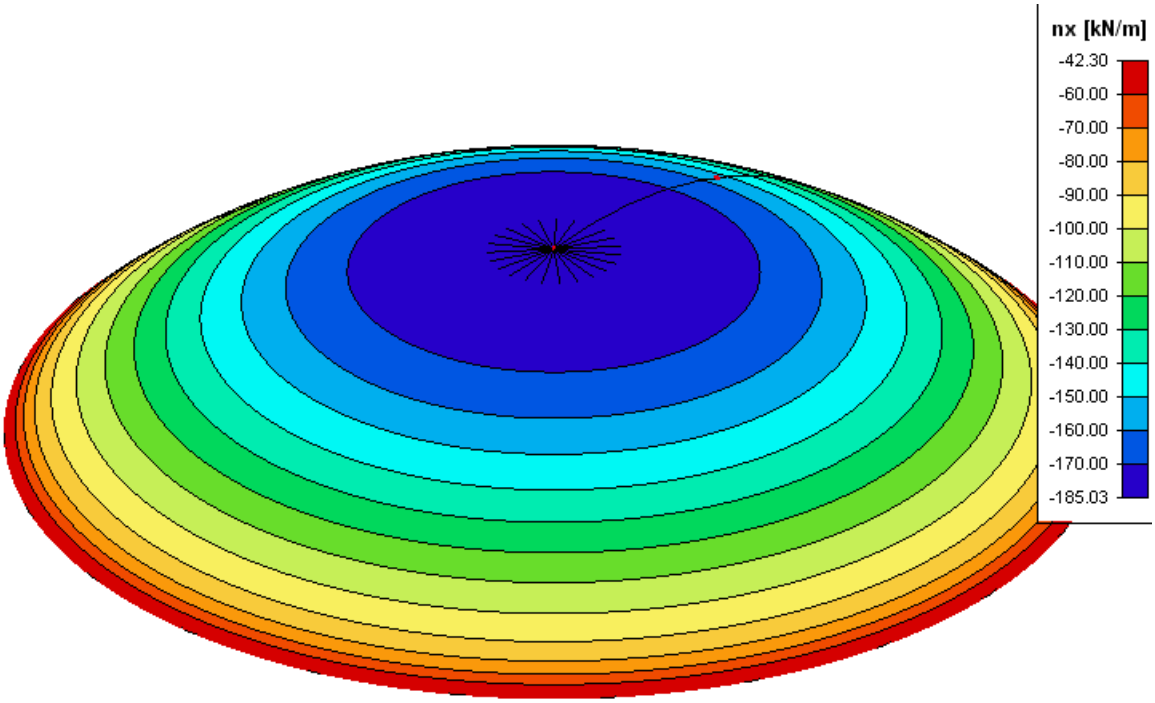
Figuur 18 SCIA printscreen, bron: SCIA



Eenmaal gekozen voor de interne krachten kan in dit scherm gekozen worden uit een scala aan resultaten. In dit verslag wordt gebruik gemaakt van de "nx" krachten, omdat dit de maatgevende krachten zijn. Dit zijn de krachten in het vlak van de koepel.

Figuur 19 SCIA printscreen, bron: SCIA

Na het kiezen voor de “nx” resultaten krijgt men deze figuur te zien.



Figuur 20 SCIA printscreen, bron: SCIA

Aangezien de krachten worden getoond in de x–richting is het van belang om de richting aan te duiden. Figuur 13 laat de koepel zien en het assenstelsel, in deze figuur is de rode as de x–as. Dit is het globale assenstelsel. Daarnaast heeft elk element een lokaal assenstelsel. De x-assen van deze assenstelsels zijn in de richting van de raaklijn aan de horizontale ringen. In bovenstaand figuur kunnen de krachten worden afgelezen op elk punt van de koepel. Cruciaal zijn de resultaten in de top en de voet. In dit geval zou de kracht in de top een grootte hebben van 42.30 kN/m en de kracht in de voet een grootte van 185.03 kN/m. In het volgende hoofdstuk wordt de theorie behandeld en de laatste stap in het berekenen van het volume van een koepel.

5 Theorie

5.1 Knikspanning

We maken gebruik van de onderstaande formule waarin met behulp van onder andere de knikspanning de benodigde dikte kunnen vinden van de koepel.

$n_{knik} = (0.1 * E * t^2) / a$

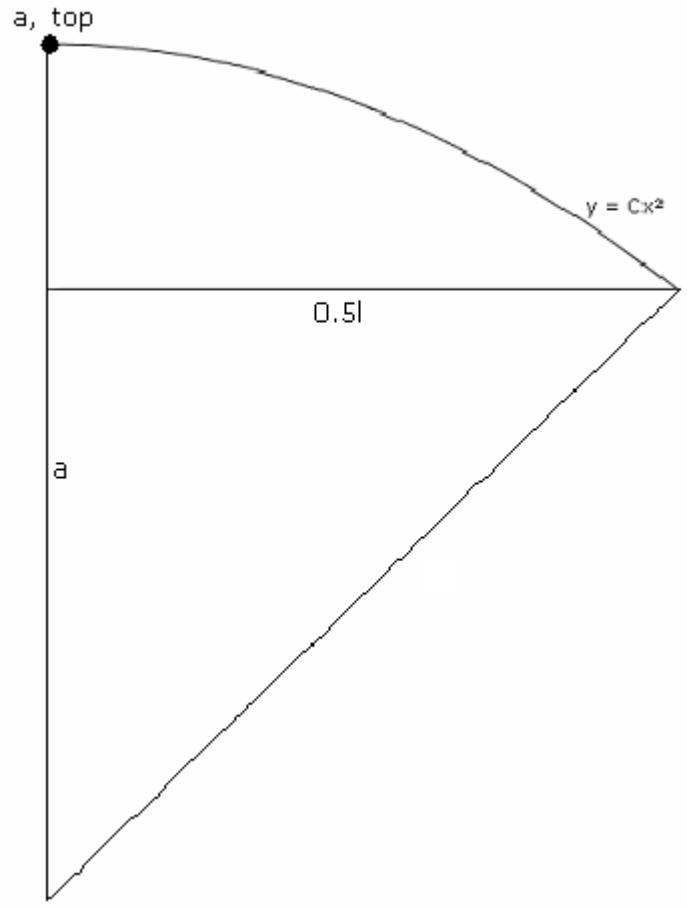
Door alle termen aan een kant te brengen behalve de dikte "t" krijgen we een formule waarin alles ingevuld kan worden.

$t = \sqrt{((n_{knik} * 10 * a) / E)}$

Een toelichting van de benodigde variabelen wordt hieronder gegeven.

E = E modulus van beton, 32500 N/mm^2
σ_{knik} = Membraankracht afgelezen uit de resultaten van SCIA
a = kromtestraal wordt berekend in de top en voet

Om de formule voor "a" in de top te vinden is de volgende afleiding gedaan.



Figuur 21 Afleiding kromtestraal, bron: gemaakt in Paint.

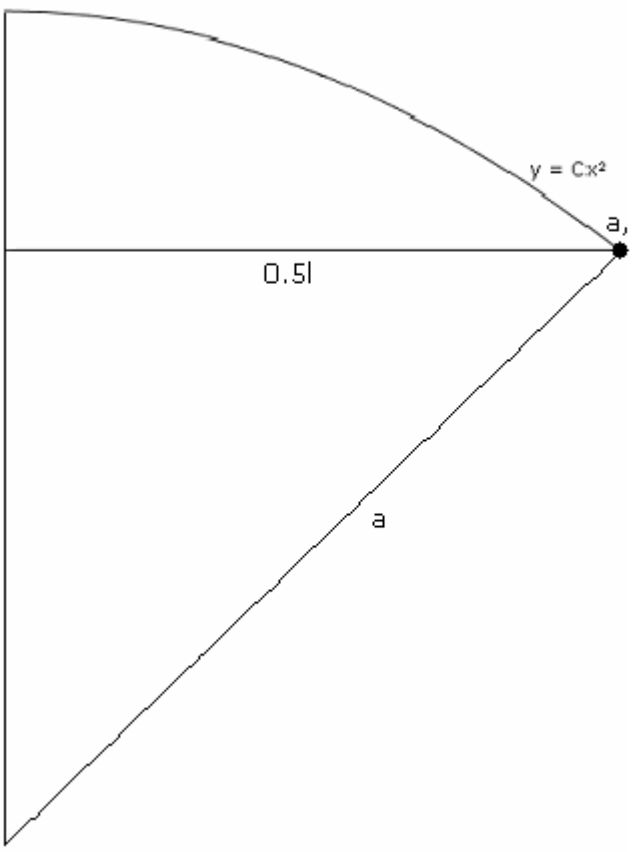
De koepel heeft is een parabolische functie, **$y = Cx^2$** (Fig. 21). Het volgende geldt: **$a = 1/K$** met K de kromming.

Voor de kromming K geldt dat die gelijk is aan de tweede afgeleide van een kromme, **$K = y''$**. In dit geval hebben we de functie $y = Cx^2$, de tweede afgeleide van deze functie wordt dan: **$y''=2C$**.

We kunnen nu dus zeggen dat **$a = 1/(2C)$.** Het enige wat ons nu rest is een waarde voor C vinden. Dit doen we door middel van één randvoorwaarde die we hebben, namelijk dat op de helft van de overspanning (0,5l) de hoogte een waarde van "h" heeft.

Nemen we de oorsprong in het midden dan krijgen we **$h = C * (0.5l)^2$.** Schrijven we dit uit, dan krijgen we **$C = 4h / l^2$.**

Dus hebben we de volgende formule voor de a in de top gevonden, **a** = 1 / (2C) **= (0.125 * l²) / h.** Voor de a in de voet van de koepel wordt een andere formule gebruikt. De afleiding zal hieronder gegeven worden.



Deze afleiding voor de kromtestraal in de voet is bijna hetzelfde als bovenstaande afleiding (Fig. 22). Enkele aannames zijn nodig geweest om het makkelijker te maken. Wanneer het nodig is zal uitleg volgen.

In deze afleiding nemen we weer de volgende formule voor de koepel, **y = rho *g*x²/(4*σvoet)**.

Als benadering nemen we in dit geval het volgende aan: **1/a = y''/(1+ (y')²)^3/2.**

Om dit op te lossen maken we gebruik van MAPLE. De sheet en het resultaat staat hier onder.

Figuur 22 Afleiding kromtestraal, bron: gemaakt in Paint.

```
restart;
```

$$y := \frac{\rho \cdot g \cdot x^2}{4 \cdot nx} :$$

$$avoet := \frac{\left(1 + diff(y, x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{diff(y, x, x)}$$

$$\frac{2\left(1 + \frac{1}{4}\frac{\rho^2 g^2 x^2}{nx^2}\right)^{3/2} nx}{\rho g}$$

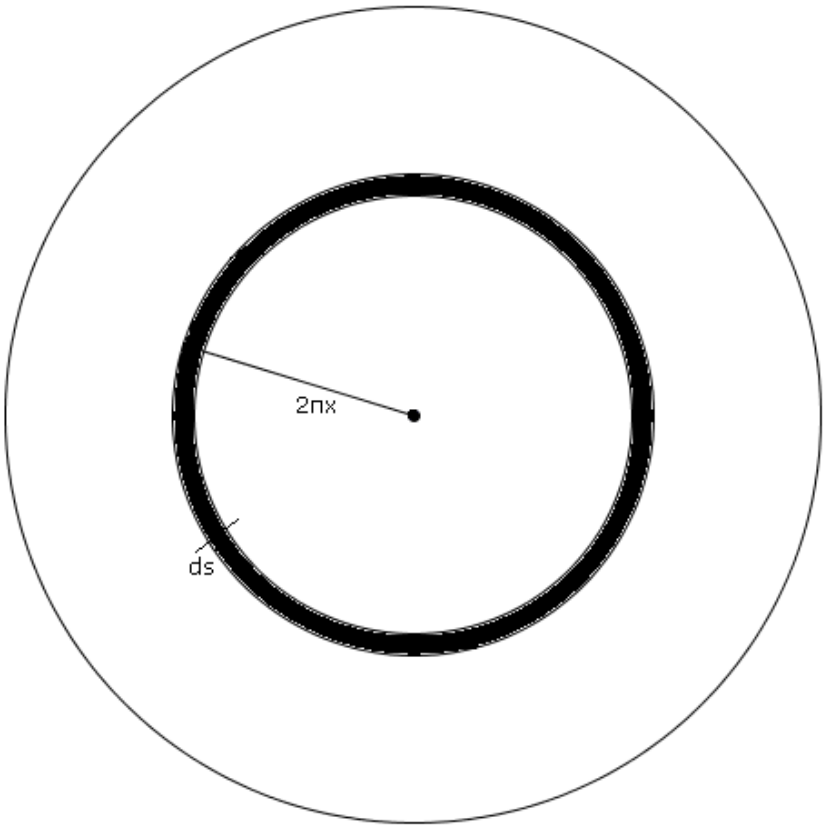
```
assume(nx > 0); simplify(avoet)
```

$$\frac{1}{4}\frac{\left(4\,nx^{-2} + \rho^2 g^2 x^2\right)^{3/2}}{nx^{-2}\,\rho\, g}$$

Hierboven is de aanname gemaakt dat de spanning naar 0 toe gaat, zodat de kromtestraal een betere vorm krijgt waarmee gewerkt kan worden.

5.2 Afleiding oppervlakte van een koepel

We kunnen nu uit de genoemde formule de dikte vinden. Met behulp van de dikte kunnen we de stap maken naar het volume die de koepel inneemt. Hierbij maken we gebruik van een zelf afgeleide formule.



Figuur 23 Afleiding oppervlakte koepel, bron: gemaakt in Paint.

In de figuur (Fig. 23) hiernaast gebruik ik het bovenaanzicht van een koepel om een redelijke benadering te maken van de oppervlakte van een koepel.

We maken gebruik van de parabolische functie die in de vorige paragraaf ook is gebruikt, namelijk **$y = Cx^2$**.

De afstand tot een stuk ring van de koepel is x. De ring heeft een omtrek van 2πx en een dikte ds.

De omtrek is 2πx, de dikte is ds. De oppervlakte van de ring is dan **2πx ds**.

Het makkelijkste zou zijn om te integreren over de x, dus zullen we ds moeten omschrijven in waarden van x. Aangezien we gebruik maken van de aanname dat het bovenaanzicht een cirkel is, kunnen we zeggen dat **$ds^2 = dx^2 + dy^2$** (poolcoördinaten).

Na omschrijven van $ds^2 = dx^2 + dy^2$ kunnen we voor de term ds het volgende nemen: **$ds = \sqrt{(1+(dy/dx)^2)}dx$**. Zoals eerder vermeld gebruiken we een parabolische functie voor de koepel, namelijk $y = Cx^2$. We nemen als aanname deze functie en niet de functie die is gebruikt in de vorige afleiding.

In de term van ds komt de afgeleide dy/dx voor, in ons geval is dat dan **$dy/dx = 2Cx$**. Dit kunnen we invullen in de vergelijking van ds en krijgen op deze manier **$ds = \sqrt{(1+(2Cx)^2)}dx$**.

De oppervlakte van een ring is nu **$2\pi x \sqrt{(1+(2Cx)^2)}dx$**. De term C hebben we in de vorige paragraaf ook behandeld en is analoog voor de bepaling van C in deze afleiding, **$C = 4h / l^2$.**

De integraal voor de oppervlakte van de hele koepel nemen we van x = 0 tot x = l/2 met integrand **$2\pi x \sqrt{(1+(8hx/l^2)^2)}$.** We gebruiken Maple om deze integraal op te lossen. De sheet staat hieronder met bijbehorend eindresultaat.

$$C := \frac{4h}{l^2}:$$

$$y := C \cdot x^2:$$

$$A := 2 \cdot 3.14 \cdot int\left(x \cdot \mathrm{sqrt}\left(1 + diff(y, x)^2\right), x = 0 .. \frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{0.03270833333\, l^2 \left(-l^2 + l^2 \sqrt{\frac{l^2 + 16h^2}{l^2}} + 16 \sqrt{\frac{l^2 + 16h^2}{l^2}}\, h^2\right)}{h^2}$$

5.3 Volume van een koepel

Nu de dikte en de oppervlakte van de koepel zijn gevonden kunnen we die met elkaar vermenigvuldigen en zo het volume vinden.

$V := A \cdot t$

$$\frac{0.03270833333\, l^2 \left(-l^2 + l^2 \sqrt{\frac{l^2 + 16\,h^2}{l^2}} + 16 \sqrt{\frac{l^2 + 16\,h^2}{l^2}}\, h^2 \right) t}{h^2}$$

4.4 Maple sheet

Om al het rekenwerk zo snel mogelijk en heel makkelijk te laten verlopen heb ik een MAPLE sheet gemaakt waarin alleen de overspanning, de hoogte en de drukspanning ingevoerd moeten worden met als eindresultaat het volume van de koepel. Deze sheet staat hieronder vermeld. In deze maplesheet is er zoals in bovenstaande is vermeld gekozen voor een hoogte van 20 meter en een diameter van 100 meter. De spanning die werd gevonden in SCIA is ook ingevuld in de sheet. Met deze waarden komen we uit op een volume van 1.195*10^12 mm^3 aan beton.

```
restart
h := 20000 :
l := 100000 :
ρ := 2400·10^-9 :
g := 9.81 :
E := 32500 :
C := 4 h / l^2 :
y := C·x^2 :
z := ρ·g·x^2 / (4·Nxxvoet) :
A := 2·3.14·int( x·sqrt(1 + diff(y, x)^2), x = 0 .. l/2 ) :
simplify(A)
```

$$8.996629466\ 10^{9}$$

```
atop := l^2 / (8. h) :
avoet := (1 + diff(z, x)^2)^(3/2) / diff(z, x, x) :
x := 0.5·l :
assume(Nxxvoet > 0); simplify(avoet) :
Nxxvoet := 42.30;
```

$$42.30$$

```
Nxxtop := 185.03;
```

$$185.03$$

```
avoet;
```

$$3.594315833\ 10^{6}$$

$atop;$

$$62500.00000$$

$$Tvoet := \left(\frac{10 \cdot Nxxvoet \cdot avoet}{32500} \right)^{0.5};$$

$$216.2900900$$

$$Ttop := \left(\frac{10 \cdot Nxxtop \cdot atop}{32500} \right)^{0.5};$$

$$59.65122992$$

$$t := \frac{Ttop + Tvoet}{2}:$$
$$Vkoepel := A \cdot t:$$
$$simplify(Vkoepel)$$

$$1.241270905\ 10^{12}$$

6 Optimale koepelvorm

6.1 Resultaten

In de vorige hoofdstukken is de procedure uiteengezet om het volume te vinden behorende bij een bepaalde hoogte en diameter. In de voorbeelden was er gekozen voor een hoogte van 20 meter en een diameter van 100 meter. Om de optimale koepelvorm te vinden wordt de diameter constant gehouden en varieert de hoogte. Dit wordt gedaan met stapgroottes van 1 meter. De resultaten zijn in een Excel tabel gezet zodat kan worden afgelezen wat het optimale resultaat is.

Hoogte [m]	Spanning voet [MPa]	Spanning top [MPa]	a voet [mm]	a top [mm]
25	19,93	153,69	1.695*10^6	50000
24	27,64	157,57	2.350*10^6	52083
23	34,08	161,89	2.896*10^6	54347
22	37,71	166,74	3.205*10^6	56818
21	39,11	172,13	3.323*10^6	59523
20	40,52	178,2	3.443*10^6	62500
19	41,24	185,03	3.504*10^6	65789
18	42,08	192,79	3.576*10^6	69444
17	43,18	201,58	3.669*10^6	73529
16	44,53	211,62	3.784*10^6	78125
15	46,16	223,16	3.922*10^6	83333

Hoogte [m]	t voet [mm]	t top [mm]	A [mm^2]	**Volume** [mm3]
25	101.959	48,626	9,569*10^9	7.205*10^11
24	141.358	50,251	9,448*10^9	9.051*10^11
23	174.272	52,031	9,330*10^9	1.056*10^12
22	192.828	53,991	9,215*10^9	1.137*10^12
21	199.984	56,148	9,104*10^9	1.166*10^12
20	207.191	58,54	8,997*10^9	1.195*10^12
19	210.871	61,201	8,893*10^9	1.210*10^12
18	215.166	64,183	8,793*10^9	1.228*10^12
17	220.788	67,532	8,697*10^9	1.254*10^12
16	227.689	71,323	8,606*10^9	1.287*10^12
15	236.021	75,644	8,519*10^9	1.326*10^12

Tabel 1 Resultaten koepelvormen

6.2 Conclusie

Uit bovenstaande tabel (Tabel 1) is af te lezen dat het volume steeds kleiner wordt naarmate de hoogte groter wordt (bij een gelijkblijvende overspanning van 100 meter). Dit betekent dus dat de koepelvorm optimaal is bij een zo groot mogelijke hoogte, dit kan logischerwijs niet kloppen.

Verschillende redenen kunnen de oorzaak zijn voor dit resultaat. Er kunnen verkeerde afleidingen gemaakt zijn, aannames die niet juist zijn gebruikt en berekeningen die niet goed zijn gelukt. Een benadering is dat de koepel in SCIA bolvorming is gekozen, en in de MAPLE sheets voor een parabolische vorm is gekozen. Dit komt redelijk overeen bij kleine waarden. Dus hierdoor kunnen fouten zijn ontstaan. Er wordt wel vanuit gegaan dat het uitvoer van SCIA wel klopt. Een andere oorzaak zou ook nog kunnen dat de knikkracht van de top naar de voet niet getoetst is, deze kracht zal waarschijnlijk best groot zijn en zou moeten meegenomen worden in de berekeningen.

Er kan dus geconcludeerd worden dat de optimale koepelvorm niet te berekenen is zonder geavanceerde berekeningen. Helaas valt dit buiten het kader van dit onderzoek.

7 Seismische belastingen

Eerder werd al verteld dat de koepel van het Pantheon meerdere malen door aardbevingen is getroffen, en het heeft overleefd. In dit hoofdstuk zal geprobeerd worden meer inzicht te krijgen in het geval van zo een seismische belasting op een koepel. Eerst wat algemene informatie over dit soort belastingen, daarna komen een paar maatregelen aan bod. Tenslotte worden algemene waarden genoemd die gebruikt worden bij het maken van dynamische berekeningen.

7.1 Theorie seismische belasting

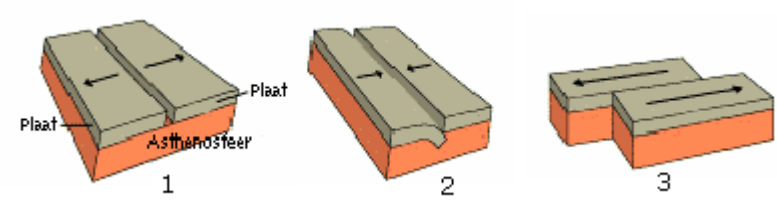
Een seismische belasting, ook wel aardbeving genoemd, is in feite een trilling in de aardkorst. De nadruk wordt hier vooral gelegd op het woord "trilling", want dit doet meteen denken aan het vakgebied dynamica.

Op ongeveer 6400 kilometer onder de aardkorst ligt de kern van de aarde, in dit gebied overheersen extreme omstandigheden. Om voorbeelden te noemen, de temperatuur is daar 4100° Celsius en de druk is daar 10000 keer de atmosferische druk. Door deze natuurlijke (en zeer extreme) randvoorwaarden is de aarde een dynamische planeet die voortdurend in beweging is.

De aarde kan door zowel uitwendige als inwendige oorzaken aan aardbevingen onderhevig zijn. Een uitwendige oorzaak is bijvoorbeeld een meteorietinslag, door de impact van een inslag kunnen aardbevingen ontstaan op aarde. Inwendige oorzaken zijn bijvoorbeeld het instorten van ondergrondse grotten (mijnen), het uitbarsten van een vulkaan en doordat verschillende aardlagen verschuiven.

Het laatste punt zal wat uitvoeriger behandeld worden aangezien dat meestal de oorzaak is van aardbevingen. De aardkorst bestaat uit een geheel van meerdere verschillende platen. Deze platen zijn in beweging en zoals gezegd kunnen ze ten opzichte van elkaar verschuiven. Er zijn hierbij drie maatgevende situaties:

1. De platen bewegen uit elkaar
2. De platen worden samengedrukt
3. De platen bewegen langs elkaar



Figuur 24 Maatgevende situaties, bron: http://www.leerwiki.nl/Wat_is_een_aardbeving

De naam van de theorie voor deze situaties en hun gevolgen is de platentektoniek (Fig. 24). In het eerste geval vloeit lava naar boven, koelt het af en ontstaat er op deze manier een nieuw stuk "aardkorst". In het tweede geval kunnen er twee situaties ontstaan, namelijk dat een stuk van de ene plaat onder de andere wordt gedrukt en wegsmelt of geen van beide wordt naar beneden gedrukt en ontstaan er bergen.

Het derde en laatste geval is in dit verslag het belangrijkste. In dit geval schuiven de platen langs elkaar, tijdens dit schuiven wordt er een spanning opgebouwd (door wrijving). Op een gegeven moment is de spanning zo hoog dat de platen langs elkaar schuiven met een enorme schok. Tijdens dit schuiven is er sprake van een aardbeving.

Op aarde zijn er gebieden waar de aardbevingen vaker (kunnen) voorkomen dan andere gebieden. Dit heeft te maken met zogenaamde breuklijnen. Breuklijnen zijn grenzen tussen twee platen van de aardkorst. In gebieden van de aarde waar dergelijke breuklijnen voorkomen, ontstaan vaak aardbevingen.

Een aardbeving heeft een punt waar de trillingen het sterkst zijn, dit is het punt waar de aardbeving is ontstaan. Dit punt bevindt zich meestal onder de aardkorst en wordt het hypocentrum genoemd. De trillingen die uit het hypocentrum komen kunnen terecht komen in de aardkorst en zich verder voortplanten als een oppervlaktetrilling. Het punt loodrecht boven het hypocentrum en in de aardkorst wordt het epicentrum genoemd. Hoe verder de trillingen zich van het epicentrum (en door de aardkorst) voortplanten, hoe minder sterk deze zullen zijn. Tijdens het voorplanten van deze oppervlaktetrillingen kan er schade worden gericht aan gebouwen (koepels bijvoorbeeld), mensen, aan alles wat zich op het oppervlak bevindt.



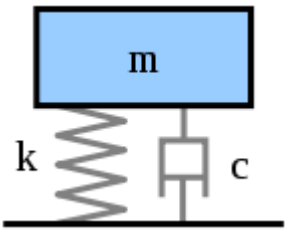
Ruïne van het stadhuis in San Francisco nadat een aardbeving is geweest in het jaar 1989 (Fig. 25). De koepel is ten opzichte van zijn plaats 10 cm verschoven. Rest van het gebouw was er nog veel erger aan toe zoals te zien op de afbeelding.

Figuur 25 Ruïne San Francisco, bron: http://www.geschiedenis24.nl/nieuws/2008/mei/San-Francisco-na-de-aardbeving-in-1906.html

7.2 Maatregelen tegen aardbevingen

In de afbeelding hierboven is te zien dat de koepel van het gebouw eigenlijk nog best wel intact is gebleven ondanks de aardbeving. In tegenstelling tot bovenstaand voorbeeld kan het ook drastisch mis gaan en blijft er geen steen normaal overeind staan. Vooral in gebieden waar aardbeving vaak kunnen voorkomen moet hier op gelet worden tijdens het bouwen.

Hoe kunnen koepels, in het algemeen gebouwen, voorzien worden van enige veiligheid tegen aardbevingen is nu de vraag. In principe zijn er verschillende mogelijkheden om dit te voor elkaar te krijgen, maar is de achterliggende gedachte voor alle methoden het volgende. De aardbeving veroorzaakt zoals gezegd trillingen, deze trillingen moeten gedempt worden. Nu is de "truc" dat het gebouw niet optreedt als "demper", maar dat er een externe "demper" (Fig. 26) moet zijn die de trillingen als het ware opvangt.

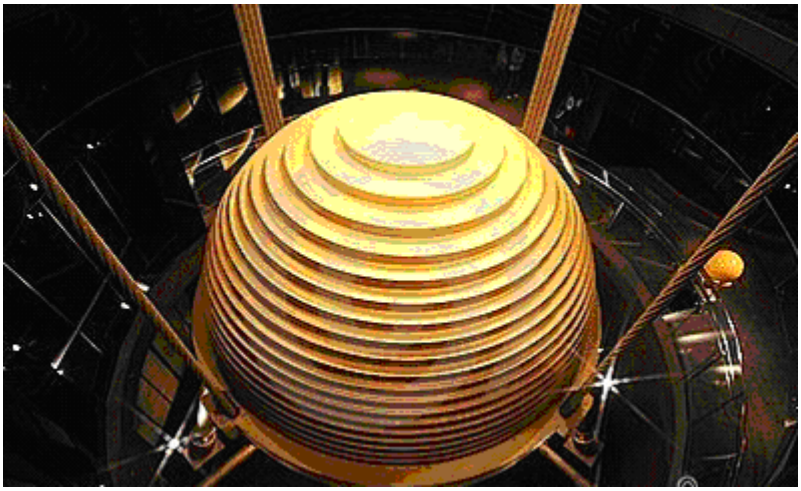


Figuur 26 Massa - veer - demper systeem, bron: http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke_Mechanica/Trillingen

Wanneer een koepel gebouwd wordt kan bijvoorbeeld vooraf worden gekeken naar de maximale hoogte die de koepel kan krijgen, want hoe groter de hoogte, hoe groter de trillingen kunnen zijn op de top van de koepel. Materiaalkeuze is ook een punt waar naar gekeken kan worden. In gebieden waar aardbevingen voorkomen worden gebouwen van hout gemaakt omdat hout beter bestendig is tegen de trillingen. Een houten koepel is niet ongehoord en heeft ook meteen een pluspunt vanwege esthetische waarden. Vaker neemt men maatregelen door wel een externe demper te gebruiken.

Bij hoge gebouwen worden wel eens zwembaden of een enorme watertank gebruikt op een hoge verdieping zodat het water de trillingen van zo een aardbeving (gedeeltelijk) kan overnemen. Bij een koepel is dit niet realiseerbaar, hier kan bijvoorbeeld gedacht worden aan rubberen platen bij de opleggingen van de koepel. Ook rubber kan trillingen goed overnemen (isoleren). Hier moet gekeken worden naar de eigenschappen van het materiaal, in het bijzonder de transmissibiliteit (verhouding tussen de isolatie en de kracht die door de aardbeving wordt opgewekt).

Andere mogelijkheid is om iets met een grote massa op te hangen aan het plafond van de koepel. Mocht er dan een aardbeving ontstaan dan neemt de koepel niet de trillingen over maar de massa die aan de kabel hangt. Dit kan overigens ook multifunctioneel zijn en niet de esthetische waarde verslechteren van de koepel. Zo een demper wordt ook wel een Tuned Mass Damper genoemd (Fig. 27). Om een goed resultaat te verkrijgen moet men de dynamische eigenschappen van de constructie en de demper zelf goed op elkaar afstemmen.



Figuur 27 Tuned Mass Damper, bron: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Taipei_101_Tuned_Mass_Damper_2010.jpg

Dynamische berekeningen zullen gemaakt moeten worden waarbij rekening moet worden gehouden met eigenschappen van de constructie en de aardbeving, denk aan eigenfrequenties en dergelijke. Hiervoor zullen eerst bepaalde waarden moeten worden uitgezocht, vooral bij aardbevingen, omdat dit een natuurlijk fenomeen is waar geen vaste regels voor bestaan.

7.3 Seismische metingen

Om de sterkte van aardbevingen te kunnen meten en vergelijken wordt een seismograaf gebruikt. Een seismograaf is een meetinstrument dat gebruikt wordt om een aardbeving te registreren. De uitvoer van een seismograaf zijn zogenaamde seismogrammen. Op zo een seismogram valt af te lezen hoe groot (verplaatsingen) de trillingen zijn op een bepaald punt in een drietal richtingen.

Met behulp van een seismogram kan ook de sterkte, magnitude is de vakterm, worden afgelezen. Dit kan in verschillende schalen gebeuren, de meest bekende is de schaal van Richter. De schaal van Richter is een logaritmische schaal. Dit is heel handig, omdat op een duidelijke manier zowel hele zwakke en sterke aardbevingen kunnen worden weergegeven. Op de schaal van Richter betekent een toename van één eenheid een tien keer zo grote amplitude of bijna dertigmaal zoveel energie.

Hieronder een aanduiding wat betreft de schade bij aardbevingen met verschillende magnitudes.

< 2.5	gemiddeld 900.000 keer per jaar	wordt niet gevoeld
2.5 – 5.5	gemiddeld 30.000 keer per jaar	wordt gevoeld, heel weinig schade
5.5 – 6.0	gemiddeld 500 keer per jaar	geringe schade aan bouwwerken
6.0 – 7.0	gemiddeld 100 keer per jaar	veel schade in bevolkte gebieden
7.0 – 8.0	gemiddeld 20 keer per jaar	zeer veel schade
> 8.0	gemiddeld 1 keer in de 10 jaar	volledige gebieden verwoest

Tijdens een aardbeving komt enorm veel energie vrij. Hoe groter de magnitude, hoe

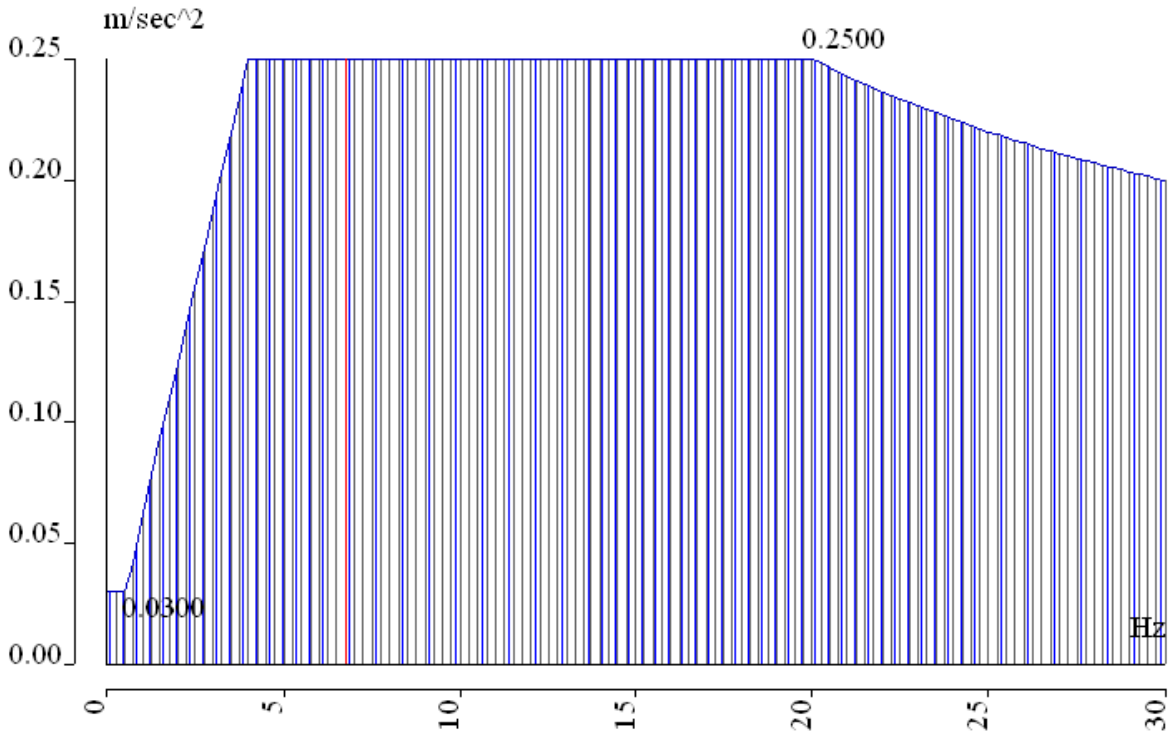
groter de hoeveelheid energie. Er is een formule afgeleid om vanuit een bepaalde waarde op de schaal van Richter (n) de hoeveelheid energie in Joule (E) te berekenen. In onderstaande formule kan zo een magnitude worden ingevuld:

n = 2/3 log (E/2) – 3 met n = magnitude, Richter en E = energie in Joule.

In het verleden maakte men berekeningen uitgaande van energie. Het principe is simpel. Er is "energie" nodig om een gebouw te doen instorten. Als een aardbeving een energie voortbrengt die net zo groot of groter is dan deze energie, dan zal er dus schade ontstaan. Reden voor deze kleine uitleg is dat het een noemenswaardige manier van berekenen is maar dat neemt het feit niet weg dat het een heel grove manier is. Daarom zal het niet gebruikt worden in dit verslag. De manier waarop het wel gedaan wordt zal verderop in het verslag behandeld worden.

7.4 Seismisch spectrum

Onderstaande figuur (Fig. 28) geeft het spectrum weer van een aardbeving volgens de Eurocode. Dit is een spectrum gehaald uit het programma SCIA, helaas stond er niet voor welke locatie dit bedoeld is. Zoals te zien wordt de frequentie uitgezet tegen de versnelling (verkregen door de omhullende van een aantal aardbevingen). Er kan worden afgelezen welke frequenties in aardbevingen zitten. In het volgende hoofdstuk, waarin de berekeningen gedaan zullen worden over een aardbeving op een koepel, is deze informatie van belang.



Figuur 28 Seismisch spectrum Eurocode, bron: SCIA

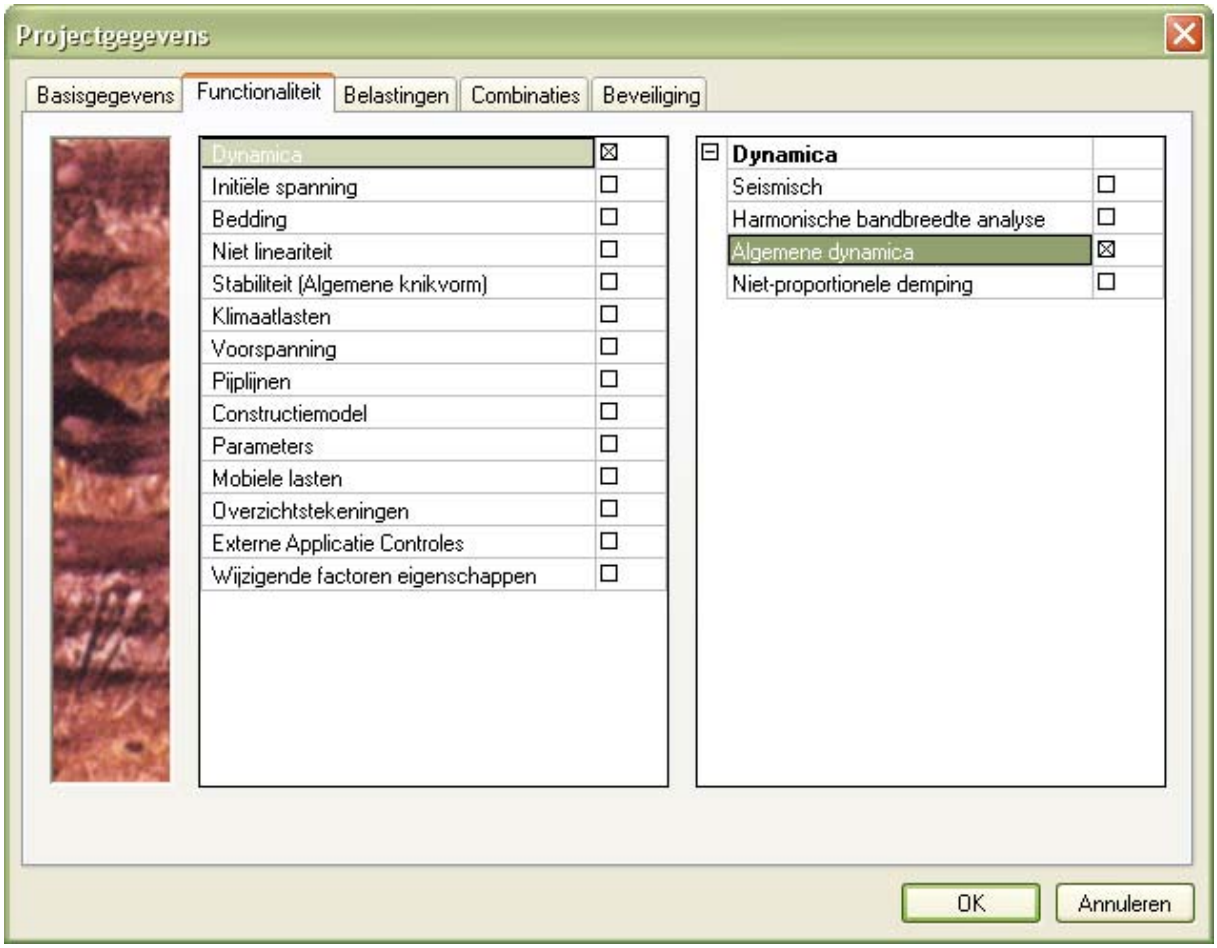
8 Dynama in SCIA

In dit hoofdstuk zal eerst uiteengezet worden hoe met SCIA de eigenfrequenties van een koepel te berekenen zijn. Daarna zullen de resultaten weer duidelijk worden weergegeven. Na afloop volgt een conclusie waarin een vergelijking wordt getrokken tussen het seismische spectrum uit de Eurocode en de resultaten uit SCIA.

8.1 Procedure

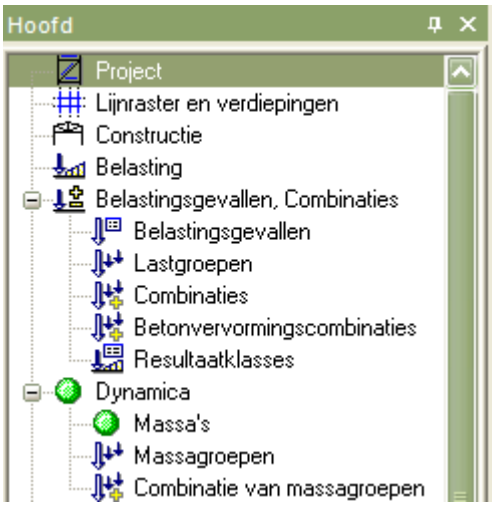
Zoals gezegd volgen eerst een paar stappen in SCIA voordat gekeken kan worden naar de resultaten. In het hoofdstuk "Koepel in SCIA" werd de koepel in SCIA gezet en werden de membraankrachten berekend. We zullen verder gaan waar we gestopt zijn in dat hoofdstuk. De betonnen koepel die daar werd ingevoerd had een diameter van 100 meter en een hoogte van 20 meter. De dikte is 200 mm. De betonsoort is B35, met een soortelijke massa van 2500 kg/m³ en een E – modulus van 32500 MPa. De resultaten zullen dus eigenfrequenties bevatten van een koepel met die eigenschappen.

De eerste stap is om aan te geven dat er zal worden gewerkt met "dynamica". Door eerst naar "Project – Functionaliteit" te gaan kan er gekozen worden voor verschillende berekeningen. In dit geval wordt gekozen voor dynamica.



Figuur 29 SCIA printscreen, bron: SCIA

Wanneer gekozen wordt voor dynamica zal een verdere keuze gemaakt worden tussen vier mogelijkheden. Kiezen voor algemene dynamica is voldoende. Door op "OK" te drukken kan een begin worden gemaakt aan de volgende stap.



Nu verschijnt er een nieuw kopje met de naam dynamica. Aangezien eigenfrequenties berekend moeten worden zal de koepel eerst een massa toegekend moeten worden. Dit wordt gedaan door naar het kopje massa te gaan.

Figuur 30 SCIA printscreen, bron: SCIA



In dit venster zal gekozen worden voor vlakmassa. Hierdoor krijgt de koepel een massa.

Figuur 31 SCIA printscreen, bron: SCIA

In de volgende stap zal er een dynamisch belastingsgeval gekozen worden, zodat de berekening van de eigenfrequenties gemaakt kan worden. Door naar het kopje belasting te gaan en te kiezen voor belastingsgevallen kan een nieuwe belasting worden aangemaakt. Door de verschillende parameters te kiezen zoals in het onderstaande scherm kan de dynamische berekening worden gemaakt.

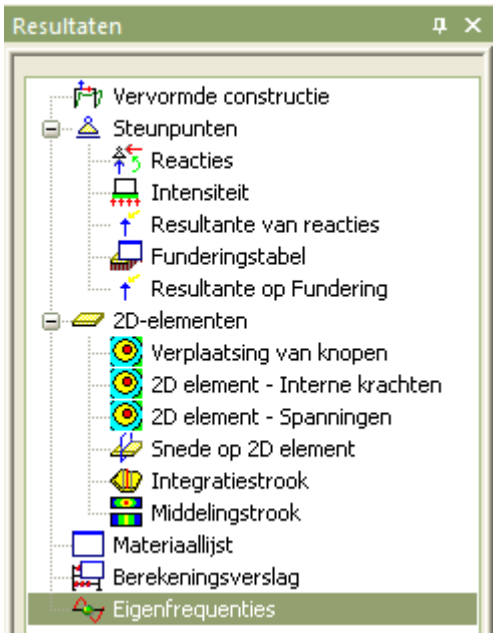


Figuur 32 SCIA printscreen, bron: SCIA

Nu er een massa en een variabele belasting zijn toegekend kan de berekening worden gedaan voor de eigenfrequenties. Dit wordt gedaan door onder het kopje berekening, voor berekening te kiezen. Daarna kan gekozen worden voor de modale berekening.



Figuur 33 SCIA printscreen, bron: SCIA



Nadat deze modale berekening is gedaan worden tien frequenties getoond. Die kunnen gevonden worden onder het kopje resultaten, en dan kiezen voor eigenfrequenties. De resultaten worden getoond in de volgende paragraaf.

Figuur 34 SCIA printscreen, bron: SCIA

8.2 Resultaten

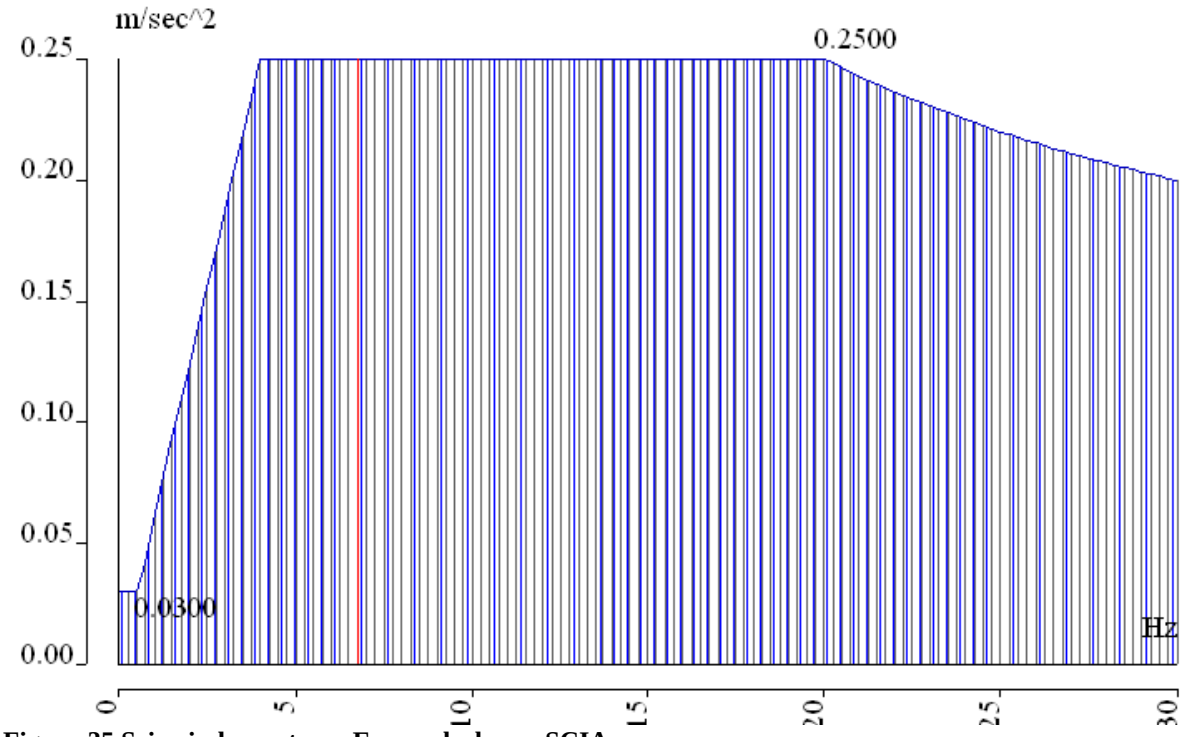
In onderstaande tabel staan de tien eigenfrequenties weergegeven die met SCIA berekend zijn. Zoals te zien is de belangrijkste frequentie 6,77 (omdat het de laagste is). De eigenfrequenties worden steeds hoger, maar met heel kleine stappen. Dit is te zien wanneer het aantal berekende frequenties verhoogd wordt naar de 50, bijvoorbeeld de 50ste eigenfrequentie is dan 7,67.

N	f [Hz]	T [sec]
1	6.77	0.15
2	6.87	0.15
3	6.88	0.15
4	6.99	0.14
5	6.99	0.14
6	7.05	0.14
7	7.05	0.14
8	7.06	0.14
9	7.07	0.14
10	7.10	0.14

Tabel 2 Resultaten eigenfrequenties

8.3 Conclusie

In het seismische spectrum (Fig. 35) van de Eurocode is te zien dat de frequenties van de koepel voorkomen in het deel dat begrensd is door 0.250 m/sec². Dit is een gevaarlijk gebied, omdat deze frequenties de grootste amplitude hebben. Dus de eigenfrequenties van de koepel zullen worden aangestoten en resonantie kan optreden. Er zal dus zeker gekeken moeten worden naar maatregelen om eventuele aardbevingen te doorstaan. Voor een paar suggesties kan gekeken worden naar paragraaf 7.2, maatregelen tegen aardbevingen.



Figuur 35 Seismisch spectrum Eurocode, bron: SCIA

De invloed van de dikte, overspanning en de hoogte is natuurlijk van belang op de eigenfrequenties van de koepel. Klein onderzoekje in SCIA geeft wat meer inzicht in die invloeden. Door de dikte te verhogen naar bijvoorbeeld 400 mm en dan de berekening van de eigenfrequenties opnieuw te doen, kan men zien dat die hoger worden. De laagste eigenfrequentie is dan 7,49. Bij het vergroten van de hoogte (een hoogte van 25 meter) is de laagste eigenfrequentie 7,64. Wordt de overspanning verhoogd, dan is de laagste eigenfrequentie 7,51. Alle drie de waarden hoger dan de berekende eigenfrequentie in de tabel (Tabel 2) hierboven.

Kijkt men naar de formule voor de eigenfrequentie (de wortel uit de stijfheid gedeeld door de massa) dan is dit opmerkelijk. De massa wordt groter door de grotere dikte, dus zou het logischer zijn geweest dat de eigenfrequentie kleiner wordt (delen door de massa). Door de dikte, hoogte of de overspanning te vergroten wordt de stijfheid dus relatief gezien nog groter dan de massa, dit verklaart de grotere eigenfrequentie dan in het oorspronkelijke geval.

9 Conclusie

Er kunnen een paar conclusies getrokken worden over verschillende onderwerpen betreffende koepels. Qua materiaalkeuze is geconcludeerd dat diverse koepels gebouwd in verschillende materialen haalbaar zijn, maar dat het er maar net aan ligt wat de eisen en randvoorwaarden zijn.

De optimale koepelvorm is helaas niet gevonden met de afleidingen en berekeningen die in dit verslag gemaakt zijn. Er zijn geavanceerde berekeningen nodig om de verbanden tussen de verschillende parameters goed neer te zetten. Dit is niet mogelijk met de beschikbare voorkennis, tijd en hulpmiddelen. Wel werd aangetoond dat de conclusies uit het vorige onderzoek naar de optimale koepelvorm niet geheel juist zijn.

Het effect van aardbevingen op een koepel is beoordeeld door de eigenfrequenties van een koepel (met zelfgekozen grootheden) te vergelijken met een seismisch spectrum uit de Eurocode. De conclusie was dat een aardbeving wel degelijk enig effect zou hebben op de koepel, omdat de eigenfrequenties in een gevaarlijk gebied voorkomen van het seismische spectrum.

10 Nawoord

Na afloop kan gezegd worden dat het een interessant onderzoek voor me was, vanwege het leren omgaan met SCIA. Het was moeilijker om dan ik had gedacht om het programma uit te vogelen zonder enige vorm van hulp. De handleiding was natuurlijk wel aanwezig, maar dat was niet echt duidelijk. Enorm veel tijd heeft het dus wel gekost om alles uit te vogelen om in het onderzoek de resultaten te krijgen die ik kon gebruiken.

Helaas kon de optimale koepelvorm niet gevonden, daar is toch heel wat meer expertise voor nodig. Maar aan de andere kant, het was wel leerzaam om een poging te doen. Het heeft me ook laten zien dat onderzoek best interessant is, vantevoren heb ik altijd al gedacht dat het niets voor mij zou zijn. Na afloop van dit Bachelor Eindwerk kan ben ik toch van gedachte veranderd.

Nogmaals dank aan mijn begeleiders. Ik hoop dat dit verslag en mijn inzet tijdens het onderzoek voldoende zijn naar uw meningen.

11 Literatuurlijst

Internetsite

1. http://www.overstappen.nl/energie/begrippen/aardbeving/
2. http://www.leerwiki.nl/Wat_is_een_aardbeving
3. http://ingenieur.kahosl.be/bouwkunde/dynamica/dynamica/reductie.html
4. http://ingenieur.kahosl.be/bouwkunde/dynamica/spectrum.html
5. http://wetenschap.infonu.nl/onderzoek/34683-seismologie-aardbeving.html
6. http://www.knmi.nl/cms/content/28063/zelf_een_aantal_magnitudes_uitrekenen
7. http://www.geo.mtu.edu/UPSeis/reading.html
8. www.woodforgood.com/tacoma.html
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Al_Fateh_Grand_Mosque
10. http://nl.wikipedia.org/wiki/Pantheon_%28Rome%29
11. http://www.kunstreis.com/landen/italie/Rome/Pantheon.htm
12. http://geodetische-koepel.co.tv/nl
13. http://www.glchoutconstructies.nl/documentatie/publicaties_projecten/hidb03-geodet.pdf

Boeken

14. Afdeling Seismologie KNMI, Aardbevingen, Van de Ridder, 2005
15. SCIA, SCIA handleiding, 2008
16. James Stewart, Calculus, Brooks Cole, 2007
17. Lonneke Tiggeler, Interactief drukvlak, 2009
18. Van Herwijnen, Constructief ontwerpen: Van Pantheon tot Millenium Dome, 1999