

Flenswegblazing

Een onderzoek naar de effectiviteit van Flenswegblazing als vorm van sabotage

Auteur: A.J. Grootegoed
Datum: 25-06-2025

TU Delft

Flenswegblazing

Een onderzoek naar de effectiviteit van flenswegblazing als vorm van sabotage

Door

A.J. Grootegoed

"Ter gedeeltelijke vervulling van de eisen voor de graad van:"

Bachelor of Science
In Civiele Techniek

Bij de Technische Universiteit Delft,

Begeleiders: Dr.ir, P.C.J. Hoogenboom
Dr.ir. M.C.M Bakker

TU Delft

Voorwoord

Dit onderzoeksrapport vormt de afsluiting van mijn bacheloropleiding civiele techniek aan de TU Delft. De afgelopen maanden ben ik druk bezig geweest met onderzoek doen naar het wegblazen van de flens van een i-profiel. Dit was een erg leerzaam proces waarbij ik veel nieuwe dingen heb geleerd.

Ik wil graag mijn dank uitspreken naar mijn hoofdbegeleider Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en mijn tweede begeleider Dr.ir. M.C.M. Bakker voor hun begeleiding tijdens mijn BEP en het in goede banen leiden hiervan.

Delft, 25-06-2025

Arnold Jaap Grootegoed

Inhoudsopgave

Voorwoord **5**

Abstract **8**

Nomenclatuur **9**

1 Inleiding **10**

2 Probleem omschrijving **11**
2.1 Achtergrond probleem 11
2.2 Probleemdefinitie 11
2.3 Doelstelling 11

3 Schematisering kracht **12**

4 Rekenmodel **14**
4.1 Situatie 1, Explosie wordt toegepast 14
4.1.1 Bepaling Veerconstante k 14
4.1.2 Bezwijkgebied 1, enkel ingeklemde ligger 15
4.1.3 Bezwijkgebied 2, dubbel ingeklemde ligger 16
4.1.4 Bepaling plastische weerstandkracht 16
4.2 Situatie 2, De flens gaat vloeien 18
4.3 Uiterste uitwijking bepalen 18

5 Numerieke model **19**
5.1 Massa-veersysteem 19
5.2 Plastische reactie 19

6 Validatie massa-veersysteem **22**

7 Voorbeeldberekening Rijnbrug Rhenen **25**
7.1 Bezwijk situaties 26
7.1.1 Situatie 1, Explosie wordt toegepast 26
7.1.2 Situatie 2 flens gaat vloeien en breekt af of komt tot stilstand 27

8 Vergelijking militaire handboek **28**

9 Discussie en aanbevelingen **29**

10 Conclusie **31**

11 Bibliografie **32**

12 Bijlagen **33**
12.1 Bijlage 1 trekproeven 33
12.2 Bijlage 2 Volledig python script 37
12.3 Bijlagen 3 voorbeeldberekening Rijnbrug Rhenen **Fout! Bladwijzer niet gedefinieerd.**

Abstract

In dit BEP wordt onderzocht hoe effectief het wegblazen van een flens is als vorm van sabotage. Bruggen worden vaak gesaboteerd door het opblazen van het wegdek of de landhoofden. Hiervoor zijn echter grote hoeveelheden springstof nodig, wat de logistieke complexiteit en kans tot ontdekking vergroot. Door alleen de flens van een I-ligger weg te blazen raakt de ligger zijn draagkracht kwijt en stort de brug in.

Dit onderzoek is uitgevoerd met toepassing van een dynamisch model waarbij de explosielastlast op de flens wordt nagebootst. De explosielast wordt geschematiseerd als een puntlast waarbij de kracht exponentieel afneemt. Het model bestaat uit een massa-veersysteem (voor de elastische fase) en een plastische faalmodus, de overgang tussen de twee modellen wordt aangegeven door het bereiken van de vloeigrens. De oplossing vindt numeriek plaats met Radau-methode in Python. Het model is geverifieerd door vergelijking met analytische oplossingen en studies in de literatuur.

Om de effectiviteit van flens sabotage te evalueren wordt er vervolgens gekeken worden naar een stalen liggerbrug in Nederland, de Rijnbrug Rhenen. Voor de Rijnbrug bij Rhenen (met de geschatte waardes, b_f = 700 mm, t_f = 10 mm en staalkwaliteit S355) is slechts 0,38 kilo TNT per flens nodig om de flens weg te blazen. Dat is ongeveer equivalent aan 2 stuks M67 handgranaten. Voor de hele brug (3 liggers) is dan gerekend 2,28 kilo TNT, terwijl de klassieke methode volgens militaire vuistregels ca. 15 kilo vereist.

Samenvattend biedt flenswegblazing een goedkoper, makkelijker te vervoeren, minder gevaarlijk en effectief alternatief voor brugsabotage. Aanbevolen wordt om vervolgonderzoek te doen middels experimenten met meer geavanceerde materiaalmodellen voor nog beter inzicht in de effectiviteit van flenswegblazing als vorm van sabotage.

Nomenclatuur

Symbool	*Beschrijving*	*Eenheid*
F	*Kracht*	*N*
ρ	*Dichtheid schokgolf*	*kg/m³*
v	*Snelheid*	*m/s*
M	*Massa*	*kg*
R	*Straal*	*m*
t	*Tijd*	*s*
u	*Uitwijking*	*m*
c	*Dempingscoëfficiënt*	*N·s/m*
k	*Veerconstante*	*N/m*
ζ	*Dempingsratio*	*–*
E	*Elasticiteitsmodulus*	*Pa*
I	*Traagheidsmoment*	*m⁴*
l	*lengte*	*m*
f_y	*Vloeispanning*	*Pa*
b_f	*Flensbreedte*	*m*
t_f	*Flensdikte*	*m*
u_y	*Uitwijking bij vloeien*	*m*
u_{breuk}	*Uitwijking bij breuk*	*m*
Δl	*Materiaalverlenging*	*m*
A	*Oppervlakte*	*m²*

1 Inleiding

Sabotage is een doelbewuste actie om de positie van de vijand te verzwakken en wordt in veel oorlogen toegepast. Sabotage komt in meerdere vormen en is meestal gericht op vitale voorzieningen, zoals drinkwater, elektriciteit en infrastructuur. Het grootste deel van deze sabotage wordt toegepast op infrastructuur en dan wel op één van de belangrijkste onderdelen van infrastructuur, namelijk bruggen. Een veel gekozen vorm van sabotage is het laten plaatsvinden van grote explosies. Het gehele wegdek wordt hierdoor weggeblazen of het landhoofd wordt dusdanig verwoest dat de brug direct instort.
Een andere mogelijke vorm van sabotage van een brug is flenswegblazing. Daar richt dit BEP zich op en met name op flenswegblazing bij liggerbruggen. De meeste liggerbruggen hebben stalen i-profiel liggers. Een i-profiel bestaat uit 2 flensen die verbonden zijn met een lijf. De belangrijkste functie van de flenzen is om de momentkrachten af te dragen die uitgeoefend wordt op het i-profiel. Door deze flens weg te blazen zal de ligger het gewicht van de brug niet meer kunnen dragen en vervolgens instorten. Maar hoeveel explosieve kracht is ervoor nodig om de flenzen weg te blazen en hoeveel is dit in vergelijking met andere vormen van sabotage? In dit BEP zal gekeken worden naar de effectiviteit van flenswegblazing als vorm van sabotage bij liggerbruggen.

2 Probleem omschrijving

2.1 Achtergrond probleem

In tijden van oorlog speelt sabotage van de vijand een grote rol in effectieve oorlogvoering. Het doel van sabotage is vaak om vitale infrastructuur uit te schakelen. Door infrastructuur van de vijand te saboteren tast je de logistieke capaciteit van de vijand aan. Bruggen zijn om die reden een aantrekkelijk doel voor sabotage. Denk aan de sabotage van de Krimbrug door Oekraïne. Traditioneel gezien worden bruggen opgeblazen door een gat in het wegdek te blazen of het landhoofd van de brug op te blazen. Voor dit opblazen zijn vaak grote hoeveelheden explosief nodig aangezien er een groot deel van de constructie weg geblazen moet worden. Doordat grote hoeveelheden explosieven nodig zijn, zorgt dit ervoor dat een sabotage operatie veel logistieke problemen met zich meebrengt en de mogelijkheid tot ontdekking van de operatie wordt vergroot. Het opblazen van selectieve delen van een brug biedt wellicht een mogelijkheid om hetzelfde effect te bereiken maar dan met minder explosieven. Minder benodigde explosieven zouden voor een minder complexe logistiek operatie zorgen, goedkoper zijn en de kans tot ontdekking verkleinen.

2.2 Probleemdefinitie

Als specifieke vorm van sabotage wordt in dit BEP gekeken naar flenswegblazing.
Om een antwoord op onderstaande onderzoeksvraag te vinden, moet de reactie van de flens op een explosie nader onderzocht worden.
Deze reactie is als volgt geschematiseerd, met een paar aannames.
De explosie wordt geschematiseerd als een uitzettende sferische bol. De punt van deze uitzetten raakt als eerst de rand van de flens. Doordat de punt als eerste de rand van de flens raakt, wordt het falen van de flens door geschematiseerd naar een puntlast. Een explosie heeft uiteraard effect op een groter deel van de constructie, maar dit wordt buiten beschouwing gelaten in dit BEP.



Figuur 1 Schematisering van de explosie als puntlast

2.3 Doelstelling

Het doel van dit BEP is antwoord geven op de onderzoekvraag: **kan flenswegblazing een effectieve manier van sabotage zijn, vergeleken met andere sabotagevormen.**
Deze vraag wordt beantwoord door de reactie van een i-profiel te modeleren. Het resultaat van deze modelering wordt vergeleken met een andere vorm van sabotage waarna een uitspraak kan worden gedaan over de effectiviteit

3 Schematisering kracht

Een explosie is een dynamisch complexe belasting wat complexe effecten heeft op een object waarmee het in contact komt. Om het effect van een explosie op een voorwerp te kunnen analyseren, versimpelen we de belasting door toepassing van een schematisering.
In dit BEP wordt ervoor gekozen om deze kracht te schematiseren als een sferisch uitzettende bol. Deze uitzettende bol wordt gecreëerd door het golffront van de explosie. De punt van dit golffront raakt als eerste de flens, waardoor de kracht die hierop wordt uitgeoefend als volgt benaderd kan worden.
De uitgeoefende kracht wordt benaderd met de dynamische druk die uitgevoerd wordt door de explosie.

$$F_{exp} = \frac{1}{2} * \rho * v^2$$

Waarin:

ρ	Schokfrontdichtheid
v	Propagatiesnelheid explosie door lucht (6900 m/s voor TNT (Cooper, 1996))

De schokgolfdichtheid staat voor de dichtheid van de halve schokgolf bol. Aangezien slechts de helft van deze schokgolf in aanraking komt met de flens, wordt hier gerekend met de helft van de schokgolf. Hierdoor wordt de formule voor de schokfrontdichtheid:

$$\rho = \frac{M}{\frac{2}{3} * \pi * R^3}$$

Waarin:

M	Massa TNT
R	De sferisch uitdijende explosie

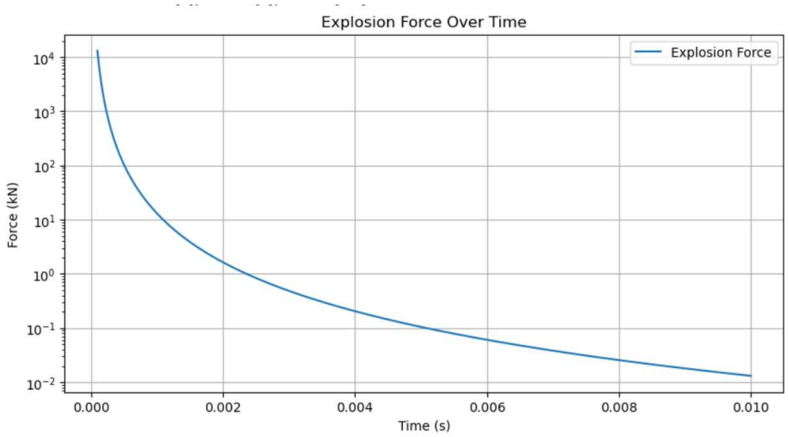
De grote van R is tijdafhankelijk en wordt bepaald door:

$$R = vt$$

Volledig uitgeschreven resulteert dit in de volgende formule

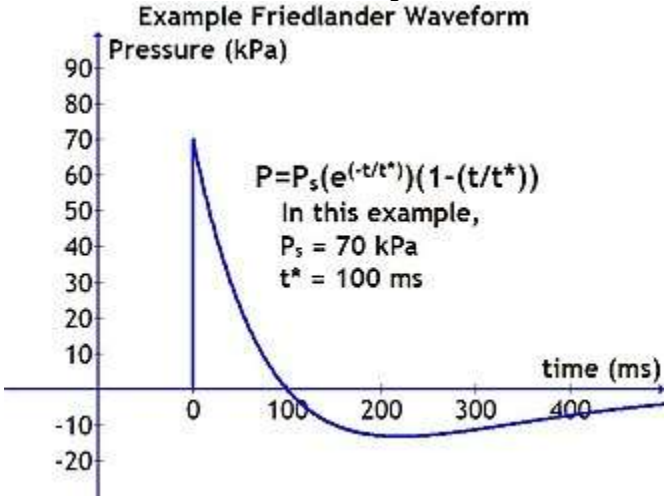
$$F_{exp} = \frac{\frac{1}{2}M}{\frac{2}{3}\pi(vt)^3} * v^2 = \frac{3M}{4\pi vt^3}$$

Een beperking van de formule is echter wel dat deze in zijn huidige vorm voor een oneindig grote kracht zorgt in het tijdstip t=0. Hier wordt rekening mee gehouden in het rekenmodel voor de kracht toe te passen een erg kleine tijdstap na t=0.
Over een tijdsinterval van 10ms ziet het verloop van de kracht op de flens er als volgt uit:



Figuur 2 Kracht van de explosie uitgezet over tijd

In de grafiek is te zien dat de kracht met een exponentiele afname verloopt. Dit kracht verloop is wat te verwachten is bij een explosieve belasting. Kijkend naar een ideale situatie voor een explosie ziet het druk verloop volgens de Friedlander curve er als volgt uit:



Figuur 3 Friedlander curve (Fisico2000, 2011)

Hierin is dezelfde exponentiele afname in kracht te zien. In de schematisering van de kracht is er echter geen negatief deel. De aanname is dat de flens al afgebroken zal zijn voordat dit negatieve deel bereikt wordt. Om die reden wordt het niet als erg gezien dat dit negatieve deel van de druk golf niet mee gemodelleerd wordt. Daarnaast is het toepassen van de Friedlander curve erg complex en daarom wordt voor de hier eerder afgeleide benadering gekozen als schematisering van de explosie.

4 Rekenmodel

De reactie van de flens op een explosie is gemodelleerd aan de hand van een systeem van differentiële bewegingsvergelijkingen. De uitwijking van de flens zal worden bepaald aan de hand van onderstaande set van bewegingsvergelijkingen.

Situatie 1, explosie wordt toegepast:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{exp}$$

Situatie 2, flens gaat vloeien:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + F_p = F_{exp}$$

Hieronder volgt een toelichting van de bewegingsvergelijking per situatie en zo nodig verdere achtergrondinformatie.

4.1 Situatie 1, Explosie wordt toegepast

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_{exp}$$

In situatie 1 reageert de flens als een massa-veer systeem met demper. De dempingscoëfficiënt wordt bepaald aan de hand van de volgende vergelijking:

$$c = 2\zeta\omega_n m$$

Waarin:

ζ = Dempingsratio

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ = eigen frequentie

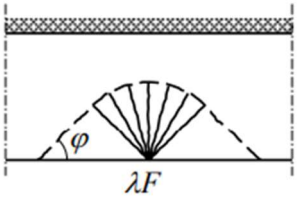
m = massa

De dempingsratio wordt aangenomen als 1%. Dit valt in de verwachting voor staal (Adams & Askenazi, 1999)

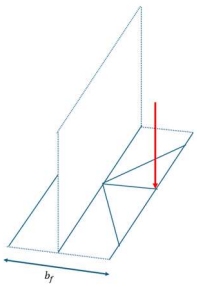
4.1.1 Bepaling Veerconstante k

De veerconstante van de flens wordt bepaald aan de hand van een drietal aannames.

De eerste aanname is dat de flens zal falen als een plaat met een vrije rand. Het faal mechanisme zal er dan schematisch als volgt uitzien.



Figuur 4 Bezwijking van een plaat met een vrije rand (Vrouwenvelder & Witteveen, 2003)



Figuur 5 Visualisatie aangenomen bezwijkgebied flens

De tweede aanname is dat de elastische kracht die de flens tegen de explosie inbrengt, wordt gezien als een combinatie van twee verschillende weerstandkrachten die parallel werken. Door deze parallelle werking kunnen deze twee veren beschouwd worden als één veer. De veerconstante is dan de optelling van de twee veerconstanten van de parallelle-veren.
Deze twee krachten worden geschematiseerd als een kracht op een uitkragende ligger en als een kracht op een dubbel ingeklemde ligger. De weerstandkrachten worden dan ook berekend met de bijbehorende bekende vergelijkingen voor deze situaties.
De bekende vergelijkingen voor beide situaties is als volgt:

Enkel ingeklemde ligger:

$$w = \frac{Fl^3}{3EI}$$

Bezwijkgebied 1

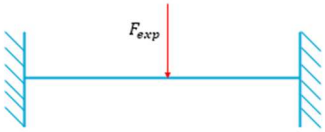


Figuur 6 Visualisatie elastisch falen bezwijkgebied 1

Dubbel ingeklemde ligger:

$$w = \frac{1}{192} * \frac{Fl^3}{EI}$$

Bezwijkgebied 2



Figuur 7 Visualisatie elastisch falen bezwijkgebied 2

In deze vergelijkingen, welke worden omgebouwd naar een standaard veerkracht formule, worden de veerconstanten als volgt berekend:

$$F = k * u\ (standaard\ formule) => k = \frac{F}{u}$$

$$k_1 = \frac{3EI}{l_1^3}$$

$$k_2 = \frac{192EI}{l_2^3}$$

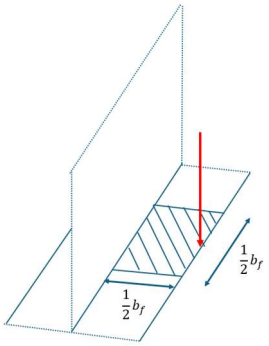
$$k_{tot} = k_1 + k_2$$

De elasticiteitsmodulus voor beide delen is hetzelfde, namelijk 210 Gpa . Het traagheidmoment en de lengte verschillen wel per veerconstante.
Om het traagheidmoment, en andere variabelen, te kunnen bepalen moet gedefinieerd worden wat de afmetingen zijn van de verschillende bezwijkgebieden. De afmetingen van dit gebied is de derde aanname.

4.1.2 Bezwijkgebied 1, enkel ingeklemde ligger

Voor bezwijkgebied 1 worden de afmetingen aangenomen van een halve flensbreedte lang en een halve flensbreedte breed. Verschillende variabelen worden dus als volgt gedefinieerd:

$$A_1 = \left(\frac{b_f}{2}\right) * \left(\frac{b_f}{2}\right)$$
$$m_1 = A * t_f * \rho$$
$$I_1 = \frac{1}{12} * \left(\frac{b_f}{2}\right) * t_f^3$$
$$l_1 = \left(\frac{b_f}{2}\right)$$

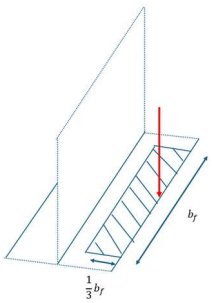


Figuur 8 Visualisatie bezwijkgebied 1

4.1.3 Bezwijkgebied 2, dubbel ingeklemde ligger

Voor bezwijkgebied 2 worden de afmetingen aangenomen van een hele flensbreedte lang en een derde flensbreedte breed. Verschillende variabelen worden dus als volgt gedefinieerd:

$$A_2 = \left(\frac{b_f}{3}\right) * b_f$$
$$m_2 = A * t_f * \rho$$
$$I_2 = \frac{1}{12} * \left(\frac{b_f}{3}\right) * t_f^3$$
$$l_2 = b_f$$



Figuur 9 Visualisatie bezwijkgebied 2

Voor de totale massa van het reagerende flensdeel, wordt het volume van beide flensdelen samengenomen en wordt het volume berekend als:

$$V_{tot} = \left(\frac{bf}{2} * \frac{bf}{6} + bf * \frac{bf}{3}\right) * tf$$
$$m_{tot} = V_{tot} * \rho$$

4.1.4 Bepaling plastische weerstandkracht

Situatie 1 eindigt als de flens een uitwijking bereikt waarop de flens gaat vloeien. Deze uitwijking is bereikt als de kracht die de veer levert, even groot is als de plastische weerstandskracht.

Hoe groot deze plastische weerstand kracht is, wordt bepaald aan de hand van virtuele arbeid.

Als de verbindingen aangenomen worden als een plastisch scharnier, kan aan de hand van de momentweerstand van het betreffende deel de weerstandkracht berekend worden.
De momentweerstand van een rechthoekig deel wordt als volgt berekend:

$$M_p = \frac{1}{6} * f_y * b * h^2$$

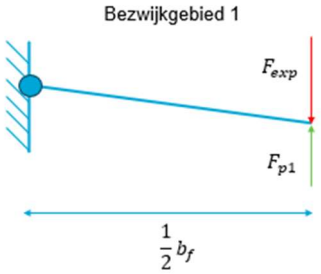
De plastische weestandkrachten worden vervolgens met bekende formules voor moment in de inklemming berekend:

$$M_{p1} = \frac{1}{4} F_{p1} l_1$$
$$M_{p2} = \frac{1}{8} F_{p2} l_2$$

Door deze formules om te bouwen krijg je de volgende set aan vergelijkingen

$Deel\ 1$:

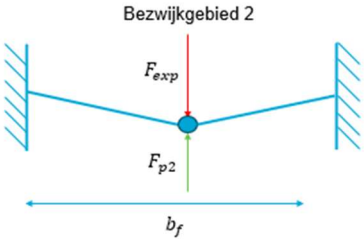
$$M_{p1} = fy * \frac{1}{6} * tf^2 * \left(\frac{bf}{2}\right)$$
$$F_{p1} = 4 * \frac{M_{p1}}{l_1}$$



Figuur 10 Visualisatie plastisch falen bezwijkgebied 1

$Deel\ 2$:

$$M_{p2} = fy * \frac{1}{6} * tf^2 * \left(\frac{bf}{3}\right)$$
$$F_{p2} = 8 * \frac{M_{p1}}{l_2}$$



Figuur 11 Visualisatie plastisch falen bezwijkgebied 2

Dus de plastische weerstandkracht wordt dan:

$$F_p = 4 * \frac{M_{p1}}{l_1} + 8 * \frac{M_{p2}}{l_2}$$

De uitwijking die nodig is om de flens te laten vloeien kan nu berekend worden aan de hand van het lineaire verband wat gecreëerd wordt door de veerconstante

$$u_y = \frac{F_p}{k_{tot}}$$

Als deze uitwijking bereikt wordt zal het bezwijken van de flens zich naar situatie 2 verplaatsen.

4.2 Situatie 2, De flens gaat vloeien

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + F_p = F_{exp}$$

In de tweede situatie wordt de veerconstante dus vervangen door de plastische weerstandskracht, de demping zal echter nog wel blijven meespelen en blijft onveranderd. De flens blijft in deze situatie tot deze tot stilstand komt of afbreekt.

4.3 Uiterste uitwijking bepalen

De uiterste uitwijking van de flens wordt bepaald aan de hand van trekproeven van stalen staven met een vergelijkbare dikte als de flens. Deze trekproeven zijn uitgevoerd tijdens de minor bend and break op de TU delft. Uit deze trekproeven kan worden bepaald wat de benodigde verlenging is van het stuk staal om het te laten breken.
Als deze verlenging bekend is, kan met behulp van de stelling van Pythagoras de benodigde uitwijking berekend worden. Die berekening ziet er als volgt uit:

$$\Delta l^2 = l^2 * u_{breuk}^2$$
$$u_{breuk} = \sqrt{\Delta l^2 - l^2}$$

Uit 4 trekproeven op een stuk staal met een dikte van 12mm, kwam een gemiddelde verlenging uit van 23,5 mm. Uit een trekproef en een proefstuk van 8 mm dik kwam een verlenging van 23,1mm. De experimentele data van de trekproeven zijn te vinden in **bijlage 1**.
Deze verlenging is gemeten over een lengte van 50mm . De flens is echter n keer zo lang zijn als het deel waarover de verlenging gemeten is. De verlenging kan dus niet simpelweg vermenigvuldigd worden met een factor n. Dit komt door de invloed van insnoering van het proefstuk. Bij het bijna bezwijken van het proefstuk zal een deel van het proefstuk een stuk dunner worden en op die plek afbreken. De lengte van deze insnoering is ongeveer zo groot als de dikte van het proefstuk. Om de werkelijk benodigde verlenging te berekenen moet de lengte van deze insnoering dus niet meegenomen worden. Hierdoor wordt de berekening als volgt

$$\Delta l_{flens} = \left(\Delta l_{proefstuk} - l_{insnoering}\right) * n + l_{insnoering}$$

Nu deze lengte verandering bekend is, kan de benodigde uitwijking voor de flens berekend worden met de eerder getoonde formule:

$$u_{breuk} = \sqrt{\Delta l^2 - l^2}$$

5 Numerieke model

In dit hoofdstuk volgt de uitleg over hoe het massa-veersysteem en de plastische reactie van de flens gecodeerd zijn in python als een numeriek model. De code wordt toegelicht en er wordt uitleg gegeven bij de gekozen numerieke methode. De volledige code is te vinden in **bijlage 2.**

5.1 Massa-veersysteem

In de code worden drie functies gedefinieerd, die benodigd zijn om tot een resultaat te komen. Een functie voor de explosie, voor het massa veersysteem en voor het vloeien van de flens. Deze zijn als volgt gecodeerd:

```
def explosie(t):
    return 3 * M / ( 4 * np.pi * Vexp * t**3 )

def massa_veer_systeem(t, y, m, k, c):
    x, v = y
    dxdt = v
    dvdt = (explosie(t)-k*x - c*v) / m
    return [dxdt, dvdt]

def vloeien(t, y, m, k, c):
    return y[0] - u_y
vloeien.terminal = False
vloeien.direction = 1
```

Figuur 12 Functies die het massa-veersysteem modeleren

De functies voor de explosie en voor het massa-veersysteem zijn eerder besproken en zijn niet veranderd. De vloeien-functie is echter wel bijzonder en van belang voor het vervolg van de simulatie nadat de flens is gaan vloeien. Dit wordt gedaan door te kijken wanneer de uitwijking dezelfde waarde heeft als u_y. Als deze waardes gelijk zijn aan elkaar, dan wordt opgeslagen wat de tijd, snelheid en uitwijking was van de flens. Deze waardes worden vervolgens gebruikt als beginvoorwaardes bij het tweede deel van de simulatie.

5.2 Plastische reactie

In het tweede deel van de simulatie wordt de veer vervangen door de eerder berekende plastische weerstandskracht. Hierdoor veranderen de functies en zien deze er als volgt uit:

```
def explosie1(t):
    return 3 * M / ( 4 * np.pi * Vexp * t**3 )

def Fp_apl(v):
    return Fp if v >= 0 else 0.0

def plastisch(t, y):
    x, v = y
    dxdt = v
    dvdt = (explosie1(t) - Fp_apl(v) -c*v) / m
    return [dxdt, dvdt]

def breken(t, y):
    return y[0] - u_u
breken.terminal = True
breken.direction = 1
```

Figuur 13 Functies die de plastische reactie modeleren

Hierin is te zien dat de explosie-functie hetzelfde is, maar de andere functies iets veranderd zijn en dat er een nieuwe functie is, genaamd Fp_apl. Deze functie staat voor de plastische weerstandkracht. Deze kracht blijft uitgeoefend worden op de flens, zolang er nog snelheid aanwezig is. De Fp_apl functie zorgt er dus voor dat deze kracht nul is, als de snelheid ook nul is. In functie plastisch is te zien dat de veerconstante is vervangen door de plastische weerstandskracht. Als laatste in de vloeien-functie vervangen door de breken-functie. Deze twee functie functioneren wezenlijk hetzelfde alleen met een andere uitwijkingswaarde. De breken-functie stopt de simulatie als de breekuitwijking bereikt is.

Het oplossen van het numerieke model wordt gedaan met een oplosser van Scipy, welke keuze geeft uit meerdere mogelijke numerieke methodes om het systeem mee op te lossen. Om een gemotiveerde keuze te maken tussen de mogelijke oplosmethodes, zijn de absolute fouten van verschillende methodes berekend bij een ongedempt massa-veersysteem. Een ongedempt massa-veersysteem wordt gebruikt aangezien deze analytisch is uit te rekenen met de formule:

$$u(t) = A * \cos(\omega_n * t + \phi)$$

Het ongedempte massa-veersysteem wordt vervolgens als volgt gecodeerd en een begin uitwijking gegeven van 1mm.

```
def Massa_veer_simpel(t, y, m, k, c=0):
    x, v = y
    dxdt = v
    dvdt = (-k * x - c * v) / m
    return [dxdt, dvdt]
```

Figuur 14 Code voor het ongedempte massa-veersysteem

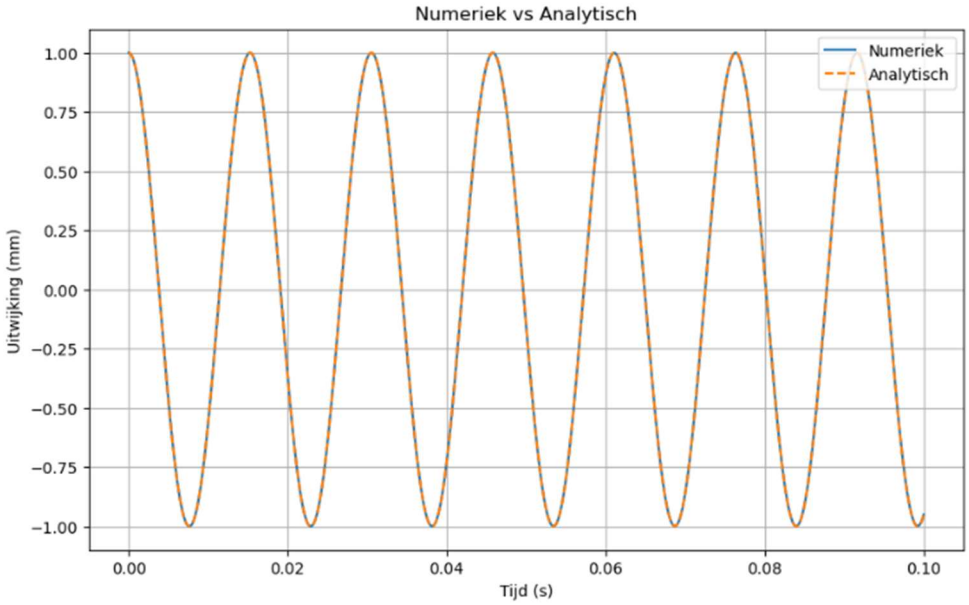
Over een tijdspanne van 0.3 seconden worden de berekende uitwijkingen van verschillende methodes vergeleken met de analytisch berekende uitwijking. Dit produceert de volgende tabel:

Numerieke methode	Maximale absolute fout [mm]
RK45	0.055515
RK23	0.188160
DOP853	0.009425
Radau	0.003878
BDF	0.056828
LSODA	0.062810

De kleinste absolute fout is met de Radau methode, daarom wordt deze gebruikt om het systeem op te lossen.
Normaliter zou je ook een optimale stapgrootte moeten berekenen waarmee je het model uitrekent. Dit doet de oplosser met meerdere interne checks en hoeft dus niet zelf bepaald te worden. De tijdstap komt uit rond de 10^-6 seconden.

6 Validatie massa-veersysteem

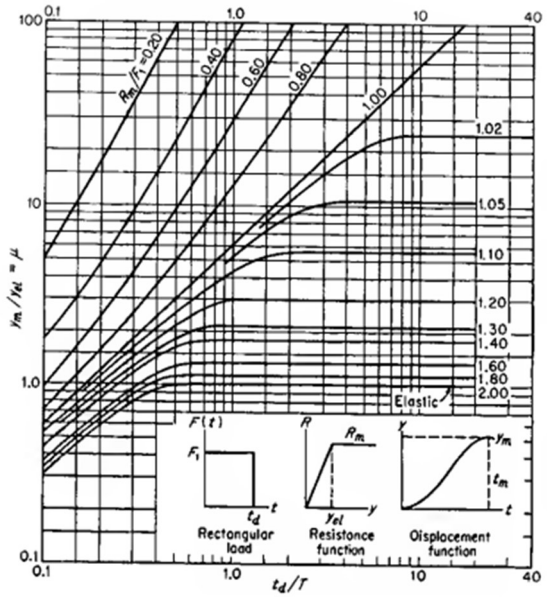
In dit hoofdstuk volgen de manieren waarmee het massa-veersysteem gevalideerd is.
Eén van de eerste validatie is in principe al uitgevoerd bij de keuze welk numerieke methode gebruikt wordt om het systeem op te lossen, namelijk de fout berekenen tussen de oplossing van het model en de analytische oplossing. Deze analyse uitvoerend, leidt dit tot de volgende waardes:
Maximale fout: 1.42*10^-3 mm
Gemiddelde fout: 3.83*10^-4 mm



Figuur 15 Grafiek met zowel numerieke als analytische oplossing

Deze fout waardes zijn dusdanig klein dat ze als acceptabel worden gezien.

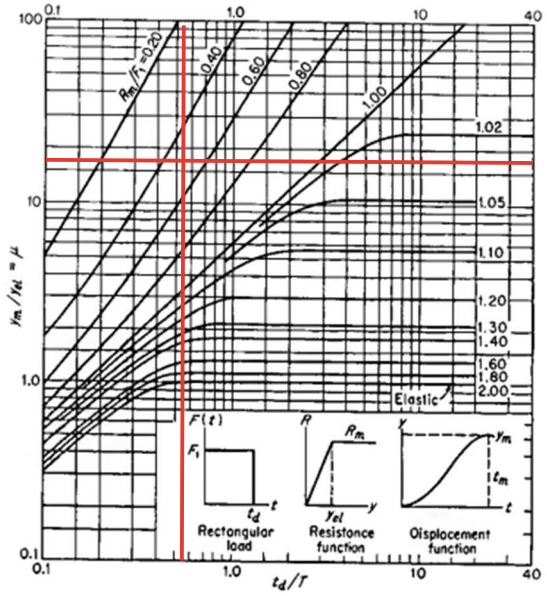
Verder kan het massa-veersysteem ook gecontroleerd worden door een al eerder doorgerekend systeem. Voor dit doorgerekende systeem is een grafiek geproduceerd waarmee je waardes na kan rekenen en dus het systeem kan controleren. Deze grafiek is te vinden in (Biggs, 1964)



Figuur 16 Figuur waarmee het massa veersysteem gecontroleerd wordt (Biggs, 1964)

Om het model te controleren, definiëren we de kracht weer als stapfunctie met een kracht F en met een bepaalde stoptijd t_d. Veel van de gevraagde waardes in de grafiek weten we al zeker, behalve de trillingstijd T. Door de bekende waardes in te vullen, wordt de gevonden trillingstijd vergeleken met die aanwezig in het massa-veersysteem. Het systeem in de grafiek is ongedempt dus de demping in het massa-veersysteem wordt op nul gezet. Met de waardes van de voorbeeldberekening, welke later uitgebreid besproken wordt, ingevuld ziet de grafiek er als volgt uit:

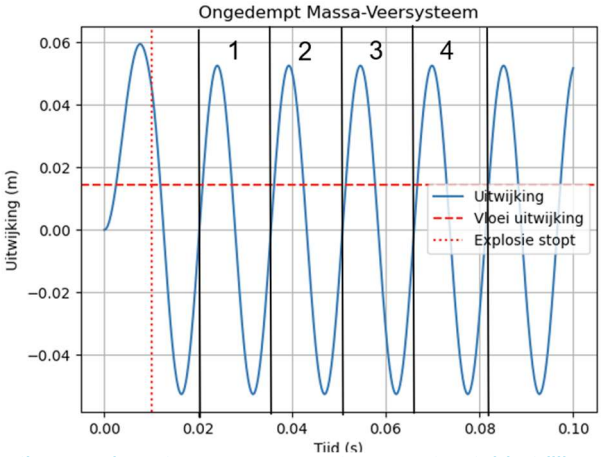
$$\frac{y_m}{y_{el}} = \frac{344.24}{14.53} = 23.68, \quad \frac{R_m}{F} = \frac{39.44}{87.6} = 0.45$$



Figuur 17 Figuur met relevante waardes ingevuld (Biggs, 1964)

$$\frac{t_d}{T} = 0.65 \Rightarrow T = \frac{0.01}{0.65} = 0.015\ s$$

Deze trillingstijd vergelijkend met de aanwezige trillingstijd in het massa-veersysteem bij dezelfde variabelen. In figuur 11 is de uitwijking grafiek voor de gegeven waardes met de trillingen erin geteld te zien.



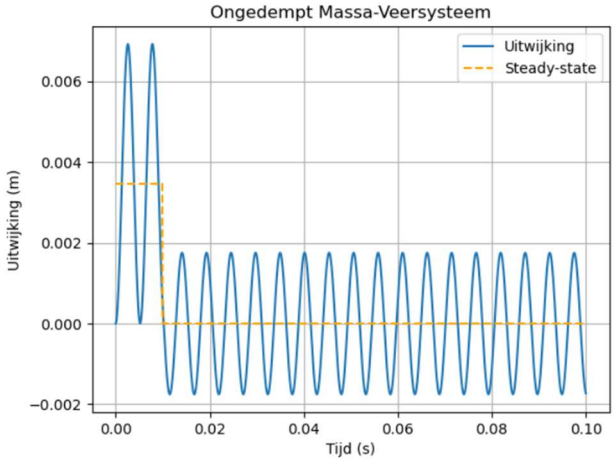
Figuur 18 Reactie ongedempt massa-veersysteem met getelde trillingen aangegeven

In het massa-veersysteem zijn iets minder dan 4 trillingen in 0.06 seconden. Volgens de gevonden trillingstijd behoren er in 0.06 seconden 3,9 trillingen te zitten. De gevonden trillingstijd komt dus zeer dicht bij de berekende. Verschillen zullen uiteraard bestaan door afleesfouten.

Als laatste validatie wordt gekeken naar de evenwichtsstand van het massa-veersysteem. Analytisch is deze te berekenen met

$$u_{evenwicht} = \frac{F}{k}$$

Door deze in te tekenen in het massa-veersysteem, is te zien of het model de juiste evenwichtsstand heeft. Bij deze check is de kracht weer een stapfunctie en is het veer constante met een factor 10 vergroot om de oscillaties beter zichtbaar te maken.



Figuur 19 Reactie massa-veersysteem met evenwichtsstand erin geplot

In figuur 12 is te zien dat het model naar behoren functioneert en oscilleert rond zijn steady-state. Ook is te zien dat de maximale en minimale uitwijking ongeveer twee keer zo groot is als de evenwichtsstand ten tijde van de explosie. Deze dynamische uitwijking is ongeveer 0.007 wanneer de evenwichtsstand rond de 0.0035 ligt.

Na deze drie validaties uitgevoerd te hebben kan er gezegd worden dat het massa-veersysteem naar behoren functioneert en gebruikt kan worden voor analyse doeleinden.

7 Voorbeeldberekening Rijnbrug Rhenen

Om de effectiviteit van flens sabotage te evalueren zal er gekeken worden naar een stalen liggerbrug in Nederland, de Rijnbrug Rhenen. Deze brug is interessant om te bekijken aangezien deze tijdens de tweede wereldoorlog door zowel de Nederlandse soldaten als de geallieerde is opgeblazen als vorm van sabotage (De Nederlander, 1940) (Stemmen uit Londen, 1944)



Figuur 20 Onderzijde Rijnbrug Rhenen (Chris)

De brug heeft een totale lengte van 523,4 meter en een hoofdoverspanning van 143,25 meter en 14,5 meter breed. Op basis van foto's wordt de flensbreedte geschat op 700mm en de flensdikte op 10 mm De staal sterkte wordt aangenomen als S355.
De volledige berekening is als volgt:

1. Geometrische eigenschappen

- Flensbreedte, bf=700 mm=0.7 m
- Flensdikte, tf=10 mm=0.01 m
- Dichtheid van staal, ρ=7850 kg/m3
- Elasticiteitsmodulus, E=210 GPa=210×109 N/m2
- Vloeispanning, fy=355 MPa=355×106 N/m2

2. Volume en massa van de flens

Het totale volume van de flens wordt berekend als:

$$V_{tot} = \left(\frac{bf}{2} \cdot \frac{bf}{6} + bf \cdot \frac{bf}{3}\right) \cdot tf = \left(\frac{0.7}{2} \cdot \frac{0.7}{6} + 0.7 \cdot \frac{0.7}{3}\right) \cdot 0.01 = 0.00204167\, m^3$$

De totale massa is:

$$m_{tot} = V_{tot} \cdot \rho = 0.00204167 \cdot 7850 = 16.027\, kg$$

3. Lengtes voor de stijfheidsberekening

$$l_1 = \frac{b_f}{2} = \frac{700}{2} = 350\, mm = 0.35m$$
$$l_2 = b_f = 700\, mm = 0.7\, m$$

4. Traagheidsmomenten

$$I_1 = \frac{1}{12}\left(\frac{b_f}{2}\right) t_f^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{700}{2}\right)(10)^3 = 29166.67\, mm^4 = 2.9167 * 10^{-9}\, m^4$$
$$I_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{b_f}{3}\right) t_f^3 = \frac{1}{12}\left(\frac{700}{3}\right)(10)^3 = 19444.44\, mm^4 = 1.9444 * 10^{-9}\, m^4$$

5. Berekening van de stijfheid

De stijfheid van elk segment wordt berekend als:

$$k_1 = \frac{3EI_1}{l_1^3} = \frac{3 * 210 * 10^9 * 2.9167 * 10^{-9}}{(0.35)^3} = 42{,}86\, MN/m$$

$$k_2 = \frac{192EI_2}{l_2^3} = \frac{192 * 210 * 10^9 * 1.9444 * 10^{-9}}{(0.7)^3} = 228.57\ MN/m$$

$$k_{tot} = k_1 + k_2 = 271.43\ MN/m$$

6. Plastisch moment

Het plastisch moment voor de twee segmenten is:

$$M_{p1} = f_y * \frac{1}{6} * t_f^2 * \left(\frac{b_f}{2}\right) = 355 * 10^6 * \frac{1}{6} * (0.01)^2 * \left(\frac{0.7}{2}\right) = 2070.83\ Nm$$

$$M_{p2} = f_y * \frac{1}{6} * t_f^2 * \left(\frac{b_f}{3}\right) = 355 * 10^6 * \frac{1}{6} * (0.01)^2 * \left(\frac{0.7}{3}\right) = 1380.55\ Nm$$

7. Plastische kracht (Fp)

De plastische kracht wordt bepaald uit evenwicht:

$$F_p = \frac{4M_{p1}}{l_1} + \frac{8M_{p2}}{l_2} = 4 * \frac{2070.83}{0.35} + 8 * \frac{1380.55}{0.7} = 39444.34\ N = 39.44\ kN$$

8. Vloeiverplaatsing (uy)

De vloeiverplaatsing is:

$$u_y = \frac{F_p}{k_{tot}} = \frac{39444.34}{271.43 * 10^6} = 14.53\ mm$$

9. Breukverplaatsing (u_{breuk})

De breukverplaatsing is

$$\Delta l_{flens} = \left(\frac{23.5 + 23.1}{2} - 10\right) * 14 + 10 = 196.2\ mm$$

$$u_{breuk} = \sqrt{-\left(\frac{196.2}{1000}\right)^2 + \left(\frac{700}{2}\right)^2} = 344\ mm$$

Deze berekening geeft dus de volgende waardes:

$u_{breuk} = 344\ mm$

$u_y = 14.53\ mm$

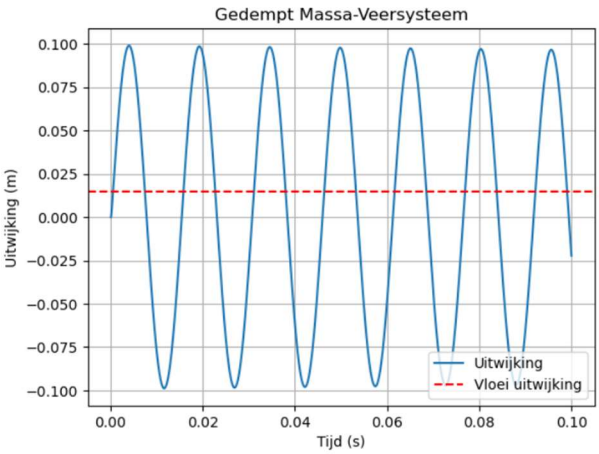
$k_{tot} = 271.43\ MN/m$

$Fp = 39.44\ kN$

7.1 Bezwijksituaties

Door de hierboven berekende parameters in te vullen kan nu elke bezwijksituatie gesimuleerd worden. In figuur 14 en 15 zijn de resultaten van de simulatie te zien van situatie 1 zien.

7.1.1 Situatie 1, Explosie wordt toegepast



Figuur 21 Waardes bij vloeien van de flens

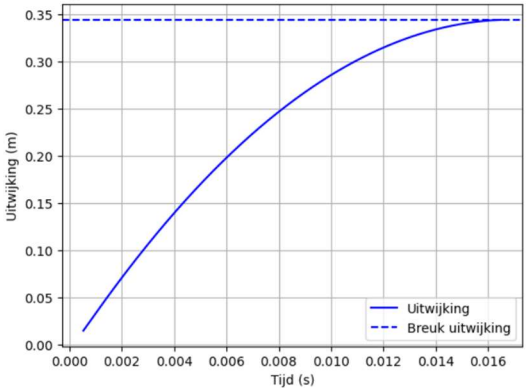
```
Event Summary
------------------------------
Time [s]         0.00054
Position [m]     0.01453
Velocity [m/s]   39.04203
------------------------------
```

Figuur 22 gesimuleerde reactie massa-veersysteem

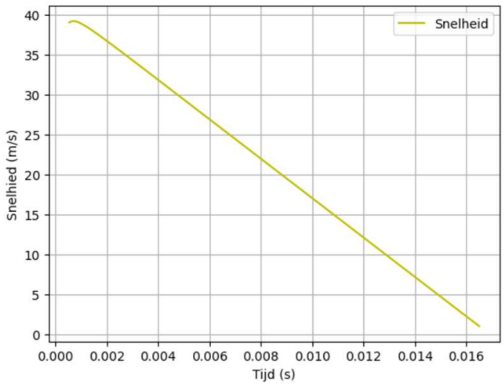
In figuur 14 staat de uitwijkingsgrafiek van het massa-veersysteem (situatie 1). In figuur 15 is de samenvatting te zien van het moment dat de flens de vloei uitwijking heeft bereikt. Dat zijn een snelheid van 39.04 m/s een uitwijking van 0.01453 (wat zoals verwacht overeenkomt met de vloei uitwijking. Het tijdstip van afbreken is 0.00054 seconden. Deze waardes worden gebruikt voor de vervolg simulatie

7.1.2 Situatie 2 flens gaat vloeien en breekt af of komt tot stilstand

De figuren 16 en 17 zijn de uitzettingen van uitwijking en snelheid tegen de tijd van de flens nadat deze is gaan vloeien.



Figuur 23 Plastische uitwijking van de flens



Figuur 24 Snelheid van de flens

In de figuren 16 en 17 is goed te zien dat de uitwijking geleidelijk afneemt door de afremming van de plastische kracht. Het gewicht van de TNT wordt meerdere malen geïtereerd tot een zo laag mogelijke gevonden is. In het geval van de Rijnbrug Rhenen was dit **0.3793 kg**, dit is te vergelijken met twee M67 handgranaten. Eén handgranaat heeft 180 gram composiet B. composiet B is equivalent aan 1.3 keer het gewicht van TNT (DEPARTMENT OF THE ARMY, 1992) Dus deze 180 gram composiet B staat ongeveer gelijk aan 240 gram TNT.
Met dit gewicht wordt één flens weggeblazen. Ervan uitgaand dat de tweede flens van de ligger hetzelfde nodig heeft (dit zal in werkelijkheid zeker lager liggen maar dit is een conservatieve aanname) en dit over de drie aanwezige liggers, is er in totaal **2,28 kg TNT** nodig om de Rijnbrug bij Rhenen op te blazen. in totaliteit zou er dus ongeveer 12 M67 granaten zijn.

8 Vergelijking militaire handboek

Om uitspraken te doen over de effectiviteit van flenswegblazing als vorm van sabotage, wordt in dit hoofdstuk een vergelijking gemaakt met sabotage standaarden uit een militair handboek (US army, 1932)
In dit militaire handboek staat een vuistregel voor het wegblazen van een i-profiel of kolommen in het algemeen welke luidt:

$$N = \frac{3}{4} * A$$

Waarin:

N	Aantal blokken TNT van een halve pond
A	doorsnede oppervlakte in vierkante inches

Uitgaande van een hoogte van 0,5 meter wordt het oppervlak van de doorsnede van het i-profiel

$$A = \left(2 * b_f * t_f\right) + \left(t_f * \left(0.5 - 2 * t_f\right)\right)$$
$$= (2 * 0.7 * 0.01) + \left(0.01 * (0.5 - 2 * 0.01)\right)$$
$$= 0.0188\, m^2 = 29.14\, inch^2$$

Met dit oppervlak wordt het benodigde aantal ponden TNT

$$\frac{3}{4} * 29.14 = 21.855 = 22 * 0{,}5 = 11\, pond = 4.99\, kg = \mathbf{5\ kg}$$

Deze 5kg staan ongeveer gelijk aan 21 M67 impact granaten.
Met de drie liggers die de brug heeft, is er volgens het handboek **15 kg** benodigd om de liggers van de brug op te blazen.

Deze vergelijking toont het verschil aan in benodigde hoeveelheid explosieven bij de standaard manier van brug liggers opblazen en de doelgerichte, flenswegblazing, methode

9 Discussie en aanbevelingen

In dit BEP zijn meerdere aannames gedaan en beslissingen genomen in de wijze van onderzoek. Hieronder volgt een discussie over het uitgevoerde onderzoek waarbij met kritische blik naar het onderzoek en de aannames wordt gekeken. Vervolgens worden er aanbevelingen gedaan voor mogelijk vervolgonderzoek.

Kracht schematisering
De wijze waarop de kracht gemodelleerd is op de flens ten gevolge van de explosie, is niet compleet representatief aan de werkelijkheid. Deze is nu gemodelleerd als een uitzettende druk bol die oneindig doorgaat in de tijd. Hierbij wordt geen rekening gehouden met mogelijke reflectie van de golven door het i-profiel of nabrand zones ect.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is om een betere simulatie te maken van de kracht uitoefening van een explosie op een flens als deze explosie tot ontploffing wordt gebracht op de rand van de flens.

Versimpelde ligger reactie
Het model van de reactie van de flens op de explosie is versimpeld. De afmetingen van het bezwijk gebied zijn geschat en de reactiekrachten, zoals het veer constante en de plastische kracht, zijn berekend aan de hand van deze aannames. De juistheid van deze waardes is niet gevalideerd met experimentele data waardoor de juistheid van deze waardes niet gegarandeerd kan worden.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is om met proeven of uitgebreidere berekenmethodes de reactiekrachten van de flens te bepalen. Door deze krachten te valideren met behulp van bezwijkingsproeven of FEM-software kan er met meer zekerheid uitspraken worden gedaan over de uitkomsten van de simulaties.

Plotselinge overgang van elastisch naar plastisch falen
De simulatie van het falen gaat nu discontinue over van elastisch naar plastisch. In de werkelijkheid is de overgang van elastisch falen naar plastisch falen een geleidelijk proces. Het model is nu zo geconstrueerd dat wanneer de flens gaat vloeien deze meteen plastisch door faalt. Deze onmiddellijke overgang van elastisch naar plastisch heeft invloed op de benodigde hoeveelheid kracht die nodig is voor het falen.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is om de overgang van elastisch naar plastisch geleidelijke te maken, bijvoorbeeld door de veerconstante geleidelijk af te laten nemen en de plastische weerstandkracht geleidelijk toe te laten nemen in de buurt van het vloeipunt.

Lineair plastisch falen
Het plastische falen wordt nu gesimuleerd als een plateau in een spanningsrekdiagram. In werkelijkheid heeft het spanningsrekdiagram een opbollende vorm nadat het materiaal is gaan vloeien. Door dit plastisch falen als een plateau te modeleren betekent dat hoever de flens is uitgeweken geen invloed heeft op de plastische weerstandskracht, wat in werkelijkheid wel het geval is.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is de plastische weerstandskracht niet als constant te modeleren maar te verbinden aan de hoeveelheid uitwijking. Op deze manier is het plastisch falen realistischer gemodelleerd.

Daadwerkelijke instorten brug
Er is onderzoek gedaan naar wanneer de flens afscheurt maar niet of deze genoeg schade aanricht om de brug daadwerkelijk te laten instorten, dan wel onder zijn eigengewicht of door een passerend voertuig. De aanname is nu gemaakt dat de scheur, die ten gevolge van de explosie ontstaat, groot genoeg is om de brug te laten instorten.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is om door te rekenen aan de benodigde schade/scheur voor het laten instorten van de brug. Op deze wijze kan de effectiviteit nog beter gevalideerd worden.

Afmetingen flens
De afmetingen van de flens in de voorbeeldberekening, waarop een groot deel van de conclusie bepaald is, zijn slechts visueel geschat. Afmetingen zoals de dikte van de flens hebben een grote impact op de berekeningen in het model. Doordat deze afmetingen nu zijn geschat, kan er een vertekend beeld zijn ontstaan over de orde grootte van benodigde explosieven
Een aanbeveling is om daadwerkelijke metingen te doen van de afmetingen van de flens. Door daadwerkelijk te meten kan de er met meer vertrouwen gesteld worden in de conclusie.

Validiteit uiteindelijke uitwijking
Voor de berekening van de uiteindelijke uitwijking zijn er een totaal van acht trek proeven gebruikt om de benodigde verlenging te bepalen. Het verband van verlenging en staal dikte is echter niet verder onderzocht en als lineair aangenomen. Door de kleine hoeveelheid aan trekproeven is er variatie mogelijk van de resultaten die de uitkomst van de uiterste uitwijking kunnen beïnvloeden.
Een aanbeveling voor vervolgonderzoek is om meer onderzoek te doen naar de invloed van staal dikte en verlenging en meerdere staal trek proeven uit te voeren om meer zekerheid te hebben in de experimentele data.

10 Conclusie

Uit onderzoek blijkt dat flenswegblazing een effectieve vorm van sabotage kan zijn bij liggerbruggen. Dit wordt duidelijk door de kracht en het effect van de flenswegblazing en de kleine hoeveelheid explosieven die hierbij nodig zijn om een flens weg te blazen. In een voorbeeldberekening zijn er namelijk maar twee impact M56 granaten nodig voor het wegblazen van de flens. Dit maakt deze vorm van sabotage vele malen gemakkelijker om uit te voeren. De kleine hoeveelheid maakt het vervoer gemakkelijker, en zorgt voor een kleinere kans op ontdekking.

Ter vergelijking, de berekende hoeveelheid van het militaire handboek (US army, 1932) dat uitgaat van complete wegblazing van de ligger. Volgens deze handboek-methode is ongeveer een equivalent van 21 impact granaten nodig, waarmee verhoogde risico's van logistieke complexiteit, ontdekking en kosten gepaard gaan. Twee granaten is dan slechts een kleine hoeveelheid

Theoretisch kan flenswegblazing bij een ligger brug dus een effectieve vorm van sabotage zijn. Om de benodigde hoeveelheid explosieven met meer zekerheid en nauwkeurigheid te kunnen berekenen, is echter nog meer experimentele data nodig. De nu puur theoretisch berekeningen kunnen dan hiermee worden aangevuld voor nog beter inzicht in de effectiviteit van flenswegblazing als vorm van sabotage.

Bibliografie

Adams, V., & Askenazi, A. (1999). *Building Better Products with Finite Element Analysis.* Santa Fe: OnWord Press.

Biggs, J. (1964). *Introduction to structural dynamics.* New York: Mcgraw-hill book vompany.

Chris. (n.d.). Onderzijde van Rijnbrug Rhenen. *Onderzijde van Rijnbrug Rhenen.* Foto Chris Nederland.

Cooper, P. W. (1996). Retrieved from Google books: https://books.google.nl/books?hl=en&lr=&id=TcjVDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA3&dq=Cooper,+Paul+W.+(1996).+Explosives+Engineering,+New+York:+Wiley-VCH.+ISBN+0-471-18636-8&ots=815xkNk18T&sig=MIVc42eImGGbvbv7BGTZHw-Wed0&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

De Nederlander. (1940, 05 24). *De Vernielde brug bij Rhenen.* Retrieved from Delpher: https://www.delpher.nl/nl/kranten/view?coll=ddd&identifier=MMKB15:000703017:mpeg21:a00003

DEPARTMENT OF THE ARMY. (1992, juni 15). *Explosives and demolitions.* Retrieved from https://www.bits.de/NRANEU/others/amd-us-archive/fm5-250%2892%29.pdf

Fisico2000. (2011, juli 17). *Friedlander waveform.jpg*. Retrieved from Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Friedlander_waveform.jpg

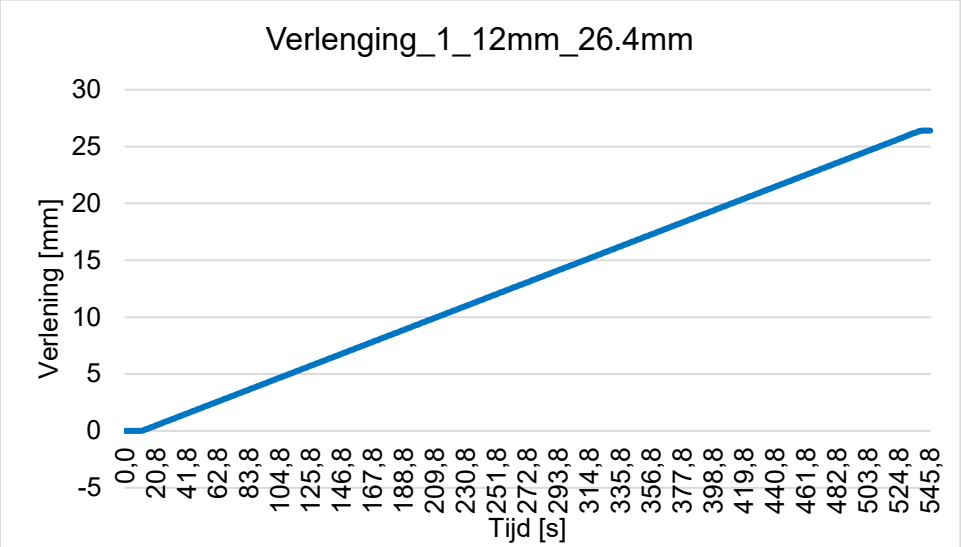
Stemmen uit Londen. (1944, 10 05). *Stemmen uit Londen.* Retrieved from Delpher: https://www.delpher.nl/nl/kranten/view?coll=ddd&identifier=ddd:010440260:mpeg21:a0003

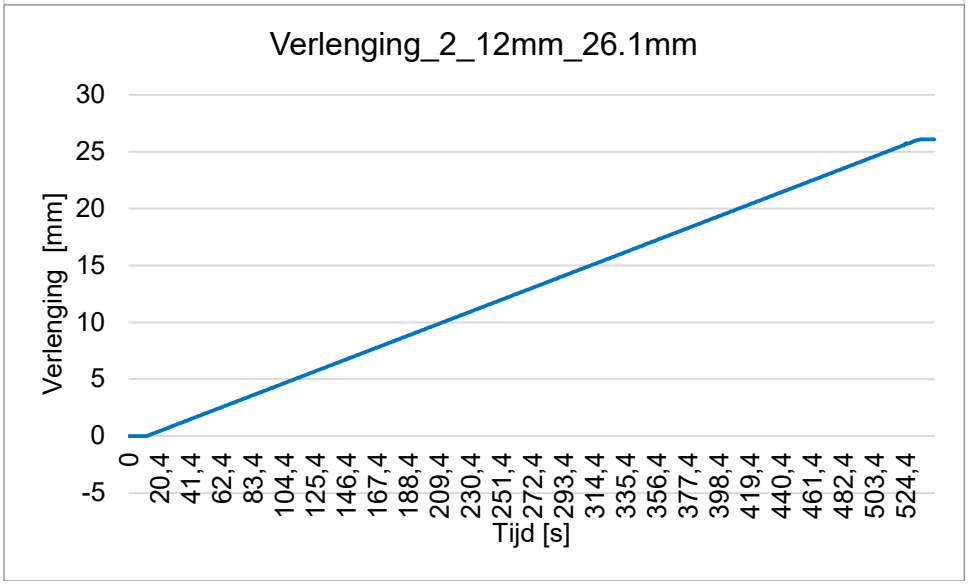
US army. (1932). *Engineer Field Manual Volume II Military Engineering.* Washington: US army.

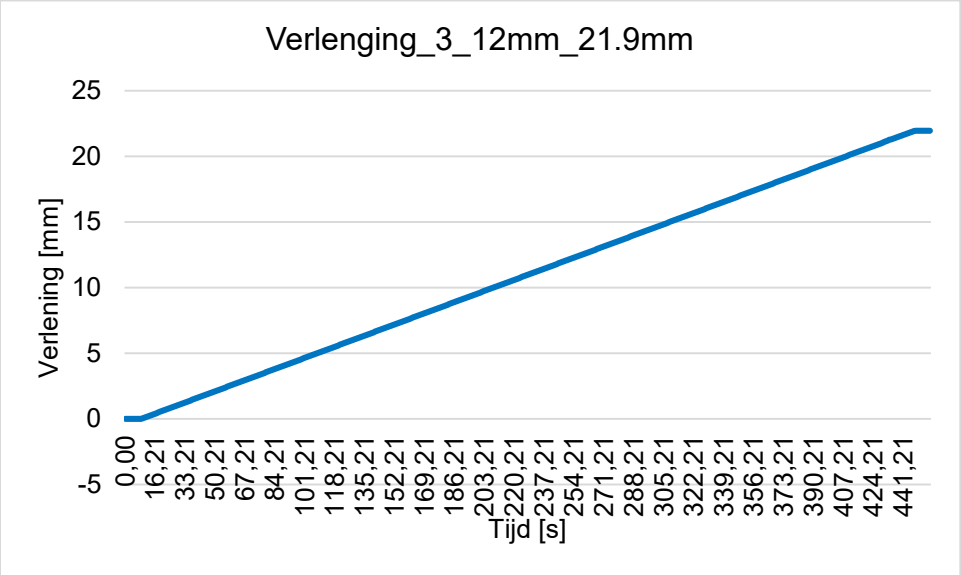
Vrouwenvelder, A. C., & Witteveen, J. (2003). *The plastic behaviour and the calculation of plates subjected to bending.* Delft: Technical University Delft.

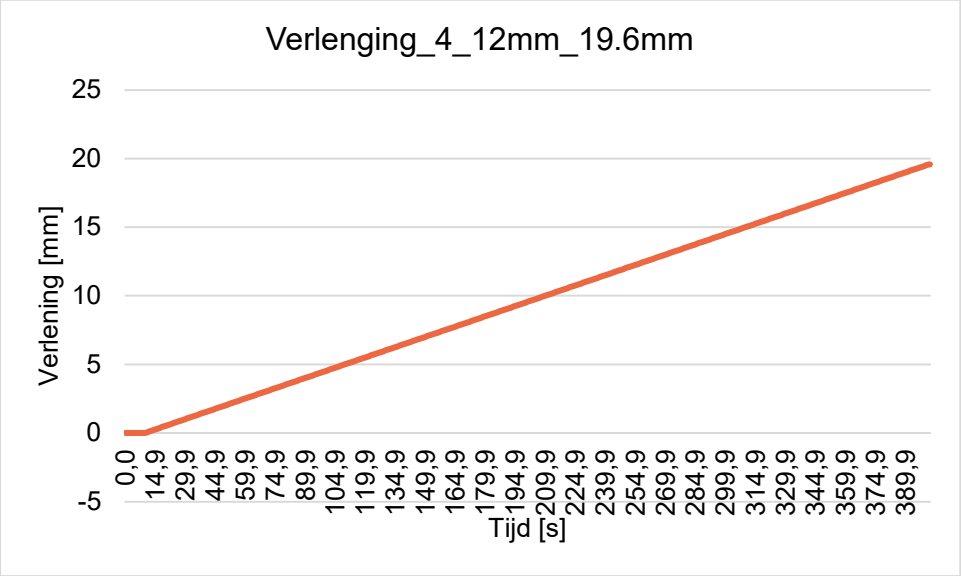
Bijlagen

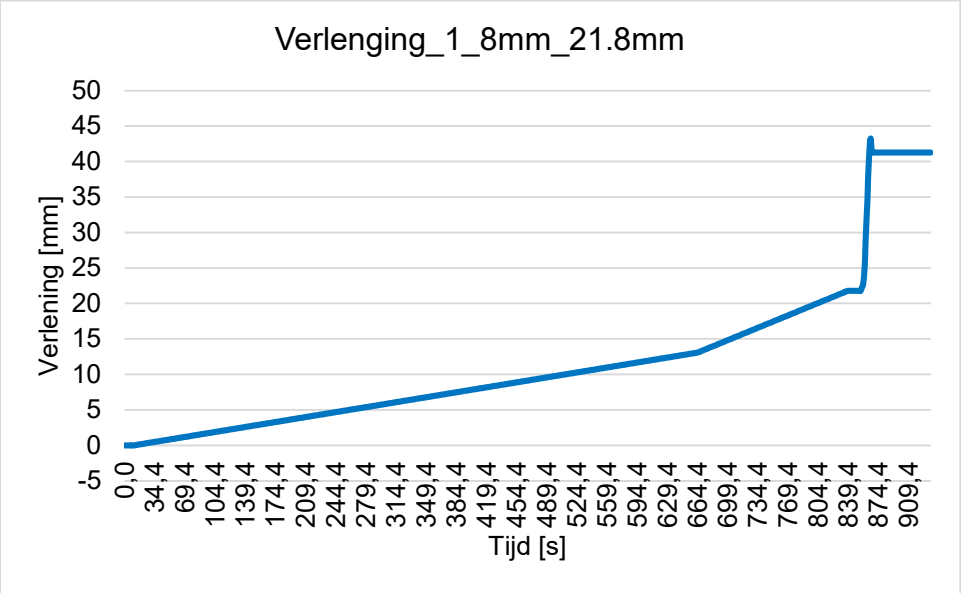
1 trekproeven

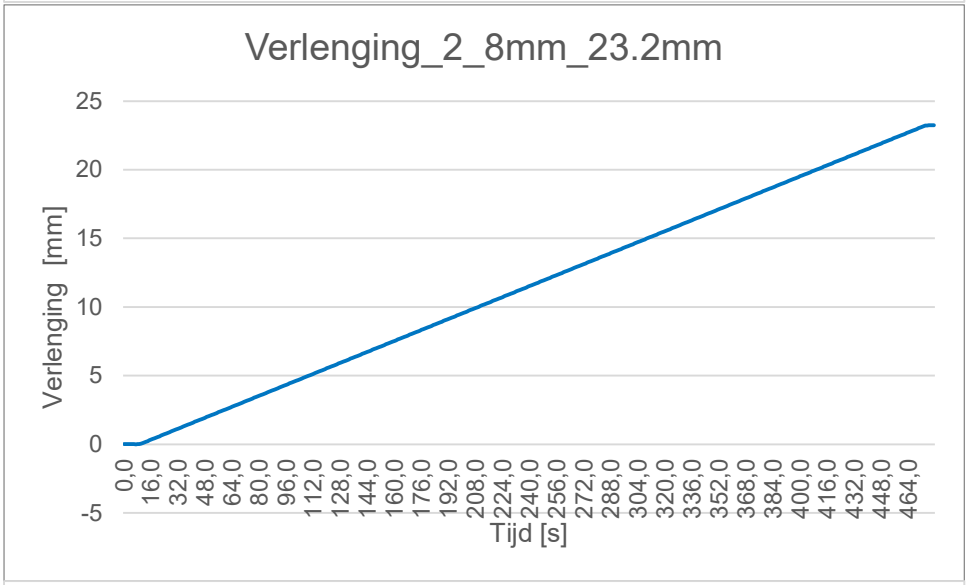


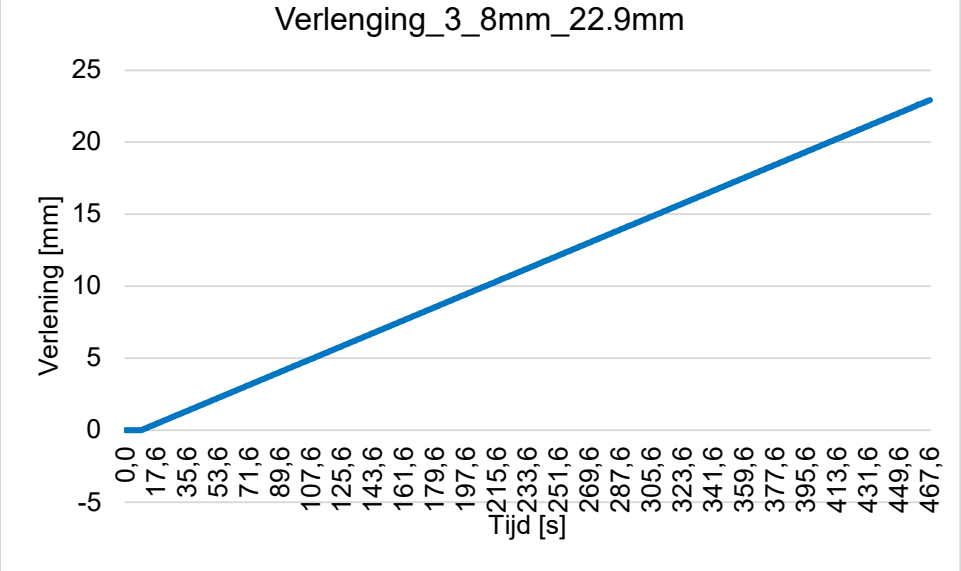


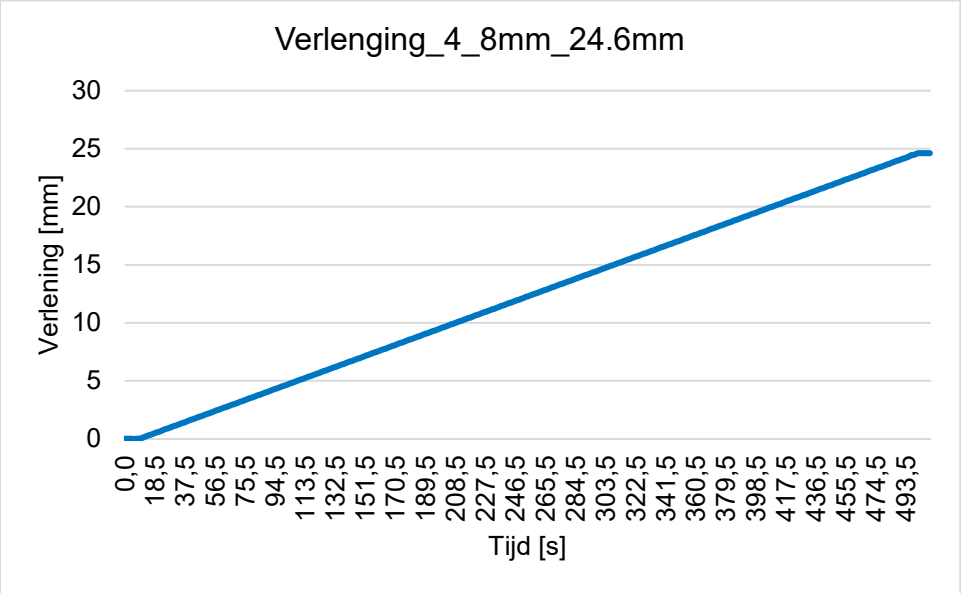

Verlenging_3_12mm_21.9mm
25
20
15
10
5
0
-5
Verlening [mm]
0,00
16,21
33,21
50,21
67,21
84,21
101,21
118,21
135,21
152,21
169,21
186,21
203,21
220,21
237,21
254,21
271,21
288,21
305,21
322,21
339,21
356,21
373,21
390,21
407,21
424,21
441,21
Tijd [s]


Verlenging_4_12mm_19.6mm
25
20
15
10
5
0
-5
Verlening [mm]
0,0
14,9
29,9
44,9
59,9
74,9
89,9
104,9
119,9
134,9
149,9
164,9
179,9
194,9
209,9
224,9
239,9
254,9
269,9
284,9
299,9
314,9
329,9
344,9
359,9
374,9
389,9
Tijd [s]


Verlenging_1_8mm_21.8mm
Verlening [mm]
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
-5
0,0
34,4
69,4
104,4
139,4
174,4
209,4
244,4
279,4
314,4
349,4
384,4
419,4
454,4
489,4
524,4
559,4
594,4
629,4
664,4
699,4
734,4
769,4
804,4
839,4
874,4
909,4
Tijd [s]


Verlenging_2_8mm_23.2mm
Verlenging [mm]
25
20
15
10
5
0
-5
0,0
16,0
32,0
48,0
64,0
80,0
96,0
112,0
128,0
144,0
160,0
176,0
192,0
208,0
224,0
240,0
256,0
272,0
288,0
304,0
320,0
336,0
352,0
368,0
384,0
400,0
416,0
432,0
448,0
464,0
Tijd [s]


Verlenging_3_8mm_22.9mm
Verlening [mm]
25
20
15
10
5
0
-5
0,0
17,6
35,6
53,6
71,6
89,6
107,6
125,6
143,6
161,6
179,6
197,6
215,6
233,6
251,6
269,6
287,6
305,6
323,6
341,6
359,6
377,6
395,6
413,6
431,6
449,6
467,6
Tijd [s]


Verlenging_4_8mm_24.6mm
Verlening [mm]
30
25
20
15
10
5
0
0,0
18,5
37,5
56,5
75,5
94,5
113,5
132,5
151,5
170,5
189,5
208,5
227,5
246,5
265,5
284,5
303,5
322,5
341,5
360,5
379,5
398,5
417,5
436,5
455,5
474,5
493,5
Tijd [s]

2 Volledig python script

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

#Massa veer systeem
fy = 355e6
E = 210e9
rho = 7850
bf = 0.700
tf = 0.01
L1 = bf / 2
L2 = bf
A = (bf/2 * bf/6 + bf * bf/3)
V = (bf/2 * bf/6 + bf * bf/3) * tf

I1 = (1/12) * (bf / 2) * tf**3
I2 = (1/12) * (bf / 3) * tf**3
print(f'I1: {I1}, I2: {I2}')

m = rho * V
print(f'{m} kg')

k1 = (3 * E * I1) / L1**3
k2 = (192 * E * I2) / L2**3
print(f'k1: {k1} N/mm, k2: {k2} N/mm')
k = k1 + k2
print(f'k_tot:{k/1000:.2f} kN/mm')

Mp = fy * 1/6 * tf**2 * bf
Mp1 = fy * 1/6 * tf**2 * (bf / 2)
Mp2 = fy * 1/6 * tf**2 * (bf / 3)
print(f'Mp1: {Mp1:.3f}, Mp2: {Mp2:.3f}')

Fp = 4 * (Mp1 / L1) + 8 * (Mp2 / L2)
Fp1 = (2 + np.pi) * Mp
print(f'Fp: {Fp / 1000:.2f} kN')
print(f'Fp1: {Fp1 / 1000:.2f} kN')

u_y = Fp / k
u_u = np.sqrt(-(63.2 / 1000)**2 + (bf/2)**2)
mu = u_u / u_y

print(f'u_y: {u_y * 1000:.6f} mm')
print(f'u_u: {u_u * 1000:.6f} mm')

zeta = 0.01
wn = np.sqrt(k/m)
c = 2 * zeta * wn
#-------------------------------------------------------------------------------
M = 0.3793 #kg
Vexp = 6900 #m/s
#-------------------------------------------------------------------------------
def explosie(t):
    return 3 * M / ( 4 * np.pi * Vexp * t**3 )

def massa_veer_systeem(t, y, m, k, c):
    x, v = y
    dxdt = v
```

```
    dvdt = (explosie(t)-k*x - c*v) / m
    return [dxdt, dvdt]

def vloeien(t, y, m, k, c):
    return y[0] - u_y
vloeien.terminal = False
vloeien.direction = 1

begin_voorwaardes= [0, 0]
t_eval = np.linspace(0.0001, 0.1, 100000)
sol = solve_ivp(massa_veer_systeem, [0.0001, 0.3], begin_voorwaardes, method='Ra

t_event = sol.t_events[0][0]
x_event = sol.y_events[0][0][0]
v_event = sol.y_events[0][0][1]
print(f"{'Event Summary':^30}")
print("-" * 30)
print(f"{'Time [s]':<15} {t_event:.5f}")
print(f"{'Position [m]':<15} {x_event:.5f}")
print(f"{'Velocity [m/s]':<15} {v_event:.5f}")
print("-" * 30)
t = sol.t
x = sol.y[0]

plt.plot(t, x, label='Uitwijking')
plt.xlabel('Tijd (s)')
plt.ylabel('Uitwijking (m)')
plt.title('Gedempt Massa-Veersysteem')
plt.axhline(u_y,color='r', label='Vloei uitwijking', linestyle='--')
plt.legend(loc='lower right')
plt.grid()
plt.show()

#Plastisch plateau
def explosie1(t):
    return 3 * M / ( 4 * np.pi * Vexp * t**3 )

def Fp_apl(v):
    return Fp if v >= 0 else 0.0

def plastisch(t, y):
    x, v = y
    dxdt = v
    dvdt = (explosie1(t) - Fp_apl(v) -c*v) / m
    return [dxdt, dvdt]

def breken(t, y):
    return y[0] - u_u
breken.terminal = True
breken.direction = 1


begin_voorwaardes_2= [x_event, v_event]
t_eval = np.linspace(t_event, 0.1, 100000)
sol1 = solve_ivp(plastisch,[t_event, 0.3], begin_voorwaardes_2, method='Radau',
t1 = sol1.t
x1 = sol1.y[0]
v1 = sol1.y[1]
plt.plot(t1, x1, label='Uitwijking', color='blue')
plt.xlabel('Tijd (s)')
```

```
plt.ylabel('Uitwijking (m)')
plt.axhline(u_u, color='b', label='Breuk uitwijking', linestyle='--')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

plt.plot(t1, v1, color='y', label='Snelheid')
plt.xlabel('Tijd (s)')
plt.ylabel('Snelhied (m/s)')

plt.legend()
plt.grid()
plt.show()

print(f'Moment van breken: {sol1.t_events[0][0] + t_event:.4f} [s], {sol1.y_ever

t_force = np.linspace(0.0001, 0.01, 1000)
force = [explosie(t) / 1000 for t in t_force]

plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(t_force, force, label='Explosion Force')
plt.xlabel('Time (s)')
plt.ylabel('Force (kN)')
plt.title('Explosion Force Over Time')
plt.legend()
plt.grid()
plt.yscale('log')
plt.show()
```