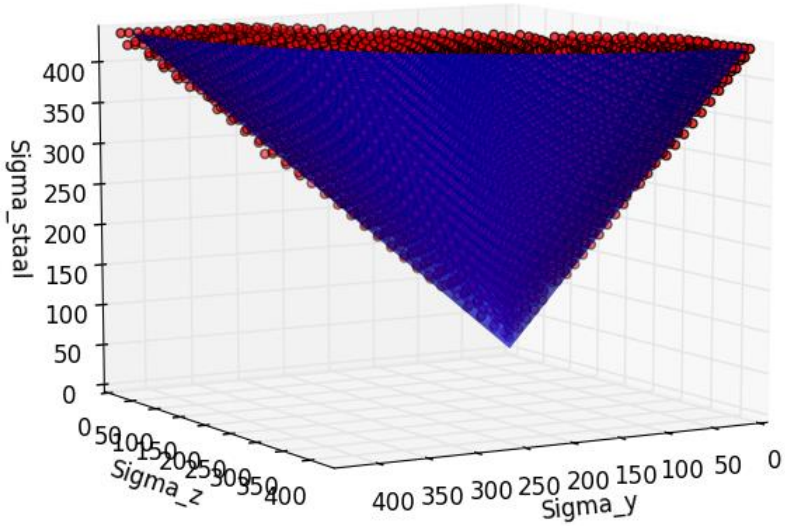
# *Dubbele buiging in betonnen kolommen in de Serviceability Limit State*

***Onderzoek naar eenvoudige berekening grootste staalstanning in gewapend beton***




**R. Harteveld**

**Student Bsc. Civiele Techniek**

**TU Delft**

*Deze pagina is met opzet leeg gelaten.*

# *Dubbele buiging in betonnen kolommen in de Serviceability Limit State*

***Onderzoek naar eenvoudige berekening grootste staalstanning in gewapend beton***


Door:

**R. (Rens) Harteveld**

Bachelorstudent

**Civiele Techniek, TU Delft**


Ter verkrijging van de graad

**Bachelor of Science**


Studentnummer: 4250990

E-mail: rens_harteveld93@hotmail.com


Datum: 13-11-2015




Begeleiders

**Dr.ir.drs. C.R. Braam**

**Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom**

# Voorwoord

Tijdens de afgelopen tien weken heb ik mij verdiept in het onderwerp ‘Dubbele buiging in kolommen in de Serviceability Limit State: Onderzoek naar eenvoudige berekening grootste staalspanning in gewapend beton’. Dit rapport is het eindproduct van tien weken onderzoek, analysering en enthousiasme. Ik hoop dat u, de lezer, het met hetzelfde plezier doorleest als ik aan dit rapport gewerkt heb.

Verder wil ik mijn begeleiders, dr.ir.drs. C.R. Braam en dr.ir. P.C.J. Hoogenboom, heel hartelijk danken voor hun deskundige begeleiding.

Delft, 13 november 2015

Rens Harteveld

# Leeswijzer

In dit rapport is er onderzoek gedaan naar een ontwerpformule die de spanningen in de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede kan beschrijven. Deze spanningen zullen het gevolg zijn van het principe dubbele buiging. De ontwerpformule zal als input twee staalspanningen nodig hebben die de constructeur heeft bepaald door twee enkele buigingen (die bij elkaar opgeteld de dubbele buiging situatie zijn) door te rekenen.

In het eerste hoofdstuk wordt het principe dubbele buiging toegelicht en wanneer dit principe zich voordoet. Daarna zal de norm van de Eurocode 2 voor dubbele buiging worden besproken en gevisualiseerd. Als laatst zal er in dit hoofdstuk de probleem- en doelstelling worden besproken waar dit rapport uit voortvloeit.

Na het eerste hoofdstuk zal de mechanica die achter de dubbele buiging schuilt worden besproken, zodat deze mechanica daarna in het model toe te passen is. Na de mechanica zullen de gebruikte materialen in het model toegelicht worden.

In het vierde hoofdstuk zal de opbouw van het model geschetst worden. In dit hoofdstuk wordt het model tevens gevalideerd. Na dit hoofdstuk kunnen de eerste resultaten besproken worden.

In het zesde hoofdstuk zes wordt de basis gelegd voor de ontwerpformule. Dit wordt gedaan vanuit een initiële doorsnede die in het model is ingevoerd. In hoofdstuk 7 worden naast de initiële doorsnede ook doorsnedes met andere eigenschappen ingevoerd.

In het laatste hoofdstuk zullen conclusies uit het onderzoek worden besproken en bediscussieerd. Vanuit deze conclusies worden vervolgens aanbevelingen gedaan voor verder onderzoek.

# Symbolenlijst

| Symbool | Eenheid | Beschrijving |
|---|---|---|
| α | - | Exponent Eurocode 2 |
| $A_s$ | $mm^2$ | Oppervlakte staalwapening |
| b | $mm$ | Breedte |
| h | $mm$ | Hoogte |
| c | $mm$ | Betondekking |
| ε | - / ‰ | Rek |
| $\varepsilon_{c3}$ | - / ‰ | Rek bij lineair-elastisch gedrag beton |
| $\varepsilon_{staal}$ | - / ‰ | Aangenomen rek in wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |
| $f_{yk}$ | $N / mm^2$ | Karakteristieke vloeisterkte betonstaal |
| $E_c$ | $N / mm^2$ | Elasticiteitsmodulus beton |
| $E_s$ | $N / mm^2$ | Elasticiteitsmodulus staal |
| F | $N$ | Kracht |
| $Nc_y$ | $N$ | Beton drukkracht |
| $\kappa_{y,z}$ | $1 / mm$ | Kromming in respect. y- en z-richthting |
| $M_y$ | $Nmm$ | Buigend moment om de y-as |
| $M_z$ | $Nmm$ | Buigend moment om de z-as |
| $M_{Ed}$ | $Nmm$ | Ontwerpwaarde moment |
| $M_{Rd}$ | $Nmm$ | Momentcapaciteit |
| $N_{Ed}$ | $N$ | Ontwerpwaarde normaalkracht |
| $N_{Rd}$ | $N$ | Normaalkrachtcapaciteit |
| $\sigma_{DB}$ | $N / mm^2$ | Resulterende staalspanning door dubbele buiging in wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |
| $\sigma_{My}$ | $N / mm^2$ | Staalspanning door moment $M_y$ in wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |
| $\sigma_{Mz}$ | $N / mm^2$ | Staalspanning door moment $M_z$ in wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |
| $x_{\mu,y,z}$ | $mm$ | Betondrukzonehoogte in respect. y- en z-richting |
| ϕ | $mm$ | Diameter wapeningsstaven |
| y | $mm$ | Afstand in y-richting vanaf wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |
| z | $mm$ | Afstand in z-richting vanaf wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede |

# Inhoudsopgave

**Voorwoord** ..... v

**Leeswijzer** ..... vi

**Symbolenlijst** ..... vii

**Hoofdstuk 1: Inleiding** ..... 1

1.1 Dubbele Buiging ..... 1

1.2 Eurocodes ..... 1

1.3 Probleemstelling ..... 3

1.4 Doelstelling ..... 3

**Hoofdstuk 2: Mechanica van dubbele buiging** ..... 4

**Hoofdstuk 3: Materialen** ..... 6

3.1 Beton ..... 6

3.2 Betonstaal ..... 7

**Hoofdstuk 4: Model** ..... 8

4.1 Doel model ..... 8

4.2 Opbouw model ..... 8

4.3 Belastingen ..... 9

4.4 Model voorbeeldberekening en validatie ..... 10

4.5 Opsplitsen naar enkele buigingen ..... 13

4.6 Bepaling staalspanningen ..... 15

**Hoofdstuk 5: Resultaten** ..... 17

5.1 Doorsnede ..... 17

5.2 Uitvoer Python ..... 17

**Hoofdstuk 6: Formule generatie** ..... 19

6.1 Analyseren resultaten ..... 19

6.2 Stap 1: Ondergrens puntenwolk ..... 19

6.3 Stap 2: Extra term ..... 20

**Hoofdstuk 7: Variatie doorsnede eigenschappen** ..... 23

7.1 Betonsterkteklasse ..... 23

*7.1.1 C12/15* ..... 23

*7.1.2 C50/60* ..... 25

*7.1.3 C80/95* ..... 26

7.2 Afmetingen doorsnede ..... 28

*7.2.1 600 x 300 millimeter* ..... 28

*7.2.2 600 x 400 millimeter* ..... 29

7.3 Diameter wapeningsstaven ..... 30
*7.3.1 Diameter 24 millimeter* ..... 30
*7.3.2 Diameter 48 millimeter* ..... 31
**Hoofdstuk 8: Conclusies, discussie en aanbevelingen** ..... 33
8.1 Conclusies ..... 33
8.2 Discussie ..... 34
8.3 Aanbevelingen ..... 34
**Literatuurlijst** ..... 35
**Ruwe data** ..... 36
**Bijlage code** ..... 37
A. Python code Eurocode 2 norm ..... 38
B. Python code model (hoofdstuk 4 en 5) ..... 39
C. Python code formule generatie (hoofdstuk 6 en 7) ..... 44

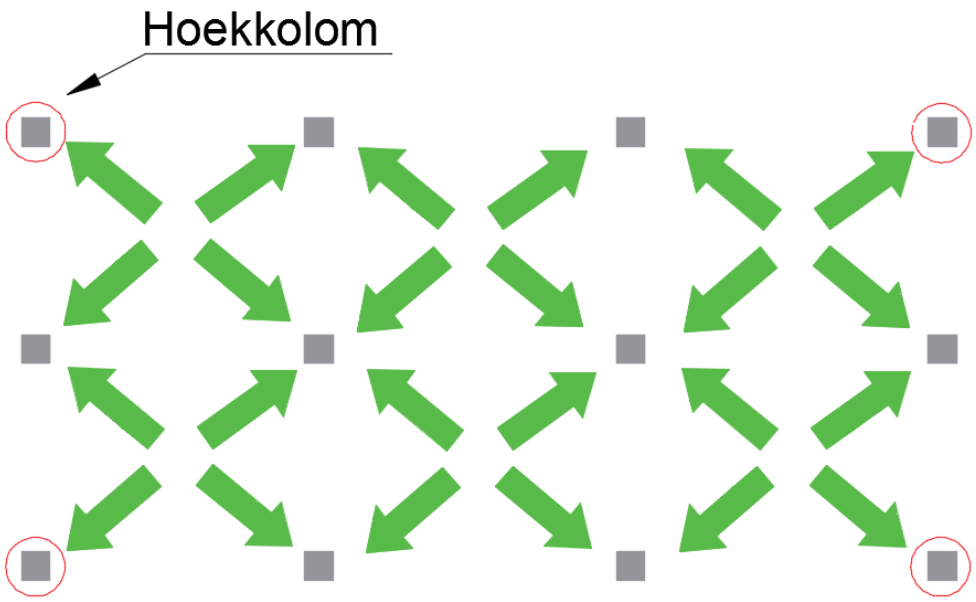
# Hoofdstuk 1: Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een korte uitleg gegeven over het principe dubbele buiging. Daarnaast zal de probleemstelling aan bod komen en het beoogde resultaat aan het einde van het rapport.

## 1.1 Dubbele Buiging

Dubbele buiging is het principe dat voorkomt wanneer twee momenten die elk een andere richting hebben samen aangrijpen op een kolom of balk. Hierdoor zal het element gaan buigen om twee verschillende assen.

Voor de bouw van een constructie maken ontwerpers een plan waarin de plaatsen van de kolommen zijn aangegeven. Doordat de wijze van afdragen van belastingen hebben sommige kolommen last van twee excentriciteiten in twee richtingen. Dit zijn is vaak het geval bij een hoekkolom. Daarentegen komt het principe dubbele buiging minder vaak voor bij interne of randkolommen, omdat de momentwerkingen gespiegeld zijn en dus elkaars werking op de kolom opheffen.




*Figuur 1: Plattegrond kolommen met belasting afdracht (hoekkolommen rood omcirkeld)*

## 1.2 Eurocodes

In Europa zijn er voorschriften opgesteld die richtlijnen beschrijven voor het ontwerpen van betonnen constructies. Landen mogen vervolgens deze richtlijnen op hun eigen manier verder invullen. De Nederlandse richtlijnen voor het ontwerpen van gebouwen worden beschreven in de norm genaamd ‘NEN-EN 1992-1-1+C2’.

In deze norm is het deel van dubbele buiging niet bepaald uitgebreid. Het enige wat de norm beschrijft voor dubbele buiging is de volgende formule:

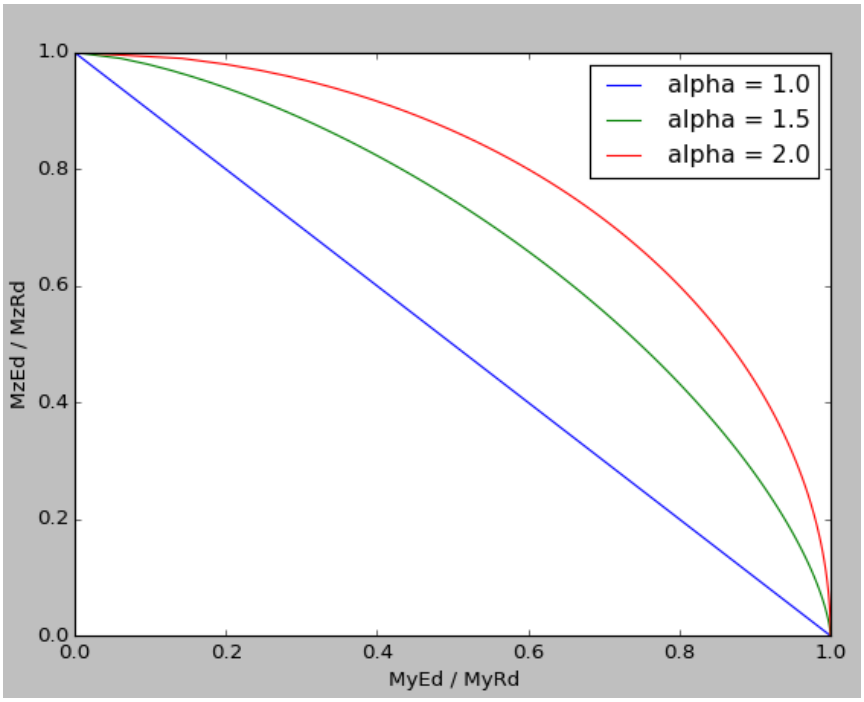
$$(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}})^a + (\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}})^a \leq 1{,}0 \qquad (1.1)$$

Met:

*Tabel 1: Normaalkrachtratio en bijhorende macht in vergelijking (1.1)*

| $N_{Ed}$ / $N_{Rd}$ | 0,1 | 0,7 | 1,0 |
|---|---|---|---|
| **Alpha** | 1,0 | 1,5 | 2,0 |

De ratio van de ontwerpnormaalkracht en de normaalkrachtcapaciteit van de kolom bepaald welke alpha er in de norm toegepast moet worden. Wanneer de ontwerper de ratio van het ontwerpmoment en de momentcapaciteit in beide richtingen heeft uitgerekend, kan hij zien of het in het veilige gebied zit. Hierna kan hij eventueel aanpassingen doen om een economischer ontwerp te maken. Het figuur hieronder geven de verschillende vergelijkingen $(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}})^a + (\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}})^a = 1$ weer.




*Figuur 2: Visualisatie Eurocode 2 met betrekking tot dubbele buiging*

Deze formule geeft aan dat beide richtingen afzonderlijk worden beschouwd. Naast deze voorwaarde is er geen richtlijn voor wapening in de kolom. Dit zorgt ervoor dat er een wapeningsplan wordt ontworpen die de krachten, die door beide momenten afzonderlijk worden gegenereerd, kunnen worden opgenomen. Dit wapeningsplan kan leiden tot over dimensionering van de wapening, wat extra kosten met zich meebrengt. Economisch gezien is het interessant om exacter de benodigde wapening te kunnen berekenen.

Er bestaat wel een manier om dit te kunnen doen, namelijk de dubbele buiging om te schrijven naar twee gevallen van enkele buiging waarna deze enkele buiging situaties worden doorgerekend. Het nadeel van deze manier is dat deze veel tijd kost. Daarom wordt er in dit onderzoek getracht om een ontwerpformule te vinden voor de grootste staalspanning in de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde in de doorsnede.

## 1.3 Probleemstelling

Om een goed ontwerp te maken voor een kolom of balk, moet een ontwerper een scheurwijdtetoets in de Serviceability Limit State uitvoeren. Hiervoor heeft de ontwerper de grootste spanning nodig in de wapeningsstaaf, die de grootste afstand heeft ten opzichte van de neutrale lijn aan de meest getrokken zijde in de doorsnede. Bij enkele buiging is dat geen probleem. Echter wordt dit met dubbele buiging complexer. Hiervoor moet een uitgebreide berekening gedaan worden voor de gehele doorsnede om zo achter die spanning te komen. Deze uitgebreide berekeningen kost veel tijd en moeite.

## 1.4 Doelstelling

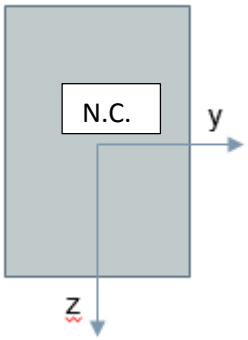
Het doel is om een eenvoudige formule op te stellen waarmee een ontwerper snel de spanning kan berekenen in de uiterste wapeningsstaaf ten gevolge van de dubbele buiging. De parameters in deze formule zijn de spanningen in de uiterste wapeningsstaaf ten gevolge van beide gevallen van enkele buiging. Dit zou er als volgt uit kunnen zien:

$$\sigma_{DB} = C * (\sigma_{My} + \sigma_{Mz}) \qquad (1.2)$$

Er wordt gekeken welke eigenschappen van de doorsnede invloed hebben op de geïllustreerde formule hierboven. De eigenschappen die in dit rapport voorbij zullen komen zijn; de betonsterkteklasse, afmetingen van de doorsnede en de diameter van de wapeningsstaven.

# Hoofdstuk 2: Mechanica van dubbele buiging

Om de mechanica achter de dubbele buiging te begrijpen, is eerst een aanname nodig. Wanneer men de doorsnede voor zich ziet, is de aanname dat de oorsprong van het assenstelsel en het normaalkrachtencentrum samenvallen. Hierdoor kunnen later variabelen gelijk gesteld worden aan nul.




*Figuur 3: Doorsnede met assenstelsel*

De tweede aanname die gebruikt wordt om de rekverdeling te beschrijven over de doorsnede is de hypothese van Bernoulli. Dit uitgangspunt zegt dat wanneer de kolom zal vervormen, dan zal dat gebeuren doordat vezels langer of korter worden en dat vlakke doorsneden de gehele tijd vlak blijven. Nu kan er een rekformule worden opgesteld met initiële rek en toename van rekken ten gevolge van de krommingen in beide richtingen.

$$\varepsilon\,(y,z) = \varepsilon + \kappa_z z + \kappa_y y \qquad (2.1)$$

Met behulp van de wet van Hooke kan vergelijking (3) omgeschreven worden naar spanningen. Dan wordt de formule:

$$\sigma\,(y,z) = E\varepsilon(y,z) = E(\varepsilon + \kappa_z z + \kappa_y y) \qquad (2.2)$$

Deze interne spanningen moeten evenwicht maken met de externe krachten, want de doorsnede is in rust. Met behulp van de vorige formule kunnen de volgende relaties worden opgesteld.

$$N = \int_0^A \sigma(y,z)dA = EA\varepsilon + ES_y\kappa_y + ES_z\kappa_z \qquad (2.3)$$

$$M_y = \int_0^A y\sigma(y,z)dA = ES_y\varepsilon + EI_{yy}\kappa_y + EI_{yz}\kappa_z \qquad (2.4)$$

$$M_z = \int_0^A z\sigma(y,z)dA = ES_z\varepsilon + EI_{zy}\kappa_y + EI_{zz}\kappa_z \qquad (2.5)$$

Hiermee zijn de drie verschillende snedekrachten gedefinieerd, namelijk de normaalkracht (N), het moment om de y-as ($M_y$), en het moment om de z-as ($M_z$). Om deze formules overzichtelijker te maken en op te schonen, zijn de drie formules hieronder weergeven in een stelsel.

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & ES_y & ES_z \\ ES_y & EI_{yy} & EI_{yz} \\ ES_z & EI_{zy} & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Zoals eerder beschreven valt de oorsprong van het aangenomen assenstelsel samen met de plaats van het normaalkrachtencentrum. Hierdoor worden de statische momenten $S_y$ en $S_z$ nul. Verder zijn de assen gelijk aan de hoofdrichtingen van de doorsnede. Hierdoor zijn de traagheidsmomenten $I_{yz}$ en $I_{zy}$ gelijk aan nul.

$$\begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & & \\ & EI_{yy} & \\ & & EI_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix}$$

Dit opgeschoonde stelsel kan weer losgekoppeld worden, zodat er drie simpele formules overblijven.

$$N = EA\varepsilon \tag{2.6}$$

$$M_y = EI_{yy}\kappa_y \tag{2.7}$$

$$M_z = EI_{zz}\kappa_z \tag{2.8}$$

Met behulp van vergelijkingen (2.1) en (2.2) en de vergelijkingen (2.6), (2.7) en (2.8) hierboven, kunnen de algemene formules voor de rek en spanningen verduidelijkt worden.

$$\varepsilon\,(y,z) = \frac{N}{EA} + \frac{M_z}{EI_{zz}}z + \frac{M_y}{EI_{yy}}y \tag{2.9}$$

$$\sigma\,(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_{zz}}z + \frac{M_y}{I_{yy}}y \tag{2.10}$$

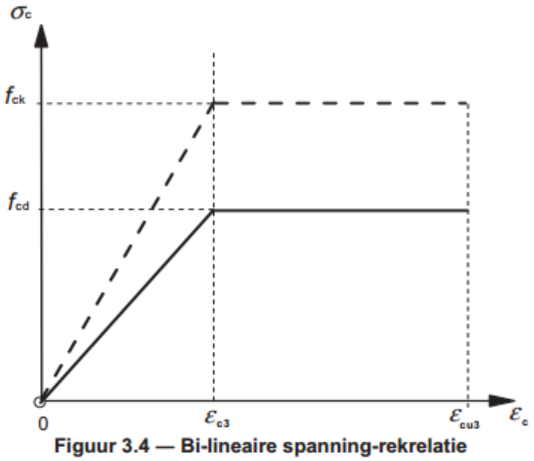
De berekeningen, die later in dit rapport gemaakt worden, zullen lineair elastische berekeningen zijn. Er wordt daarentegen wel aangenomen dat het beton volledig gescheurd is in de trekzone en hier geen krachten opneemt.

# Hoofdstuk 3: Materialen

In dit rapport wordt er alleen gekeken naar de Serviceability Limit State. Dat betekent dat het beton en het staal allebei in de lineair elastische fase bevinden. Voor het beton geldt dat het alleen lineair elastisch is wanneer het wordt gedrukt. Wanneer er trekkrachten in de betondoorsnede ontstaan, wordt aangenomen dat het beton op de plekken van de trekkrachten volledig gescheurd is.

## 3.1 Beton

Voor het beton in de lineair elastische fase is de maximale rek gedefinieerd door $\varepsilon_{c3}$. Wanneer de rekken groter worden dan deze rek zal het beton overgaan naar de plastische fase. De maximale waarde, namelijk $\varepsilon_{c3}$, wordt gegeven door -1.75‰ Verder worden de spanningen niet aangepast met een materiaalfactor, omdat het gaat over de Serviceability Limit State.



**Figuur 3.4 — Bi-lineaire spanning-rekrelatie**

*Figuur 4: Bilineaire spanning-rek diagram beton*

In dit rapport wordt de elasticiteitsmodulus van het beton gebruikt. De elasticiteitsmodulus wordt beschreven door:

$$E_c = \frac{f_{ck}}{\varepsilon_{c3}} \qquad (3.1)$$

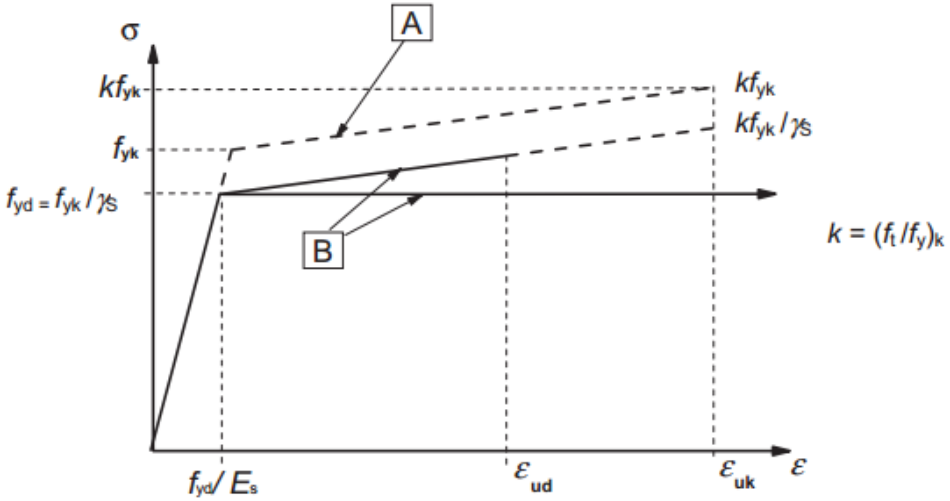
Voor elke betonsterkteklasse geldt door deze vergelijking een andere elasticiteitsmodulus, omdat de karakteristieke druksterkte varieert.

## 3.2 Betonstaal

Voor het betonstaal geldt eveneens dat het zich in de lineair elastische fase bevindt. Belangrijk om te vermelden is dat er wordt uitgegaan van betonstaal B500. Net als bij het beton worden de spanningen niet aangepast door een materiaalfactor. Het rapport maakt daarom gebruik van de gestreepte lijn A.

Dat betekent dat de vloeirek wordt gegeven door:

$$\frac{f_{yk}}{E_s} = \frac{435}{200.000} = 2.175‰ \qquad (3.2)$$




*Figuur 5: Bilineaire spanning-rek diagram wapeningsstaal*

# Hoofdstuk 4: Model

In dit hoofdstuk wordt het doel van model uitgelegd en wat de output van het model zal moeten zijn. Daarna zal de opbouw van het model besproken worden en hoe er naar de beoogde output gewerkt zal worden.

## 4.1 Doel model

Eerder in dit rapport is de volgende formule (1.2) gegeven:

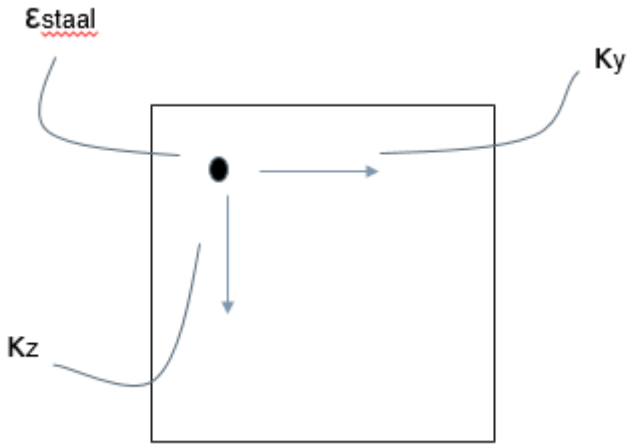
$$\sigma_{DB} = C * (\sigma_{My} + \sigma_{Mz}) \qquad (1.2)$$

De eerste term, $\sigma_{DB}$, is de resulterende staalspanning ten gevolge van dubbele buiging op de kolom. De andere twee termen zijn de staalspanningen ten gevolge van enkele buigingen in de respectievelijke richtingen.

Het model heeft daarom als doel om verschillende punten te genereren met verschillende resulterende spanningen en spanningen vanuit enkelvoudige buigingen (opgesplitst uit de dubbele buiging situatie) om de y-as en z-as.

## 4.2 Opbouw model

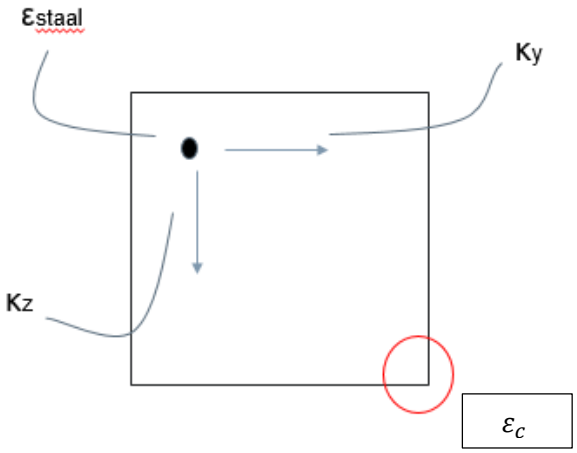
Er wordt allereerst een doorsnede met vier wapeningsstaven in de hoeken in het model ingevoerd. In de meest getrokken wapeningsstaaf wordt een rek aangenomen. Deze rek in de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde, $\varepsilon_{staal}$, zal variëren van 0‰ tot 2,175‰. Vervolgens worden er twee krommingen in de hoofdrichtingen aangenomen. De beide krommingen worden gevarieerd van $0^o$ tot $4^o$. De oorsprong van het assenstelsel wordt in het midden van genoemde wapeningsstaaf geplaatst.




*Figuur 6: Beginpunt model met drie variërende parameters*

Omdat de doorsnede is verdeeld in kleine vakjes van een $mm^2$, kan er met deze drie aangenomen variabelen ($\varepsilon_{staal}$, $\kappa_y$ en $\kappa_z$) de hele rekverdeling over de doorsnede bepaald worden.

Het model wordt alleen gebruikt binnen de Serviceability Limit State en daarom moet het model begrensd worden. Dit wordt gedaan door een de maximale rek te stellen in het uiterste punt in de doorsnede. Deze mag niet de gegeven rek van -1.75‰ overschrijden. Wanneer dit wel gebeurd, bevindt het beton zich namelijk in de plastische gebied in figuur 4. Het uiterste punt is weergeven met een rode cirkel in het volgende figuur.




*Figuur 7: Beginpunt model met aangegeven grens (vergelijking (4.1))*

De formule die de rek bepaald in het rood omcirkelde (uiterste) punt is:

$$\varepsilon_c = \left(\varepsilon_{staal} + (\kappa_z * -\left(h - \mathrm{c} + \tfrac{1}{2}\phi\right)) + \left(\kappa_y * -\left(b - \mathrm{c} + \tfrac{1}{2}\phi\right)\right)\right) \quad (4.1)$$

Waarin:

- h: hoogte van de doorsnede in millimeter;
- b: breedte van de doorsnede in millimeter;
- c + $\frac{1}{2}\phi$: dekking van wapeningsstaven in millimeter;
- $\varepsilon_{staal}$: aangenomen rek in meest getrokken wapeningsstaaf in ‰;
- $\kappa_z$: kromming in de z-richting in 1/mm;
- $\kappa_y$: kromming in de y-richting in 1/mm.

De voorwaarde waaraan voldaan moet worden is:

$$\varepsilon_c \geq \varepsilon_{c3} = -1.75‰ \quad (4.2)$$

Wanneer aan de vorige regel is voldaan, zijn de rekken in alle punten van een mm$^2$ bekend. Daarna kunnen met de wet van Hooke alle spanningen bepaald worden.

## 4.3 Belastingen

Door de rekverdeling om te zetten naar een spanningsverdeling, kunnen alle krachten berekend worden. Dit geldt voor zowel de wapeningskrachten als de betonkrachten. De enige onbekenden zijn nu nog de uitwendige krachten. Op te merken is dat er alleen druk optreedt, omdat het beton onder rekcondities volledig gescheurd is.

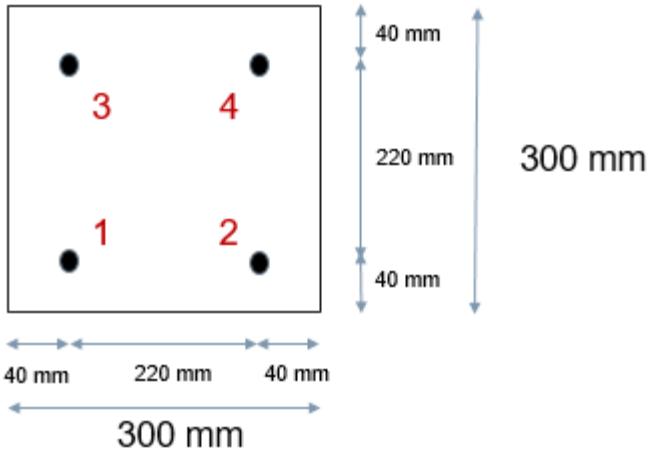
In het model zijn drie variabelen aangenomen, namelijk de rek in de meest getrokken wapeningsstaaf en de twee krommingen. Elke combinatie van de drie variabelen zorgen elk voor een andere combinatie van uitwendige belastingen. Deze uitwendige belastingen zijn de normaalkracht, het moment om de y-as en het moment om de z-as. De belastingen zijn te verkrijgen door middel van drie evenwichtsvergelijkingen:

- Vergelijking 1: $\sum F_v = 0$; (4.3)
- Vergelijking 2: $\sum M_{z-as} = 0$; (4.4)
- Vergelijking 3: $\sum M_{y-as} = 0$; (4.5)

De eerste vergelijking zorgt ervoor dat er verticaal krachtenevenwicht wordt gewaarborgd. Hieruit zal de oplossing voor de normaalkracht volgen. De tweede vergelijking zorgt ervoor dat de momentsom om de z-as in nul moet zijn. Eveneens geldt dat voor de derde vergelijking, alleen is het dan om de y-as. Uit deze twee momentvergelijkingen volgen beide momentbelastingen.

## 4.4 Model voorbeeldberekening en validatie

Om de vorige paragraaf te verduidelijken en het model te valideren, zal er een voorbeeld uitgewerkt worden. Allereerst wordt er een doorsnede gemaakt van 300 millimeter bij 300 millimeter waarin vier wapeningsstaven liggen in de hoeken met een dekking plus $\frac{1}{2}\phi$ van 40 millimeter aan beide kanten. De wapeningsstaven hebben een diameter van 12 millimeter. De wapeningsstaven zijn genummerd om later de bijhorende krachten uit te rekenen.

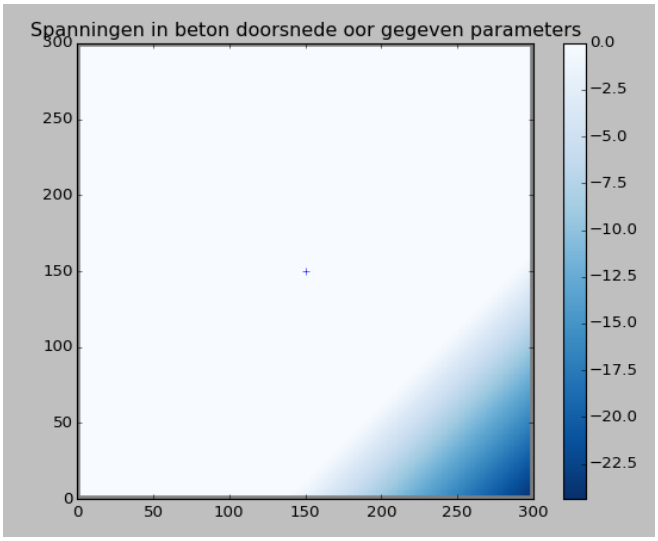



*Figuur 8: Doorsnede met afmetingen en indexnummers voor wapeningsstaven*

Op deze doorsnede worden de volgende waarden toegepast:

- $\varepsilon_{staal} =$ 2,175‰ (4.6)
- $\kappa_y =$ 6,9814304304964793 * $10^{-06}$ $\frac{1}{mm}$ (4.7)
- $\kappa_z =$ 6,9814304304964793 * $10^{-06}$ $\frac{1}{mm}$ (4.8)

Met behulp van de formules in hoofdstuk, geeft het figuur hieronder de resulterende spanningen weer in N/mm$^2$ door de aangenomen waardes hierboven.




*Figuur 9: Spanningsverdeling in beton doorsnede door vergelijkingen (17), (18) en (19) met spanning in N/mm²*

De normaalkracht zal eerst bepaald moeten worden, omdat deze ook een aandeel heeft in de beide momentensommen. De formule voor het verticale krachtenevenwicht is:

$$\sum F_v = N - Nc + \sum F_{staal} = 0 \qquad (4.9)$$

Waarin $N_c$ de betondrukkracht is en $\sum F_{staal}$ de som van de wapeningskrachten zijn. De betondrukkracht kan worden berekend door alle krachten per mm² bij elkaar op te tellen. Met behulp van de code wordt de betondrukkracht bepaald, omdat dit niet met de hand kan.

$$Nc = \ 228.876\ N$$

Nu moeten alleen de staalkrachten nog worden berekend:

- $F_{s1} = \ (\varepsilon_{staal} - \kappa_z * 220) * Es * As$ (4.10)
- $F_{s2} = \ (\varepsilon_{staal} - \kappa_z * 220 - \ \kappa_y * 220) * Es * As$ (4.11)
- $F_{s3} = \ \varepsilon_{staal} * Es * As$ (4.12)
- $F_{s4} = \ (\varepsilon_{staal} - \kappa_y * 220) * Es * As$ (4.13)

Met de volgende waardes voor Es en As:

- $A_s = 0.25 * \pi * 12^2 = 113\ mm^2$ (4.14)
- $Es = 200.000$ MPa (4.15)

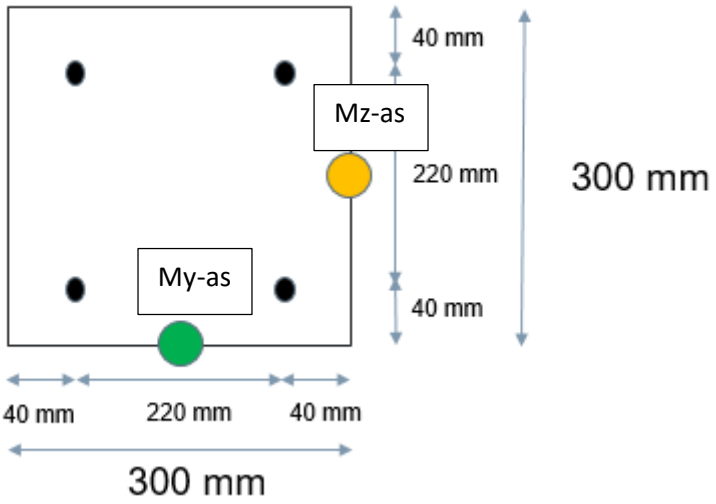
Invullen van de bovenstaande waardes geven de volgende staalkrachten:

- $F_{s1} = \ 14.456\ N$
- $F_{s2} = \ -20.286\ N$
- $F_{s3} = 49.197\ N$
- $F_{s4} = \ 14.456\ N$

De normaalkracht wordt nu gegeven door:

$$N = Nc - \sum F_{staal} = \ 228.876 - \ 57.823 \ = \ 171.053 \text{ N (druk)} \qquad (4.16)$$

Nu de normaalkracht bekend is, kunnen de beide momentvergelijkingen worden opgelost. Er kan elk punt gekozen worden in de doorsnede. Figuur 11 geeft de aangenomen punten weer.




*Figuur 10: Punten waaruit de momentenevenwichten zijn opgesteld*

Vanuit deze aangenomen punten kunnen de volgende momentensommen worden opgesteld (rechtsom draaiend is positief):

$$\sum M_{z-as} = 0 = Mz - N * 0.5 * b + \sum_{i=1}^{4} F_{si} * a_i + \sum Nc_{i,j} * a_{i,j} \quad (4.17)$$

Met:

- $\sum_{i=1}^{4} F_{si} * a_i = -14.456 * 260 + 20.286 * 40 - 49.197 * 260 - 14.456 * 40 = -16.316.580\ Nmm$ (4.18)
- $\sum Nc_{i,j} * a_{i,j} = 12.156.897\ Nmm$ *(Volgt uit de Python code)* (4.19)
- $N * 0.5 * b = 171.053 * 0.5 * 300 = 25.657.950\ Nmm$ (4.20)

Hieruit volgt dat:

$$Mz = N * 0.5 * b - \sum_{i=1}^{4} F_{si} * a_i - \sum Nc_{i,j} * a_{i,j} = 25.657.950 - (-16.316.580) - 12.156.897 = 29.817.633\ Nmm \quad (4.21)$$

Hetzelfde wordt gedaan voor $\sum M_{y-as}$. Hieruit kan het moment $M_y$ bepaald worden. Omdat deze belasting situatie een mate van symmetrie bevat gelden dezelfde waarden en berekeningen voor $M_y$, dus volgt:

$$My = 29.817.633\ Nmm$$

Vervolgens worden de uitgerekende waardes vergeleken met de output van het model:

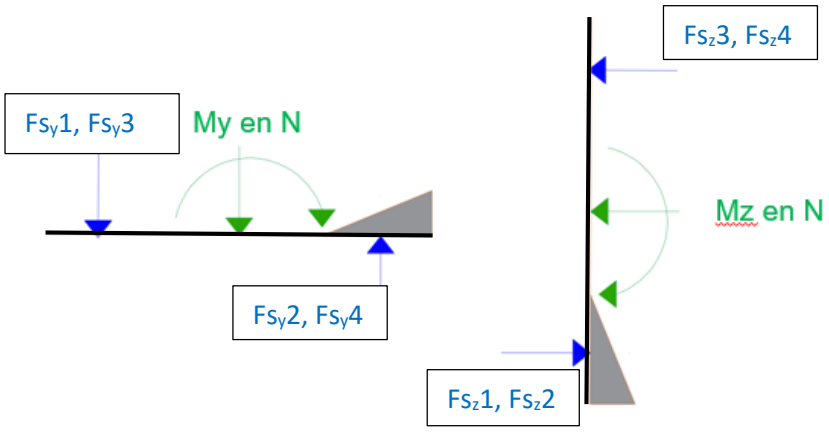
*Tabel 2: Uitvoer tabel Python code met uitgewerkte combinatie 6*

| combinatie | My (kNm) | Mz (kNm) | N (kN) |
|---|---|---|---|
| 1: | 33.189 | 7.937 | -100.13 |
| 2: | 23.848 | 13.150 | -43.23 |
| 3: | 45.224 | 18.968 | -238.62 |
| 4: | 18.907 | 15.910 | -24.01 |
| 5: | 15.855 | 19.059 | -24.53 |
| 6: | 29.847 | 30.075 | -171.05 |

De conclusie van deze paragraaf is dat het model werkt en dat de belastingen goed worden berekend.

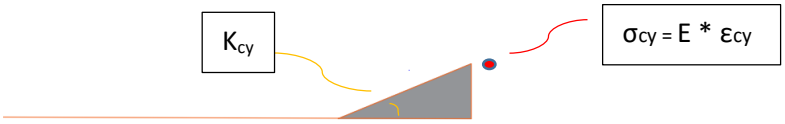
## 4.5 Opsplitsen naar enkele buigingen

Vervolgens worden de normaalkrachten en momenten gebruikt om de staalspanningen aan de meest getrokken kant te berekenen ten gevolge van twee enkele buigingen. Dit wordt gedaan door elk moment afzonderlijk op de doorsnede te plaatsen. Dit gebeurt in combinatie met de uitgerekende normaalkracht. Hieronder zijn de twee combinaties weergeven:




*Figuur 11: Situatie 1 (y-evenwicht) en 2 (z-evenwicht). Beide enkele buigingen.*

De twee gevraagde staalspanningen bevinden zich in staaf 3. Deze zijn in het figuur aangegeven met $Fs_y3$ en $Fs_z3$. Deze waardes zullen door middel van twee evenwichtsvergelijkingen per situatie opgelost moeten worden. Helaas zijn er teveel onbekende krachten om de evenwichtsvergelijkingen simpel op te lossen. Daarom moet er een manier bedacht worden om maar twee onbekenden over te houden in twee evenwichtsvergelijkingen.




*Figuur 12: Rekverdeling in y-richting met twee onbekenden, de kromming en rek in de uiterste vezel*

In het plaatje hierboven zijn twee onbekenden aangenomen, namelijk de kromming in y-richting en de onbekende rek in de uiterste betonvezel. Met deze twee onbekenden kunnen alle krachten die aanwezig zijn in de doorsnede uitgedrukt worden:

- Uiterste betondrukspanning: $\sigma_{cy} = \left|\varepsilon_{cy} * E_c\right|$ (4.22)
- Beton drukzone: $\mathrm{x}_{\mu y} = \left|\frac{\varepsilon_c}{\kappa_{cy}}\right|$ (4.23)
- $Fs_y1 = \left|E_s * A_s * (\varepsilon_{cy} + (\kappa_{cy} * 260))\right|$ (4.24)
- $Fs_y2 = \left|E_s * A_s * (\varepsilon_{cy} + (\kappa_{cy} * 40))\right|$ (4.25)
- $Fs_y3 = \left|E_s * A_s * (\varepsilon_{cy} + (\kappa_{cy} * 260))\right|$ (4.26)
- $Fs_y4 = \left|E_s * A_s * (\varepsilon_{cy} + (\kappa_{cy} * 40))\right|$ (4.27)
- $Nc_y = 0.5 * h * \sigma_{cy} * \mathrm{x}_{\mu y}$ (4.28)

Te zien is dat een deel van de zeven bovenstaande formules in absolute vorm worden gegeven. Dit wordt gedaan, zodat er in het model de juiste richtingen van de krachten kunnen worden gewaarborgd. Vervolgens worden de zeven formules allemaal gebruikt in de twee evenwichtsvergelijken voor het verticale krachtenevenwicht en het momentevenwicht om de z-as.

- $\sum F_{vy} = 0 = Fs_y1 - Fs_y2 + Fs_y3 - Fs_y4 - Nc_y + N$ (4.29)
- $\sum M\ (situatie\ 1) = 0 = -Fs_y1 * 260 + Fs_y2 * 40 - Fs_y3 * 260 + Fs_y4 * 40 + \frac{1}{3} * \mathrm{x}_{uy} * Nc - 0.5 * 300 * N + My$ (4.30)

Met:

- $\mathrm{N} = 171.053\ \mathrm{N}\ (\mathrm{druk})$
- $\mathrm{M}_y = 29.817.633\ Nmm$

Nu beide vergelijkingen nu helemaal uitgedrukt zijn in de twee onbekenden: de kromming en de uiterste rek in het beton, kunnen de twee vergelijkingen tegelijkertijd worden opgelost. De output geeft de volgende waarden:

*Tabel 3: Kromming en rek in uiterste betonvezel in y-richting waarbij evenwichten gelijk zijn aan nul*

| | |
|---|---|
| Kromming ($\kappa_{yc}$) ($\frac{1}{mm}$) | $6{,}1 * 10^{-6}$ |
| Rek in uiterste betonvezel ($\varepsilon_{yc}$) (‰) | $-6{,}1 * 10^{-4}$ |

Deze waarden moeten gecontroleerd worden op juistheid. Daarom worden zij terug ingevoerd in de evenwichtsvergelijkingen. De output hiervan is in het volgende figuur te zien.

```
De uitkomsten van de evenwichtsvergelijkingen met de gegeven parameters:
Het verticale krachtenevenwicht: 9.48901288211e-07
Het momentenevenwicht geeft: -0.000171024352312
```

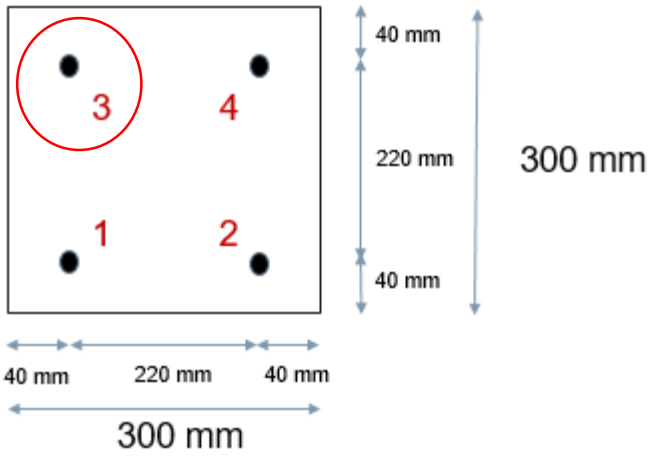
*Figuur 13: Uitkomst evenwichten ingevoerde kromming en rek*

De uitkomsten zijn allebei nagenoeg gelijk aan nul. De conclusie wordt getrokken dat aan allebei de evenwicht voorwaardes wordt voldaan.

Omdat het gaat om symmetrie, wordt er aangegeven dat het uitrekenen van de situatie 2 (in de z-richting) hetzelfde zal verlopen en dezelfde uitkomsten zal geven.

## 4.6 Bepaling staalspanningen

Met de kromming en de uiterste rek in de doorsnede uit de vorige paragraaf, waarmee de evenwichten gewaarborgd zijn, kan de staalspanning worden bepaald. De gewilde staalspanning is van de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde. Deze wapeningsstaaf is rood omcirkeld in het volgende figuur.




*Figuur 14: Doorsnede met gemarkeerde wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde*

Door de bekende waarden in te vullen in de volgende formule wordt de gevraagde staalspanning verkregen:

$$\sigma_{My} = \left(\varepsilon_{yc} + \kappa_{yc} * 260\right) * E_s = (-6{,}1 * 10^{-4} + 6{,}1 * 10^{-6} * 260) * 200.000 = 195{,}2 \ \frac{N}{mm^2} \quad (4.31)$$

Het model zal dezelfde waarde moeten geven als de analytische berekening hierboven. Hieronder is zijn de waarden weergeven die de code als output geeft. De juiste waarde is het volgende figuur rood omcirkeld.

| combinatie | My (kNm) | Mz (kNm) | N (kN) | sigmay (MPa) | sigmaz (MPa) | sigmastaal (MPa) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1: | 33.189 | 7.937 | -100.13 | 389.5 | 4.4 | 435.0 |
| 2: | 23.848 | 13.150 | -43.23 | 341.0 | 147.0 | 435.0 |
| 3: | 45.224 | 18.968 | -238.62 | 331.4 | 10.8 | 435.0 |
| 4: | 18.907 | 15.910 | -24.01 | 292.8 | 238.1 | 435.0 |
| 5: | 15.855 | 19.059 | -24.53 | 235.9 | 294.5 | 435.0 |
| 6: | 29.847 | 30.075 | -171.05 | 195.1 | 198.8 | 435.0 |

*Figuur 15: Uitgerekende waarde sigma(My)*

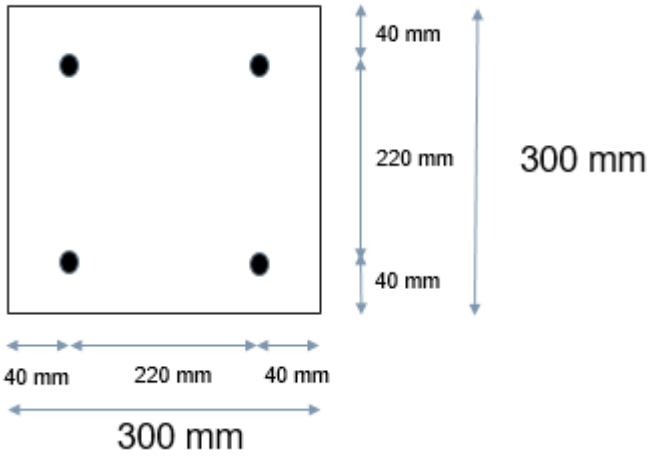
De conclusie is dat de waarden nagenoeg gelijk zijn en dat de berekeningen kloppen. Met deze conclusie kan de volgende stap, resultaten genereren, worden genomen.

# Hoofdstuk 5: Resultaten

In vorige hoofdstukken is het model uitgelegd en gevalideerd. De volgende stap, besproken in dit hoofdstuk, zal bestaan uit het verkrijgen van data.

## 5.1 Doorsnede

De eerste doorsnede die in het model zal worden ingevoerd, heeft de volgende eigenschappen en materialen:

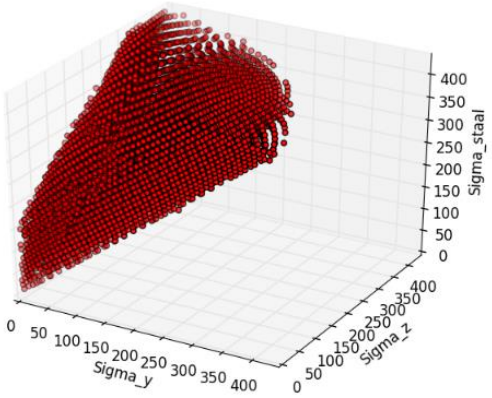



*Figuur 16: Ingevoerde doorsnede*

- Beton sterkteklasse: C30/37;
- Hoogte: 300 millimeter;
- Breedte: 300 millimeter;
- Diameter staalwapening: 12 millimeter;
- Dekking + halve diameter wapeningsstaaf: 40 millimeter (aan beide zijdes naar de randen);
- Wapeningsstaal B500.

## 5.2 Uitvoer Python

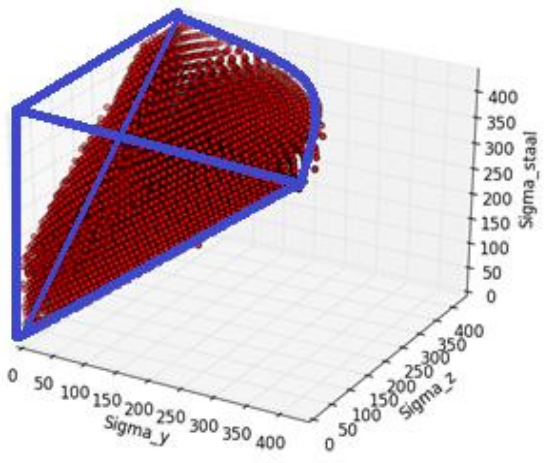
De output van het gemaakte model is een lijst met mogelijke combinaties van belastingen in de Serviceability Limit State alsmede de bijhorende staalspanningen in de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde. Deze lijst bestaat uit meer dan 13.000 punten. Het volgende figuur geeft een 3D plot van deze datapunten weer.




*Figuur 17: Puntenwolk met mogelijke combinaties uit Python code*

Op beide horizontale assen met de labels 'Sigma_y' en 'Sigma_z' zijn de staalspanningen die ontstaan door respectievelijk $M_y$ en $M_z$, met daarbij natuurlijk de normaalkracht. Op de verticale as is de resulterende staalspanning af te lezen die ten gevolge van de dubbele buiging in de wapeningsstaaf heerst.

In het bovenstaande figuur is te zien dat de punten een gebied vormen waarin combinaties kunnen voorkomen. Op te merken is dat door de aangegeven grenzen in de code het gebied niet helemaal gevuld is. Ten tweede valt op dat het gebied een boogvormige grens aan de verst afgelegen zijde van de oorsprong heeft.




*Figuur 18: Afgebakend gebied puntenwolk*

# Hoofdstuk 6: Formule generatie

In het vorige hoofdstuk zijn de resultaten besproken van het uitgevoerde model. In dit hoofdstuk zal geprobeerd worden om deze resultaten te vertalen naar een formule vorm.

## 6.1 Analyseren resultaten

De conclusie van hoofdstuk vijf is dat alle gevonden combinaties zich bevinden in een bepaald gebied, waarin alle andere denkbare combinaties zich bevinden. Op te merken is dat wanneer er een combinatie van $\sigma_{My}$en $\sigma_{Mz}$ gevonden is vanuit de evenwichtsvergelijking er geen eenvoudige optelling van de spanningen kan plaatsvinden. Wanneer $\sigma_{My} = \sigma_{Myz} = 200\ \frac{N}{mm^2}$ kan de resulterende spanning $200\ \frac{N}{mm^2}$ bedragen of misschien wel $435\ \frac{N}{mm^2}$. Vanuit dit idee is te veronderstellen dat de eerste aangenomen formulevorm (1.2) niet als voldoende kan worden beschouwd. Deze formule zal daarom dus uitgebreid moeten worden.

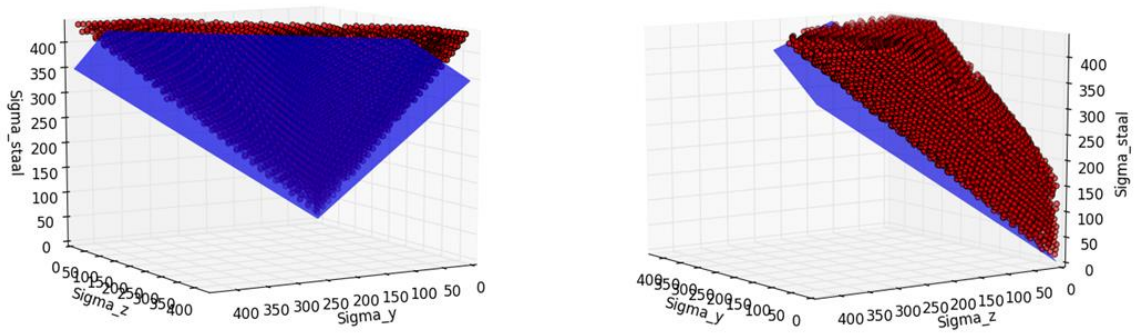
De formule generatie zal daarom uit twee stappen bestaan. Allereerst de ondergrens van het hele gebied bepaald worden. Daarna zal er een extra term worden gezocht, zodat de juiste bijhorende resultante spanning kan worden bepaald.

## 6.2 Stap 1: Ondergrens puntenwolk

De eerste stap van de formule generatie zal bestaat uit het vinden een vlak die de ondergrens van het gevonden gebied uit hoofdstuk vijf omsluit. Op te merken is dat het gebied een gekromde grens heeft. Dit zorgt ervoor dat de aangenomen formule uit hoofdstuk 1 niet voldoende is om de ondergrens te beschrijven.

$$\sigma_{DB} = C * (\sigma_{My} + \sigma_{Mz}) \qquad (1.2)$$

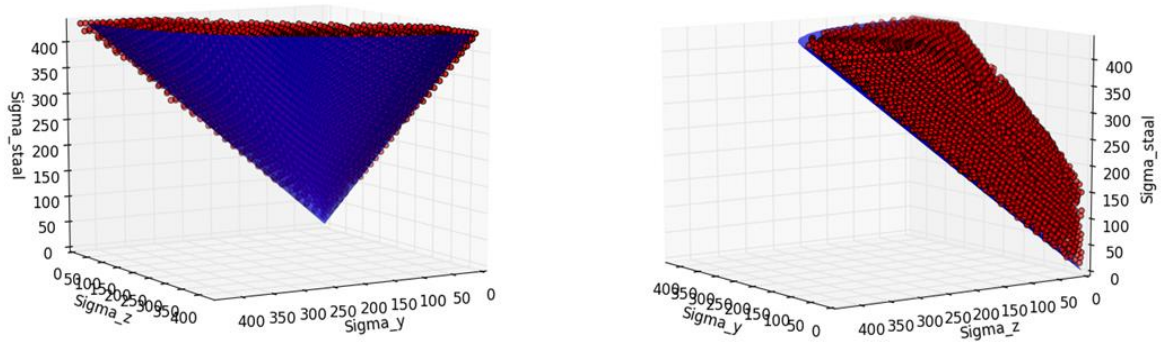
Om achter de vergelijking voor het vlak te komen is er een nieuw stuk code geschreven om de gevonden data te analyseren. De ouput van het model is in de volgende figuren te zien. Tevens is het aangenomen vlak van formule (1.2) met C = 0,8 in deze figuren te zien.




*Figuur 19: Benadering ondergrens met eerste formule (2)*

Er wordt daarom gezocht naar een andere formule die het gebied beter zal omsluiten dan hiervoor het geval was. Na verschillende resultaten van verschillende soorten formules, is de volgende formule gevonden:

$$\sigma_{DB} = 1{,}05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2} \qquad (6.1)$$

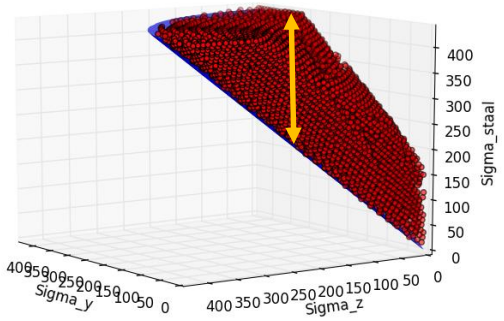



*Figuur 20: Benadering ondergrens met formule (46)*

De figuren laten zien dat het vlak nu het gebied nagenoeg perfect omsluit. Met dit beginpunt kan de volgende stap van de formule generatie genomen worden.

## 6.3 Stap 2: Extra term

De vergelijking voor de ondergrens is reeds bepaald. Deze formule geeft nu alleen nog de ondergrens voor de resultante staalspanning (sigma_staal in het figuur). Het kan namelijk zo zijn dat deze resultante spanning van de dubbele buiging situatie nog kan variëren. De huidige formule houdt hier geen rekening mee. Er moet dus een extra term in de formule die de positie bepaald op de verticale lijn, welke is weergeven in het volgende figuur.




*Figuur 21: Verticale lijn waar mogelijke oplossingen zich bevinden*

Dat betekent dat de vergelijking uitgebreid zal worden naar:

$$\sigma_{DB} = 1{,}05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2} + V \qquad (6.2)$$

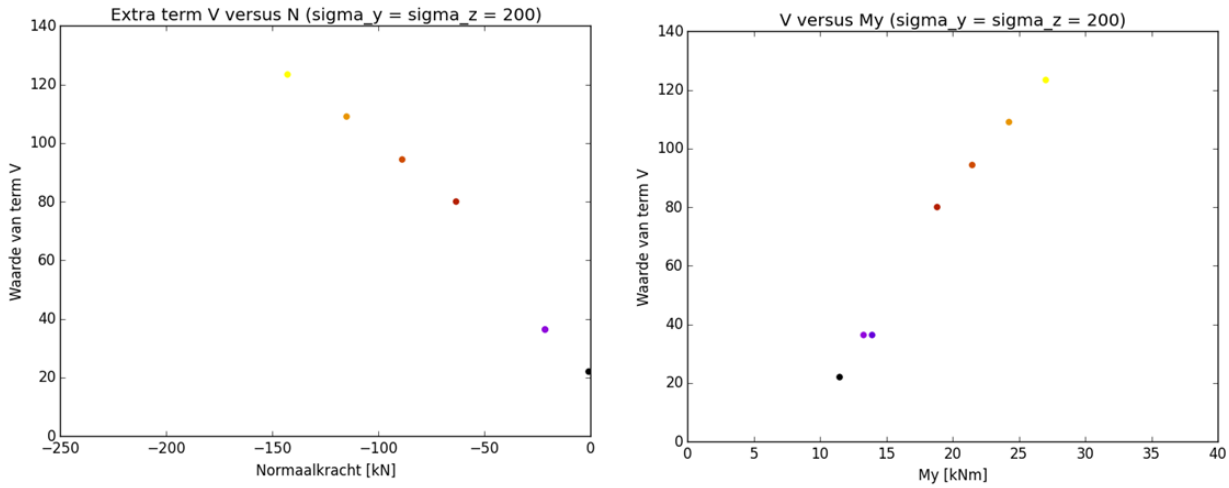
Deze paragraaf zal zich nu verder verdiepen in de extra term V en hoe deze eruit zal moeten zien. Om te beginnen worden datapunten nader bekeken die de waarden hebben: $195 \frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{My}, \sigma_{Myz} \leq 210 \frac{N}{mm^2}$. Alle waarden van deze punten worden naast elkaar gelegd.

*Tabel 4: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 200*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1{,}05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 11,51 | 11,0 | -0,8 | 209 | 200 | 319 | 22 |
| 13,9 | 13,4 | -21,2 | 208 | 198 | 334 | 37 |
| 13,3 | 13,9 | -21,3 | 196 | 209 | 334 | 37 |
| 18,8 | 19,0 | -63,5 | 208 | 210 | 377 | 80 |
| 21,5 | 21,7 | -88,6 | 204 | 207 | 392 | 94 |
| 24,2 | 24,4 | -115,0 | 201 | 204 | 406 | 109 |
| 27,0 | 27,2 | -142,6 | 197 | 201 | 421 | 124 |

In de tabel hierboven is duidelijk te zien dat de resulterende staalspanning door de dubbele buiging (kolom $\sigma_{DB}$) veel varieert, terwijl de staalspanningen door enkele buigingen (kolommen $\sigma_{My}$ en $\sigma_{Mz}$) nauwelijks variëren. De laatste kolom geeft de extra term V weer.

Wat er verder opvalt uit tabel 4, is dat naarmate de normaalkrachten en momenten groter worden de term V ook groter wordt. Dit is te zien in de onderstaande figuren, waar de term V tegen de normaalkracht en het moment om de y-as is uitgezet. Wanneer punten dezelfde kleur hebben in de figuren hieronder betekent dat zij hetzelfde datapunt delen uit tabel 4.

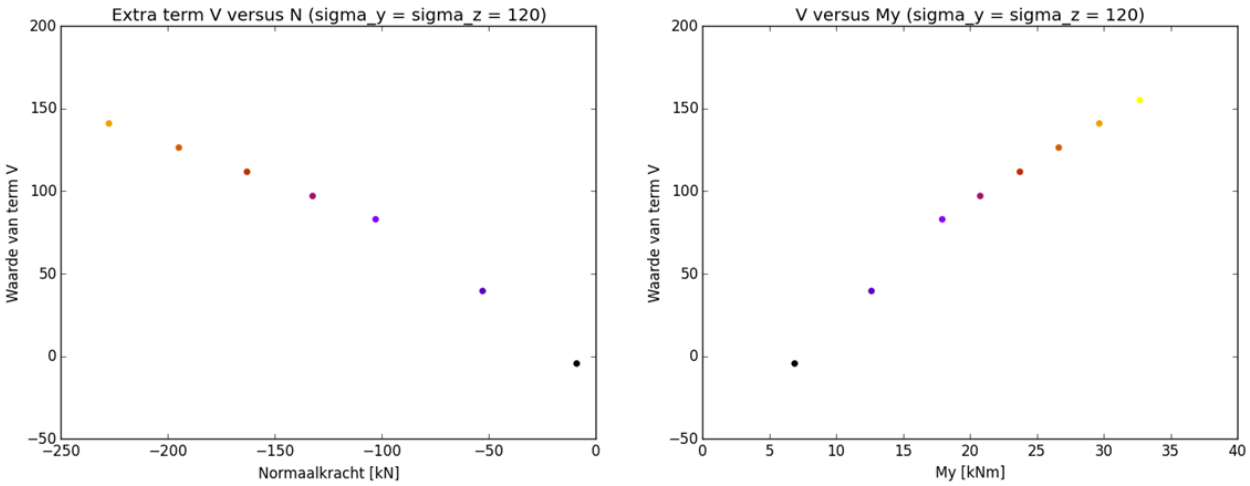



*Figuur 22: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) met datapunten uit tabel 4*

In beide plots van figuur 22 is te zien dat de datapunten nagenoeg op een lijn liggen. De vraag die hieruit volgt is of er een trendlijn opgesteld kan worden voor deze punten. Het antwoord op deze vraag is vrij kort, namelijk dat het mogelijk is. De vraag is dan of deze trendlijn hetzelfde zal zijn voor datapunten die in een ander bereik liggen van van $\sigma_{My}$ en $\sigma_{Mz}$ liggen. Om dit te bekijken zal er naar een ander bereik genomen worden om zo te zien of de datapunten op een andere trendlijn liggen. Er worden nu datapunten verkregen in het bereik van $105\frac{N}{mm^2} \leq \sigma_{My}, \sigma_{Myz} \leq 120\frac{N}{mm^2}$. Deze zijn weergeven in de tabel en figuren hieronder.

*Tabel 5: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1,05 * \sqrt{\sigma_{My}^2 + \sigma_{Mz}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,9 | 6,9 | -8,9 | 107 | 107 | 174 | -4 |
| 12,6 | 11,9 | -52,8 | 119 | 106 | 218 | 39 |
| 17,9 | 18,0 | -102,7 | 117 | 119 | 261 | 83 |
| 20,8 | 21,0 | -132,2 | 114 | 117 | 276 | 97 |
| 23,7 | 23,9 | -163,0 | 112 | 115 | 290 | 112 |
| 26,7 | 26,9 | -194,7 | 111 | 114 | 305 | 126 |
| 29,7 | 29,9 | -227,2 | 110 | 113 | 319 | 141 |




*Figuur 23: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) met datapunten uit tabel 5*

Wanneer de punten in de plots van figuur 22 en 23 nader worden bekeken, is te zien dat bij beiden de punten op een trendlijn liggen. Alleen zijn deze trendlijnen niet hetzelfde. Bij $\sigma_{My} \approx \sigma_{Myz} \approx 200\ \frac{N}{mm^2}$ (tabel 4 en figuur 23) is te zien dat de term V al begint bij $20\frac{N}{mm^2}$, terwijl dat bij $\sigma_{My} \approx \sigma_{Myz} \approx 120\ \frac{N}{mm^2}$ bijna nul is. Dit betekent dat er geen eenvoudige trendlijn gevonden kan worden, die voor alle condities geldt.

De conclusie van deze paragraaf is dat er helaas geen vergelijking voor de term V gevonden kan worden. Het wijst er wel op dat er wel een relatie, gebruikmakend van de belastingen; de normaalkracht en momenten, gevonden kan worden. Dit maakt de totale formule een stuk complexer, waardoor er meer onderzoek nodig is.

# Hoofdstuk 7: Variatie doorsnede eigenschappen

In dit hoofdstuk zal gekeken worden of bepaalde eigenschappen van doorsnedes veranderingen kunnen geven voor de ondergrens in de formule. Ook zal de invloed van deze eigenschappen op de extra term V onder de loep genomen worden.

De eigenschappen die gevarieerd zullen worden, en in dezelfde volgorde zullen worden besproken, zijn de betonsterkteklasse, de afmetingen van de doorsnede en diameter van de wapeningsstaven. Alle datapunten die worden vergeleken zullen het volgende bereik in overeenkomst hebben: $\sigma_{My} \approx \sigma_{Myz} \approx 120\ \frac{N}{mm^2}$ (wanneer mogelijk).

## 7.1 Betonsterkteklasse

Als eerste zal de betonsterkteklasse worden gevarieerd. De betonsterkteklasse die worden getest zijn: C12/15, C30/37 en C50/60. Verder zal ook het hoog sterkte beton C80/95 getoetst worden. Omdat de betonsterkteklasse C30/37 al getoetst is, zal deze niet nog eens behandeld worden.

| Sterkteklassen voor beton | | | | | | | | | | | | | | | Vergelijking/Verklaring |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{ck}$ (MPa) | 12 | 16 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 70 | 80 | 90 | |
| $f_{ck,cube}$ (MPa) | 15 | 20 | 25 | 30 | 37 | 45 | 50 | 55 | 60 | 67 | 75 | 85 | 95 | 105 | |
| $f_{cm}$ (MPa) | 20 | 24 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 68 | 78 | 88 | 98 | $f_{cm} = f_{ck}+8$(MPa) |
| $f_{ctm}$ (MPa) | 1,6 | 1,9 | 2,2 | 2,6 | 2,9 | 3,2 | 3,5 | 3,8 | 4,1 | 4,2 | 4,4 | 4,6 | 4,8 | 5,0 | $f_{ctm}=0,30\times f_{ck}^{(2/3)} \leq$C50/60<br>$f_{ctm}=2,12\cdot\ln(1+(f_{cm}/10))$<br>> C50/60 |
| $f_{ctk,0,05}$ (MPa) | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 1,8 | 2,0 | 2,2 | 2,5 | 2,7 | 2,9 | 3,0 | 3,1 | 3,2 | 3,4 | 3,5 | $f_{ctk;0,05} = 0,7\times f_{ctm}$<br>5 % fractiel |
| $f_{ctk,0,95}$ (MPa) | 2,0 | 2,5 | 2,9 | 3,3 | 3,8 | 4,2 | 4,6 | 4,9 | 5,3 | 5,5 | 5,7 | 6,0 | 6,3 | 6,6 | $f_{ctk;0,95} = 1,3\times f_{ctm}$<br>95 % fractiel |
| $E_{cm}$ (GPa) | 27 | 29 | 30 | 31 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 41 | 42 | 44 | $E_{cm} = 22[(f_{cm})/10]^{0,3}$<br>($f_{cm}$ in MPa) |
| $\varepsilon_{c1}$ (‰) | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,25 | 2,3 | 2,4 | 2,45 | 2,5 | 2,6 | 2,7 | 2,8 | 2,8 | zie figuur 3.2<br>$\varepsilon_{c1}(^0/_{00}) = 0,7\ f_{cm}^{0,31} \leq 2,8$ |
| $\varepsilon_{cu1}$ (‰) | 3,5 | | | | | | | | | 3,2 | 3,0 | 2,8 | 2,8 | 2,8 | zie figuur 3.2<br>voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$\varepsilon_{cu1}(^0/_{00})=2,8+27[(98-f_{cm})/100]^4$ |
| $\varepsilon_{c2}$ (‰) | 2,0 | | | | | | | | | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2, 5 | 2,6 | zie figuur 3.3<br>voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$\varepsilon_{c2}(^0/_{00})=2,0+0,085(f_{ck}-50)^{0,53}$ |
| $\varepsilon_{cu2}$ (‰) | 3,5 | | | | | | | | | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,6 | zie figuur 3.3<br>voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$\varepsilon_{cu2}(^0/_{00})=2,6+35[(90-f_{ck})/100]^4$ |
| $n$ | 2,0 | | | | | | | | | 1,75 | 1,6 | 1,45 | 1,4 | 1,4 | voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$n=1,4+23,4[(90-f_{ck})/100]^4$ |
| $\varepsilon_{c3}$ (‰) | 1,75 | | | | | | | | | 1,8 | 1,9 | 2,0 | 2,2 | 2,3 | zie figuur 3.4<br>voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$\varepsilon_{c3}(^0/_{00})=1,75+0,55[(f_{ck}-50)/40]$ |
| $\varepsilon_{cu3}$ (‰) | 3,5 | | | | | | | | | 3,1 | 2,9 | 2,7 | 2,6 | 2,6 | zie figuur 3.4<br>voor $f_{ck} \geq 50$ MPa<br>$\varepsilon_{cu3}(^0/_{00})=2,6+35[(90-f_{ck})/100]^4$ |

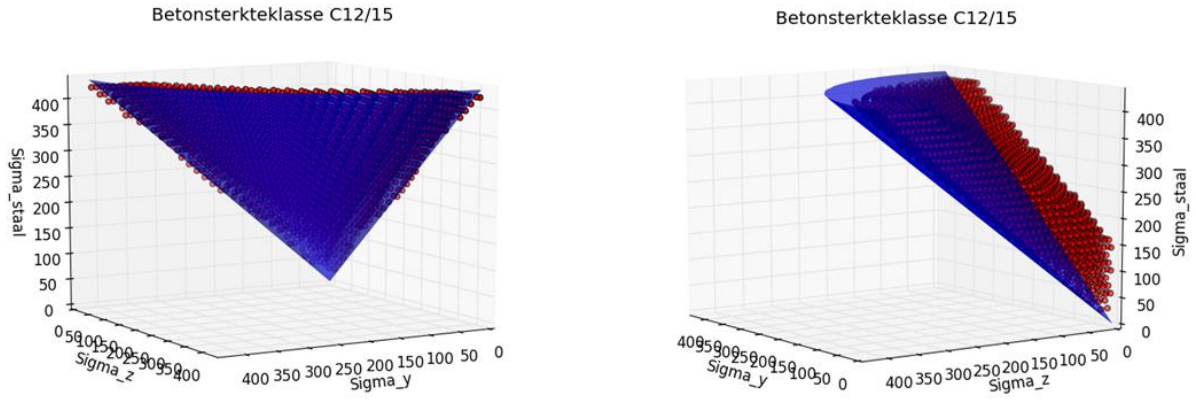
*Figuur 24: Betonsterkteklasse overzicht uit Eurocode 2*

De afmetingen zullen van de doorsnede zullen nu gelijk blijven aan 300 millimeter bij 300 millimeter en blijft de diameter van de staalwapening 12 millimeter. De plaats van de staven blijven nu ook gelijk.

### 7.1.1 C12/15

De verandering van de betonsterkteklasse zorgt ervoor dat de karakteristieke druk sterkte veranderd. Deze druksterkte zal veranderen naar 12 N/mm$^2$. Dit zorgt ervoor dat het beton hogere spanningen kan weerstaan, wat dan weer zal zorgen voor grotere krachten en momenten in de doorsnede.

De druksterkte wordt in de code aangepast en hiermee zal opnieuw een puntenwolk gegenereerd worden. Hier zal dan gekeken worden of de gestelde ondergrens ook aanvaardbaar is voor deze betonsterkteklasse.

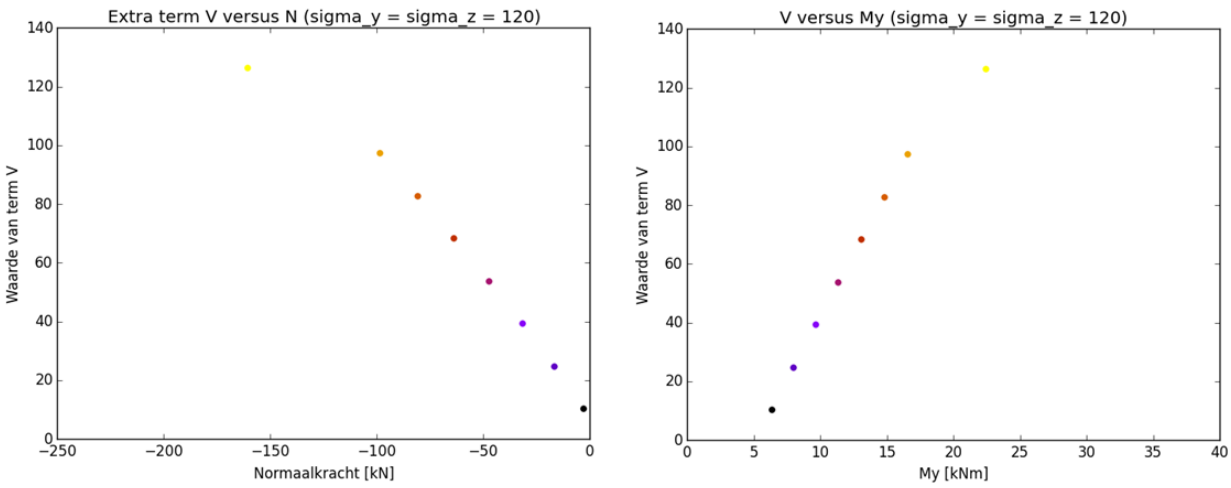



*Figuur 25: Puntenwolk C12/15*

De ondergrens past hier niet precies net als bij de betonsterkteklasse C30/37, maar is niet zozeer afwijkend om deze te corrigeren. Om te kijken of de term V veel verschilt met C12/15 ten opzichte van C30/37 zullen wederom punten bekeken worden van $\sigma_{My} \approx \sigma_{Myz} \approx 120\ \frac{N}{mm^2}$. Wederom zijn deze punten hieronder weergeven in tabelvorm en figuren.

*Tabel 6: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120 (C12/15)*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1,05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6,4 | 6,4 | -2,6 | 115 | 115 | 189 | 10 |
| 8,0 | 8,1 | -16,4 | 115 | 116 | 203 | 25 |
| 9,7 | 9,7 | -31,3 | 116 | 117 | 218 | 39 |
| 11,4 | 11,4 | -47,1 | 116 | 117 | 232 | 54 |
| 13,1 | 13,2 | -63,7 | 117 | 118 | 247 | 68 |
| 14,8 | 15,0 | -80,8 | 117 | 119 | 261 | 83 |
| 16,6 | 16,7 | -98,3 | 118 | 120 | 275 | 97 |
| 22,5 | 21,6 | -160,3 | 119 | 105 | 305 | 126 |

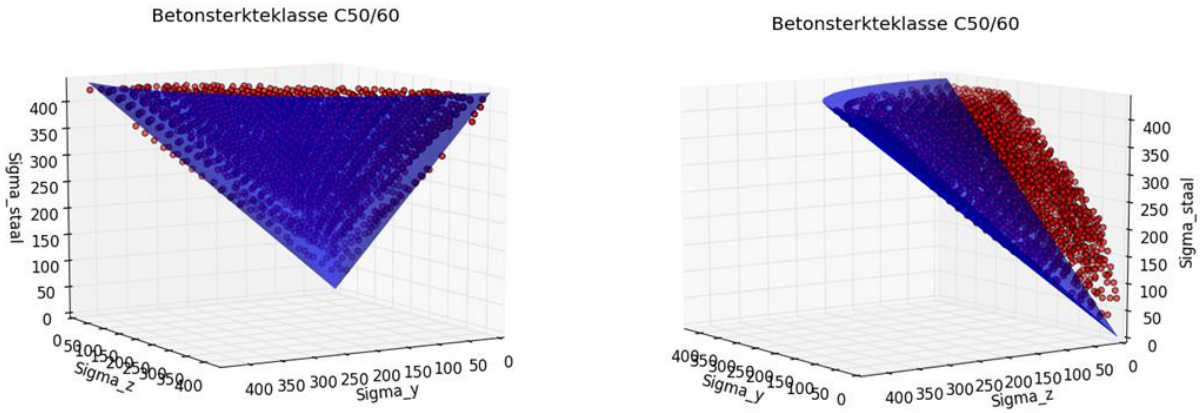



*Figuur 26: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) (C12/15) met datapunten uit tabel 6*

De verschillen met figuren 23 lijken te liggen dat de lijnen steiler verlopen. Dit betekent dat de betonsterkteklasse ervoor zorgt dat de gradiënt van de term V hoger wordt.

### 7.1.2 C50/60

Bij de betonsterkteklasse C12/15 is te zien dat de ondergrens van het gebied nauwelijks veranderd. Nu zal de betonsterkteklasse C50/60 bekeken worden, wat betekent dat de karakteristieke druksterkte 50 N/mm$^2$ bedraagt. Der verwachting zal zijn de ondergrens ook voldoende nauwkeurig is en dat de gradiënt van de term V kleiner zal zijn.

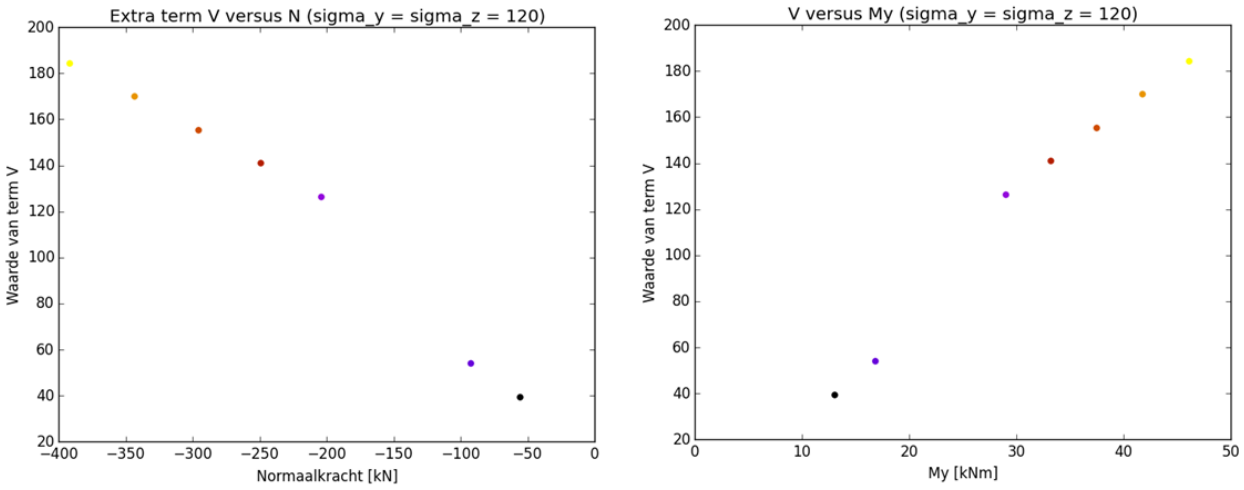



*Figuur 27: Puntenwolk C50/60*

Wederom blijkt de ondergrens nauwkeurig genoeg te zijn om de initiële schatting te maken. Nu zal ook de term V verder bekeken worden.

*Tabel 7: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120 (C50/60)*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1,05 * \sqrt{\sigma_{My}^2 + \sigma_{Mz}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 13,1 | 13,2 | -55,3 | 115 | 117 | 218 | 39 |
| 16,9 | 17,0 | -92,0 | 109 | 111 | 232 | 54 |
| 29,1 | 29,3 | -204,0 | 115 | 118 | 305 | 126 |
| 33,2 | 33,5 | -248,9 | 111 | 115 | 319 | 140 |
| 37,5 | 37,8 | -295,3 | 108 | 113 | 334 | 155 |
| 41,8 | 42,2 | -343,0 | 107 | 111 | 348 | 170 |
| 46,2 | 46,6 | -391,9 | 105 | 110 | 363 | 184 |



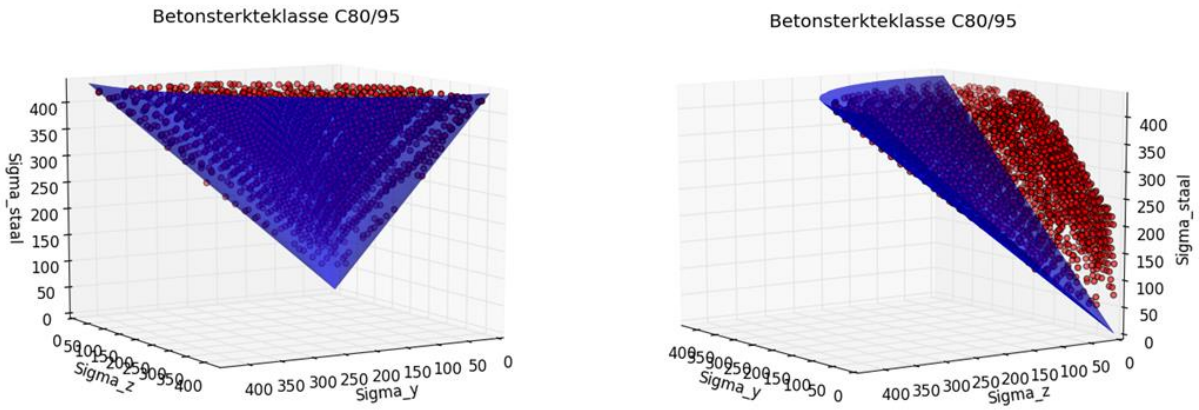

*Figuur 28: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) (C50/60) met datapunten uit tabel 7*

De gradiënt van de term is wederom kleiner geworden met een grotere betonsterkteklasse. Op te merken is dat de limieten van de x-as zijn aangepast. Dit zorgt ervoor het visueel verwarrend kan zijn dat de gradiënt kleiner is geworden dan bij de betonsterkteklasse C12/15. De andere conclusie is de ondergrens van de puntenwolk enigszins gelijk is gebleven.

### 7.1.3 C80/95

Als laatste wordt het hoog sterkte beton C80/95 in het model ingevoerd. Niet alleen de karakteristieke druksterkte van 80 N/mm² ingevoerd, maar ook de afwijkende rek van -2,2‰ ten opzichte van de andere betonsterkteklasses.

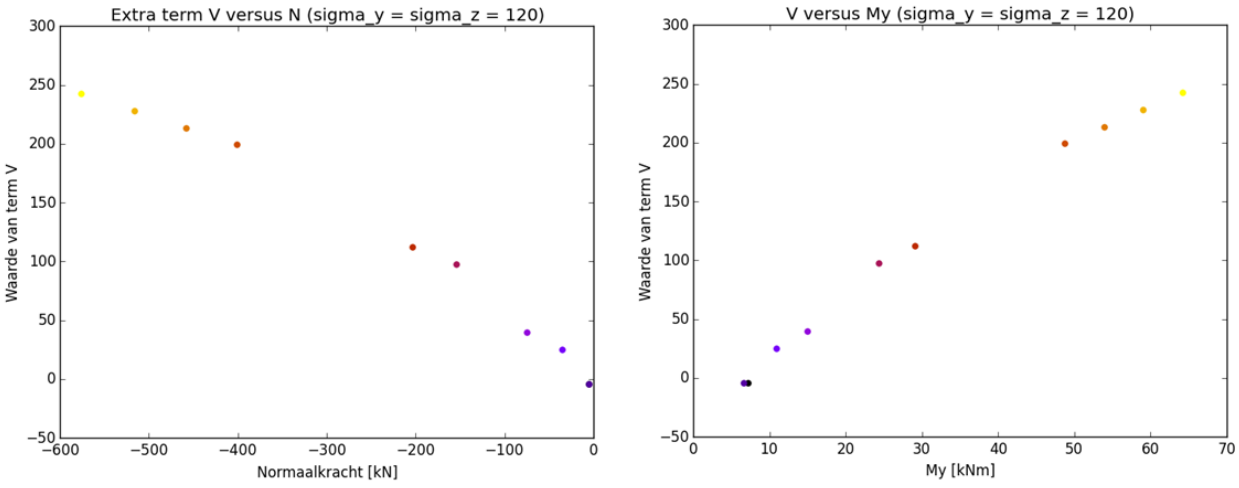
Op de volgende pagina zijn alle resultaten van de betonsterkteklasse C80/95 weergeven.




*Figuur 29: Puntenwolk C80/95*

*Tabel 8: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120 (C80/95)*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1,05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7,2 | 6,7 | -5,1 | 118 | 108 | 174 | -4 |
| 6,7 | 7,4 | -5,3 | 107 | 119 | 174 | -4 |
| 10,9 | 11,0 | -35,2 | 117 | 119 | 203 | 25 |
| 15,1 | 15,2 | -74,2 | 109 | 111 | 218 | 39 |
| 24,3 | 24,5 | -153.8 | 116 | 119 | 276 | 97 |
| 29,1 | 29,3 | -202,9 | 110 | 113 | 290 | 112 |
| 48,8 | 49,3 | -400,1 | 114 | 118 | 377 | 199 |
| 54,0 | 54,4 | -457,6 | 112 | 117 | 392 | 213 |
| 59,1 | 59,6 | -515,9 | 110 | 115 | 406 | 228 |
| 64,3 | 64,9 | -575,3 | 110 | 115 | 421 | 242 |

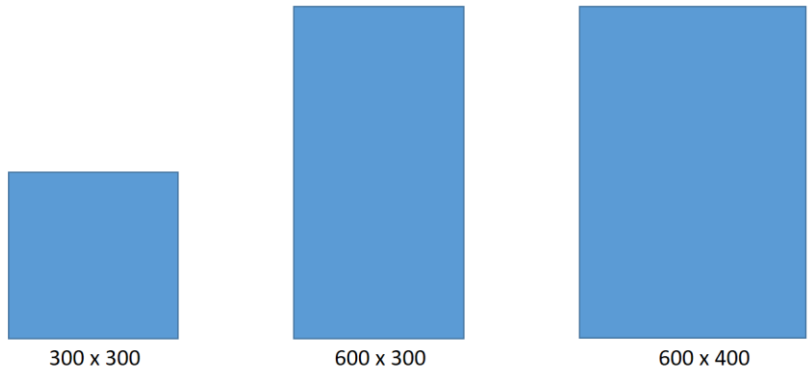



*Figuur 30: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) (C80/95) met datapunten uit tabel 8*

In de figuur 31 is te zien dat de gradiënt van de term V wederom kleiner is geworden met de groter wordende betonsterkteklasse. De formule van de ondergrens van de puntenwolk sluit nog steeds aan bij de puntenwolk.

## 7.2 Afmetingen doorsnede

In de vorige paragrafen is gevarieerd met de betonsterkteklasses. Nu worden de afmetingen van de doorsnede veranderd. De doorsnedes blijven wel rechthoekig. De afmetingen die bekeken worden zijn de volgende:

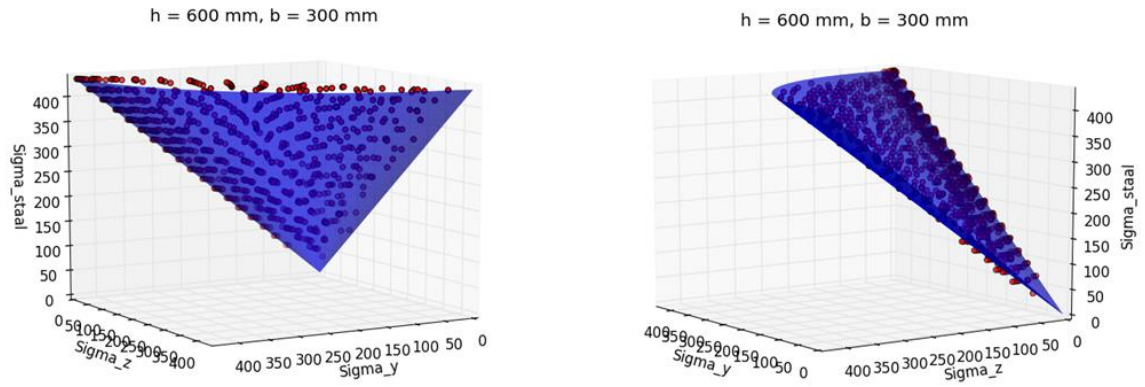



*Figuur 31: Afmetingen doorsnede in millimeter (h * b)*

De andere eigenschappen van de doorsnede blijven constant. Dit betekent dat de betonsterkteklasse gelijk blijft aan C30/37 en de diameter van wapeningsstaven 12 millimeter. De eerste afmeting: 300 bij 300 millimeter, is al behandeld bij hoofstukken 5 en 6 en wordt daarom hier achterwege gelaten.

### 7.2.1 600 x 300 millimeter

De eerste afmetingen die in de Python code worden ingevoerd zijn de hoogte van 600 millimeter en een breedte van 300 millimeter. Hieronder zijn de verkregen dat weergeven.

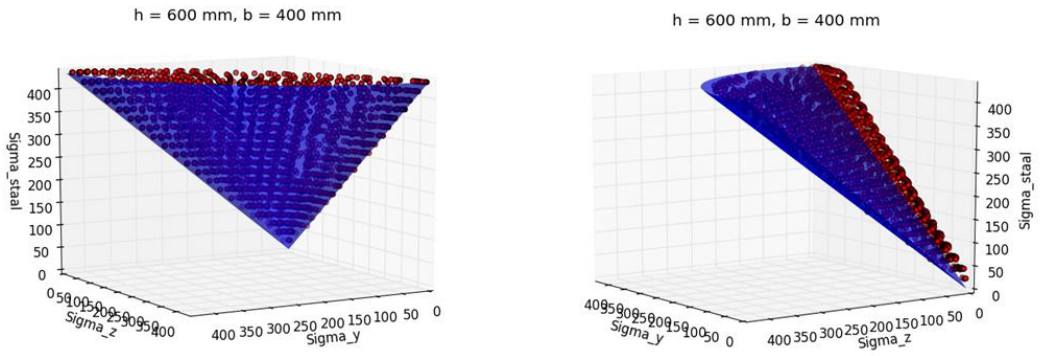



*Figuur 32: Puntenwolk 600 * 300 mm*

Het verschil met de puntenwolk van de initiële puntenwolk uit hoofdstuk 5 en de puntenwolk hierboven is dat de punten uit figuur 33 hierboven allemaal in een vlak lijken te liggen. Dit zal komen doordat er voor deze afmetingen van de doorsnede minder combinaties zijn die voorkomen. Wanneer de stapgrootte in het model aangepast zal worden, zullen er meer punten van het vlak af liggen. Doordat alle punten in hetzelfde vlak liggen zou dat betekenen dat de extra term V bij deze doorsnede niet nodig blijkt te zijn. Toch zal deze term niet uit de ontwerpformule worden weggeschreven, omdat deze voor andere condities wel nodig zal zijn. Tevens is dezelfde constante van 1,05 aangehouden. Deze blijkt ook met deze condities voldoende te zijn.

### 7.2.2 600 x 400 millimeter

Uit de vorige test is gebleken dat bij de afmeting van 600 millimeter bij 300 millimeter alle punten in een vlak liggen. De vraag is of dat ook geldt voor de afmeting die nu wordt getest; 600 millimeter bij 400 millimeter. De resultaten zijn hieronder weergeven.

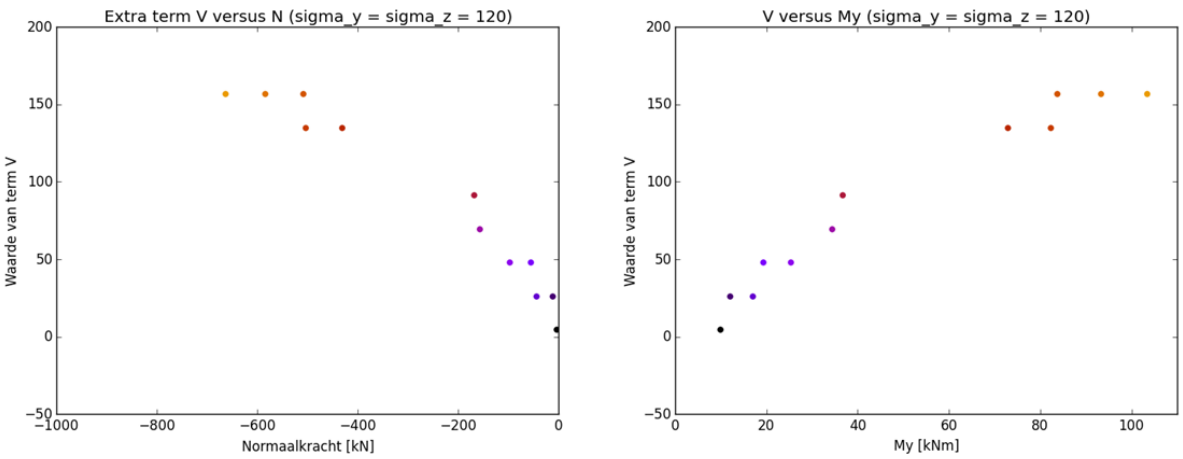



*Figuur 33: Puntenwolk 600 * 400 mm*

In tegenstelling tot de afmetingen 600 millimeter bij 300 millimeter liggen nu niet alle punten in een enkel vlak. Dit betekent dat de term V in dit geval gerechtvaardigd is. Verder is de vergelijking van de aangenomen ondergrens correct en hoeft niet aangepast te worden.

*Tabel 9: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120 (600 mm bij 400 mm)*

| $M_y$ [kNm] | $M_z$ [kNm] | N [kN] | $\sigma_{My}$ [N/mm²] | $\sigma_{Mz}$ [N/mm²] | $\sigma_{DB}$ [N/mm²] | V ($\sigma_{DB} - 1,05 * \sqrt{\sigma_{My}^2 + \sigma_{Mz}^2}$) [N/mm²] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 9,9 | 13.5 | -2,7 | 121 | 108 | 174 | 4 |
| 12,1 | 17,4 | -11,7 | 130 | 122 | 196 | 26 |
| 17,0 | 23,0 | -44,1 | 122 | 107 | 196 | 26 |
| 19,4 | 27,3 | -55,1 | 129 | 122 | 218 | 48 |
| 25,3 | 34,0 | -96,2 | 121 | 107 | 218 | 48 |
| 34,4 | 45,6 | -155,9 | 120 | 109 | 239 | 70 |
| 36,7 | 50,3 | -167,4 | 126 | 125 | 261 | 91 |
| 73,0 | 90,9 | -430,5 | 122 | 116 | 304 | 135 |
| 82,4 | 98,5 | -503,2 | 122 | 108 | 304 | 135 |
| 83,7 | 103,8 | -508,3 | 126 | 124 | 326 | 157 |
| 93,3 | 111,3 | -583,6 | 127 | 116 | 326 | 157 |
| 103,5 | 118,5 | -663,6 | 128 | 109 | 326 | 157 |




*Figuur 34: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) (600 * 300 mm) met datapunten uit tabel 9*

In de figuren hierboven is te zien dat de punten een route volgen van een trendlijn die waarschijnlijk wordt beschreven door een deel van een parabolische functie. Dat betekent dat de formule van de term V in deze situatie parabolisch zal zijn.

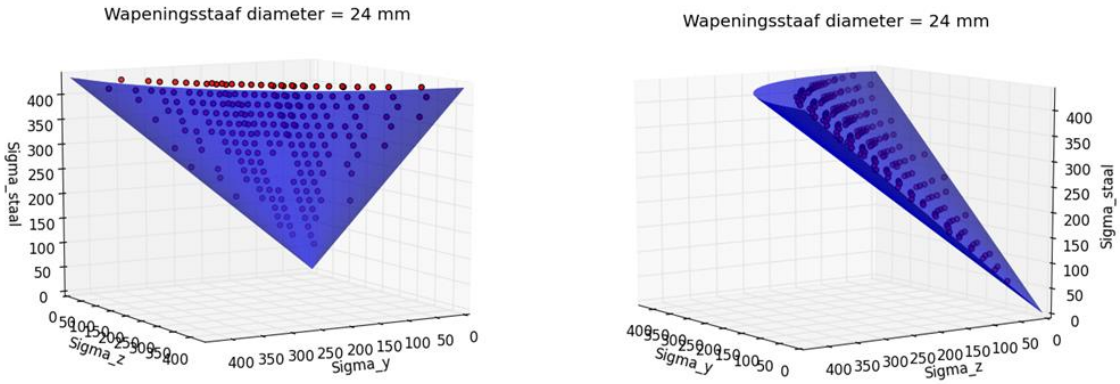
## 7.3 Diameter wapeningsstaven

De laatste variatie zal zich richten op de wapeningsstaven, want de diameter van deze staven zal vergroot worden naar 24 millimeter en 48 millimeter. Het aantal wapeningsstaven zal gelijk blijven en ze blijven op dezelfde plekken binnen de doorsnede.

De afmetingen van de doorsnede worden vastgezet op 300 bij 300 millimeter en betonsterkteklasse zal te allen tijde C30/37 blijven. De eerste test is gedaan met een wapeningsdiameter van 12 millimeter en zal hier achterwege worden gelaten.

### 7.3.1 Diameter 24 millimeter

Om te beginnen wordt er in de code een wapeningsdiameter van 24 millimeter ingevoerd. Bij de output zal er gekeken worden wat in de invloed van deze verandering is op de ondergrens van puntenwolk en de term V.

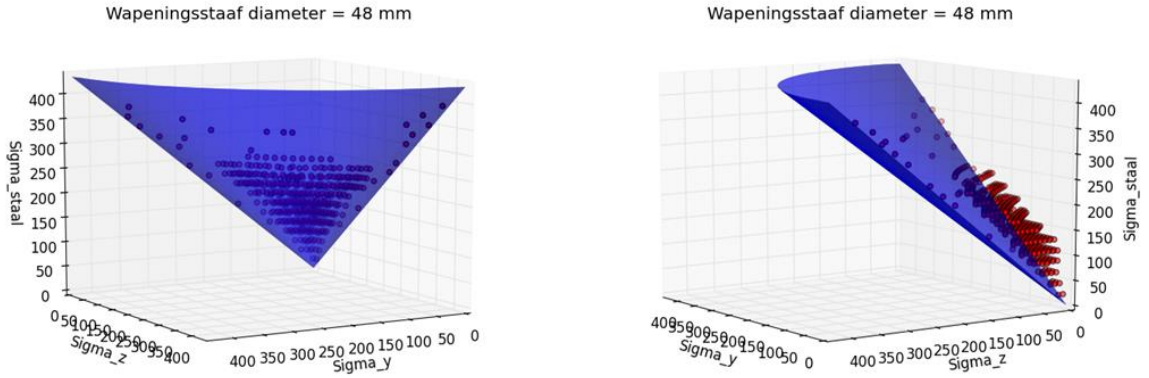



*Figuur 35: Puntenwolk wapeningsdiameter 24 millimeter*

Net als bij het variëren van de afmetingen van de doorsnede is te zien dat bij grotere diameter van de wapeningsstaven de punten zich concentreren op het vlak. Ook hier is de aangenomen formule (6.1) toepasbaar is op het verkregen vlak. Dat alle punten met deze condities in een vlak liggen, zal wederom komen doordat er minder mogelijke combinaties zijn met de gekozen stapgrootte in het model. Wanneer de stapgrootte kleiner wordt genomen, wordt er verwacht dat er meer punten van het vlak af liggen.

### 7.3.2 Diameter 48 millimeter

Nu wordt de diameter van de wapeningsstaven nog een keer verdubbeld naar de 48 millimeter. De resultaten hiervan zijn hieronder weergeven.



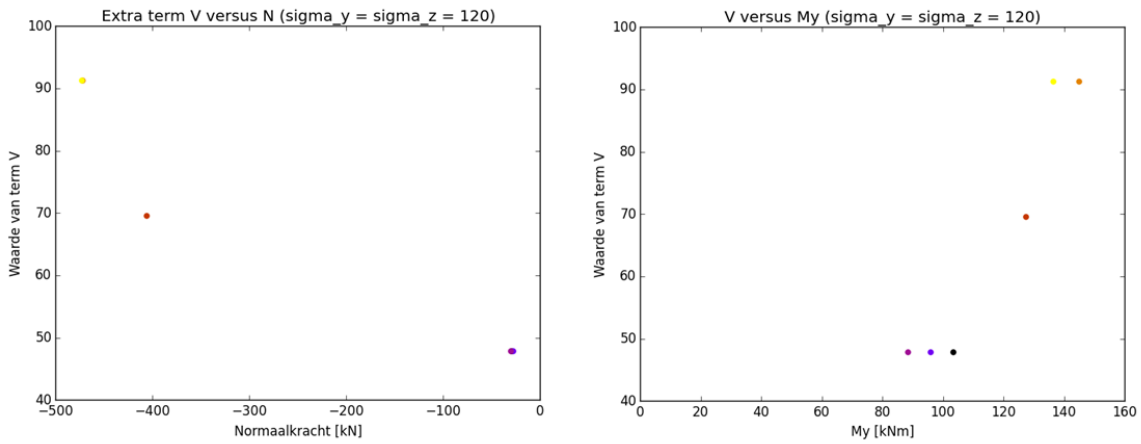

*Figuur 36: Puntenwolk wapeningsdiameter 48 millimeter*

Het verschil tussen figuur 36 hierboven met figuur 35 met de wapeningstaaf diameter van 24 millimeter is dat er punten zijn die van het vlak af liggen. Wat betekent dat er een correctie nodig is in de vorm van de extra term V. Datapunten tussen $\sigma_{My} \approx \sigma_{Myz} \approx 120\ \frac{N}{mm^2}$ zijn hieronder weergeven in een tabel.

*Tabel 10: Datapunten waar Sigma(My) = Sigma(Mz) = 120 (diameter is 48 millimeter)*

| **$M_y$ [kNm]** | **$M_z$ [kNm]** | **N [kN]** | **$\sigma_{My}$ [N/mm²]** | **$\sigma_{Mz}$ [N/mm²]** | **$\sigma_{DB}$ [N/mm²]** | **V ($\sigma_{DB}$ - $1,05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2}$) [N/mm²]** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 103,6 | 88,7 | -29,0 | 126 | 107 | 218 | 48 |
| 96,0 | 96,2 | -27,4 | 117 | 117 | 218 | 48 |
| 88,4 | 103,9 | -29,5 | 107 | 126 | 218 | 48 |
| 127,5 | 128,0 | -405,4 | 109 | 110 | 239 | 70 |
| 145,0 | 137,0 | -472,1 | 123 | 113 | 261 | 91 |
| 136,5 | 145,5 | -472,4 | 113 | 124 | 261 | 91 |

Wanneer de extra term wordt geplot tegen de normaalkracht en het moment om de y-as, dan worden de volgende figuren verkregen.




*Figuur 37: Extra term V versus N (plot links) en My (plot rechts) (wapeningsstaal diameter is 48 millimeter) met datapunten uit tabel 9*

Uit het figuur 37 is te zien dat de punten lijken te liggen op een trendlijn die wordt beschreven door een machtsfunctie. Tevens is op te merken dat de gradiënt van deze lijn steeds lijkt toe te nemen met een grotere normaalkracht en/of moment, terwijl in de andere resultaten dit juist omgekeerd was. Hier werd de gradiënt juist steeds kleiner.

# Hoofdstuk 8: Conclusies, discussie en aanbevelingen

## 8.1 Conclusies

In dit rapport is er gezocht naar een ontwerpformule voor ontwerpers om snel en eenvoudig de spanning ten gevolge van dubbele buiging in de wapeningsstaaf aan de meest getrokken zijde van de doorsnede te vinden. De conclusie na dit bachelor eindwerk is dat er nog geen eenvoudige formule gevonden is, maar er zijn wel enkele conclusies te trekken uit de resultaten van het eindwerk.

De eerste conclusie is dat er wel degelijk een ondergrens te vinden is het aangenomen model in dit rapport. Iedere eigenschap die is getest heeft dezelfde ondergrens gemeen. Dit betekent dat als er in de toekomst een ontwerpformule gevonden zal worden het vlak van de ondergrens de eerste term in deze ontwerpformule kan zijn. De gevonden vergelijking voor het vlak die de ondergrens lijkt op, waar de correctie in de vorm van de extra term V bij komt:

$$\sigma_{DB} = 1{,}05 * \sqrt{{\sigma_{My}}^2 + {\sigma_{Mz}}^2} + V \qquad (8.1)$$

De tweede conclusie is dat de output van het model allemaal datapunten kwamen die allemaal in een begrenst 3D gebied liggen. De formule (8.1) hierboven beschrijft een ondergrens. Dat betekent dat de resulterende spanning van de dubbele buiging situatie alsnog hoger zou kunnen uitvallen. Daarom is er een extra term ingevoerd in de vorm van de term V. Deze term V is afhankelijk van de grootte van de belastingen op de doorsnede. Er wordt gesteld dat deze term V zelf een functie is met de normaalkracht en/of momenten als input. Het tweede deel van deze conclusie is dat de gradiënt van de term V minder wordt naarmate de staalspanningen van de enkele buiging situaties ook minder worden. Hier zou ook rekening gehouden mee moeten worden.

De laatste conclusies omschrijft de invloed van eigenschappen van de doorsnede. De eigenschappen hadden geen duidelijke invloed op de vergelijking van de ondergrens (8.1). De invloeden waren vooral geconcentreerd op de extra term V en welke soort functie dat zou moeten zijn. De gevarieerde eigenschappen waren de betonsterkteklasse, afmetingen van de doorsnede en diameter van de wapeningsstaven. Alle verschillende doorsnedes worden vergeleken met initiële test. Deze conclusies zijn te vinden in te vinden in de tabellen hieronder en hoofdstuk 7.

*Tabel 11: Invloed betonsterkteklasse op soort functie V*

| Betonsterkteklasse | Soort functie V |
|---|---|
| C12/15 | Steiler parabolisch |
| C30/37 | Parabolisch |
| C50/60 | Flauwer parabolisch |
| C80/95 | Flauwer parabolisch |

*Tabel 12: Invloed doorsnede afmetingen op soort functie V*

| Doorsnede afmetingen (mm x mm) | Soort functie V |
|---|---|
| 300 x 300 | Parabolisch |
| 600 x 300 | n.v.t. |
| 600 x 400 | Steiler parabolisch |

*Tabel 13: Invloed diameter wapeningsstaven op soort functie term V*

| Diameter wapeningsstaven (mm) | Soort functie V |
|---|---|
| 12 | Parabolisch |
| 24 | n.v.t. |
| 48 | Machtsfunctie |

## 8.2 Discussie

Het model in dit rapport zijn gebaseerd op de hypothese van Bernoulli die zegt dat alle doorsnedes na vervorming vlak blijven. Wanneer deze hypothese wordt verworpen, zal dit model niet meer voldoen. Een interessante vraag zou kunnen zijn of deze hypothese al niet achterhaald en nader onderzocht zou moeten worden.

Het tweede discussiepunt is dat er nu veel belastingcombinaties zijn meegenomen in het onderzoek die vaak niet voorkomen in de realiteit. Misschien is het voor verdere onderzoeken beter is om deze onrealistische belastingcombinaties uit de resultaten te filteren om zo dichter bij de realiteit te blijven.

Het laatste discussiepunt gaat over de vraag of de conclusie in tabel 12 met de diameter van 48 millimeter correct is, omdat de rest van de eigenschappen een andere parabolische functie beschrijven. Dit zal nader onderzoek moeten uitwijzen.

## 8.3 Aanbevelingen

In de vorige paragraaf van dit hoofdstuk zijn er conclusies getrokken uit dit rapport. Deze conclusies kunnen dan weer worden vertaald naar aanbevelingen voor eventuele verdere onderzoeken.

1. De term V zal nader onderzocht moeten worden en er zal dan een functie uit moeten komen waardoor V voor elke belasting situatie berekend kan worden. Wanneer dit lukt, zou het mogelijk moeten zijn om tot een ontwerpformule te komen.
2. De invloed van eigenschappen van de doorsnede op de term V moeten nader onderzocht worden
3. Verder zouden er meerdere eigenschappen getoetst worden op hun invloed op de extra term V; te denken aan andere vormen voor de doorsnedes, bijv. ronde doorsneden. Het toevoegen van meerdere wapeningsstaven zou hier ook van toepassing zijn.
4. Aan het einde zal de ontwerpformule geverifieerd moeten worden voor alle mogelijke belastingen situaties. Dat betekent dat de uitkomsten van de analytische checks overeenkomen met de uitkomsten van de ontwerpformule.

# Literatuurlijst

[1] C. Hartsuijker (2001), Toegepaste Mechanica: Deel 2, Delft: TU Delft.

[2] Prof. ir L.A.G. Wagemans (2014), Quick Reference: Edition 2014, Delft: TU Delft.

[3] Eurocode 2 (2015-09-15). URL: *https://connect.nen.nl/standard/openpdf/nen-en1992-1-1-c2=2011nl_0004_00522957_003.pdf?artfile=522957&RNR=159356&token=ad0bd759-f689-4584-a7ef-5faf5641c152&type=pdf#pagemode=bookmarks&Search="eurocode 2"*

# Ruwe data

Er is ervoor gekozen om niet alle datapunten van alle verschillende eigenschappen te weergeven, omdat hier te veel ruimte voor nodig is. Daarom kan alle ruwe data kan worden verkregen op aanvraag.

# Bijlage code

Er zijn drie Python codes geschreven in tijdens dit project. De eerste code is geschreven om de Eurocode 2 norm voor behandeling van dubbele buiging te weergeven. De tweede is voor de opbouw van het model en het verkrijgen van oplossingen. De laatste is geschreven om de verkregen data in te laden en te vergelijken. De laatste code is vooral geschreven omdat er anders te veel tijd wordt verspild aan het runnen van de tweede code.

Deze pagina is verder leeg gelaten, omdat de Python code zal worden weergeven in landscape modus.

# A. Python code Eurocode 2 norm

```
##Packages worden geladen en plots worden gesloten
from pylab import *
import numpy as np
close('all')

alpha = [1.0,1.5,2.0] #verschillende machten in norm

#Uitkomsten array voor functies met verschillende alpha's
f1 = []
f2 = []
f3 = []

x = np.linspace(0,1,100) #X-coordinaten

for i in range(len(alpha)):
    for j in range(len(x)):
        y = (1-(x[j]**alpha[i]))**(1/alpha[i]) #Omgeschreven norm naar een functie
        if alpha[i] == 1.0:
            f1.append(y) #Uitkomsten in f1 array gezet voor alpha = 1.0
        if alpha[i] == 1.5:
            f2.append(y) #Uitkomsten in f2 array gezet voor alpha = 1.5
        if alpha[i] == 2.0:
            f3.append(y) #Uitkomsten in f3 array gezet voor alpha = 2.0

#De drie verschillende functies worden geplot
plot(f1,x,label='alpha = 1.0')
plot(f2,x,label='alpha = 1.5')
plot(f3,x,label='alpha = 2.0')
xlabel('MyEd / MyRd')
ylabel('MzEd / MzRd')

legend()
show()
```

## B. Python code model (hoofdstuk 4 en 5)

```
# -*- coding: utf-8 -*-
#Packages importeren en sluiten figuren
from pylab import *
import numpy as np
import pylab as py
from scipy import optimize as opt
import math as m
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
py.close("all")

## Begin invoer variabelen

#Variabelen beton en staal
ec3 = -1.75*10**(-3) #grootste rek in het beton in de SLS
fck = 38.0 #Karakteristieke drukspanning betonklasse
Ec = abs(fck/ec3) #Elasticiteitsmodulus beton in SLS-fase
Es = 200000.0 #Elasticiteitsmodulus staal, door ontwerper zelf in te vullen
ds = 12.0 #diameter staalwapening in mm
fy = 435.0
ey = fy/Es

#Eigenschappen doorsnede
h = 300 #breedte in mm
b = 300 #hoogte czin mm
c = 40 #dekking in mm

nc = [b/2.0,h/2.0]

wstaven = zeros((4,3))
wstaven[0] = [c,c,ds] #staaf linksonder
wstaven[1] = [b-c,c,ds] #staaf rechtsonder
wstaven[2] = [c,h-c,ds] #staaf linksboven
wstaven[3] = [b-c,h-c,ds] #staaf rechtsboven

## Einde invoer variabelen

## Functie voor kleinere stappen dan 1.0
def frange(start,stop,stap):
    i = start
```

```
    while i < stop:
        yield i
        i += stap

## Evenwicht in de z-richting (Om de y-as)
def rekkenMz(p):
    epsz, krz = p
    sigmacz = abs(epsz * Ec)
    xuz = abs(epsz/krz)
    eps1 = epsz + (krz*(wstaven[2,1]))
    eps2 = epsz + (krz*(wstaven[1,1]))
    Fs1 = abs(Es * As * eps1)
    Fs2 = abs(Es * As * eps2)
    FVEz = (2*Fs1)-(2*Fs2)-(sigmacz*b*0.5*xuz)+(-N)
    MEz = (2*Fs2*(wstaven[1,1])) + ((1/3.0)*xuz*sigmacz*h*0.5*xuz) - (0.5*h*-N) - (2*Fs1*(wstaven[2,1])) + Mz
    return [FVEz, MEz]

## Evenwicht in de y-richting (Om de z-as)
def rekkenMy(p):
    epsy, kry = p
    sigmacy = abs(epsy * Ec)
    xuy = abs(epsy/kry)
    eps1 = epsy + (kry*(b-wstaven[2,0]))
    eps2 = epsy + (kry*(b-wstaven[1,0]))
    Fs1 = abs(Es * As * eps1)
    Fs2 = abs(Es * As * eps2)
    FVEy = (2*Fs1)-(2*Fs2)-(sigmacy*h*0.5*xuy)+(-N)
    MEy = (2*Fs2*(b-wstaven[1,0])) + ((1/3.0)*xuy*sigmacy*h*0.5*xuy) - (0.5*b*-N) - (2*Fs1*(b-wstaven[2,0])) + My
    return [FVEy, MEy]

## Interval en stapgroottes van aangenomen waarden
stapphiz = 0.02
stopphiz = 4.0
stapphiy = 0.02
stopphiy = 4.0
stapeps = ey/20.0
stopeps = ey + stapeps

## Lege array's worden gemaakt om waardes te storen
eps = []
ezca = []
eyca = []
```

```
Mya = []
Mza = []
Na = []
sigya = []
sigza = []
sigmastaal = []
sigcveldApp = []
epsya = []
krycApp = []
epsza = []
krzcApp = []
epsyApp = []
krya = []
epszApp = []
krza = []

## Code voor genereren van rekvelden en het oplossen van de evenwichten
for ey in frange(0.0,stopeps,stapeps):
            for phizz in frange(0.0,stopphiz,stapphiz):
                for phiyy in frange(0.0,stopphiy,stapphiy):
                    ry = np.radians(phiyy) #Graden omgeschreven naar radialen
                    rz = np.radians(phizz) #Graden omgeschreven naar radialen
                    kry = (tan(ry))*(10**-3) #Radialen omgeschreven naar kromming (1/mm)
                    krz = (tan(rz))*(10**-3) #Radialen omgeschreven naar kromming (1/mm)
                    if ((ey-(kry*(b-wstaven[2,0]))-(krz*wstaven[2,1])) * Ec) < 0 and ((ey-(kry*(b-wstaven[2,0]))-
    (krz*wstaven[2,1])) * Ec) > -fck: #Vergelijking 4.1 in het rapport
                        N = 0 #Algemene belasting die bij het rekveld past
                        My = 0 #Algemene belasting die bij het rekveld past
                        Mz = 0 #Algemene belasting die bij het rekveld past
                        Fs = zeros(len(wstaven)) #Array voor staafkrachten
                        epsveld = zeros((h,b)) #Rekveld
                        sigcveld = zeros((h,b)) #Spanningsveld
                        for i in range(int(b)): #Rekveld bouwen en bijdrages van doorsnede aan normaalkracht en momenten
                            for j in range(int(h)):
                                epsveld[wstaven[2,1],wstaven[2,0]] = ey
                                if i <= wstaven[2,0] and j <= wstaven[2,1]:
                                    epsveld[j,i] = ey + (kry*(wstaven[2,0]-i)) - (krz*(wstaven[2,1]-j))
                                if i <= wstaven[2,0] and j >= wstaven[2,1]:
                                    epsveld[j,i] = ey + (kry*(wstaven[2,0]-i)) + (krz*(j-wstaven[2,1]))
                                if i >= wstaven[2,0] and j <= wstaven[2,1]:
                                    epsveld[j,i] = ey - (kry*(i-wstaven[2,0])) - (krz*(wstaven[2,1]-j))
                                if i >= wstaven[2,0] and j >= wstaven[2,1]:
```

```
                                    epsveld[j,i] = ey - (kry*(i-wstaven[2,0])) + (krz*(j-wstaven[2,1]))
                                if epsveld[j,i] <= 0:
                                    sigcveld[j,i] = epsveld[j,i] * Ec
                                My = My + (sigcveld[j,i] * (b-i+0.5))
                                Mz = Mz + (sigcveld[j,i] * (j+0.5))
                                N = N + sigcveld[j,i]
                        for k in range(len(wstaven)): #Momentenbijdrages wapeningskrachten
                            As = (1/4.0) * m.pi * (wstaven[k,2]**2)
                            Fs[k] = (epsveld[wstaven[k,1],wstaven[k,0]] * Es * As)
                            My = My + (Fs[k] * (b-wstaven[k,0]+0.5))
                            Mz = Mz + (Fs[k] * (wstaven[k,1]+0.5))
                        N = (N + np.sum(Fs)) #Bijdrage wapeningskrachten aan normaalkracht
                        My = (My + (-N * 0.5 * b)) #Bijdrage normaalkracht aan moment My
                        Mz = (Mz + (-N * 0.5 * h)) #Bijdrage normaalkracht aan moment Mz
                        if N <= 0 and My >= 0 and Mz >= 0: #Alleen drukkrachten en rechtsomdraaiende momenten
                            gok = [-1*10**(-2),1*10**(-3)]
                            solz = opt.root(rekkenMz,gok) #Oplossen van evenwichtsfunctie
                            soly = opt.root(rekkenMy,gok) #Oplossen van evenwichtsfunctie
                            if abs(solz.x[0]) < abs(ec3) and solz.x[0] < 0 and solz.x[1] > 0 and abs(soly.x[0]) < abs(ec3) and soly.x[
    0] < 0 and soly.x[1] > 0 and soly.success == True and solz.success == True:
                                ezc, krzc = solz.x[0], solz.x[1]
                                eyc, kryc = soly.x[0], soly.x[1]
                                ezs = ezc + (krzc*wstaven[2,1])
                                eys = eyc + (kryc*(b-wstaven[2,0]))
                                if ezs <= ey and eys <= ey and ezs >= 0 and eys >= 0: #Alleen trekkrachten in de wapeningsstaaf en beg
    renst in SLS-fase
                                    Mya.append(My/1e6)
                                    Mza.append(Mz/1e6)
                                    Na.append(N/1e3)
                                    sigcveldApp.append(sigcveld)
                                    eps.append(ey)
                                    krya.append(kry)
                                    krza.append(krz)
                                    ezca.append(ezc)
                                    eyca.append(eyc)
                                    sigya.append(eys*Es)
                                    sigza.append(ezs*Es)
                                    sigmastaal.append(ey*Es)
                                    epsza.append(ezs)
                                    epsya.append(eys)
                                    krycApp.append(kryc)
                                    krzcApp.append(krzc)
```

```
163.
164.       ##Plots worden gegenereerd
165.       py.figure(1)
166.       py.title("Spanningen in beton doorsnede oor gegeven parameters")
167.       py.plot(nc[0],nc[1],"b+")
168.       py.axvline(0,0,h,color='grey', linewidth="5")
169.       py.axvline(b,0,h,color='grey', linewidth="5")
170.       py.axhline(0,0,b,color='grey', linewidth="5")
171.       py.axhline(h,0,b,color='grey', linewidth="5")
172.       py.pcolormesh(sigcveldApp[-1], cmap=plt.cm.get_cmap('Blues_r'))
173.       py.ylim(0,h)
174.       py.xlim(0,b)
175.       py.axis('scaled')
176.       py.colorbar()
177.
178.       fig = py.figure(2)
179.       ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
180.       ax.scatter(sigya,sigza,sigmastaal,c='r')
181.       ax.set_xlabel('Sigma_y')
182.       ax.set_ylabel('Sigma_z')
183.       ax.set_zlabel('Sigma_staal')
184.       ax.set_xlim(0,fy)
185.       ax.set_ylim(0,fy)
186.       ax.set_zlim(0,fy)
187.
188.       py.show()
189.
190.       ##Tabel met oplossingen worden gegenereerd
191.       table = " combinatie   My (kNm)    Mz (kNm)   N (kN)   sigmay (MPa)   sigmaz (MPa)  sigmastaal (MPa)\n"
192.       for c in range(len(Mza)):
193.           table = table + "  {:4d}:       {:6.3f}      {:6.3f}    {:6.2f}      {:6.1f}          {:6.1f}           {:6.1f}\n".format(

194.                 c+1,Mya[c],Mza[c],Na[c],sigya[c],sigza[c],sigmastaal[c])
195.       print table
```

## C. Python code formule generatie (hoofdstuk 6 en 7)

```
import matplotlib.pyplot as py
import pandas as pd
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from matplotlib import cm
import math as m
py.close('all')

colnames = ['Mya','Mza','Na','sigya','sigza','sigmastaal']
data = pd.read_csv('data.csv',skipinitialspace=True,delimiter=',', names=colnames,skiprows=1)

Mya = data.Mya.tolist()
Mza = data.Mza.tolist()
Na = data.Na.tolist()
sigya = data.sigya.tolist()
sigza = data.sigza.tolist()
sigmastaal = data.sigmastaal.tolist()

sigyy = np.arange(0,435,1)
sigzz = np.arange(0,435,1)
sigydata = []
sigzdata  = []
sigstaaldata = []
sigy = []
sigz = []
sig = []
Ndata = []
Mydata = []
Mzdata = []
sigyd120 = []
sigzd120 = []
Nd120 = []
Myd120 = []
Mzd120 = []
sigsd120 = []
Vd120 = []

for i in range(len(sigyy)):
    for j in range(len(sigzz)):
```

```
        sigg = m.sqrt(sigyy[i]**2+sigzz[j]**2)*1
        if sigg <= 435:
            sig.append(sigg)
            sigy.append(sigyy[i])
            sigz.append(sigzz[j])
for i in range(len(sigya)):
    if sigmastaal[i] <= 435:
        sigydata.append(sigya[i])
        sigzdata.append(sigza[i])
        sigstaaldata.append(sigmastaal[i])
        Ndata.append(Na[i])
        Mydata.append(Mya[i])
        Mzdata.append(Mza[i])
for i in range(len(sigydata)):
    if sigydata[i] >= 105 and sigydata[i] <= 130:
        if sigzdata[i] >= 105 and sigzdata[i] <= 130:
            sigyd120.append(sigydata[i])
            sigzd120.append(sigzdata[i])
            Nd120.append(Ndata[i])
            Myd120.append(Mydata[i])
            Mzd120.append(Mzdata[i])
            sigsd120.append(sigstaaldata[i])
            Vd120.append(sigstaaldata[i]-(1*m.sqrt(2*(120**2))))


c = cm.colors.ColorConverter().to_rgba('mediumseagreen', alpha=0.001)

fig = py.figure(1)
ax = fig.gca(projection='3d')
ax.plot_trisurf(sigy,sigz,sig,edgecolor=c)
ax.scatter(sigydata,sigzdata,sigstaaldata,c='r')
ax.set_xlabel('Sigma_y')
ax.set_ylabel('Sigma_z')
ax.set_zlabel('Sigma_staal')
ax.set_title('h = 600 mm, b = 400 mm')
ax.set_xlim(0,435)
ax.set_ylim(0,435)
ax.set_zlim(0,435)
ax.azim  = 60
ax.elev = 10

fig2 = py.figure(2)
```

```
ax = fig2.gca(projection='3d')
ax.plot_trisurf(sigy,sigz,sig,edgecolor=c)
ax.scatter(sigydata,sigzdata,sigstaaldata,c='r',zorder=1)
ax.set_xlabel('Sigma_y')
ax.set_ylabel('Sigma_z')
ax.set_zlabel('Sigma_staal')
ax.set_title('h = 600 mm, b = 400 mm')
ax.set_xlim(0,435)
ax.set_ylim(0,435)
ax.set_zlim(0,435)
ax.azim  = 145
ax.elev = 10

cmap = py.get_cmap('gnuplot')
colors = [cmap(i) for i in np.linspace(0, 1, len(Nd120))]

for i, color in enumerate(colors, start=0):
    py.figure(3)
            py.title('Extra term V versus N (sigma_y = sigma_z = 120)')
            py.scatter(Nd120[i], Vd120[i], color=color)
            py.xlim(-1000,0)
            py.xlabel('Normaalkracht [kN]')
            py.ylabel('Waarde van term V')
            py.figure(4)
            py.title('V versus My (sigma_y = sigma_z = 120)')
            py.scatter(Myd120[i],Vd120[i], color=color)
            py.xlim(0,110)
            py.xlabel('My [kNm]')
            py.ylabel('Waarde van term V')

       py.show()
```