# Maucalay’s Methode Toegepast met Invloedslijnen

## Bachelor Eindproject Civiele Techniek

(Freepik, 2023)

Auteur(s): J.A.C. Jankie

Datum: 31 oktober 2023

Studierichting: Civiele Techniek TU Delft, Structural Engineering

# Voorwoord

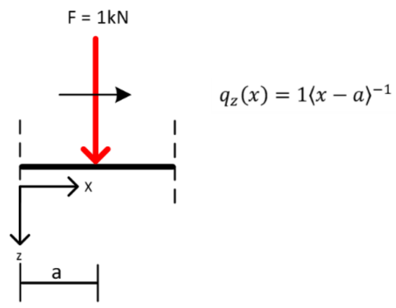
Dit rapport is samengesteld voor de bacheloropleiding Civiele Techniek & Geowetenschappen aan de Technische Universiteit Delft. In dit rapport is onderzoek gedaan naar Macaulay's methode toegepast met invloedslijnen. Hierbij is gekeken naar zowel eendimensionale constructies als tweedimensionale constructies.
De doelgroep van dit werk zijn civiel technici met recente vakkennis.
Graag bedank ik ir. T.R. van Woudenberg (hoofdbegeleider) en Dr. ir. P.C.J. Hoogenboom (tweedebegeleider) voor de begeleiding tijdens dit traject. Dankzij de tussentijdse bijeenkomsten en feedbackmomenten heeft dit onderzoek de kans gekregen om naar een hoger niveau te tillen. Dit gaf een fijne werksfeer wat zich heeft geresulteerd in de hier gepresenteerde resultaten.

Delft, Oktober 2023
Julia Anna Cornelia Jankie

# Samenvatting

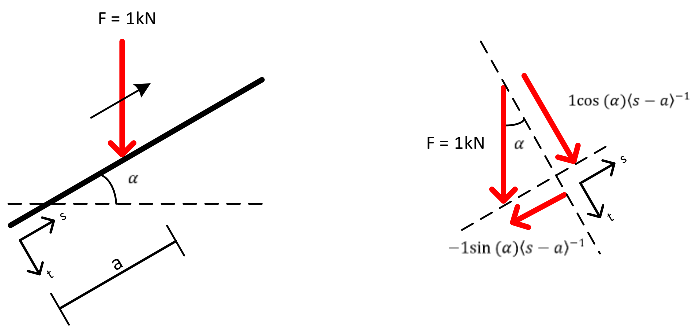
De methode van Macaulay is een methode waarmee interne krachten voor een constructie met belastingen kan worden bepaald. Macaulay maakt gebruik van singulariteitsfuncties om discontinue belastingen op constructies overzichtelijk te beschrijven. De methode van Macaulay is zowel voor eendimensionale als tweedimensionale constructies toepasbaar.
Invloedslijnen worden toegepast in de mechanica om de meest ongunstige posities van krachten te vinden. Echter is er nog geen onderzoek verricht naar de toepassing van Macaulay's methode met invloedslijnen. Daarom is er gekeken naar hoe deze invloedslijnen kunnen worden gecombineerd met de methode van Macaulay om het bepalen van invloedslijnen overzichtelijker te maken. De onderzoeksvraag van dit rapport luidt: *Hoe kan Macaulay's methode worden toegepast met invloedslijnen voor zowel eendimensionale als tweedimensionale constructies?*

Voor het toepassen van de methode van Macaulay met invloedslijnen op eendimensionale constructies, wordt er gekeken in het bekende xz-assenstelsel. De bewegende puntlast wordt hierbij aangenomen op een onbekende positie op x = a zoals weergegeven in figuur 1. De krachtsverdeling wordt hierbij omschreven aan de hand van singulariteits functies met de desbetreffende orde.
Door middel van integreren worden vergelijkingen verkregen die zowel afhangen van x als a. Daarom kan met deze methode in één vergelijking op een overzichtelijke manier zowel alle interne krachten (waarbij a een gespecificeerde waarde heeft) als alle invloedsfactoren (waarbij x een gespecificeerde waarde heeft) worden bepaald.



*Figuur 1: Methode voor eendimensionaal*

De krachtsverdeling bij tweedimensionale constructies wordt beschreven aan de hand van de differentiaalvergelijkingen voor extensie en buiging. Er wordt hierbij gekeken in een nieuw geïntroduceerd st-assenstelsel. De bewegende eenheidslast wordt beschreven als een kracht die altijd verticaal naar beneden gericht is en bevindt zich op een onbekende positie s = a. De kracht wordt hierbij in beide richtingen beschreven door het implementeren van goniometrische verhoudingen. Deze vergelijkingen zijn afhankelijk van de hoek $\alpha$ die de constructie met de horizontale lijn maakt zoals geschematiseerd in figuur 2.



*Figuur 2: Methode voor tweedimensionaal*

Met deze methode worden vergelijkingen verkregen die zowel afhangen van s als a. Hierdoor kunnen ook voor tweedimensionale constructies alle interne krachten en invloedsfactoren overzichtelijk worden bepaald.

Hieruit valt te concluderen dat de bedachte methode toepasbaar is voor het bepalen van invloedslijnen met de methode voor Macaulay. Deze methode is zowel voor eendimensionale als tweedimensionale constructies toepasbaar. De bedachte methode is overzichtelijk aangezien er met één vergelijking alle mogelijke scenario's kunnen worden bekeken voor zowel interne krachten als invloedsfactoren. Deze methode kan vervolgens worden toegepast bij het bepalen van de meest ongunstige posities van krachten in constructies wat van belang is bij het ontwerpen van civiele projecten.

# Inhoudsopgave

# Inleiding

Macaulay's methode is een uitbreiding van de dubbele integratie methode die wordt toegepast in de constructiemechanica. Deze methode wordt toegepast om de doorbuiging te bepalen gebaseerd op de balkentheorie van Euler-Bernoulli. Macaulay's methode wordt voornamelijk toegepast op constructies waarop discontinue belastingen rusten. Volgens de klassieke methode van differentiaalvergelijkingen, wordt de doorbuiging van een constructie met discontinue belastingen bepaald door deze op te delen in verschillende segmenten. Vervolgens worden de onbekende integratieconstanten opgelost aan de hand van randvoorwaarden. Gebruikmakend van Macaulay's methode kunnen deze discontinue belastingen aan de hand van singulariteits functies omschreven worden in één regel in plaats van het opdelen in segmenten (Macaulay, 1919). Hierdoor blijft de notatie direct herkenbaar.

Invloedslijnen plotten de variaties van verschillende soorten krachten (momenten, dwarskrachten, opleggingen etc.) op een specifieke plaats waarbij de plek van de aangrijpende kracht onbekend is. Met behulp van invloedslijnen kunnen de meest ongunstige posities van krachten worden bepaald in de constructie. Deze invloedslijnen zijn daarom van belang in de constructiemechanica bij het ontwerpen van constructies zoals gebouwen en bruggen (Welleman i. J., 2016).

De methode van Macaulay wordt momenteel gebruikt voor eenvoudige eendimensionale liggers. Uit eerder onderzoek bleek dat de methode van Macaulay met behulp van differentiaalvergelijkingen voor extensie, kunnen worden toegepast voor complexere tweedimensionale constructies (van der Wulp, 2023). Echter is er nog geen onderzoek verricht naar het toepassen van de methode van Macaulay met invloedslijnen.

In dit onderzoek is de theorie en toepassing van Macaulay's methode uitgebreid met betrekking op invloedslijnen. Hierbij is gekeken naar zowel eendimensionale als tweedimensionale constructies die statisch bepaald en statisch onbepaald zijn.
Dit onderzoek geeft antwoord op de volgende vraag: *Hoe kan Macaulay's methode worden toegepast met invloedslijnen voor zowel eendimensionale als tweedimensionale constructies?*

De opbouw van dit rapport is als volgt. Hoofdstuk 1 bestaat uit een wiskundige beschrijving van Macaulay's methode. Dit hoofdstuk is gebaseerd uit voorgaand onderzoek en valt niet onder de nieuw begaande kennis. In het eerste subhoofdstuk van hoofdstuk 2 zijn invloedslijnen kort toegelicht op basis van bekende kennis. Het tweede subhoofdstuk beschrijft een nieuwe methode voor het toepassen van invloedslijnen met de methode van Macaulay voor eendimensionale constructies. Vervolgens is in het eerste subhoofdstuk van hoofdstuk 3 de methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies beschreven. Dit subhoofdstuk is gebaseerd op eerder uitgevoerde onderzoek. In het tweede subhoofdstuk wordt een nieuwe methode geïntroduceerd voor het toepassen van invloedslijnen voor tweedimensionale constructies, gebruikmakend van de methode van Macaulay. Vervolgens wordt deze methode toegelicht aan de hand van voorbeelden.

# 1. Macaulay's methode

In dit hoofdstuk wordt de toepassing van Macaulay's methode uitgelegd. Daarbij is Macaulay's methode uitgewerkt voor zowel constructies op buiging als extensie. Macaulay's methode is gebaseerd op de balktheorie van Euler-Bernoulli. Deze balktheorie is een vereenvoudiging van de lineaire elasticiteitstheorie. Dit is een wiskundig model dat de buiging van een balk omschrijft. De balktheorie wordt toegepast voor het bepalen van doorbuigingen van constructies.

Op basis van de basisbetrekkingen worden de differentiaalvergelijkingen van Euler-Bernoulli voor buiging (1) en extensie (2) van een balk als volgt beschreven:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q_z \qquad (1) \qquad\qquad \frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx}\right) = -q_x \qquad (2)$$

In de rest van dit rapport is de buigstijfheid EI en de axiale stijfheid EA constant aangenomen. Formules 1 en 2 zijn daarom te versimpelen tot formules 3 en 4 en zijn hieronder weergegeven:

$$EI\left(\frac{d^4w}{dx^4}\right) = q_z \qquad (3) \qquad\qquad EA\frac{d^2u}{dx^2} = -q_x \qquad (4)$$

## 1.1. Toepassing van Macaulay

In dit subhoofdstuk is eerst de methode van Macaulay uitgelegd. Vervolgens zijn een aantal toepassingen van Macaulay's methode besproken. Hierbij wordt in dit subhoofdstuk gekeken naar constructies op buiging en extensie. Hierbij is ingegaan op het integreren naar verschillende krachten en is er gekeken naar verschillende verbindingen.

### 1.1.1. Methode

Bij het beschrijven van discontinue belastingen wordt er gebruik gemaakt van zogeheten 'Macaulay's haakjes'. Deze haakjes zijn als volgt gedefinieerd:

$$\langle x - a_i \rangle = \begin{cases} 0 & if\ x < a_i \\ x - a_i & if\ x > a_i \end{cases}$$

Het verschil in het gebruiken van Macaulay's haakjes resulteert in een ander resultaat bij het integreren van de formule dan bij het klassiek integreren.
Uit de theorie van Euler-Bernoulli volgt formule 5:

$$\pm EI\frac{d^2w}{dx^2} = M \quad (5)$$

Ter illustratie is hieronder een voorbeeld gegeven bij het integreren van formule 5. Daarbij is het verschil tussen klassiek integreren (bovenste vergelijking) en integreren gebruikmakende van Macaulay's methode (onderste vergelijking) te zien.

$$EI\varphi(x) = \int M(x)dx = F * \int (x-a)dx = F\left[\frac{1}{2}x^2 - ax\right] + C$$
$$F * \int \langle x - a \rangle dx = F * \frac{1}{2}\langle x - a \rangle^2 + C_m$$

Door het toepassen van de Macaulay haakjes bij discontinue belastingen blijft de notatie direct herkenbaar bij de krachtsverdeling.

### 1.1.2. Macaulay's functies

In de constructiemechanica zijn er verschillende gevallen van belastingen. Het doel van de methode van Macaulay is om de interne krachten van een constructie met discontinue belastingen in één regel te bepalen. Deze discontinue belastingen worden omschreven aan de hand van singulariteits functies. Dit is een familie van functies die wordt gedefinieerd uit de volgende formules:

Voor $n \geq 0$:

$$f(x) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} (x-a)^n, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases}$$

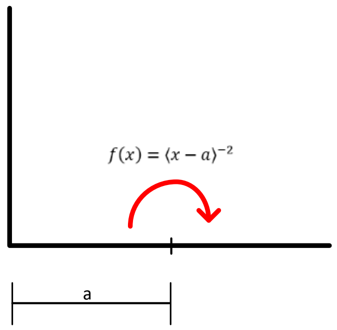
Voor $n < 0$:

$$f(x) = \langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases}$$

Hierbij is n de orde van de differentiaalvergelijking en geeft a de positie van de kracht aan. Deze familie van functies zijn gebaseerd op het integreren en differentiëren van de heaviside function (van der Wulp, 2023). De meest voorkomende machten zijn tussen -2 en 2 en worden hieronder behandeld.

#### Eenheidsmoment

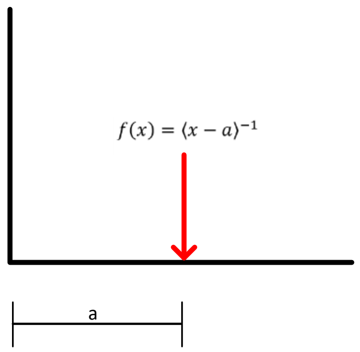
De eenheidsmoment is de eerste functie uit de familie van singulariteits functies en representeert de vorm van een moment op punt x = a. De eenheidsmoment is de tweede afgeleide van de heaviside function. De visualisatie van deze functie ziet er als volgt uit:




*Figuur 3: Eenheidsmoment functie*

#### Eenheidskracht

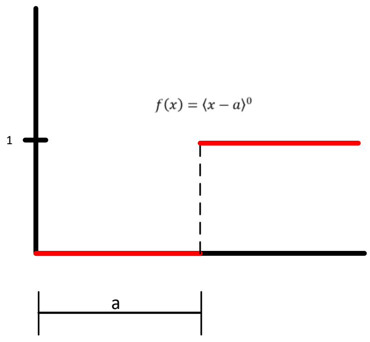
De eerste afgeleide van de heavisde function is de eenheidskracht functie, ook wel diracdelta. Deze functie representeert de vorm van een puntlast en wordt hieronder gevisualiseerd.




*Figuur 4: Eenheidskracht functie*

### Eenheids-stap

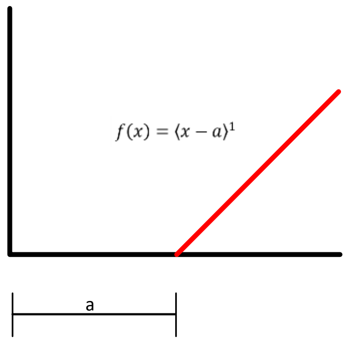
De eenheids-stap ofwel heaviside functie heeft een orde gelijk aan 0. Deze functie geeft een sprong aan in de grafiek en wordt als volgt gevisualiseerd:




*Figuur 5: Eenheids-stap functie*

### Eenheidslijn

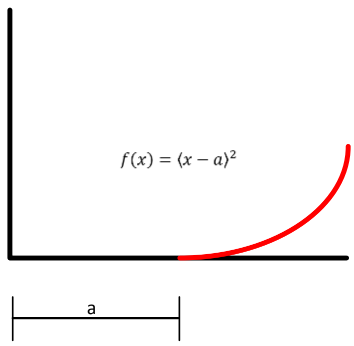
De eenheidslijn is de eerste functie die wordt verkregen bij het integreren van de heaviside functie. De eenheid-lijn heeft een orde van 1. Hierdoor toont de eenheidslijn een lineair lopende grafiek vanaf x = a. De grafiek en bijhorende functie is hieronder gevisualiseerd.




*Figuur 6: Eenheidslijn functie*

### Eenheidsparabool

De eenheidsparabool geeft de tweede functie die wordt verkregen bij het integreren van de heaviside functie. De eenheidsparabool verloopt parabolisch vanaf x = a en is hieronder gevisualiseerd met de bijbehorende functie.




*Figuur 7: Eenheidsparabool functie*

Het integreren van de genoemde functies worden vervolgens bepaald volgens formule 6 die hieronder is weergegeven.

$$\int \langle x-a\rangle^n dx = \begin{cases} \langle x-a\rangle^{n+1}, & n<0 \\ \frac{\langle x-a\rangle^{n+1}}{n+1}, & n \geq 0 \end{cases} \qquad (6) \qquad \text{(Caprani, 2010)}$$

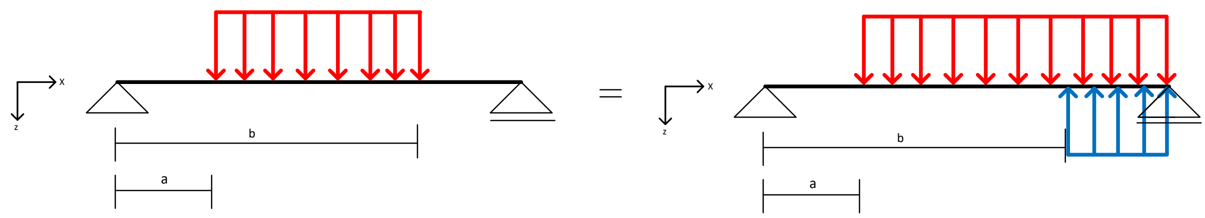
### 1.1.3. Krachten

Uit formule 6 is dus op te maken dat de machtswaarde rechtsboven de Macaulay's haakjes aangeeft over welke soort kracht wordt gesproken.
In de krachtsverdeling, worden de verschillende krachten als volgt beschreven:

$$q_z(x) = M\langle x-a\rangle^{-2} + F\langle x-a\rangle^{-1} + q\langle x-a\rangle^0 - q\langle x-b\rangle^0$$

Hierbij is $M$ een eenheidsmoment, $F$ een eenheidskracht en $q$ een verdeelde belasting. Alle 3 de verschillende krachten grijpen ergens aan op de constructie. In dit geval is deze positie genoteerd als positie a. Normaal gesproken zullen deze posities vaak van elkaar verschillen.
De notatie van de verdeelde belasting is bepaald uit figuur 8. Hieruit is te zien dat de linker situatie gelijk is aan de rechter en daarom op de volgende manier zal worden genoteerd in de krachtsverdeling (Caprani, 2010):

$$q(x) = q\langle x-a\rangle^0 - q\langle x-b\rangle^0$$




*Figuur 8: Schematische weergave van een verdeelde belasting*

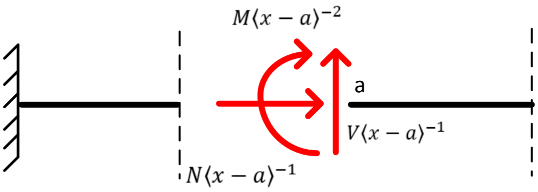
### 1.1.4. Verbindingen

In deze sub paragraaf zullen de verbindingen worden uitgelegd met wat betreft de toepassing op Macaulay's methode. Verbindingen worden toegepast in de mechanica om zo constructie elementen met elkaar te verbinden. Deze verschillende type verbindingen gaan rotaties en translaties tegen of staan deze juist toe. Hierbij komt een extra reactie kijken wat effect heeft op de krachtenverdeling. Deze krachtenverdeling wordt vervolgens gebruikt in de methode van Macaulay om de doorbuiging van een constructie te bepalen.

## Opleggingen

**Inklemming:** Een inklemming vindt plaats in de lengte of dwarsrichting van een balk. Een inklemming geeft weerstand tegen zowel translatie als rotatiebewegingen en is in beide richtingen star opgelegd. Van een inklemming is een schematische weergave gegeven in figuur 9. Uit de figuur volgt dat op plaats a geldt dat zowel de rotatie als translatie gelijk zijn aan 0. Hieruit volgen de reactiekrachten $M$ (voor rotatie) en $V$(voor translatie).

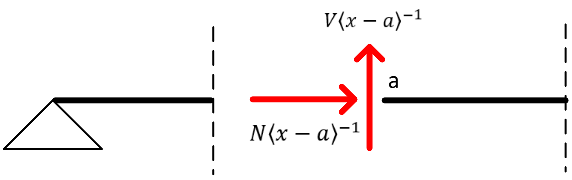
Kijkende naar een inklemming in axiale richting, bevindt de verplaatsing langs de ligger een weerstand. Hierdoor zal dus een normaalkracht worden geïntroduceerd die deze verplaatsing tegen gaat. Hieruit volgt de reactie kracht voor $N$. De reactiekrachten zijn geschematiseerd in figuur 9.




*Figuur 9: Schematische weergave van een inklemming met zijn reactiekrachten*

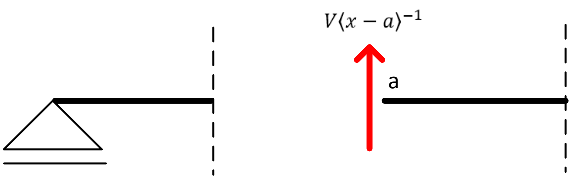
**Scharnieroplegging:** Kijkende naar de scharnieroplegging is te zien dat deze oplegging vrij is opgelegd voor rotatie. Dit betekent dat voor deze oplegging rotatie mogelijk is en er dus geen sprake is van een tegenwerkende kracht hiervoor. Kijkende naar de scharnieroplegging op zijn kant, ondervindt de oplegging een weerstand tegen translatie. Daarbij zal dus een dwarskracht tegen werken om deze translatie tegen te gaan.

Kijkende naar de scharnieroplegging in axiale richting, bevindt de verplaatsing langs de ligger een weerstand. Hierdoor zal dus een normaalkracht worden geïntroduceerd die deze verplaatsing tegen gaat. De reactiekrachten zijn hieronder weergegeven.




*Figuur 10: Schematische weergave van een scharnieroplegging met zijn reactiekrachten*

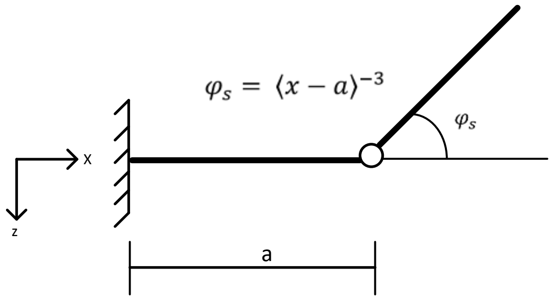
**Roloplegging:** De roloplegging ervaart nog een extra vrijheidsgraad in vergelijking met de scharnieroplegging. De roloplegging kan namelijk als het ware in axiale richting 'rollen'. De roloplegging ondervindt daardoor geen weerstand tegen axiale verplaatsing. Een roloplegging ondervindt wel een weerstand tegen transleren en heeft daarom als enig werkende reactie kracht de dwarskracht.




*Figuur 11: Schematische weergave van een roloplegging met zijn reactiekrachten*

## Scharnier

De scharnierende verbinding is vrij om te roteren maar kan niet transleren. De vrijheidsgraad van een scharnier is daarom op te vatten als een rotatie. Ter plaatse van de scharnier ondervindt de rotatie vergelijking een sprong. Er moet dus een functie in orde van de heavisede functie terug komen in de vergelijking van de rotatie, deze is tot de macht 0. Terug redenerend naar de krachtsvergelijking, kan deze worden omgeschreven door de vergelijking van rotatie drie keer te differentiëren. Om deze reden krijgt de discontinuïteit ten gevolge van het scharnier een macht van -3 aan de hand van de singulariteits functies. In figuur 12 is een schematische weergave gegeven van een scharnierende verbinding en hoe deze verbinding wordt omschreven in de krachtsvergelijking. $\varphi_s$ is hierbij een nieuwe onbekende. Echter wordt er ook een nieuwe randvoorwaarde geïntroduceerd, namelijk dat het moment op a gelijk is aan 0. Hierdoor is deze constructie nog steeds oplosbaar.




*Figuur 12: Schematische weergave van een scharnierende verbinding*

# 2. Macaulay's methode en invloedslijnen

In dit hoofdstuk is eerst de betekenis van invloedslijnen verduidelijkt. Hierin is uitgelegd wat het doel van invloedslijnen is en hoe deze worden toegepast op constructies. Vervolgens zullen de invloedslijnen worden toegepast op Macaulay's methode voor eendimensionale constructies. Hierbij zal worden ingegaan op zowel statisch bepaald als statisch onbepaalde constructies.

## 2.1. Invloedslijnen

Met behulp van invloedslijnen kunnen de meest ongunstige posities van krachten worden bepaald in een constructie. Om de grootte van een inwendige/snede kracht of verplaatsing op een vaste locatie te vinden, waarbij een kracht met een onbekende positie op de constructie rust, worden invloedslijnen toegepast. Deze invloedslijnen worden toegepast voor statisch bepaalde en statisch onbepaalde constructies. Onbekende die hierbij bepaald worden zijn (Welleman i. J., 2016):

- Oplegreacties: horizontaal, verticaal en moment
- Dwarskracht op een bepaald punt in een doorsnede
- Intern moment op een bepaald punt in een doorsnede
- Rotatie op een specifiek punt
- Doorbuiging op een bepaald punt

Welke locaties hierbij interessant zijn om naar te kijken hangt van de constructie af. Bij het analyseren van invloedslijnen zijn de volgende kritieke locaties van belang:

- **Opleggingen:** Invloedslijnen bij de opleggingen, geven een beeld hoe verschillende belastingen de oplegreacties onder ondersteuningen beïnvloed. Dit is van belang bij het ontwerpen van een constructie om zo te weten waar de funderingen en ondersteuningen moeten worden geplaatst.
- **Overgangspunten:** Dit zijn punten waar belastingen of ondersteuningscondities veranderen (zoals scharnieren). De invloedslijnen zijn ter plaatste van deze overgangspunten belangrijk om te analyseren om te begrijpen hoe de veranderingen in belastingen of ondersteuningen de interne krachten beïnvloeden.
- **Dwarsdoorsnede op de constructie:** Deze invloedslijnen geven inzicht in hoe verschillende belastingen in de hele constructie de interne krachten beïnvloeden. Dit kan helpen bij het begrijpen van het algemene gedrag van de constructie maar ook om bijvoorbeeld probleemgebieden te identificeren.

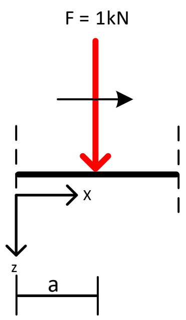
Om een beter begrip van invloedslijnen te krijgen, wordt gerefereerd naar het boek Work, energy methods & influence lines van J.W. Welleman (Welleman i. J., 2016). Voor een verkorte samenvatting, zie bijlagen 5.

## 2.2. Macaulay's methode toegepast op invloedslijnen, eendimensionaal

In dit subhoofdstuk is er gekeken naar het toepassen van Macaulay's methode op invloedslijnen voor eendimensionale constructies. Eerst is de methode voor het toepassen van de methode van Macaulay met invloedslijnen omschreven. Vervolgens zijn er 2 voorbeelden uitgewerkt voor statisch bepaalde constructies en één voorbeeld voor statisch onbepaald. Deze voorbeelden zullen bestaan uit basis principes van geconstrueerde balken. Aan de hand van deze voorbeelden kunnen meer ingewikkelder constructies worden opgelost. Om deze reden zijn enkel deze basis principes behandeld. In de bijlage is nog een 4$^{e}$ voorbeeld te vinden dat ingaat op een statisch bepaalde constructie met een verdeelde belasting. Door de toepassing van een verdeelde belasting veranderd de betekenis van invloedslijnen. Om deze reden is dit gehele voorbeeld te vinden in bijlagen 4 met alle berekeningen.

### 2.2.1. Methode

Kijkende naar hoe Macalauy's methode kan worden toegepast met invloedslijnen, wordt eerst de krachtsverdeling bepaald van de bekeken constructie. Deze krachtsverdeling wordt omschreven in een xz-assenstelsel. Hierbij worden de onbekende krachten gedefinieerd op een positie x en wordt de puntlast bekeken op een onbekende positie x = a. Deze methode is weergegeven in figuur 13.



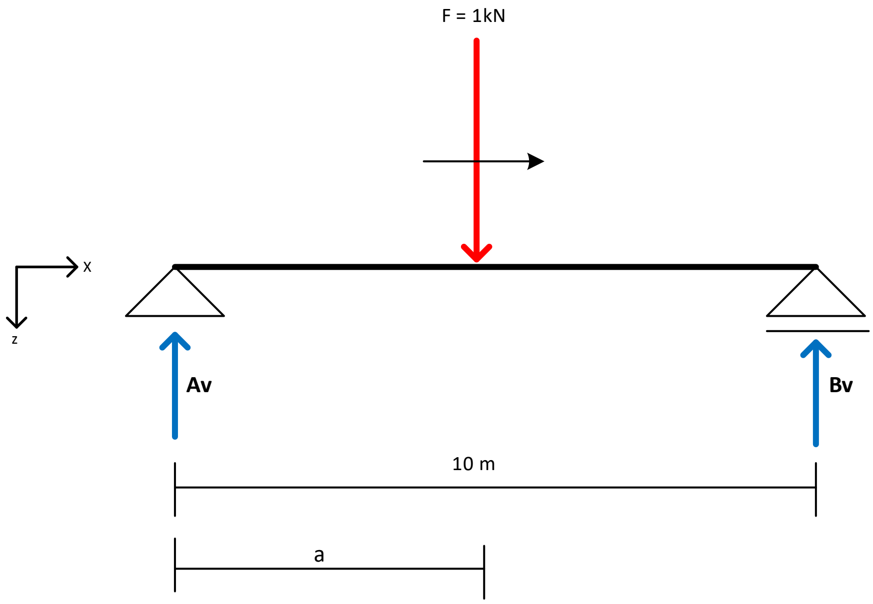

$$q_z(x) = 1\langle x - a\rangle^{-1}$$

*Figuur 13: Methode voor het toepassen van invloedslijden met Macaulay*

Vervolgens wordt de krachtsverdeling meerdere keren geïntegreerd naar x om op deze manier de functies te verkrijgen voor de interne krachten, hierbij wordt formule 3 toegepast uit de balken theorie van Euler-Bernoulli. De onbekenden van deze vergelijkingen worden opgelost aan de hand van randvoorwaarden in de constructie. Hierbij worden extra randvoorwaarden verkregen door het doortrekken van de balk aan beide uiteinden.

Omdat de functie zowel afhangt van x als a, kan voor elke positie van de aangrijpende kracht, de interne krachtslijnen worden bepaald. Hierbij moet a een waarde hebben. Ook kunnen hierdoor alle invloedslijnen worden bepaald waarbij x een waarde moet hebben. Met deze methode kan dus met één formule zowel alle interne krachtslijnen als invloedslijnen worden opgelost. Door het gebruik van Macaulay wordt dit een stuk eenvoudiger omdat er minder onbekenden integratieconstanten zijn in vergelijking met de klassieke methode. Ook is deze methode dus een stuk overzichtelijker aangezien er in deze functies alle mogelijke scenario's kunnen worden bekeken voor het analyseren van de invloedslijnen en interne krachten.

### 2.2.2. Statisch bepaald: ligger op twee steunpunten




*Figuur 14: Ligger op twee steunpunten met een verplaatsende puntlast*

De krachtsverdeling wordt bepaald uit figuur 14. Hierbij zijn de onbekende krachten negatief naar boven aangenomen en is de verplaatsende puntlast positief naar beneden aangenomen. De krachtverdeling luidt:

$$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^{-1} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$$

Vervolgens wordt deze krachtsverdeling geïntegreerd waaruit de vergelijkingen komen voor de dwarskracht, moment, hoekverdraaiing en doorbuiging:

$$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{0} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + Cv$$

$$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - 1\langle x-a\rangle^{1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + Cvx + Cm$$

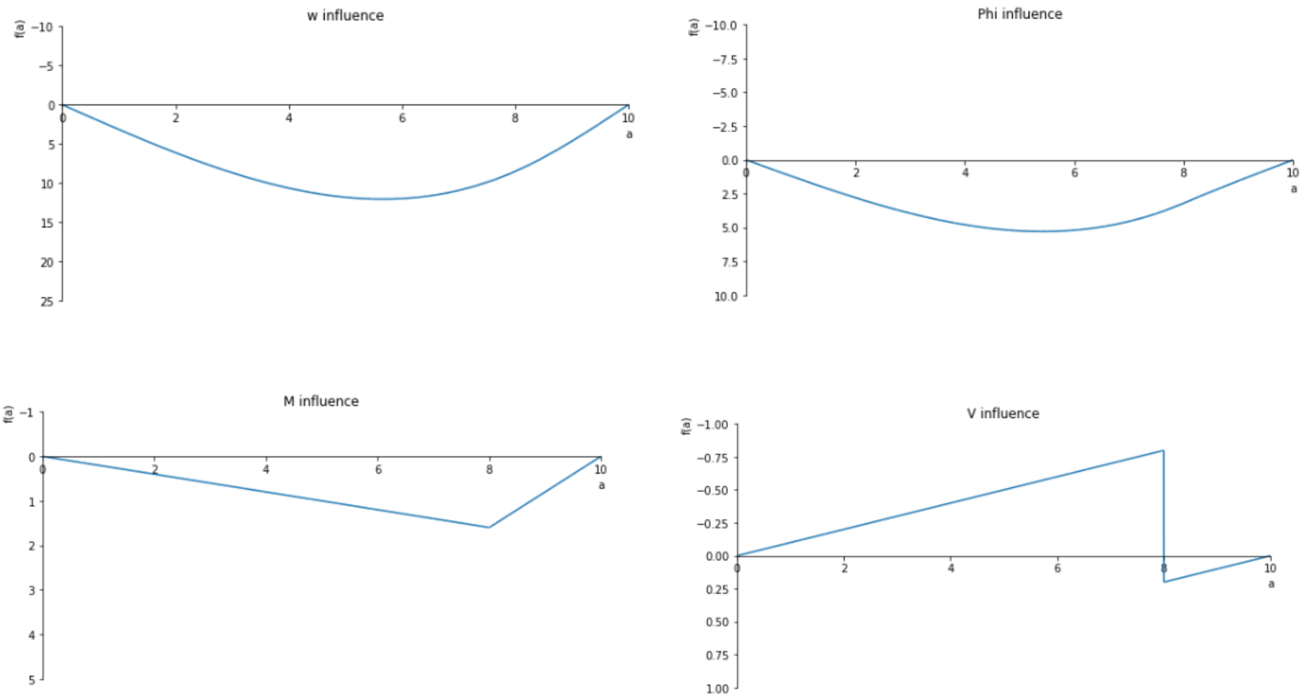
$$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$$

$$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + cw$$

Deze vergelijkingen hebben 6 onbekenden. Deze kunnen worden opgelost aan de volgende randvoorwaarden:
$M(0,a) = 0$; $M(10,a) = 0$; $w(0,a) = 0$; $w(10,a) = 0$

Om de laatste twee onbekende op te lossen, wordt de ligger aan beiden uiteindes doorgetrokken. Hierbij worden twee extra randvoorwaarden geïntroduceerd:
$V(0^-,a) = 0$; $V(10^+,a) = 0$

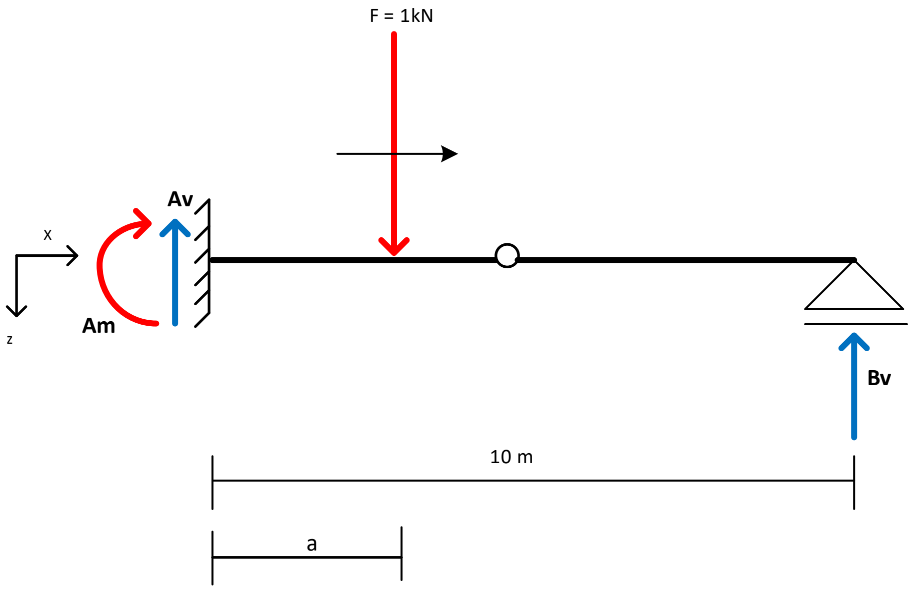
Met alle 6 randvoorwaarden zijn de 6 onbekenden op te lossen. De verkregen vergelijkingen zijn beide afhankelijk van x en a. Hierdoor kunnen de interne krachtslijnen worden geplot waarbij locatie a bekend moet zijn. Ook kunnen de invloedslijnen geplot worden voor een bekende x in de constructie. Hieronder zijn de invloedslijnen weergegeven waarbij x = 8. Er is hierbij voor x = 8 gekozen, aangezien dit een overzichtelijke dwarsdoorsnede is in de constructie om de werking van de invloedslijnen te schematiseren. Echter zouden de invloedslijnen ook op andere posities kunnen worden geplot en is deze positie dus niet van belang voor het observeren van de invloedslijnen.




*Figuur 15: Invloedslijnen op x = 8 voor voorbeeld 1*

Kijkende naar de verkregen invloedslijnen op x = 8, valt te stellen dat deze kloppen naar de verwachtingen volgens de methode van Müller-Breslau en daarmee ook de opgeloste functie voor de bijbehorende invloedslijnen. Voor volledige uitwerkingen, interne krachtslijnen en invloedslijnen voor de oplegreacties, zie bijlagen 1.

### 2.2.3. Statisch bepaald: Ligger met inklemming en scharnier




*Figuur 16: Ligger met inklemming en scharnier met een verplaatsende puntlast*

In figuur 16 is de krachtsverdeling weergegeven voor voorbeeld 2. Hierbij zijn Av en Bv negatief naar boven aangenomen en het moment Am is positief rechtsom aangenomen. De verplaatsende puntlast is positief naar beneden aangenomen. De krachtsverdeling luidt als volgt:

$$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + Am\langle x\rangle^{-2} + 1\langle x-a\rangle^{-1} + \varphi_s\langle x-5\rangle^{-3} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$$

Om de interne krachtslijnen te bepalen wordt de bovenstaande vergelijking geïntegreerd waaruit volgt:

$$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - Am\langle x\rangle^{-1} - 1\langle x-a\rangle^{0} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{-2} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + \mathrm{Cv}$$

$$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - Am\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{1} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{-1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + \mathrm{Cvx} + \mathrm{Cm}$$

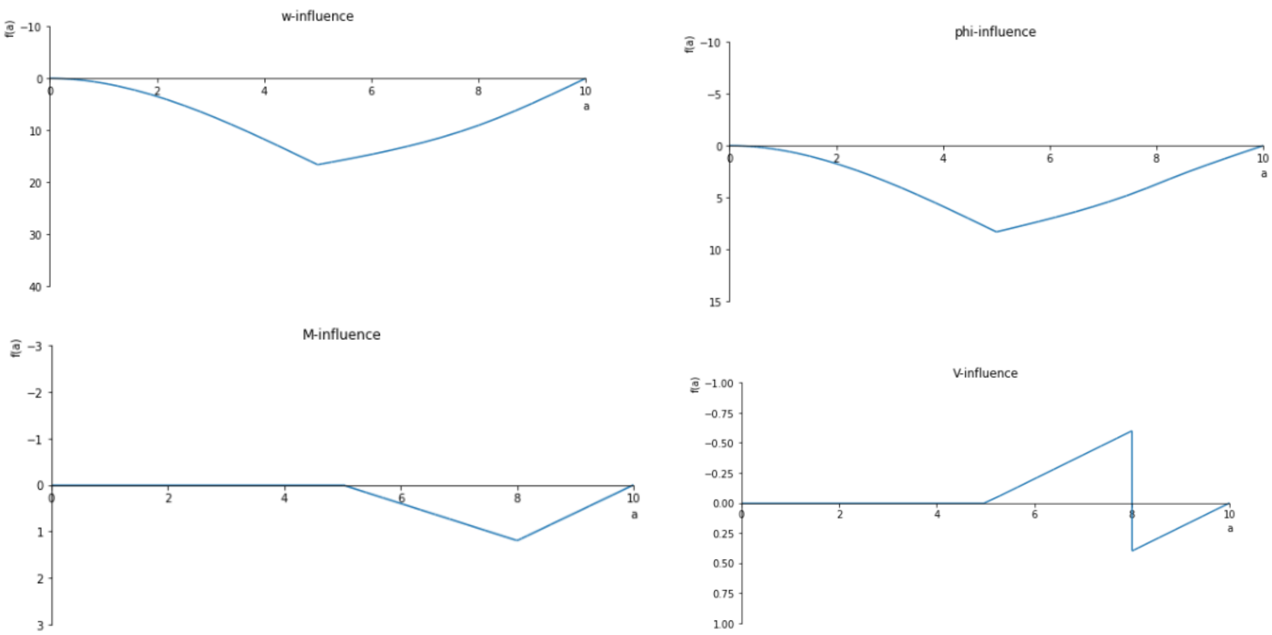
$$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - Am\langle x\rangle^{1} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{0} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Cv}x^2 + \mathrm{Cmx} + \mathrm{C\varphi}$$

$$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{2}Am\langle x\rangle^{2} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \varphi_s\langle x-5\rangle^{1} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}\mathrm{Cv}x^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Cm}x^2 - \mathrm{C\varphi x} + \mathrm{cw}$$

Uit dit voorbeeld blijken 8 onbekenden te zitten. Deze worden wederom opgelost aan de hand van de volgende randvoorwaarden:
$M(5,a) = 0;\quad M(10,a) = 0;\quad \varphi(0,a) = 0;\quad w(0,a) = 0;\quad w(10,a) = 0$

Vervolgens wordt de ligger aan beiden uiteinden doorgetrokken wat de laatste 3 randvoorwaarden geeft:
$V(0^-,a) = 0;\quad V(10^+,a) = 0;\quad M(0^-,a) = 0$

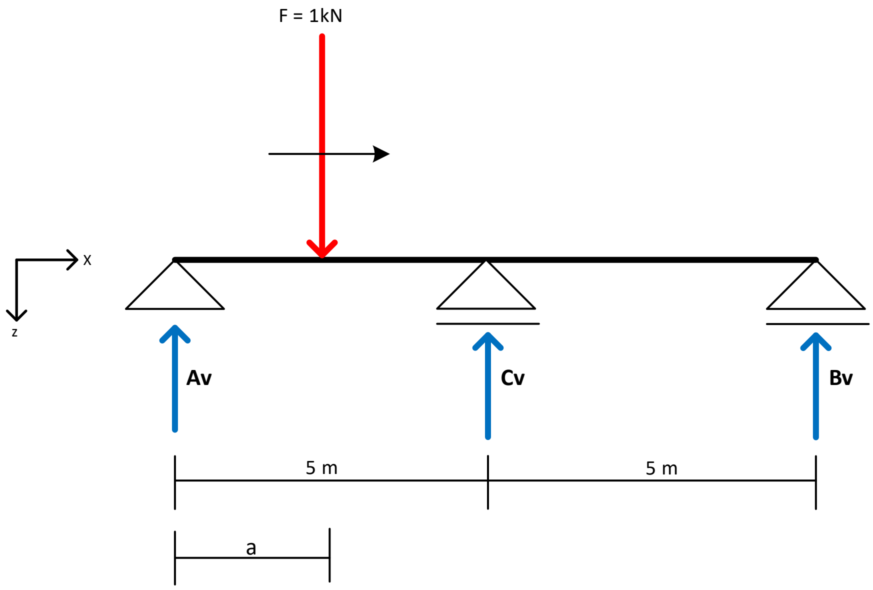
Met deze 8 randvoorwaarden kunnen de 8 onbekenden worden opgelost. Uit deze oplossing volgen vergelijkingen waarmee de interne krachtslijnen kunnen worden geplot, waarbij a een waarde heeft toegekend. Vervolgens kunnen ook de invloedslijnen worden geplot waarbij x een waarde moet worden toegekend. Deze invloedslijnen voor x = 8, zijn hieronder weergegeven. Er is hierbij voor x = 8 gekozen, aangezien dit een goed geschematiseerd beeld geeft van mogelijke optredende invloedslijnen. Echter kan er met de verkregen vergelijking op elke positie van x, de invloedslijnen worden bepaald en is deze positie dus niet van belang voor het schematiseren van de invloedslijnen.




*Figuur 17: Invloedslijnen op x = 8 voor voorbeeld 2*

De verkregen invloedslijnen zijn correct volgens de toepassing van de methode van Müller-Breslau en daarmee valt te stellen dat de opgeloste vergelijkingen voor deze invoeldslijnen ook correct zijn. Voor volledige uitwerking, zie bijlagen 2. In deze bijlagen zijn ook de interne krachtslijnen en invloedslijnen van de oplegreacties te vinden.

### 2.2.4. Statisch onbepaald: Ligger op twee steunpunten met oplegging in het midden




*Figuur 18: Ligger op drie steunpunten met een verplaatsende puntlast*

In de figuur hierboven is de krachtsverdeling schematisch weergegeven voor voorbeeld 3. De constructie is enkelvoudig statisch onbepaald. Alle oplegreacties zijn naar boven negatief aangenomen en de verplaatsende puntlast positief naar beneden. De krachtsverdeling van deze constructie luidt:

$$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^{-1} - Cv\langle x-5\rangle^{-1} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$$

Het integreren van de krachtsverdeling levert de volgende resultaten op:

$$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{0} + Cv\langle x-5\rangle^{0} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + Cv$$

$$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - 1\langle x-a\rangle^{1} + Cv\langle x-5\rangle^{1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + Cvx + Cm$$

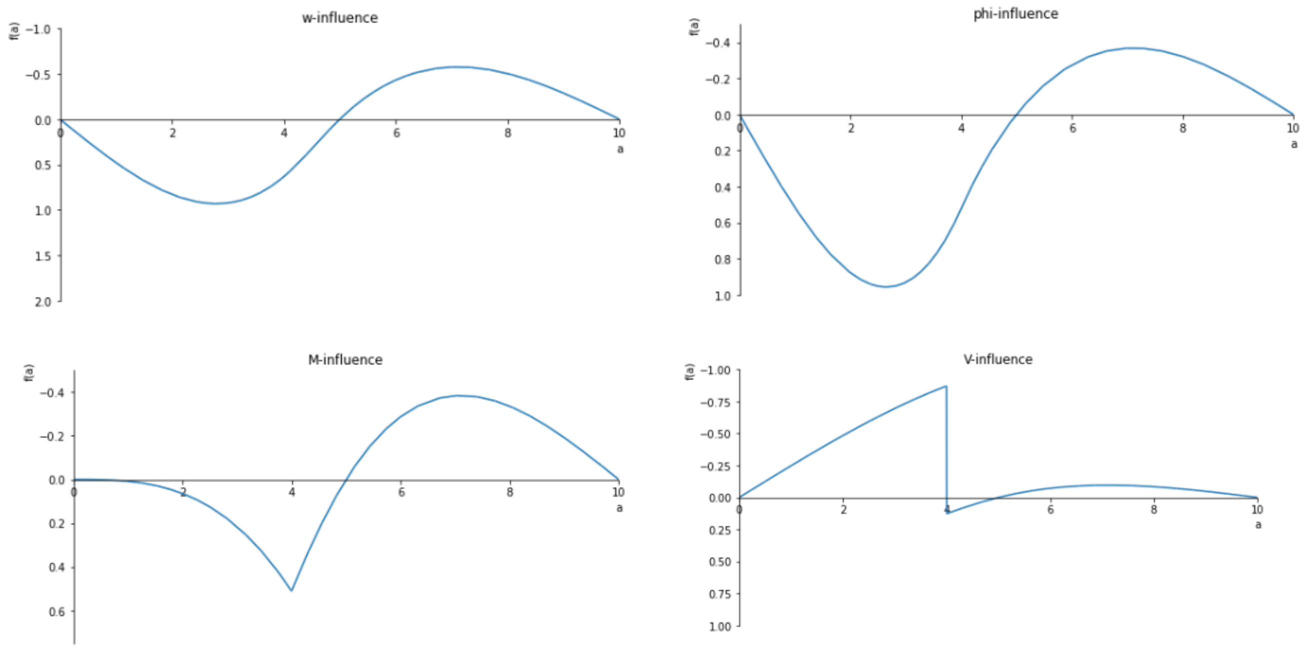
$$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cv\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$$

$$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cv\langle x-5\rangle^{3} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + cw$$

Uit deze vergelijkingen blijkt dat er 7 onbekenden zijn. Deze kunnen worden opgelost met de volgende randvoorwaarden:
$M(0,a) = 0;\ \ M(10,a) = 0;\ \ w(0,a) = 0;\ \ w(5,a) = 0\ \ \ w(10,a) = 0$

De laatste 2 onbekenden worden bepaald door de uiteindes van de balk door te trekken. Hierdoor verkrijgen we de volgende randvoorwaarden:
$V(0^-,a) = 0;\ \ \ V(10^+,a) = 0$

Met deze 7 randvoorwaarden zijn de gehele functies te bepalen. Hieronder zijn de invloedslijnen geplot voor x = 4. Dit punt is gekozen aangezien dit vlak voor de oplegging C zit. Dit geeft een schematisch beeld van de mogelijke optredende invloedslijnen vlak voor deze oplegging. Echter kan er met de verkregen vergelijking op elke positie van x, de invloedslijnen worden bepaald. En kunnen dus ook andere posities bekeken worden.




*Figuur 19: Invloedslijnen op x = 4 voor voorbeeld 3*

De resulterende invloedslijnen zijn juist volgens de verwachtingen van de methode van Müller-Breslau, wat betekent dat de opgeloste vergelijkingen voor deze invloedslijnen ook correct zijn. De volledige uitwerking hiervan is te vinden in bijlagen 3. Ook zijn de interne krachtslijnen en invloedslijnen voor de oplegreacties hier te vinden.

# 3. Macaulay's methode voor tweedimensionale constructies

In dit hoofdstuk is er verder gekeken naar het toepassen van invloedslijnen voor tweedimensionale constructies. Daarbij is eerst de methode uitgelegd die wordt toegepast voor tweedimensionale constructies gebruikmakende van de methode van Macaulay op basis van eerder uitgevoerd onderzoek. Vervolgens is deze theorie gebruikt om te kijken naar invloedslijnen voor tweedimensionale constructies. Daarbij wordt eerste de methode omschreven en wordt deze methode duidelijk gemaakt aan de hand van een voorbeeld.

## 3.1. Tweedimensionale constructies

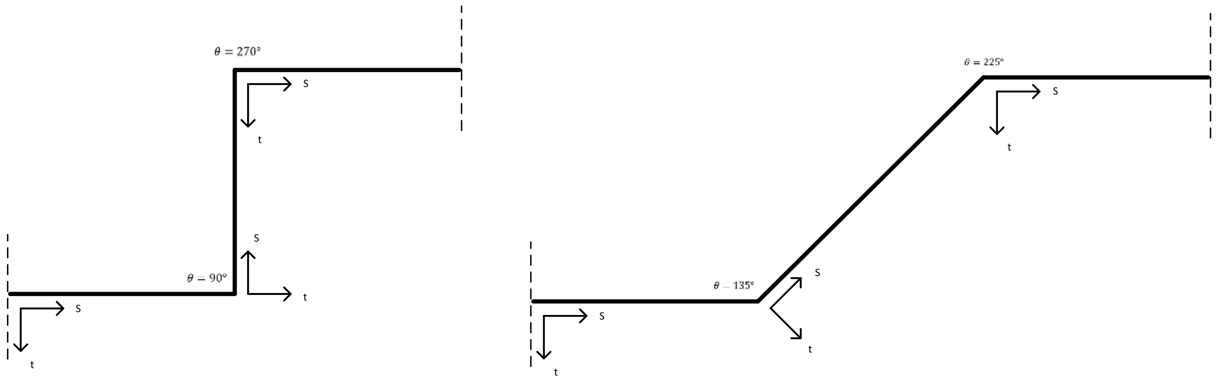
Aangezien er bij tweedimensionale constructies in een extra dimensie wordt gekeken, zal voor het toepassen van Macaulay zowel gebruik worden gemaakt van differentiaal vergelijkingen voor buiging als extensie. Deze differentiaal vergelijkingen zijn afgeleid uit de balkentheorie van Euler-Bernoulli. De formules 3 en 4 uit hoofdstuk 1 zullen hierbij worden toegepast.

### 3.1.1. Interpretatie

Bij het kijken naar tweedimensionale constructies wordt er een extra dimensie aan de constructie toegevoegd. Kijkende naar eendimensionale constructies, werd er alleen gekeken naar constructies in de lengte. Tweedimensionale constructies worden zowel beschreven in de lengte als in de breedte. Door deze toegevoegde dimensie veranderd de interpretatie van het assenstelsel. Ook bevinden zich hierdoor hoeken in de constructie. Deze hebben het volgende effect:

#### Assenstelsel

Om de effecten van de tweedimensionale constructie te kunnen omschrijven, wordt er een nieuw assenstelsel ingeluid. Dit assenstelsel gaat als het ware mee om de hoek van de constructie. Op deze manier wordt de tweedimensionale constructie omgeschreven in een st-assenstelsel. De hoek van de constructie ($\theta$) wordt gedefinieerd als de hoek die de s-as maakt van het rechter deel naar de s-as van het linker deel linksom (van der Wulp, 2023). In de figuur hieronder is deze methode geschematiseerd voor verschillende hoeken ter illustratie.

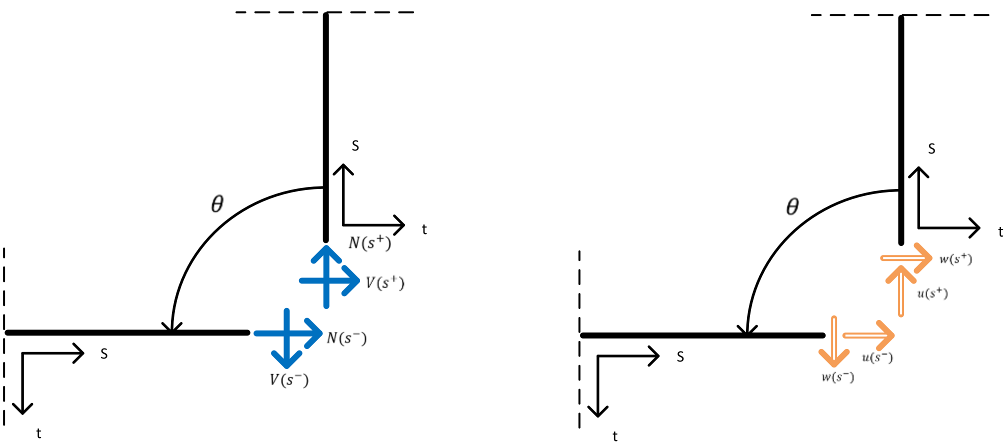



*Figuur 20: Beschrijving assenstelsel tweedimensionaal*

Bij eendimensionale constructies werd er alleen gekeken naar de krachtsverdeling in z-richting. Doordat er nu wordt gekeken naar tweedimensionale constructies, zal er in beide richtingen van het nieuw geïntroduceerde st-assenstelsel een krachtsverdeling worden omschreven.

### Hoek in de constructie

Door de aanwezige hoeken in de constructie worden extra onbekenden geïntroduceerd. Als gevolg van een starre hoek worden er vier onbekenden aan de krachtsverdeling toegevoegd. Namelijk de horizontale en verticale reactie ter plaatse van de hoek maar ook de doorbuiging (w) en axiale verplaatsing (u) ter plaatse van de hoek. Deze nieuwe onbekenden worden opgelost aan de hand van de relatie tussen dwars- en normaalkrachten en doorbuigingen en axiale verplaatsing ter plaatse van de bekeken hoek (zie figuur 21).




*Figuur 21: Relatie dwars- en normaalkrachten en doorbuiging en axiale verplaatsing*

Aan de hand van de relatie weergegeven in figuur 21 worden de volgende vier vergelijkingen geïntroduceerd (van der Wulp, 2023):

$$N(s^+) = \cos(\theta)\,N(s^-) - \sin(\theta)\,V(s^-)$$
$$V(s^+) = \sin(\theta)\,N(s^-) + \cos(\theta)\,V(s^-)$$

$$u(s^+) = \cos(\theta)\,u(s^-) - \sin(\theta)\,w(s^-)$$
$$w(s^+) = \sin(\theta)\,u(s^-) + \cos(\theta)\,w(s^-)$$

## 3.2. Macaulay’s methode toegepast op invloedslijnen, tweedimensionaal

In dit subhoofdstuk is eerst de methode behandeld die wordt gebruikt voor het toepassen van invloedslijnen voor tweedimensionale constructies. Er zal daarbij worden gekeken naar een methode vanuit een praktisch oogpunt. Vervolgens zal deze methode worden verduidelijkt met een uitgewerkt voorbeeld. Daarnaast is er nog een statisch bepaald en statisch onbepaald voorbeeld uitgewerkt die terug te vinden zijn in de bijlagen. De invloedslijnen voor deze voorbeelden blijken nog niet helemaal te kloppen en zijn daarom in de bijlagen te vinden. De reden waarom deze voorbeelden eventueel niet kloppen, is terug te vinden in de discussie.

Bij het uitgewerkte voorbeeld in dit hoofdstuk zijn tweedimensionale voorbeeld weergaven gegeven van invloedslijnen. De voorbeeld weergaven zijn gekozen voor een s-waarde die de globale werking van de invloedslijnen verduidelijkt. Echter kan met de verkregen vergelijkingen voor elke s-waarde de invloedslijnen worden bepaald en is de gekozen s-waarde dus puur gekozen voor een overzichtelijke weergave en is deze verder niet van belang voor het observeren van de invloedslijnen.

De volgende invloedslijnen kunnen hierbij bekeken worden:

- Opleggingen (verticaal, horizontaal en moment)
- Dwarskrachten
- Momenten
- Hoekverdraaiingen
- Doorbuigingen (in t-richting)
- Normaalkracht
- Axiale verplaatsing

Er worden per voorbeeld een paar invloedslijnen weergegeven om zo alle invloedslijnen duidelijk weer te geven. Er is hierbij een afweging gemaakt om niet alle tweedimensionale invloedslijnen weer te geven bij elk voorbeeld, aangezien sommige invloedslijnen erg op elkaar lijken en andere bijvoorbeeld geen waardes bevatten voor de bekeken s-waarde.

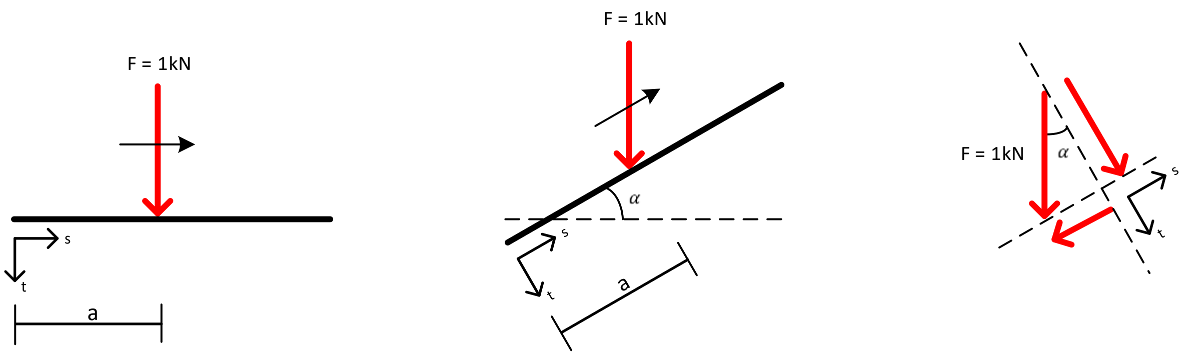
### 3.2.1. Methode

Bij het kijken naar invloedslijnen voor tweedimensionale constructies, is het belangrijk hoe deze invloedslijnen worden geïnterpreteerd. Er is onderscheidt gemaakt uit twee gevallen:

1. **Invloedslijnen loodrecht op de constructie laten verlopen:** Hierbij gaat de kracht mee met de hoek die de constructie ondervindt. Dit kan ook wel worden gezien als de normaalkracht van een vrij bewegende massa dat zich over de constructie verplaatst. Deze vorm van invloedslijnen kan interessant zijn vanuit een praktisch oogpunt om horizontale krachten op een constructie te analyseren, zoals windkrachten.
2. **Invloedslijnen verticaal naar beneden op de constructie laten verlopen:** Hierbij veranderd de richting van de kracht niet en blijft deze verticaal naar beneden gericht. Deze kracht kan ook wel worden gezien als de zwaartekracht van een vrij bewegende massa over de constructie.

Vanuit een praktisch oogpunt is het belangrijker om te kijken naar de tweede vorm van invloedslijnen. Deze vorm van invloedslijnen is belangrijk bij het analyseren van verticale belastingen zoals het gewicht van de constructie zelf, variabele belastingen (mensen, meubels, voertuigen) en sneeuwbelasting. Het begrijpen van de invloed van deze verticale belastingen is essentieel voor het ontwerp van de fundering en de dragende elementen van constructies. Door te weten waar de zwaartekracht op de constructie het meest van invloed is, kunnen ingenieurs de structuur zo ontwerpen dat deze veilig en stabiel blijft onder verticale belastingen.

Om deze reden is verder gekeken naar het implementeren van een methode voor de tweede vorm van invloedslijnen waarbij de kracht altijd verticaal naar beneden is gericht.

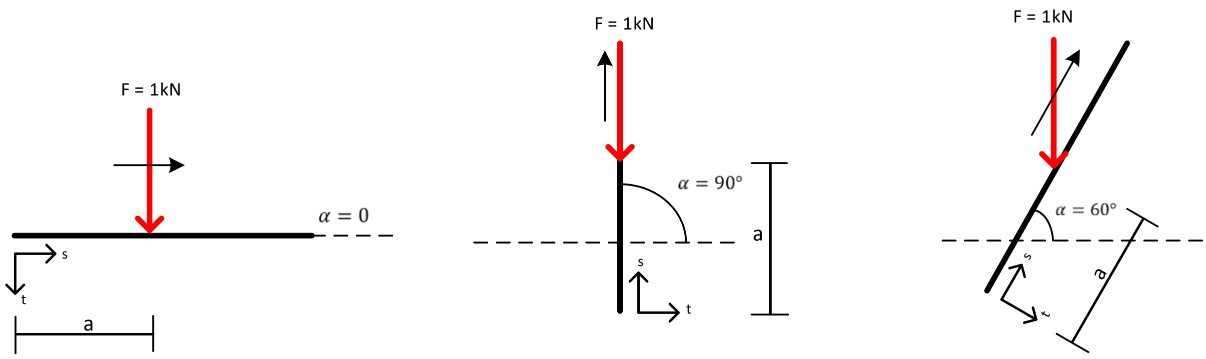



*Figuur 22: Interpretatie eenheidskracht*

Zoals te zien uit figuur 22 wordt de verticale kracht naar beneden opgedeeld in twee componenten in het s-t assenstelsel. Aan de hand van de goniometrische vergelijkingen, wordt de verticale eenheidslast als volgt omschreven in de krachtsverdeling:

$$q_t(s) = 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1}$$
$$q_s(s) = -1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1}$$

Hierbij is $\alpha$ een nieuwe hoek die wordt geïntroduceerd dat wordt gedefinieerd als de hoek van de constructie (s-as) met de horizontale lijn.




*Figuur 23: Voorbeelden met verschillende α-waarden*

Voor de linker situatie werkt er alleen een kracht in t richting en volgt:

$$q_t(s) = 1\cos(0)\langle s-a\rangle^{-1} = 1\langle s-a\rangle^{-1}$$
$$q_s(s) = -1\sin(0)\langle s-a\rangle^{-1} = 0$$

Voor de middelste situatie werkt er alleen een kracht in s richting en volgt:

$$q_t(s) = 1\cos(90)\langle s-a\rangle^{-1} = 0$$
$$q_s(s) = -1\sin(90)\langle s-a\rangle^{-1} = -1\langle s-a\rangle^{-1}$$

Voor de rechter situatie werkt er zowel een component van de kracht in zowel s als t richting:

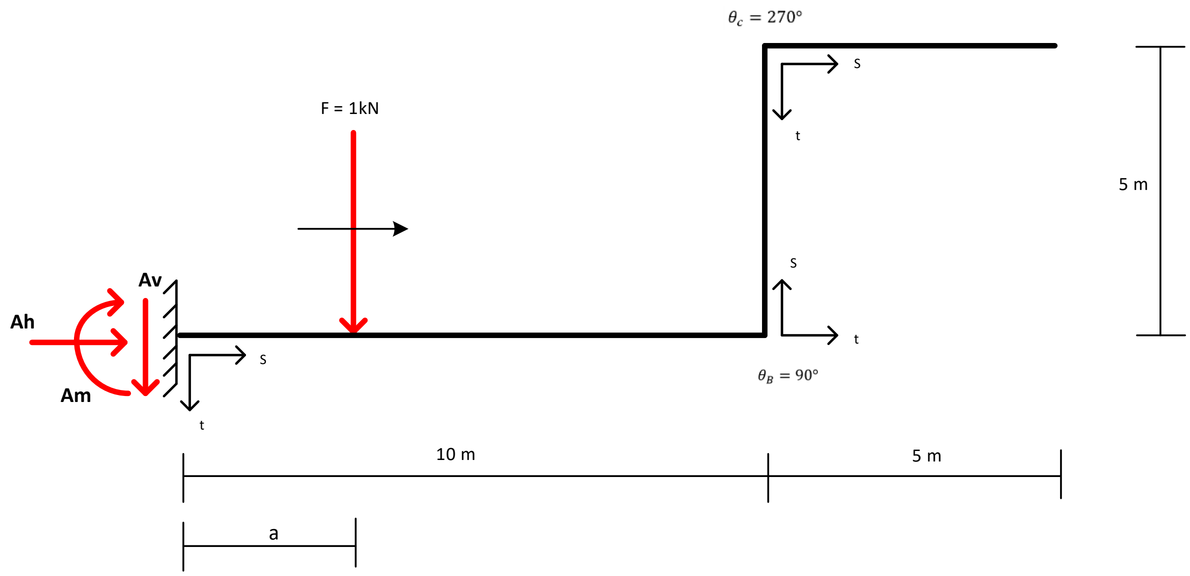
$$q_t(s) = 1\cos(60)\langle s-a\rangle^{-1}$$
$$q_s(s) = -1\sin(60)\langle s-a\rangle^{-1}$$

$\alpha$ wordt als volgt omschreven over de constructie, gebruikmakend van de methode van Macaulay:

$$\alpha(s) = \alpha_{ab}\langle s-a\rangle^0 - \alpha_{ab}\langle s-b\rangle^0$$

Waarbij $\alpha_{ab}$ de $\alpha$-waarde is die geldt over de afstand ab. Op deze manier kunnen verschillende segmenten met $\alpha$-waardes worden omgeschreven in de krachtenverdeling

### 3.2.2. Statisch bepaald: Uitkraging




*Figuur 24: Tweedimensionale uitkraging met een verplaatsende puntlast*

In het bovenstaande voorbeeld worden de oplegreacties in de inklemming positief aangenomen. Kijkende naar het voorbeeld hierboven wordt de krachtsverdeling in t en s richting als volgt gedefinieerd:

$$q_t(s,a) = Am\langle s\rangle^{-2} + Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Bv\langle s-10\rangle^{-1} + w_B\langle s-10\rangle^{-4} + Cv\langle s-15\rangle^{-1} + w_C\langle s-15\rangle^{-4}$$

$$q_s(a,s) = Ah\langle s\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Bh\langle s-10\rangle^{-1} + u_B\langle s-10\rangle^{-2} + Ch\langle s-15\rangle^{-1} + u_C\langle s-15\rangle^{-2}$$

Hierbij wordt $\alpha$ als volgt over de constructie omschreven:

$$\alpha(s) = 0\langle s\rangle^0 - 0\langle s-10\rangle^0 + 90\langle s-10\rangle^0 - 90\langle s-15\rangle^0 + 0\langle s-15\rangle^0 - 0\langle s-20\rangle^0$$

Door middel van integreren en het gebruik van formules 3 en 4, worden de formules voor de doorbuiging en axiale buiging bepaald (gehele integratie staat in bijlagen 6).

$$\boldsymbol{EIw(s,a)} = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{2}Am\langle s\rangle^2 + \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^3 + \frac{1}{6}Bv\langle s-10\rangle^3 + w_B\langle s-10\rangle^0 + \frac{1}{2}Cv\langle s-15\rangle^3 + w_C\langle s-15\rangle^0 - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$$

$$\boldsymbol{EAu(s,a)} = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^1 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^0 - Bh\langle s-10\rangle^1 - u_B\langle s-10\rangle^0 - Ch\langle s-15\rangle^1 - u_C\langle s-15\rangle^0 + C_N s + C_u$$

Hierbij hebben deze vergelijkingen 17 onbekenden. Deze zijn opgelost aan de hand van de volgende randvoorwaarden die voor deze constructie gelden:

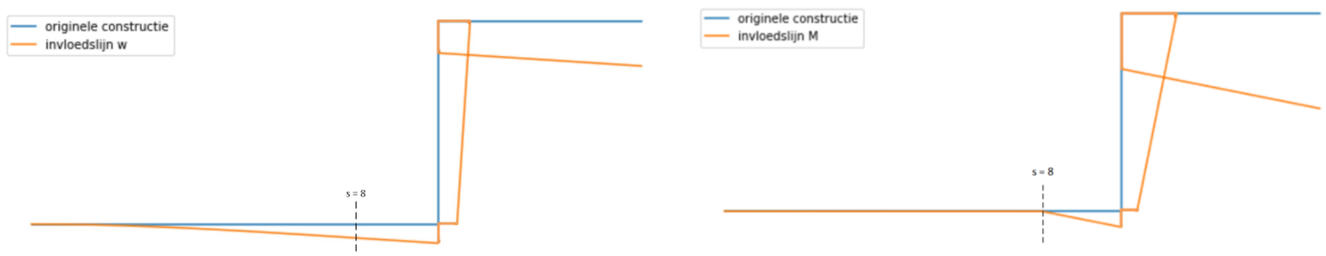
$\varphi(0,a) = 0;\quad w(0,a) = 0;\quad u(0,a) = 0;\quad M(20,a) = 0$

Vervolgens wordt de constructie aan beide kanten doorgetrokken wat de volgende randvoorwaarden opleveren:
$V(0^-, a) = 0; \quad N(0^-, a) = 0; \quad M(0^-, a) = 0\,; \quad V(20^+, a) = 0; \quad N(20^+, a) = 0$

Om vervolgens de laatste 8 onbekenden op te lossen, wordt er gebruik gemaakt van de randvoorwaarden die te halen zijn uit de twee hoeken B en C. De randvoorwaarden voor de relatie tussen dwarskracht en normaalkracht luiden:
$N(10^+, a) = \cos(90°)N(10^-, a) - \sin(90°)V(10^-, a)$
$V(10^+, a) = \sin(90°)N(10^-, a) + \cos(90°)V(10^-, a)$
$N(15^+, a) = \cos(270°)N(15^-, a) - \sin(270°)V(15^-, a)$
$V(15^+, a) = \sin(270°)N(15^-, a) + \cos(270°)V(15^-, a)$

Vervolgens worden de laatste randvoorwaarden bepaald uit de relatie tussen de axiale verplaatsing (u) en doorbuiging (w) tussen de hoeken:
$u(10^+, a) = \cos(90°)u(10^-, a) - \sin(90°)w(10^-, a)$
$w(10^+, a) = \sin(90°)u(10^-, a) + \cos(90°)w(10^-, a)$
$u(15^+, a) = \cos(270°)u(15^-, a) - \sin(270°)w(15^-, a)$
$w(15^+, a) = \sin(270°)u(15^-, a) + \cos(270°)w(15^-, a)$

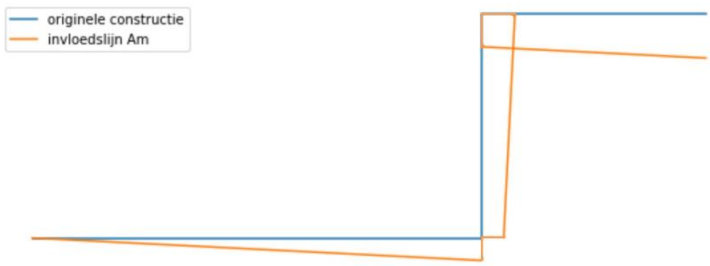
Met deze randvoorwaarden zijn alle 17 onbekenden opgelost. Hieruit komen vergelijkingen waarmee zowel de invloedslijnen (waarbij s een waarde heeft) als de interne krachtslijnen (waarbij a een waarde heeft) worden bepaald. Hieronder zijn de tweedimensionale weergaven gegeven voor de invloedslijnen voor s = 8 voor de doorbuiging en het moment. Er is voor dit punt gekozen aangezien hier een verticale kracht werkt in t richting en dit zo een overzichtelijk beeld geeft van deze invloedslijnen. Echter zou verder voor alle andere punten tussen 0 en 10 en 15 en 20 kunnen worden gekozen.



*Figuur 25: invloedslijnen w en M voor s = 8*

In figuur 26 zijn de tweedimensionale weergaven gegeven voor de invloedslijnen voor de axiale verplaatsing en normaalkracht voor s = 12. Er is voor dit punt gekozen aangezien hier een verticale kracht werkt in s richting en dit zo een overzichtelijk beeld geeft van deze invloedslijnen. Echter zou verder voor alle andere punten tussen 10 en 15 kunnen worden gekozen. De invloedslijn voor het oplegmoment in A is weergegeven in figuur 27.


*Figuur 27: Invloedslijnen u en N voor s = 12*




*Figuur 26: Invloedslijn Am*

De weergegeven invloedslijnen zijn correct toegepast volgens de verwachtingen uit de methode van Müller-Breslau en daarmee valt te stellen dat de opgeloste vergelijkingen voor deze invoeldslijnen ook correct zijn. Voor volledige uitwerking, zie bijlagen 6. Hier zijn ook alle interne krachtslijnen en invloedslijnen (eendimensionaal) te vinden.

# Conclusie

In dit rapport is onderzoek gedaan naar de volgende vraag: *Hoe kan Macaulay's methode worden toegepast met invloedslijnen voor zowel eendimensionale als tweedimensionale constructies?*

Er is eerst gekeken naar het implementeren van de methode van Macaulay met invloedslijnen voor eendimensionale constructies. Hierbij wordt de krachtsverdeling beschreven in het bekende xz-assenstelsel met behulp van singulariteitsfuncties. De verplaatsende puntlast wordt gedefinieerd op een onbekende positie x = a op de constructie. Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd volgens de differentiaalvergelijking op buiging. Het resultaat hiervan zijn functies die afhankelijk zijn van zowel x als a. Hierdoor biedt deze methode de mogelijkheid om op een overzichtelijke manier alle interne krachten en invloedsfactoren te bepalen.

Daarna is er gekeken naar een nieuwe methode voor het toepassen van de methode van Macaulay om invloedslijnen te bepalen voor tweedimensionale constructies. Hierbij wordt de krachtsverdeling omschreven in een nieuw st-assenstelsel. Vervolgens wordt de verplaatsende puntlast geïnterpreteerd als een kracht die altijd verticaal naar beneden gericht is. Om deze puntlast te kunnen beschrijven in het st-assenstelsel, wordt er gebruik gemaakt van goniometrische vergelijkingen. Hierna kan de krachtsverdeling in beide assen worden beschreven. Vervolgens wordt de krachtsverdelingen geïntegreerd volgens de differentiaalvergelijkingen op buiging en extensie. Als resultaat worden met behulp van deze methode vergelijkingen verkregen die zowel afhankelijk zijn van s als a. Hierdoor kan op een overzichtelijke manier alle interne krachten voor verschillende a-waarden en alle invloedslijnen voor verschillende s-waarden worden bepaald.

Hieruit valt te concluderen dat de bedachte methode een overzichtelijke manier biedt voor het bepalen van invloedslijnen voor zowel eendimensionale als tweedimensionale constructies. Dit komt namelijk omdat met één vergelijking alle mogelijke scenario's voor het bepalen voor zowel interne krachten als invloedslijnen kunnen worden bepaald. Deze aanpak kan worden gebruikt om de meest kritieke krachtposities in constructies te bepalen, wat van belang is bij het ontwerpen van civiele constructies.

# Discussie

Met de bedachte methode kan op een overzichtelijke manier alle interne krachten als invloedsfactoren worden bepaald. De vraag is echter hoe effectief deze methode is in vergelijking met de methode van Müller-Breslau. Invloedslijnen voor interne krachten worden klassiek opgelost aan de hand van de theorie van Müller-Breslau die gebruik maakt van negatieve arbeid. Deze methode is in vergelijking met het integreren van de krachtsverdeling met behulp van de methode van Macaulay effectiever aangezien er minder rekenwerk vereist is.
Echter wordt Müller-Breslau toegepast voor specifieke situaties en is deze methode voor statisch onbepaalde constructies minder overzichtelijk om uit te voeren. Met de bedachte methode kan daarentegen voor elke situatie de invloedslijn worden bepaald wat dus voor statisch onbepaalde en complexere constructies gunstiger is.

Bij twee voorbeelden die zijn uitgewerkt voor tweedimensionale constructies, blijken fouten te zitten in de tweedimensionale invloedslijnen (zie bijlagen). Wat hiervan een eventuele reden zou kunnen zijn, is de interpretatie van in welke assen de onbekende oplegreacties worden aangenomen. Bij de nu gebruikte methode worden de horizontale opleggingen altijd in s-richting gedefinieerd en de verticale opleggingen in t-richting. Echter zou het kunnen dat dit niet altijd het geval is. Dit zou interessant kunnen zijn voor vervolgonderzoek om te analyseren.

### Aanbevelingen vervolgonderzoek

Kijkende naar dit onderzoek, blijken er vele interessante vraagstukken naar boven te komen die te onderzoeken zijn. Kijkend naar de tot nu toe gevonden methode zou een vervolg onderzoek kunnen worden gedaan naar het effectiever en overzichtelijker maken van de methode van Müller-Breslau, gebruikmakend van de methode van Macaulay. Hierbij zal worden gekeken naar of de negatieve arbeid 's vergelijkingen voor de constructies kunnen worden herschreven aan de hand van singulariteitsfuncties.
Ook is het interessant om te kijken naar verschillende soorten invloedslijnen. In bijlagen 4 is een constructie behandeld met een verdeelde belasting. Hieruit bleek dat de interpretatie van de invloedslijnen veranderd. Daarbij kan bijvoorbeeld ook worden gekeken naar een constructie waarbij meerdere puntlasten worden toegepast of als er zich een verplaatsend eenheidsmoment op de constructie bevindt. Interessant is om hierbij te kijken naar de nieuwe wiskundige betekenis van de nieuwe gevormde invloedslijnen en of deze eventueel van pas komen bij het construeren van constructies.
Verder zijn de verkregen functies afhankelijk van twee variabelen. Hierdoor kunnen 3D plots worden gemaakt. Door als het ware de ophoping van de verschillende invloedslijnen en interne krachtslijnen kan door middel van het analyseren van de doorsnedes extreme interne krachten in de constructie worden gevonden.
Verder kan er gekeken worden naar een nieuwe methode voor hoe Macaulay's methode kan worden toegepast voor tweedimensionale constructies waarbij de constructie continue wordt bekeken in plaats van discreet (van der Wulp, 2023). Een variatie is een uitbreiding naar gekromde liggers.
Ook kan er worden gekeken naar het toepassen van de methode van Macaulay voor vakwerken waarbij er meer dan 2 knopen samenkomen. Daarnaast kan er nog een vervolgonderzoek worden gedaan naar het toepassen van de methode van Macaulay voor driedimensionale constructies. Hierbij komt nog een dimensie in diepte richting kijken wat een verschil zal geven aan de nu bedachte methode.

# Literatuurlijst

Caprani, C. (2010). *Deflection of Flexural Members - Macaulay's Method 3rd Year Structural p. 10-16.* Structural Analysis III.

Freepik. (2023). *A view of the city of london from below Premium Photo*. Retrieved 2023, from https://www.freepik.com/premium-photo/view-city-london-from_43236215.htm

Macaulay, W. (1919). *"A note on the deflection of beams", Messenger of Mathematics, p. 129.*

van der Wulp, J. (2023). *De methode van Macaulay voor tweedimensionale constructies*. Retrieved oktober 16, 2023, from TU Delft Repositories: http://resolver.tudelft.nl/uuid:96ec934a-4520-465f-8079-01b9fad73360

Welleman, i. J. (2016). *Work, energy methods & influence lines, p. 80-128.* (i. C. Eldik, Ed.) Zoetermeer, Zuid-Holland, Nederland: Bouwen met Staal.

Welleman, I. J. (2022). *ConstructieMechanica 4: invloedslijnen*. Retrieved 2023, from Icoz college 17; Technische Universiteit Delft; Civiele Techniek: https://icozct.tudelft.nl/TUD_CT/CT3109/collegestof/invloedslijnen/files/les1.pdf

# Bijlagen

In deze bijlagen zijn de complete berekeningen te vinden per voorbeeld. Hierbij zijn de vergelijkingen voor de interne krachtslijnen bepaald en de invloedslijnen. In de bijlage wordt voor voorbeeld 1 tot en met 4 (eendimensionale voorbeelden) alle interne krachtslijnen en invloedslijnen voor de oplegreacties weergegeven. Voor voorbeeld 5 (tweedimensionale voorbeeld) zijn zowel alle invloedslijnen als interne krachtslijnen weergegeven in eendimensionale plotten. Ook is er bij dit voorbeeld een tweedimensionale weergave gegeven van de verplaatste constructie ten gevolge van de eenheidslast op een gekozen positie. Voor voorbeeld 6 en 7 geldt hetzelfde, echter is hiervan ook de gehele uitwerking hier te vinden aangezien deze voorbeelden nog niet helemaal blijken te kloppen kijkende naar de resultaten van de tweedimensionale invloedslijnen. Voorbeeld 8 is daarnaast ook in de bijlagen te vinden en is hier behandeld aangezien deze nog niet helemaal compleet is. De gebruikte code is te vinden in de omgeving van Github met de volgende site: https://github.com/JuliaJankie/Macaulay-s-toegepast-met-invloedslijnen.git.

## Bijlagen 1: voorbeeld 1

$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^{-1} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$

$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{0} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + Cv$

$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$

$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - 1\langle x-a\rangle^{1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + Cvx + Cm$

$M(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$

$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$

$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + cw$

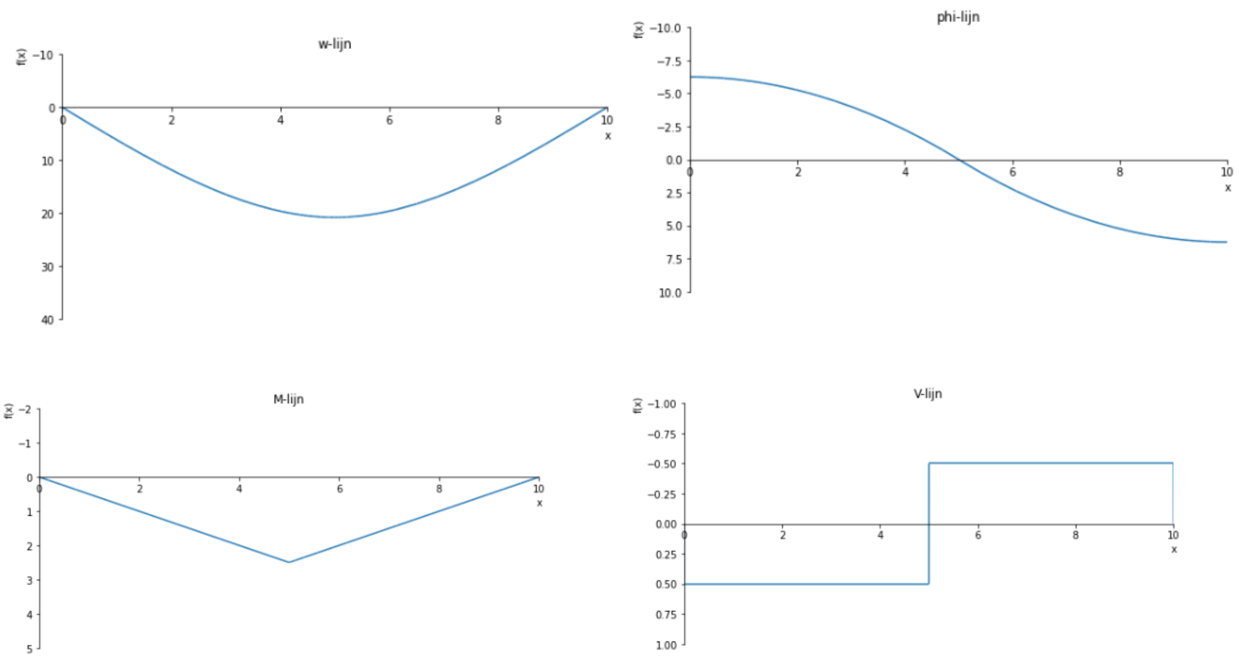
$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$

$V(10^+,a) = 0 \rightarrow Av - 1 + Bv = 0$

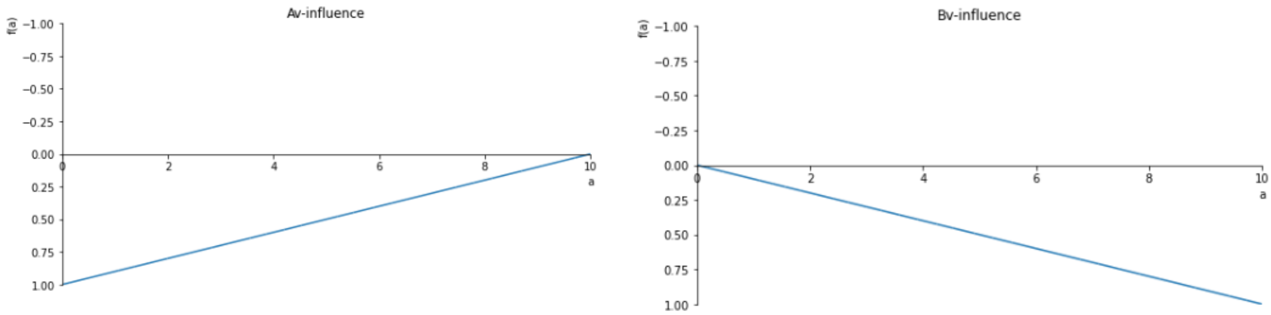
$M(10,a) = 0 \rightarrow 10Av - 1\langle 10-a\rangle^{1} \rightarrow \boldsymbol{Av = \frac{\langle 10-a\rangle^{1}}{10}} \rightarrow \boldsymbol{Bv = 1 - \frac{\langle 10-a\rangle^{1}}{10}}$

$w(10,a) = 0 \rightarrow -\frac{1}{6}\frac{\langle 10-a\rangle^{1}}{10}10^3 + \frac{1}{6}\langle 10-a\rangle^{3} - 10C\varphi \rightarrow \boldsymbol{C\varphi = -\frac{5}{3}\langle 10-a\rangle^{1} + \frac{1}{60}\langle 10-a\rangle^{3}}$

Voor het plotten van de interne krachtslijnen is a = 5 genomen. Dit betekent dus dat de bewegende puntlast voor deze grafieken op het midden van de constructie is aangenomen.




*Figuur 28: Interne krachtslijnen met a = 5 voor voorbeeld 1*




*Figuur 29: Invloedslijnen voor de oplegreacties voor voorbeeld 1*

# Bijlagen 2: voorbeeld 2

$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + Am\langle x\rangle^{-2} + 1\langle x-a\rangle^{-1} + \varphi_s\langle x-5\rangle^{-3} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$

$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - Am\langle x\rangle^{-1} - 1\langle x-a\rangle^{0} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{-2} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + \mathrm{Cv}$

$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$

$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - Am\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{1} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{-1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + \mathrm{Cvx} + \mathrm{Cm}$

$M(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$

$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - Am\langle x\rangle^{1} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} - \varphi_s\langle x-5\rangle^{0} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Cv}x^2 + \mathrm{Cmx} + \mathrm{C\varphi}$

$\varphi(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C\varphi = 0}$

$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{2}Am\langle x\rangle^{2} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} + \varphi_s\langle x-5\rangle^{1} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}\mathrm{Cv}x^3 - \frac{1}{2}\mathrm{Cm}x^2 - \mathrm{C\varphi x} + \mathrm{cw}$

$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$

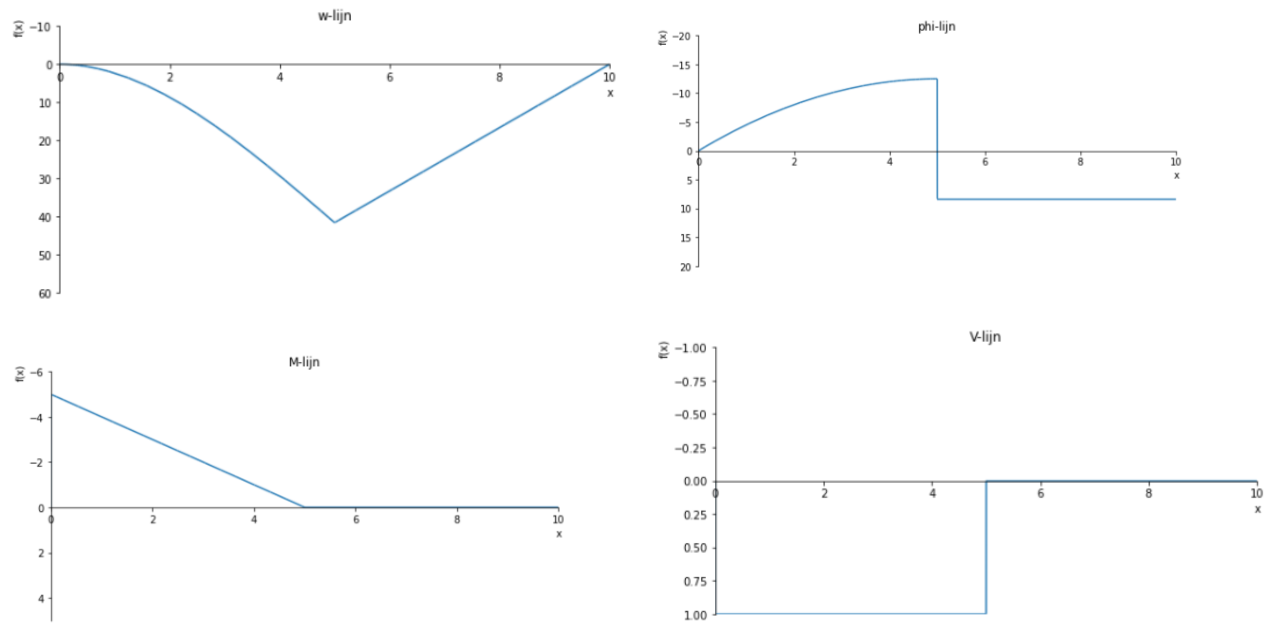
$V(10^+, a) = 0 \rightarrow Av - 1 + Bv = 0$

$M(5,a) = 0 \rightarrow 5Av - Am - 1\langle 5-a\rangle^1 = 0$

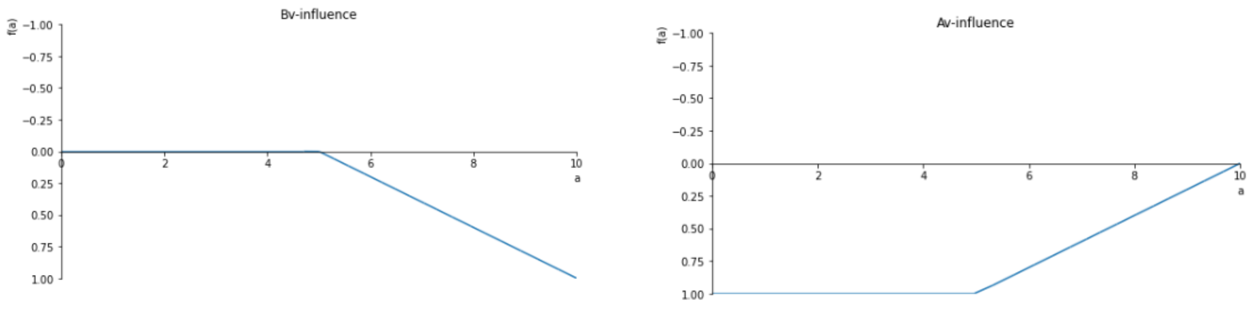
$M(10,a) = 0 \rightarrow 10Av - Am - 1\langle 10-a\rangle^1 \rightarrow \boldsymbol{Av = \frac{-\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1}{5}} \rightarrow \boldsymbol{Bv = 1 - \frac{-\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1}{5}} \rightarrow \boldsymbol{Am = -2\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1}$

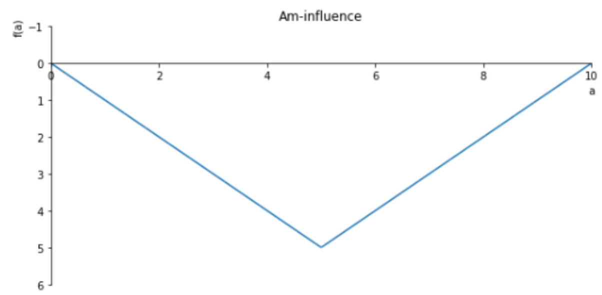
$w(10,a) = 0 \rightarrow\ -33\frac{1}{3}(-\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1) + 50(-2\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1) + \frac{1}{6}\langle 10-a\rangle^3 = 5\varphi_s \rightarrow \boldsymbol{\varphi_s = \frac{20}{3}\left(-\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1\right) - 10\left(-2\langle 5-a\rangle^1 + \langle 10-a\rangle^1\right) - \frac{1}{30}\langle 10-a\rangle^3}$

Voor het plotten van de interne krachtslijnen is a = 5 genomen. Hierbij bevindt de bewegende puntlast zich dus op het midden van de constructie.




*Figuur 30: Interne krachtslijnen met a = 5 voor voorbeeld 2*






*Figuur 31: Invloedslijnen voor oplegreacties voor voorbeeld 2*

## Bijlagen 3: voorbeeld 3

$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^{-1} - Cv\langle x-5\rangle^{-1} - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$

$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{0} - 1\langle x-a\rangle^{0} + Cv\langle x-5\rangle^{0} + Bv\langle x-10\rangle^{0} + Cv$

$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$

$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^{1} - 1\langle x-a\rangle^{1} + Cv\langle x-5\rangle^{1} + Bv\langle x-10\rangle^{1} + Cvx + Cm$

$M(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$

$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^{2} - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cv\langle x-5\rangle^{2} + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$

$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^{3} + \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cv\langle x-5\rangle^{3} - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + cw$

$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$

$V(10^+,a) = 0 \rightarrow Av - 1 + Cv + Bv = 0$

$M(10,a) = 0 \rightarrow 10Av - 1\langle 10-a\rangle^{1} + Cv$

$w(5,a) = 0 \rightarrow\ -\frac{125}{6}\mathrm{Av} + \frac{1}{6}\langle 5-a\rangle^{3} - 5\mathrm{C\varphi}$
$w(10,a) = 0 \rightarrow\ -\frac{500}{6}\mathrm{Av} + \frac{1}{6}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{125}{6}\mathrm{Cv} - 10\mathrm{C\varphi} \rightarrow$

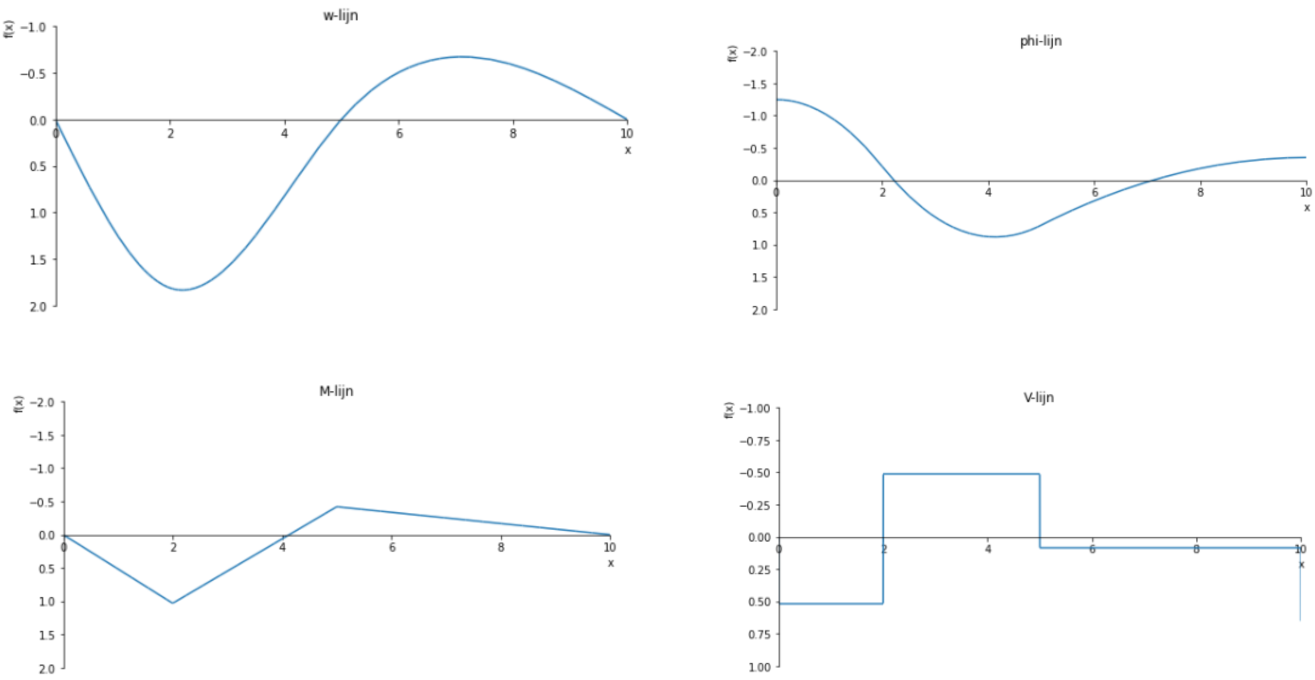
$\boldsymbol{Av = \frac{1}{500}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{1}{20}\langle 10-a\rangle^{1} - \frac{1}{250}\langle 5-a\rangle^{3} \rightarrow}$

$\boldsymbol{Cv = -2(\frac{1}{500}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{1}{20}\langle 10-a\rangle^{1} - \frac{1}{250}\langle 5-a\rangle^{3} + \frac{1}{5}\langle 10-a\rangle^{1} \rightarrow}$

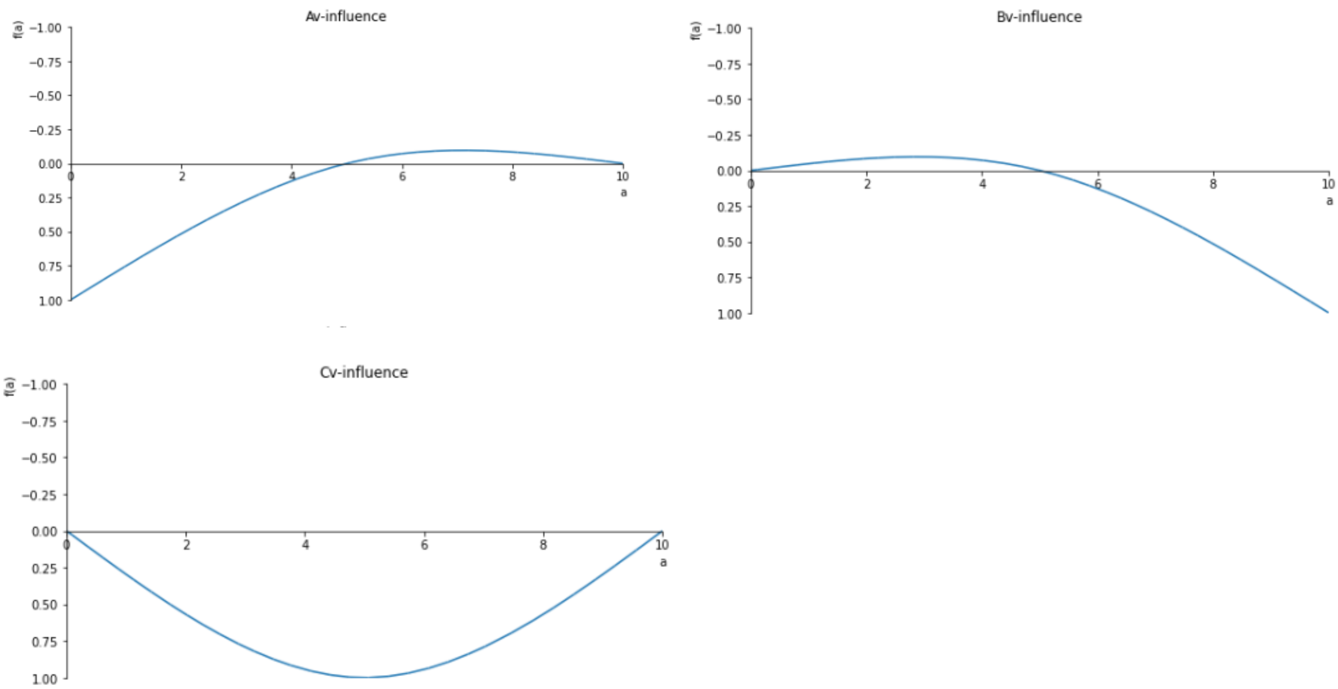
$\boldsymbol{Bv = 1 - \left(\frac{1}{500}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{1}{20}\langle 10-a\rangle^{1} - \frac{1}{250}\langle 5-a\rangle^{3}\right) - (-2(\frac{1}{500}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{1}{20}\langle 10-a\rangle^{1} - \frac{1}{250}\langle 5-a\rangle^{3} + \frac{1}{5}\langle 10-a\rangle^{1} \rightarrow}$

$\boldsymbol{C\varphi = -\frac{25}{6}\left(\frac{1}{500}\langle 10-a\rangle^{3} - \frac{1}{20}\langle 10-a\rangle^{1} - \frac{1}{250}\langle 5-a\rangle^{3}\right) + \frac{1}{30}\langle 5-a\rangle^{3}}$

De interne krachtslijnen zijn bepaald op a = 2. Er is hierbij bewust gekozen om bij dit voorbeeld niet de interne krachtslijnen te plotten voor a = 5 (waarbij de puntlast op het midden van de ligger rust). Dit heeft ermee te maken dat deze interne krachtslijnen dan allemaal een constante lijn 0 weergeven doordat alle krachten elkaar opheffen.

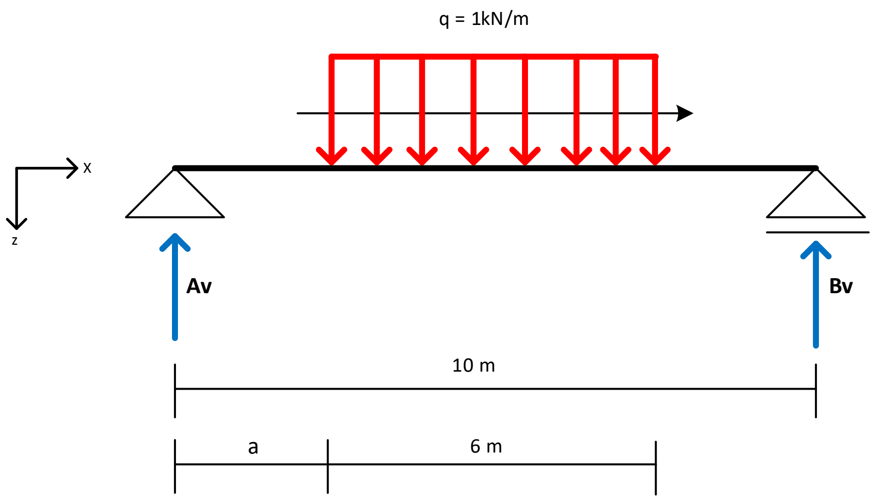



*Figuur 32: Interne krachtslijnen met a = 2 voor voorbeeld 3*




*Figuur 33: Invloedslijnen voor oplegreacties voor voorbeeld 3*

## Bijlagen 4: voorbeeld 4




*Figuur 34: Ligger op twee steunpunten met verplaatsende verdeelde belasting.*

Bij dit voorbeeld wordt er gekeken naar een ligger op twee steunpunten met een verplaatsende verdeelde belasting. Een verdeelde belasting is hetzelfde als een set van puntlasten die erg dicht op elkaar zitten en zich verdelen over een deel van de constructie. Vanwege de verdeelde belasting is de betekenis van invloedslijnen veranderd en wordt er daardoor hier naar een nieuw soort invloedslijn gekeken waarvan de betekenis nog niet bekend is.

Bij een verdeelde belasting is de belasting over de lengte van de structuur verdeeld. Dit betekent dat de dwarskracht op verschillende punten langs de structuur kan variëren. Kijkende naar de invloedslijn van de dwarskracht, toont deze hoe de dwarskracht op een bepaald punt in de constructie reageert wanneer de verdeelde belasting zich langs de constructie verplaatst. Omdat de verdeelde belasting varieert en de dwarskrachten zich als het ware ophopen of verminderen naarmate de verdeelde belasting over de structuur beweegt, resulteert dit in een kromme invloedslijn. Hetzelfde geldt voor de invloedslijn voor het moment.

In figuur 34 is de krachtsverdeling weergegeven van voorbeeld 4. Hierbij zijn de onbekende oplegreacties negatief naar boven aangenomen en is de verdeelde belasting positief naar beneden genomen. De verdeelde belasting begint vanaf x = a en loopt totaal over 6 meter van de ligger. De krachtsverdeling is als volgt:

$$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^0 - 1\langle x-(a+6)\rangle^0 - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$$

Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende resultaten levert:

$$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^0 - 1\langle x-a\rangle^1 + 1\langle x-(a+6)\rangle^1 + Bv\langle x-10\rangle^0 + Cv$$

$$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^1 - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle x-(a+6)\rangle^2 + Bv\langle x-10\rangle^1 + Cvx + Cm$$

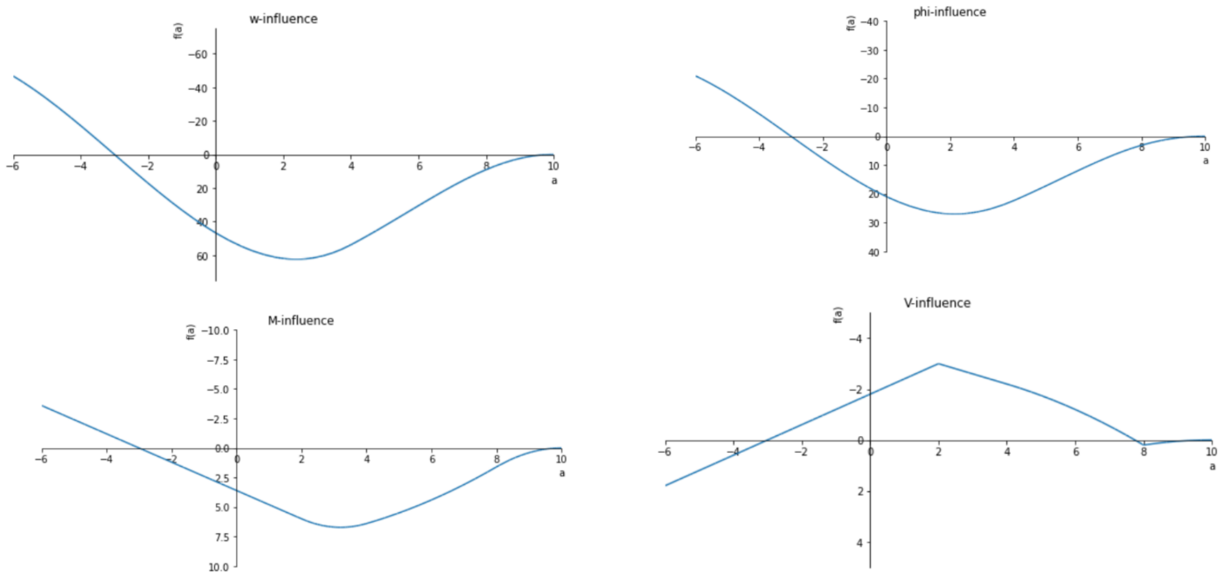
$$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^2 - \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{1}{6}\langle x-(a+6)\rangle^3 + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^2 + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$$

$EIw(x,a) = EI \int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^3 + \frac{1}{24}\langle x-a\rangle^4 - \frac{1}{24}\langle x-(a+6)\rangle^4 - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^3 - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + Cw$

Uit de vergelijking voor de doorbuiging blijkt dat er in totaal 6 onbekenden zijn. Deze zijn op te lossen aan de hand van de volgende randvoorwaarden:
$M(0,a) = 0;\ \ M(10,a) = 0;\ \ w(0,a) = 0;\ \ w(10,a) = 0$

Om de laatste 2 onbekenden op te lossen wordt de ligger aan beide kanten doorgetrokken wat de volgende randvoorwaarden geeft:
$V(0^-,a) = 0;\ \ \ V(10^+,a) = 0$

Hiermee is de constructie opgelost en kunnen zowel de interne krachtslijnen (waarbij a een waarde wordt toegekend) als de invloedslijnen (waarbij x een waarde moet hebben) worden geplot.
De invloedslijnen voor x = 8 zijn weergegeven in figuur 35. Er is hierbij gekozen voor het punt x = 8 aangezien dit een goed beeld geeft hoe de invloedslijnen werken. Ook is dit een handig punt aangezien dit een duidelijke weergave geeft van de werking van de invloedslijn voor de dwarskracht, aangezien hierbij beide knikken door de verandering van richting in kracht worden weergegeven. De variabele a-waarde verloopt bij dit voorbeeld van -6 tot 10. Dit heeft te maken met de verdeelde belasting die zich bevindt op 6 meter op (buiten) de constructie.




*Figuur 35: Invloedslijnen op x = 8 voor voorbeeld 4*

Zoals verwacht zijn de invloedslijnen voor de dwarskracht en moment beide gekromde lijnen. De knikken in de invloedslijn in de dwarskracht bij a = 2 en a = 8, geven aan dat op die punten de richting van de dwarskracht die wordt veroorzaakt door de verdeelde belasting verandert. Dit komt door de verdeelde belasting die over 6 meter van de constructie verloopt. Aangezien de verdeelde belasting over 6 meter verloopt, zal deze verdeelde belasting dan ook invloed hebben op de constructie tussen a = -6 en a = 0 .
Tussen punten a = 2 en a = 8 ondervindt de grafiek een daling voor de invloedslijn. Dit komt doordat er tussen deze twee punten de verdeelde belasting bevindt. Op de stukken voor a = 2 en na a = 8 is een stijgende lijn te zien in de invloedslijn. Dit komt dus omdat hier de verdeelde belasting zich niet op de constructie bevindt voor deze situatie.

Hieronder zijn de totale uitwerkingen te vinden van dit voorbeeld:

$q_z(x,a) = -Av\langle x\rangle^{-1} + 1\langle x-a\rangle^0 - 1\langle x-(a+6)\rangle^0 - Bv\langle x-10\rangle^{-1}$

$V(x,a) = \int q_z(x,a)dx = Av\langle x\rangle^0 - 1\langle x-a\rangle^1 + 1\langle x-(a+6)\rangle^1 + Bv\langle x-10\rangle^0 + Cv$

$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$

$M(x,a) = \int V(x,a)dx = Av\langle x\rangle^1 - \frac{1}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle x-(a+6)\rangle^2 + Bv\langle x-10\rangle^1 + Cvx + Cm$

$M(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$

$EI\varphi(x,a) = \int M(x,a)dx = \frac{1}{2}Av\langle x\rangle^2 - \frac{1}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{1}{6}\langle x-(a+6)\rangle^3 + \frac{1}{2}Bv\langle x-10\rangle^2 + \frac{1}{2}Cvx^2 + Cmx + C\varphi$

$EIw(x,a) = EI\int \varphi(x,a)dx = -\frac{1}{6}Av\langle x\rangle^3 + \frac{1}{24}\langle x-a\rangle^4 - \frac{1}{24}\langle x-(a+6)\rangle^4 - \frac{1}{6}Bv\langle x-10\rangle^3 - \frac{1}{6}Cvx^3 - \frac{1}{2}Cmx^2 - C\varphi x + Cw$

$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$

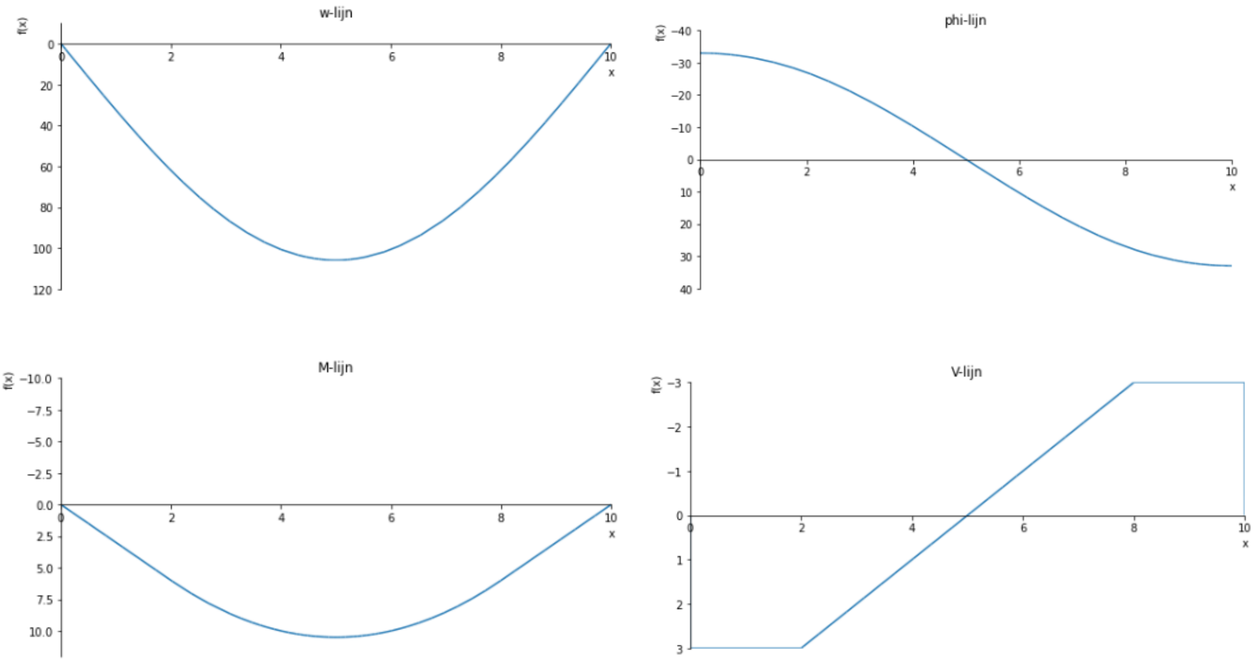
$V(10^+,a) = 0 \rightarrow Av - 1\langle 10-a\rangle^1 + 1\langle 10-(a+6)\rangle^1 + Bv$

$M(10,a) = 0 \rightarrow 10Av - \frac{1}{2}\langle 10-a\rangle^2 + \frac{1}{2}\langle 4-a\rangle^2 \rightarrow \boldsymbol{Av = \frac{\frac{1}{2}\langle 10-a\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle 4-a\rangle^2}{10}} \rightarrow$

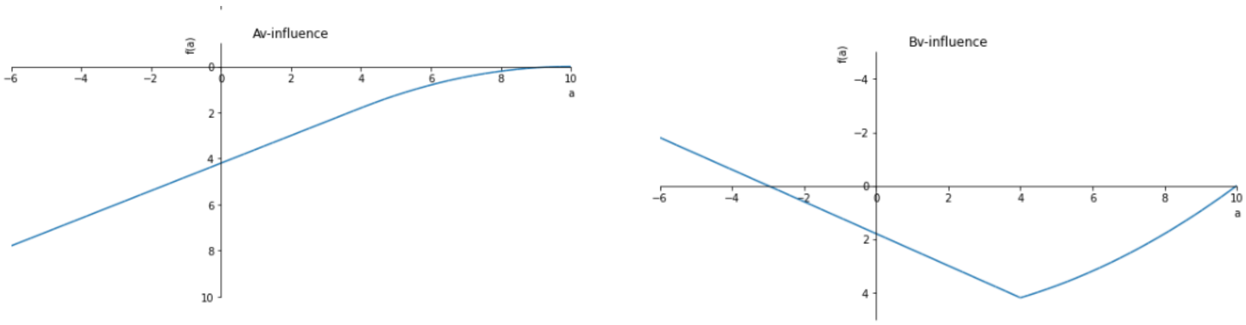
$\boldsymbol{Bv = \langle 10-a\rangle^1 - \langle 4-a\rangle^1 - \frac{\frac{1}{2}\langle 10-a\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle 4-a\rangle^2}{10}}$

$w(10,a) = 0 \rightarrow -\frac{1}{12}\frac{\frac{1}{2}\langle 10-a\rangle^2 - \frac{1}{2}\langle 4-a\rangle^2}{10}10^3 + \frac{1}{24}\langle 10-a\rangle^4 - \frac{1}{24}\langle 4-a\rangle^4 - 10C\varphi \rightarrow$

$\boldsymbol{C\varphi = -\frac{5}{6}\left(\langle 10-a\rangle^2 - \langle 4-a\rangle^2\right) + \frac{1}{240}\langle 10-a\rangle^4 - \frac{1}{240}\langle 4-a\rangle^4}$




*Figuur 36: Interne krachtslijnen met a = 5 voor voorbeeld 4*




*Figuur 37: Invloedslijnen voor oplegreactie voor voorbeeld 4*

## Bijlagen 5: Uitleg invloedslijnen

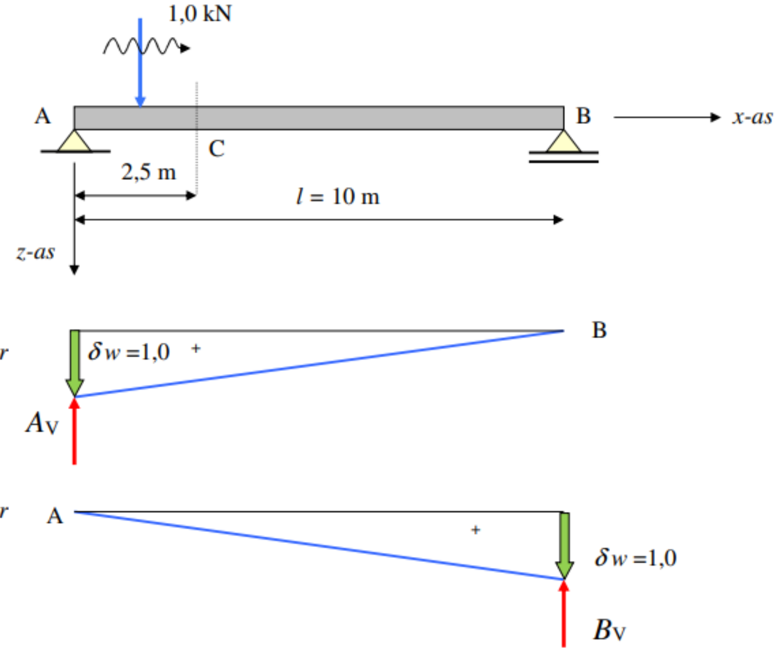
Inlvoedslijnen worden toegepast om de meest ongunstige posities van krachten op een constructie te bepalen. Hierbij is de positie van de kracht onbekend. Hieronder is uitgelegd hoe deze invloedslijnen verkregen worden.

### Müller-Breslau

De methode van Müller-Breslau wordt toegepast om invloedslijnen te vinden voor bepaalde krachtsgrootheden. Hierbij wordt de beschouwde grootheid losgemaakt van zijn verplaatsingselement. Vervolgens wordt er gebruik gemaakt van negatieve virtuele arbeid. Hierbij maakt de beschouwde grootheid een bepaalde translatie/rotatie. De positie die de constructie vormt in deze situatie word omschreven als de invloedslijn voor de beschouwde grootheid. Vervolgens kunnen met deze negatieve arbeid een vergelijking worden opgesteld waarmee de beschouwde krachtsgrootheid bepaald kan worden (Welleman I. J., 2022).

Deze methode wordt daarom toegepast voor het bepalen van de invloedslijnen voor oplegreacties, momenten en dwarskrachten.

### Oplegreacties




*Figuur 38: Müller-Breslau toegepast voor oplegreacties*

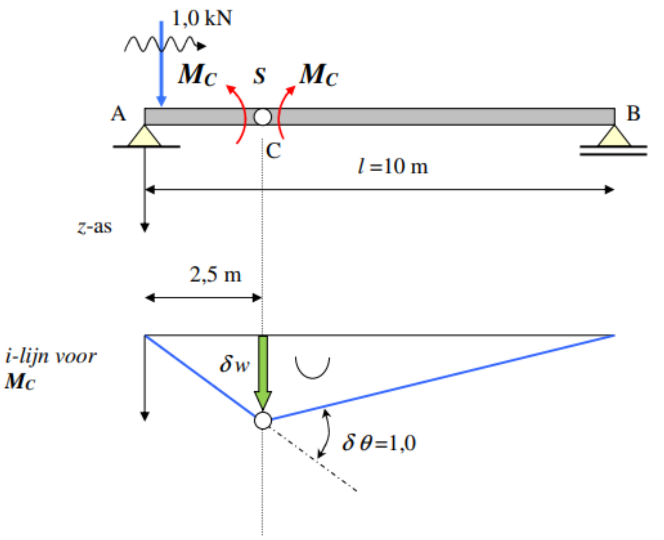
In figuur 38, is een simpel voorbeeld gegeven voor het weergeven van invloedslijnen voor oplegreacties. De positie van de aangrijpende puntlast is onbekend. Kijkende naar Av: eerst zal de oplegging in A worden weggehaald waardoor de constructie in een mechanisme veranderd. Vervolgens wordt virtuele arbeid toegepast waaruit volgt:

$$-Av\delta w(x = 0) + 1\delta w(x = a) = \delta A = 0$$

In de formule op de vorige bladzijde wordt de negatieve arbeid voor de oplegreactie Av toegepast. Hierbij is te zien uit de formule dat als de aangrijpende puntlast zich op locatie a = 0 bevindt, Av gelijk is aan 1 kN. Als de aangrijpende puntlast zich op a = l bevindt, is Av gelijk aan 0 kN.

## Moment

In figuur 39, wordt er gekeken naar hetzelfde voorbeeld maar dan wordt er gekeken naar het bepalen van het interne moment ter plaats van doorsneden C. Hierbij wordt een scharnier toegevoegd op locatie C, hierdoor wordt de constructie een mechanisme. Als resultaat zal de ligger knikkend naar beneden vormen. De virtuele verplaatsing ten gevolge van het moment wordt weergegeven als een rotatie die gelijk is aan één. Hierbij wordt vervolgens virtuele arbeid toegepast waaruit de formules komen die zijn weergegeven in de figuur. Deze formule geeft het goniometrisch verband weer tussen de rotatie en de doorbuiging op punt C. Hiermee kan vervolgens de invloedsfactor worden bepaald voor het moment Mc.




$$\delta\theta = \frac{\delta w}{2,5} + \frac{\delta w}{7,5} = 1,0$$
$$\delta w = 1,875$$

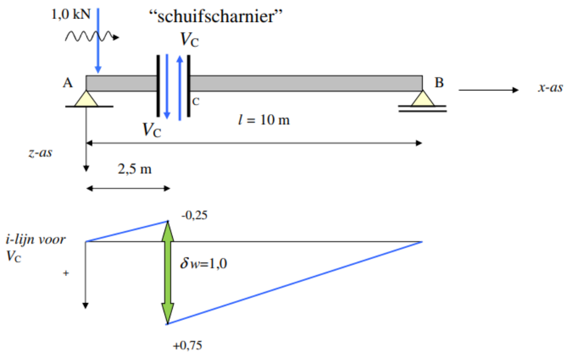
*Figuur 39: Müller-Breslau toegepast voor interne momenten*

$$-M_c\delta\theta(x = c) + 1\delta w(x = a) = \delta A = 0$$

Uit de formule van figuur 39 en de bovenstaande formule kan Mc worden bepaald op locatie C voor elke locatie van F.

## Dwarskracht

Voor het bepalen van de dwarskracht wordt een zogeheten schuifscharnier toegepast op locatie C. Hierdoor veranderd de constructie wederom in een mechanisme. De richting van de dwarskracht is positief aangenomen. De verplaatsing van de ligger wordt vervolgens in tegengestelde richting genomen waardoor de constructie negatieve arbeid levert voor de dwarskracht. De verplaatste constructie is ook meteen de invloedslijn voor de dwarskracht op locatie C (weergegeven in figuur 40).




*Figuur 40: Müller-Breslau toegepast voor dwarskrachten*

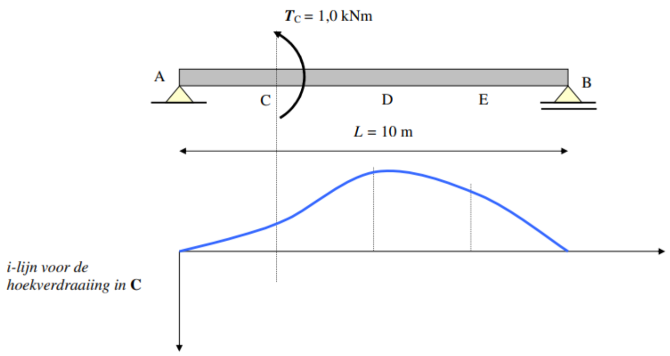
## Rotatie en doorbuiging

Gebruikmakende van virtuele arbeid, kan er volgens de wederkerigheid 's theorie van Maxwell de flexibiliteit relatie worden bepaald voor een constructie. Deze relatie wordt beschreven in de volgende symmetrische matrix:

$$\begin{Bmatrix} w_c \\ \varphi_c \\ w_d \\ \varphi_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_c \\ T_c \\ F_d \\ T_d \end{Bmatrix} \quad (7) \qquad \text{(Welleman I. J., 2022)}$$

Deze relatie geeft aan dat de doorbuiging in C door een eenheidsmoment in C overeen komt met de rotatie in C veroorzaakt door een eenheidskracht in C. Ook geeft deze relatie aan dat de doorbuiging in D veroorzaakt door een eenheidsmoment in C, gelijk is aan de rotatie in C door een eenheidskracht in D.

Het resultaat van deze twee stelling is dat door het toevoegen van een eenheidsmoment op een constructie, de invloedslijn voor rotatie te verkrijgen is. Deze methode is weergegeven in figuur 41.




*Figuur 41: Invloedslijn bepalen voor de rotatie met een moment*

### Statisch onbepaald

De hierboven genoemde voorbeelden, gelden voor statisch bepaalde constructies. De aanpak voor statisch onbepaalde constructies ligt nauw samen met de aanpak voor statisch bepaald. Het grote verschil is dat bij het toevoegen van een extra vrijheidsgraad, de statisch onbepaalde constructie niet in een mechanisme veranderd, maar statisch onbepaald of statisch bepaald wordt, afhankelijk van de vrijheidsgraad van de geassocieerde constructie. Het introduceren van een eenheidsverplaatsing zal dan resulteren in gekromde invloedslijnen voor de eenheidskrachten.

## Bijlagen 6: Voorbeeld 5

De krachtsverdeling in t richting:

$q_t(s,a) = Am\langle s\rangle^{-2} + Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Bv\langle s-10\rangle^{-1} + w_B\langle s-10\rangle^{-4} +$
$Cv\langle s-15\rangle^{-1} + w_C\langle s-15\rangle^{-4}$

Vervolgens wordt deze krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende resultaten levert:

$V(s,a) = \int q_t(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{-1} - Av\langle s\rangle^{0} - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - Bv\langle s-10\rangle^{0} -$
$w_B\langle s-10\rangle^{-3} - Cv\langle s-15\rangle^{0} - w_C\langle s-15\rangle^{-3} + Cv$
$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$
$M(s,a) = \int V(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{0} - Av\langle s\rangle^{1} - 1\langle s-a\rangle^{1} - Bv\langle s-10\rangle^{1} - w_B\langle s-10\rangle^{-2} -$
$Cv\langle s-15\rangle^{1} - w_C\langle s-15\rangle^{-2} + Cvs + Cm$
$M(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$

$EI\varphi(s,a) = \int M(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{1} - \frac{1}{2}Av\langle s\rangle^{2} - \frac{1}{2}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{2} - \frac{1}{2}Bv\langle s-10\rangle^{2} -$
$w_B\langle s-10\rangle^{-1} - \frac{1}{2}Cv\langle s-15\rangle^{2} - w_C\langle s-15\rangle^{-1} + \frac{1}{2}Cvs^2 + Cms + C\varphi$
$\varphi(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C\varphi = 0}$

$EIw(s,a) = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{2}Am\langle s\rangle^{2} + \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^{3} + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{3} + \frac{1}{6}Bv\langle s-10\rangle^{3} +$
$w_B\langle s-10\rangle^{0} + \frac{1}{2}Cv\langle s-15\rangle^{3} + w_C\langle s-15\rangle^{0} - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$
$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$

De krachtsverdeling in s richting:

$q_s(a,s) = Ah\langle s\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Bh\langle s-10\rangle^{-1} + u_B\langle s-10\rangle^{-2} + Ch\langle s-15\rangle^{-1} +$
$u_C\langle s-15\rangle^{-2}$

Vervolgens wordt deze geïntegreerd wat de volgende vergelijkingen geeft:

$N(s,a) = \int q_s(a,s)ds = -Ah\langle s\rangle^{0} + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - Bh\langle s-10\rangle^{0} - u_B\langle s-10\rangle^{-1} -$
$Ch\langle s-15\rangle^{0} - u_C\langle s-15\rangle^{-1} + C_N$
$N(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_N = 0}$

$EAu(s,a) = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^{1} + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - Bh\langle s-10\rangle^{1} - u_B\langle s-10\rangle^{0} -$
$Ch\langle s-15\rangle^{1} - u_C\langle s-15\rangle^{0} + C_N s + C_u$
$u(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_u = 0}$

De overige onbekenden worden opgelost aan de hand van de volgende vergelijkingen:

$V(20^+, a) = -Av - 1\cos(\alpha) - Bv - Cv = 0$
$N(20^+, a) = -Ah - Bh - Ch + 1\sin(\alpha) = 0$
$M(20, a) = -Am - 20Av - 1\cos(\alpha)\langle 20 - a\rangle^1 - 10Bv - 5Cv = 0$

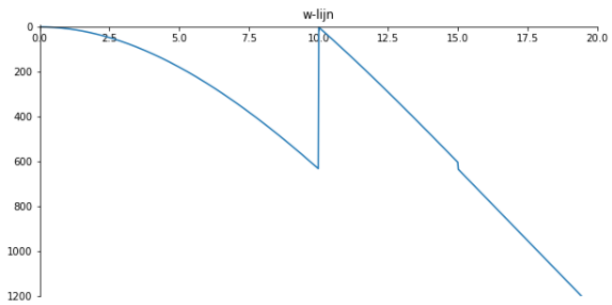
$N(10^+, a) = \cos(90°)N(10^-, a) - \sin(90°)V(10^-, a) \rightarrow$
$-Ah - Bh + 1\sin(\alpha) = Av + 1\cos(\alpha)$
$V(10^+, a) = \sin(90°)N(10^-, a) + \cos(90°)V(10^-, a) \rightarrow$
$-Av - 1\cos(\alpha) - Bv = -Ah + 1\sin(\alpha)$
$N(15^+, a) = \cos(270°)N(10^-, a) - \sin(270°)V(15^-, a) \rightarrow$
$-Ah - Bh - Ch + 1\sin(\alpha) = -Av - 1\cos(\alpha) - Bv$
$V(15^+, a) = \sin(270°)N(15^-, a) + \cos(270°)V(15^-, a) \rightarrow$
$-Av - 1\cos(\alpha) - Bv - Cv = Ah + Bh + 1\sin(\alpha)$

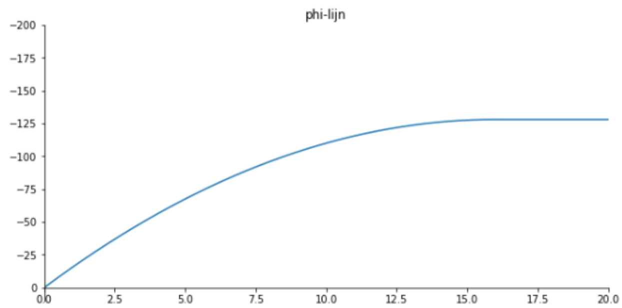
$u(10^+, a) = \cos(90°)u(10^-, a) - \sin(90°)w(10^-, a) \rightarrow$
$-10Ah - ub + 1\sin(\alpha)\langle 10 - a\rangle^1 = -(\frac{1}{2}Am10^2 + \frac{1}{6}Av10^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle 10 - a\rangle^3)$
$w(10^+, a) = \sin(90°)u(10^-, a) + \cos(90°)w(10^-, a) \rightarrow$
$\frac{1}{2}Am10^2 + \frac{1}{6}Av10^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle 10 - a\rangle^3 + w_B = -10Ah + 1\sin(\alpha)\langle 10 - a\rangle^1$
$u(15^+, a) = \cos(270°)u(10^-, a) - \sin(270°)w(15^-, a) \rightarrow$
$-15Ah + 1\sin(\alpha)\langle 15 - a\rangle^1 - 5Bh - ub - uc = \frac{1}{2}Am15^2 + \frac{1}{6}Av15^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle 15 - a\rangle^3 +$
$\frac{1}{6}Bv5^3 + w_B$
$w(15^+, a) = \sin(270°)u(15^-, a) + \cos(270°)w(15^-, a) \rightarrow$
$\frac{1}{2}Am15^2 + \frac{1}{6}Av15^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle 15 - a\rangle^3 + \frac{1}{6}Bv5^3 + w_B + w_C = -(-15Ah + 1\sin(\alpha)\langle 15 - a\rangle^1 -$
$5Bh - ub)$

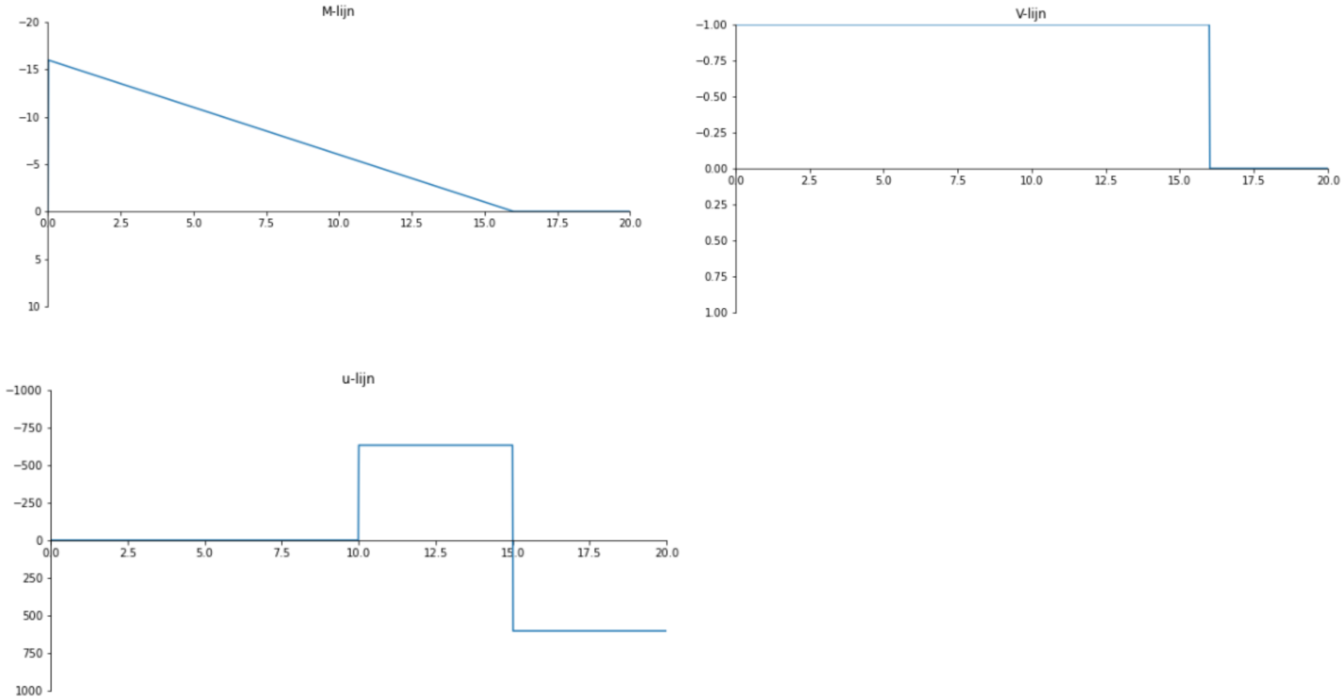
Hierin wordt $\alpha$ als volgt omschreven:

$$\alpha(s) = 0\langle s\rangle^0 - 0\langle s - 10\rangle^0 + 90\langle s - 10\rangle^0 - 90\langle s - 15\rangle^0 + 0\langle s - 15\rangle^0 - 0\langle s - 20\rangle^0$$

Zie voor uitwerking van onbekende het python bestand. Met alle onbekende opgelost zijn de volgende interne krachtslijnen gevonden voor a = 16, waarbij de horizontale as de s-as is:

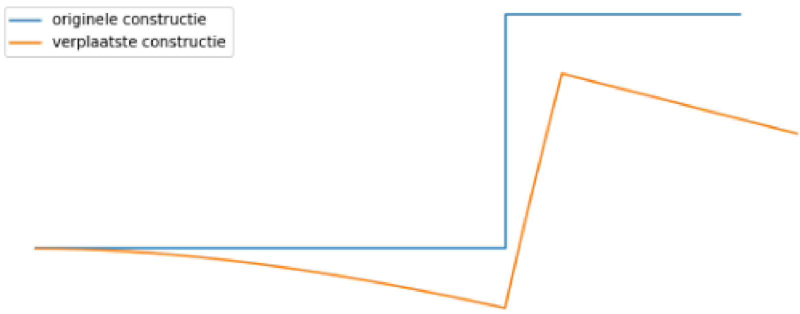




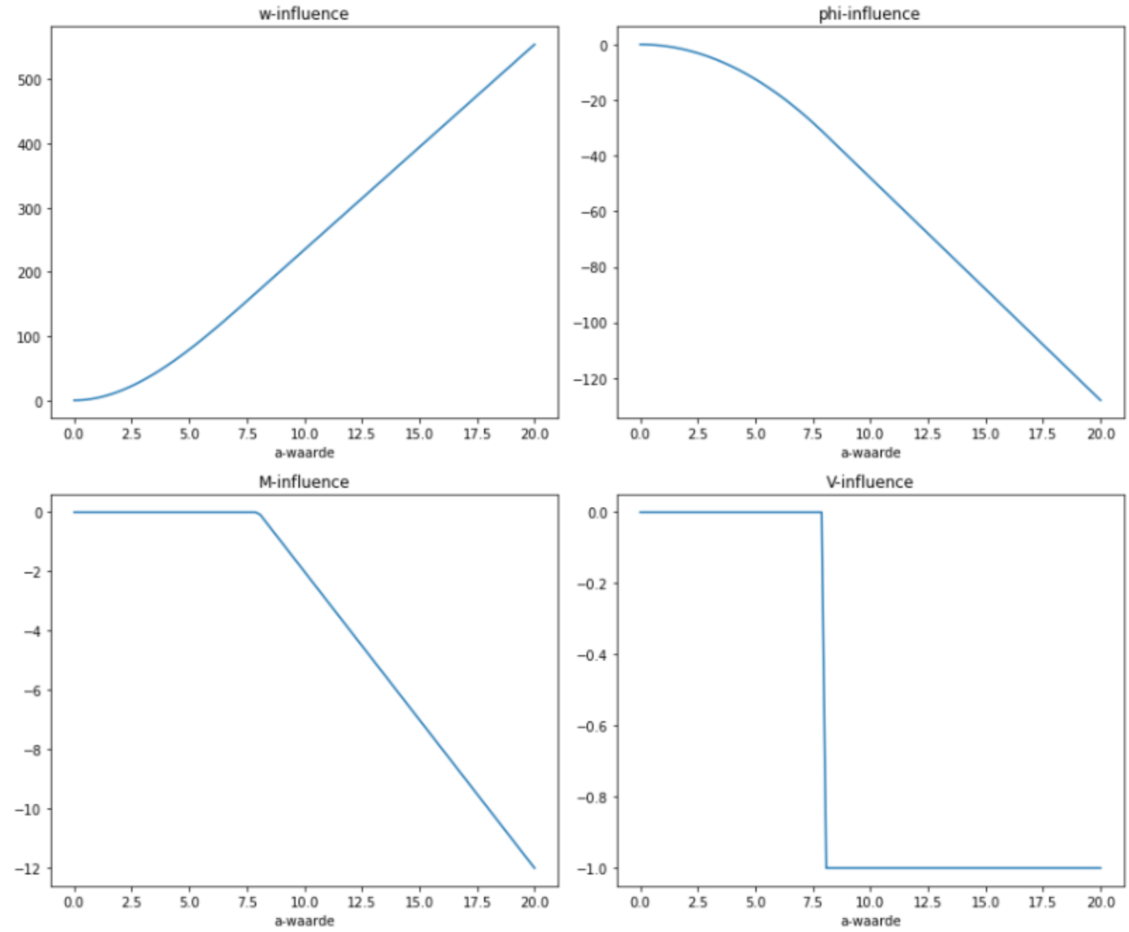

*Figuur 42: Interne krachtslijnen voor a = 16*

Hieronder is de tweedimensionale weergave van de verplaatste constructie te zien voor a = 16:



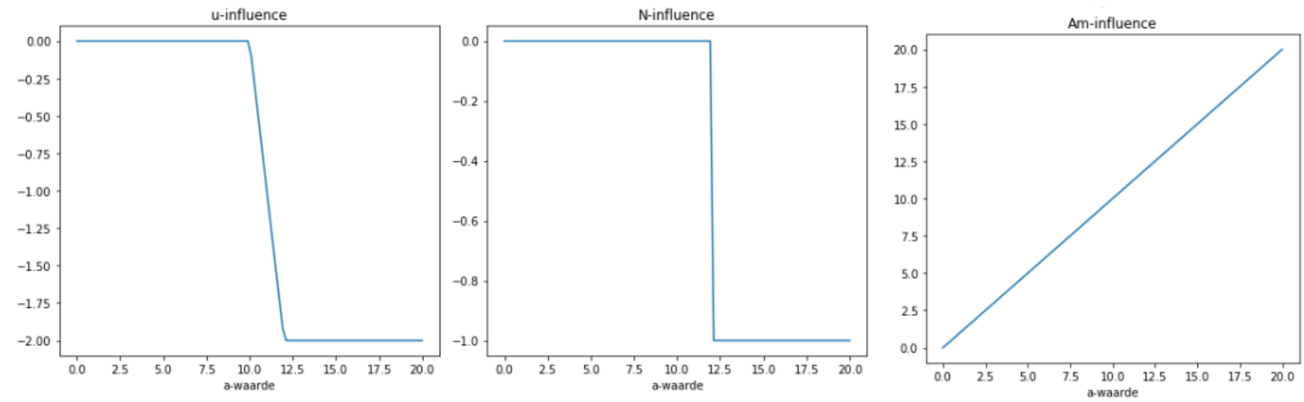

*Figuur 43: Verplaatste constructie voor a = 16*

De volgende invloedslijnen zijn gevonden voor s = 8:




*Figuur 44: Invloedslijnen w, phi, M en V voor s = 8*

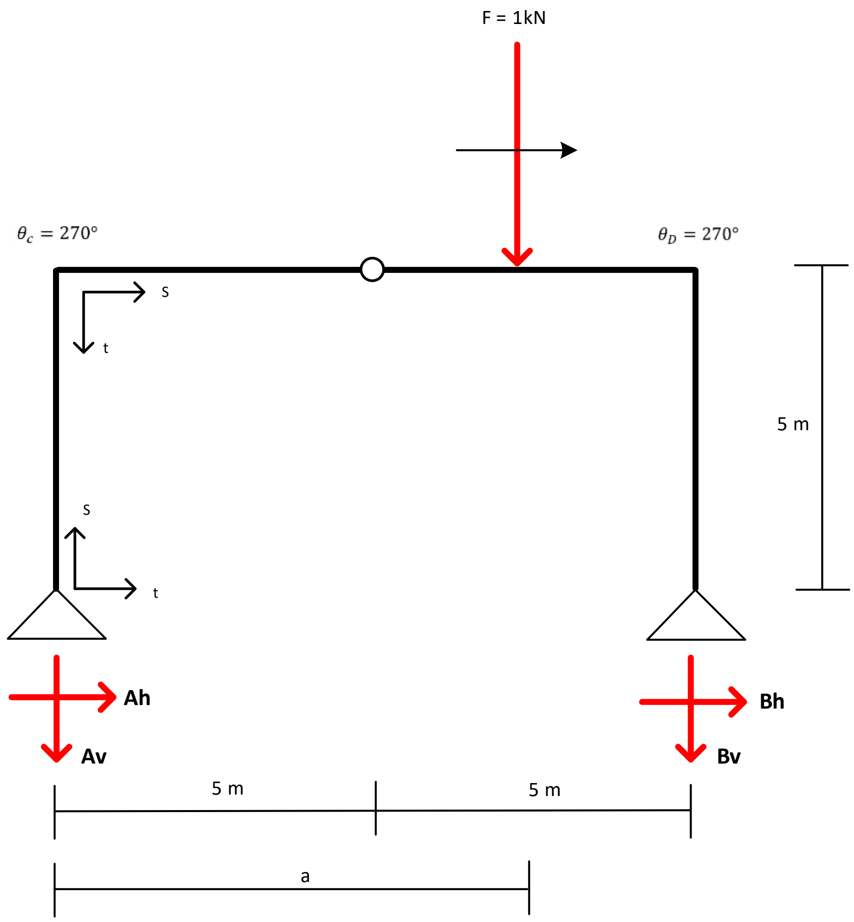
En de volgende invloedslijnen voor s = 12 voor u en N. Voor de invloedslijn van Am maakt het niet uit naar welke s-waarde wordt gekeken.




*Figuur 45: Invloedslijnen u en N voor s = 8 en invloedslijn Am*

## Bijlagen 7: Voorbeeld 6

Hieronder is een driescharnierspant als voorbeeld uitgewerkt.




*Figuur 46: Driescharnierspant met verplaatsende puntlast*

De oplegreacties bij beide roloppleggingen zijn positief aangenomen in t richting. De verplaatsende puntlast is zowel positief aangenomen. Afstand a in de formule is in de figuur hierboven a plus de 5 meter verticaal naar boven. De krachtsverdelingen in t en s richting zijn als volgt:

$$q_t(s,a) = Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Cv\langle s-5\rangle^{-1} + w_C\langle s-5\rangle^{-4} + \varphi_s\langle s-10\rangle^{-3} + Dv\langle s-15\rangle^{-1} + w_D\langle s-15\rangle^{-4} + Bv\langle s-20\rangle^{-1}$$

$$q_s(s,a) = Ah\langle s\rangle^{-1} + Ch\langle s-5\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + u_C\langle s-5\rangle^{-2} + Dh\langle s-15\rangle^{-1} + u_D\langle s-15\rangle^{-2} + Bh\langle s-20\rangle^{-1}$$

Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende vergelijkingen geeft voor de doorbuiging en axiale buiging:

$$\boldsymbol{EIw(s,a)} = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^3 + \frac{1}{6}Cv\langle s-5\rangle^3 + w_C\langle s-5\rangle^0 + \varphi_s\langle s-10\rangle^1 + \frac{1}{6}Dv\langle s-15\rangle^3 + w_D\langle s-15\rangle^0 + \frac{1}{6}Bv\langle s-20\rangle^3 - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$$

$$\boldsymbol{EAu(s,a)} = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^1 - Ch\langle s-5\rangle^1 - u_C\langle s-5\rangle^0 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^0 - Dh\langle s-15\rangle^1 - u_D\langle s-15\rangle^0 - Bh\langle s-20\rangle^1 + C_N s + C_u$$

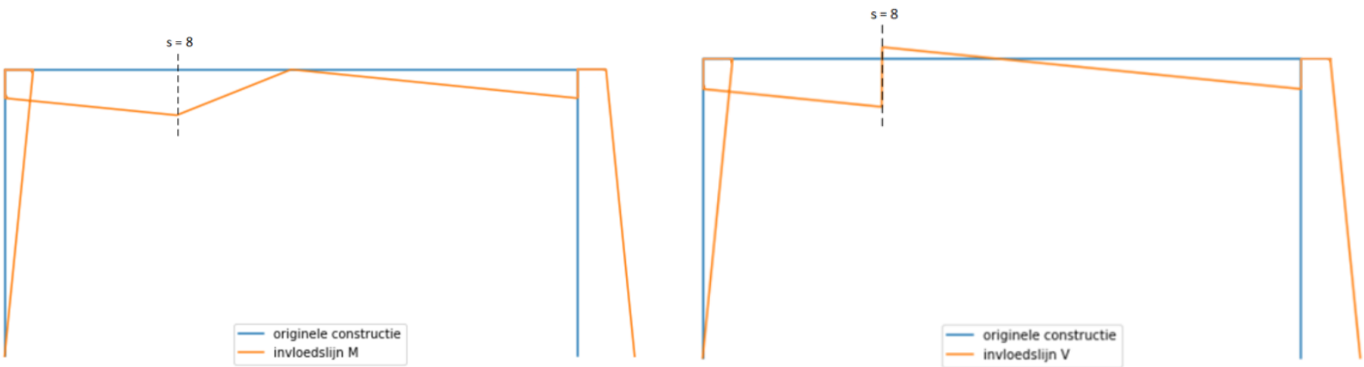
Deze vergelijkingen hebben 19 onbekenden. Deze zijn opgelost aan de hand van de volgende randvoorwaarden die voor deze constructie gelden:
$M(0,a)=0;\quad w(0,a)=0;\quad u(0,a)=0;\quad M(10,a)=0;\quad M(20,a)=0;\quad w(20,a)=0;$
$u(20,a)=0$

Vervolgens wordt de constructie aan beide kanten doorgetrokken wat de volgende randvoorwaarden opleveren:
$V(0^-,a)=0;\quad N(0^-,a)=0;\quad V(20^+,a)=0;\quad N(20^+,a)=0$

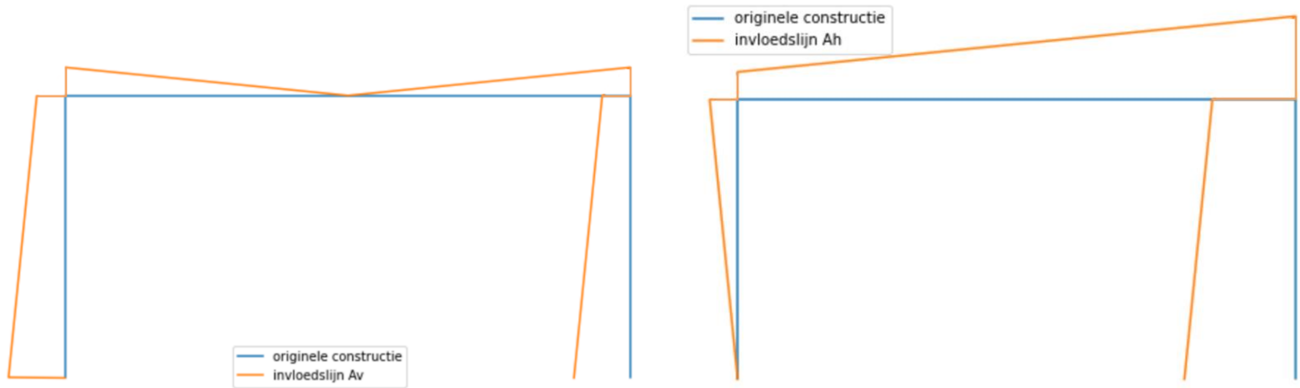
Om vervolgens de laatste 8 onbekenden op te lossen, wordt er gebruik gemaakt van de randvoorwaarden die te halen zijn uit de twee hoeken C en D. De randvoorwaarden voor de relatie tussen dwarskracht en normaalkracht luiden:
$N(5^+,a)=\cos(270°)N(5^-,a)-\sin(270°)V(5^-,a)$
$V(5^+,a)=\sin(270°)N(5^-,a)+\cos(270°)V(5^-,a)$
$N(15^+,a)=\cos(270°)N(15^-,a)-\sin(270°)V(15^-,a)$
$V(15^+,a)=\sin(270°)N(15^-,a)+\cos(270°)V(15^-,a)$

Vervolgens worden de laatste randvoorwaarden bepaald uit de relatie tussen de axiale verplaatsing (u) en doorbuiging (w) tussen de hoeken:
$u(5^+,a)=\cos(270°)u(5^-,a)-\sin(270°)w(5^-,a)$
$w(5^+,a)=\sin(270°)u(5^-,a)+\cos(270°)w(5^-,a)$
$u(15^+,a)=\cos(270°)u(15^-,a)-\sin(270°)w(15^-,a)$
$w(15^+,a)=\sin(270°)u(15^-,a)+\cos(270°)w(15^-,a)$

Met deze 19 vergelijkingen zijn alle 19 onbekenden opgelost. Hierdoor kunnen nu zowel alle interne krachtslijnen (met een bekende a-waarde) als alle invloedslijnen (met een bekende s-waarde) worden bepaald. Hieronder zijn de invloedslijnen weergegeven voor het moment en de dwarskracht voor s = 8 en de invloedslijnen van de oplegreacties in A.




*Figuur 47: Invloedslijnen M en V voor s = 8*




*Figuur 48: Invloedslijnen Av en Ah*

Wat hierbij opvalt is dat als er een kracht wordt geplaatst op a = 20 (dus bij oplegging B) dat bij zowel de invloedslijn voor moment als voor dwarskracht deze kracht zorgt voor een invloed op de positie s = 8. Dit is echter niet wat wordt verwacht volgens de methode van Müller-Breslau. Ook bij de invloedslijnen van de oplegreacties blijkt iets fout te gaan. Waar deze fout eventueel vandaan zou kunnen komen, is behandeld in de discussie.

Zie voor totale uitwerking hieronder:

De krachtsverdeling in t richting:

$$q_t(s,a) = Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Cv\langle s-5\rangle^{-1} + w_C\langle s-5\rangle^{-4} + \varphi_s\langle s-10\rangle^{-3} + Dv\langle s-15\rangle^{-1} + w_D\langle s-15\rangle^{-4} + Bv\langle s-20\rangle^{-1}$$

Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende vergelijkingen geeft voor de interne krachtslijnen:

$$V(s,a) = \int q_t(s,a)ds = -Av\langle s\rangle^{0} - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - Cv\langle s-5\rangle^{0} - w_C\langle s-5\rangle^{-3} - \varphi_s\langle s-10\rangle^{-2} - Dv\langle s-15\rangle^{0} - w_D\langle s-15\rangle^{-3} - Bv\langle s-20\rangle^{0} + Cv$$
$$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$$

$$M(s,a) = \int V(s,a)ds = -Av\langle s\rangle^{1} - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{1} - Cv\langle s-5\rangle^{1} - w_C\langle s-5\rangle^{-2} - \varphi_s\langle s-10\rangle^{-1} - Dv\langle s-15\rangle^{1} - w_D\langle s-15\rangle^{-2} - Bv\langle s-20\rangle^{1} + Cvs + Cm$$
$$M(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$$

$$EI\varphi(s,a) = \int M(s,a)ds = -\frac{1}{2}Av\langle s\rangle^{2} - \frac{1}{2}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{2} - \frac{1}{2}Cv\langle s-5\rangle^{2} - w_C\langle s-5\rangle^{-1} - \varphi_s\langle s-10\rangle^{0} - \frac{1}{2}Dv\langle s-15\rangle^{2} - w_D\langle s-15\rangle^{-1} - \frac{1}{2}Bv\langle s-20\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvs^2 + Cms + C\varphi$$

$$EIw(s,a) = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^{3} + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{3} + \frac{1}{6}Cv\langle s-5\rangle^{3} + w_C\langle s-5\rangle^{0} + \varphi_s\langle s-10\rangle^{1} + \frac{1}{6}Dv\langle s-15\rangle^{3} + w_D\langle s-15\rangle^{0} + \frac{1}{6}Bv\langle s-20\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$$
$$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$$

De krachtverdeling in s richting luidt:

$$q_s(s,a) = Ah\langle s\rangle^{-1} + Ch\langle s-5\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + u_C\langle s-5\rangle^{-2} + Dh\langle s-15\rangle^{-1} + u_D\langle s-15\rangle^{-2} + Bh\langle s-20\rangle^{-1}$$

Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende vergelijkingen geeft voor de interne krachtslijnen:

$$N(s,a) = \int q_s(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^0 - Ch\langle s-5\rangle^0 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^0 - u_C\langle s-5\rangle^{-1} - Dh\langle s-15\rangle^0 - u_D\langle s-15\rangle^{-1} - Bh\langle s-20\rangle^0 + C_N$$
$$N(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_N = 0}$$

$$EAu(s,a) = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^1 - Ch\langle s-5\rangle^1 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^1 - u_C\langle s-5\rangle^0 - Dh\langle s-15\rangle^1 - u_D\langle s-15\rangle^0 - Bh\langle s-20\rangle^1 + C_N s + C_u$$
$$u(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_u = 0}$$

Hierin wordt alpha als volgt omschreven:

$$\alpha(s) = 90\langle s\rangle^0 - 90\langle s-5\rangle^0 + 0\langle s-5\rangle^0 - 0\langle s-15\rangle^0 + 90\langle s-15\rangle^0 - 90\langle s-20\rangle^0$$

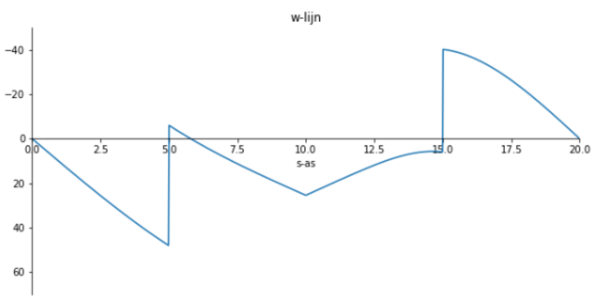
De volgende 14 onbekenden worden opgelost aan de hand van de volgende randvoorwaarden op dezelfde manier als bij voorbeeld 5. De volledige vergelijkingen en oplossingen van onbekenden zijn te vinden in het python bestand in de literatuurlijst.

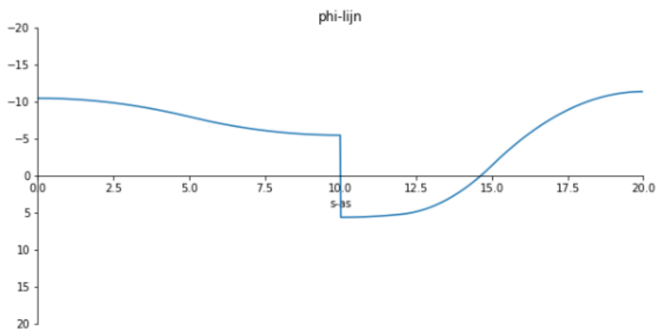
$$M(10,a) = 0; \quad M(20,a) = 0; \quad w(20,a) = 0; \quad u(20,a) = 0$$
$$V(20^+,a) = 0; \quad N(20^+,a) = 0$$

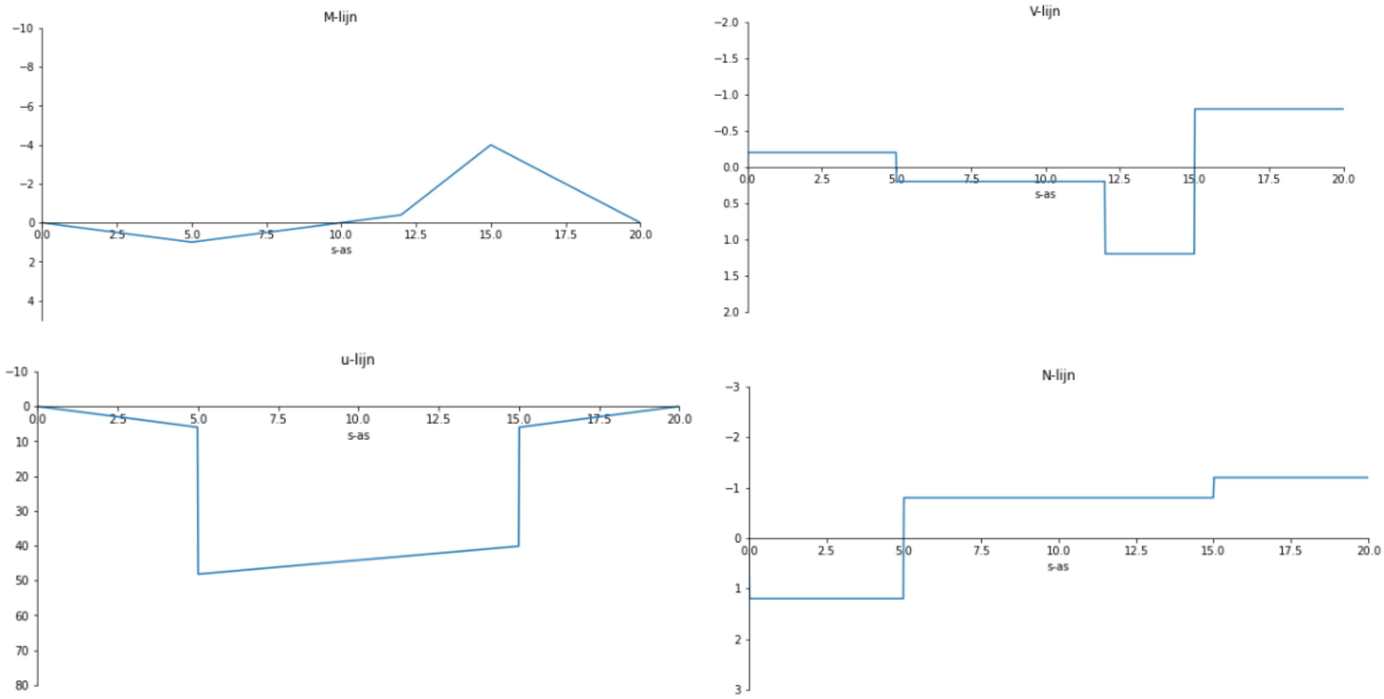
$$N(5^+,a) = \cos(270°)N(5^-,a) - \sin(270°)V(5^-,a)$$
$$V(5^+,a) = \sin(270°)N(5^-,a) + \cos(270°)V(5^-,a)$$
$$N(15^+,a) = \cos(270°)N(15^-,a) - \sin(270°)V(15^-,a)$$
$$V(15^+,a) = \sin(270°)N(15^-,a) + \cos(270°)V(15^-,a)$$

$$u(5^+,a) = \cos(270°)u(5^-,a) - \sin(270°)w(5^-,a)$$
$$w(5^+,a) = \sin(270°)u(5^-,a) + \cos(270°)w(5^-,a)$$
$$u(15^+,a) = \cos(270°)u(15^-,a) - \sin(270°)w(15^-,a)$$
$$w(15^+,a) = \sin(270°)u(15^-,a) + \cos(270°)w(15^-,a)$$

Met alle onbekenden opgelost, volgen de volgende interne krachtslijnen voor a = 12:

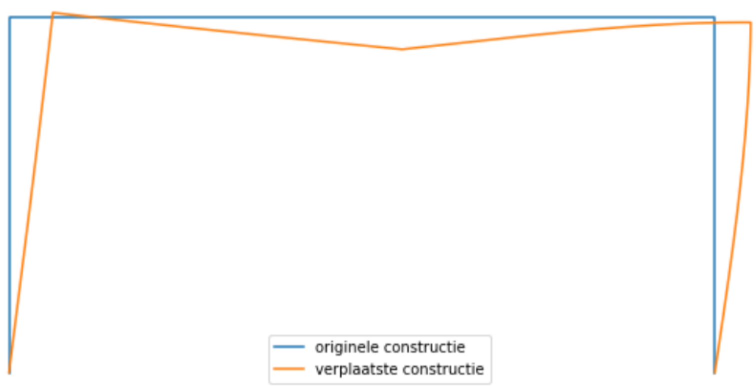




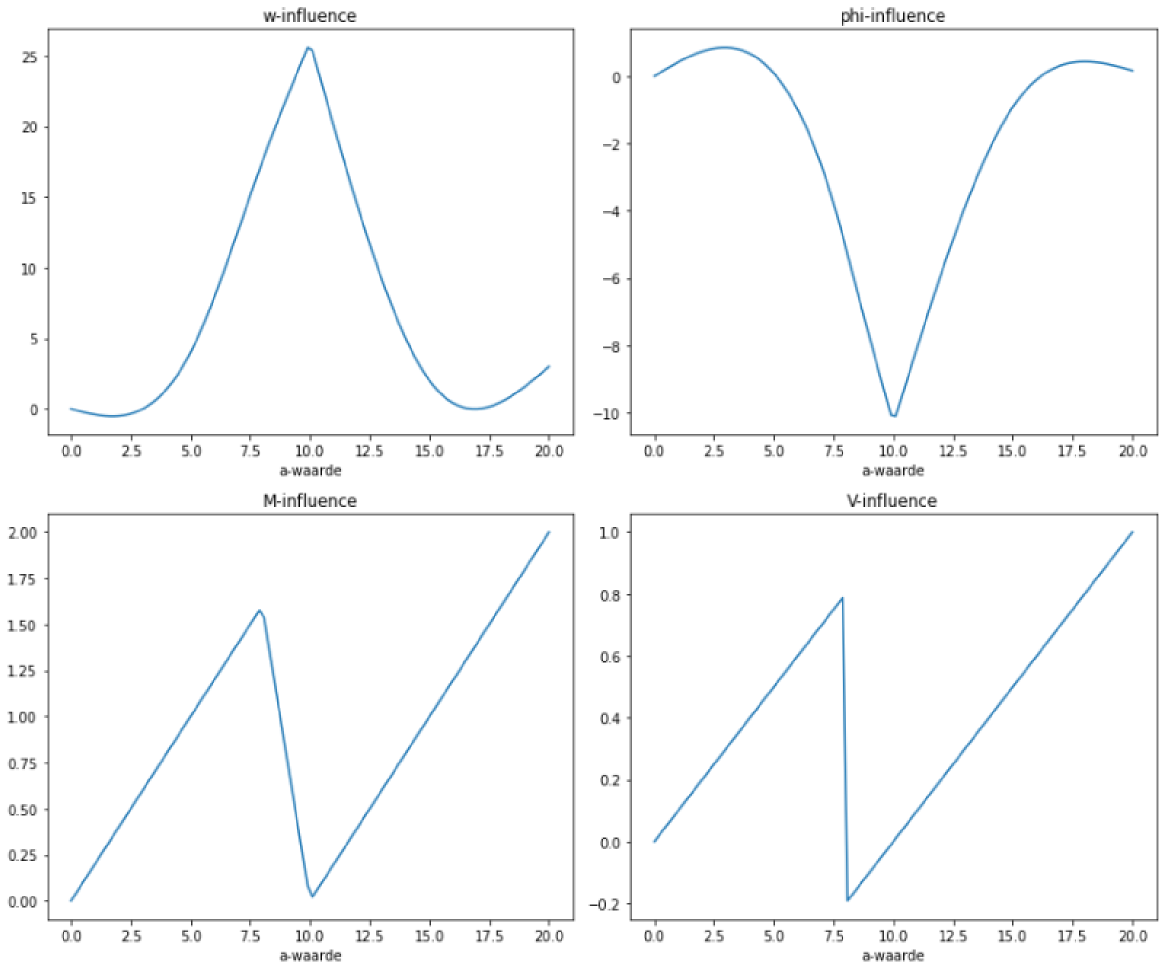

*Figuur 49: Interne krachtslijnen voor a = 12*

De tweedimensionale weergave van de verplaatste constructie is hieronder weergegeven. Ook hierbij geldt dat de puntlast aangrijpt op a = 12:



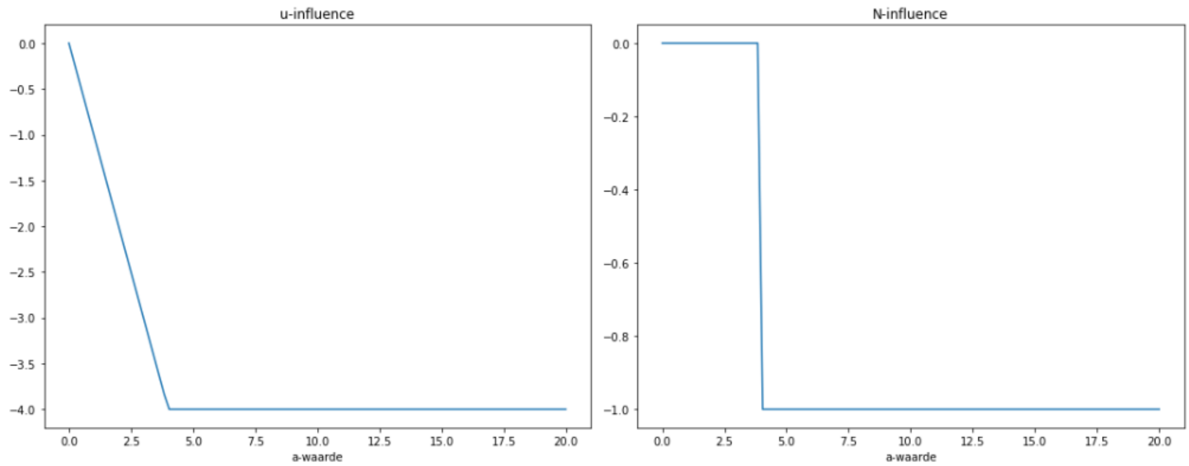

*Figuur 50: Verplaatste constructie voor a = 12*

De invloedslijnen voor s = 8 zien er al volgt uit:



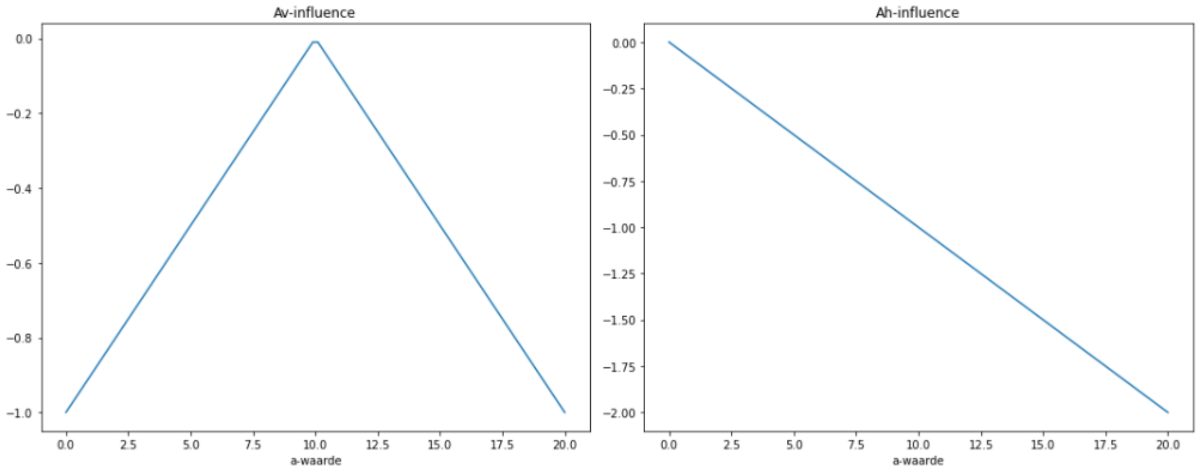

*Figuur 51: Invloedslijnen voor s = 8*

De invloedslijnen voor u en N voor s = 4 zijn:




*Figuur 52: Invloedslijnen voor s = 4*

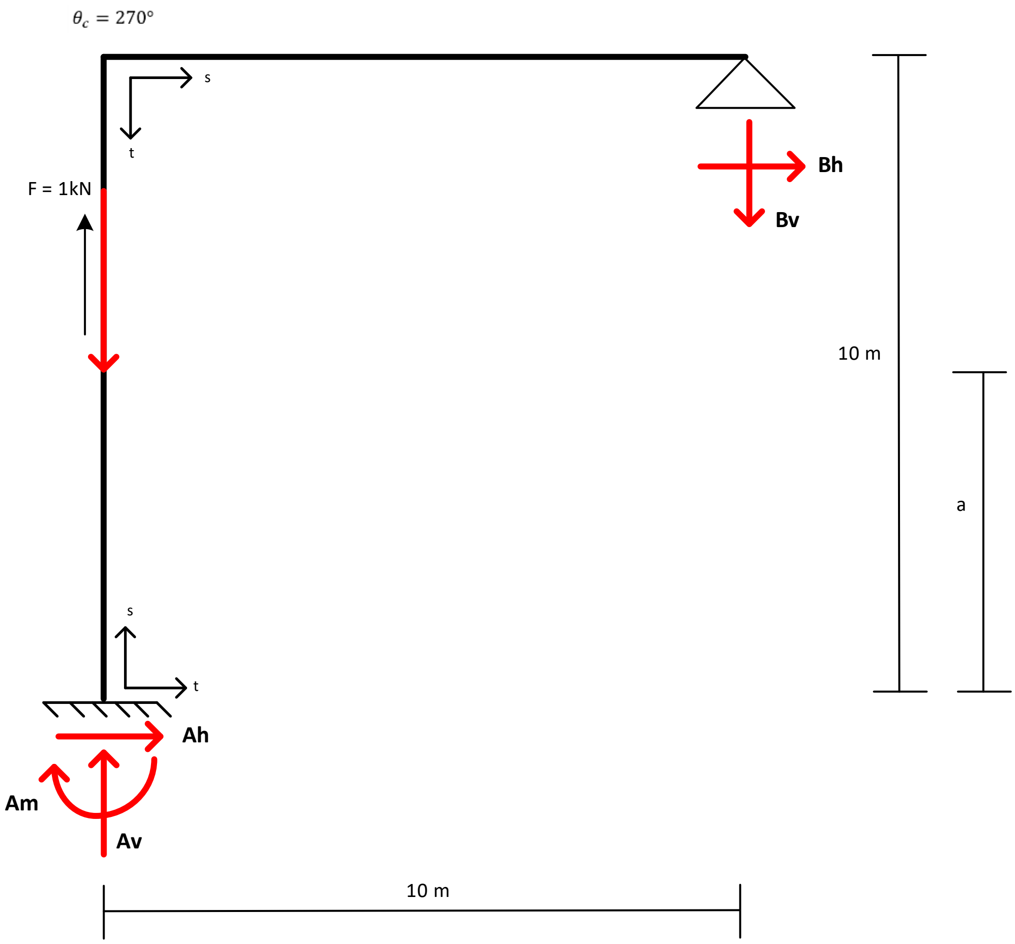
En vervolgens de invloedslijnen voor de oplegreacties in A:




*Figuur 53: Invloedslijnen voor oplegreacties in A*

## Bijlagen 8: Voorbeeld 7

Hieronder is een tweedimensionale constructie geschematiseerd met inklemming en scharnieroplegging.




*Figuur 54: Tweedimensionale statisch onbepaalde constructie*

De constructie die hierboven is weergegeven, is een tweevoudig statisch onbepaalde constructie. De oplegreacties zowel bij de inklemming als bij de roloplegging zijn in positieve richting aangenomen. De verplaatsende puntlast is ook positief aangenomen. De krachtsverdelingen in t en s richting zijn als volgt:

$q_t(s,a) = Am\langle s\rangle^{-2} + Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Cv\langle s-10\rangle^{-1} + w_C\langle s-10\rangle^{-4} + Bv\langle s-20\rangle^{-1}$

$q_s(s,a) = Ah\langle s\rangle^{-1} + Ch\langle s-10\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + u_C\langle s-10\rangle^{-2} + Bh\langle s-20\rangle^{-1}$

Vervolgens wordt de krachtsverdeling geïntegreerd wat de volgende vergelijkingen geeft voor de doorbuiging en axiale verplaatsing (gehele integratie staat in bijlagen 8):

$\boldsymbol{EIw(s,a)} = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{2}Am\langle s\rangle^2 + \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^3 + \frac{1}{6}Cv\langle s-10\rangle^3 + w_C\langle s-10\rangle^0 + \frac{1}{6}Bv\langle s-20\rangle^3 - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$

$\boldsymbol{EAu(s,a)} = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^1 - Ch\langle s-10\rangle^1 - u_C\langle s-10\rangle^0 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^0 - Bh\langle s-20\rangle^1 + C_N s + C_u$

Deze vergelijkingen hebben 15 onbekenden in totaal. Deze zijn opgelost aan de hand van de volgende randvoorwaarden die voor deze constructie gelden:

$w(0,a) = 0; \quad \varphi(0,a) = 0; \quad u(0,a) = 0; \quad M(20,a) = 0; \quad w(20,a) = 0; \quad u(20,a) = 0$

Vervolgens wordt de constructie aan beide kanten doorgetrokken wat de volgende randvoorwaarden opleveren:

$V(0^-,a) = 0; \quad N(0^-,a) = 0; \quad M(0^-,a) = 0; \quad V(20^+,a) = 0; \quad N(20^+,a) = 0$

De laatste 4 onbekenden worden opgelost aan de hand van de goniometrische vergelijkingen die volgen uit de hoek C. De volgende vergelijkingen worden verkregen uit de relatie van de dwarskracht en de normaalkracht:

$N(10^+,a) = \cos(270°)N(10^-,a) - \sin(270°)V(10^-,a)$

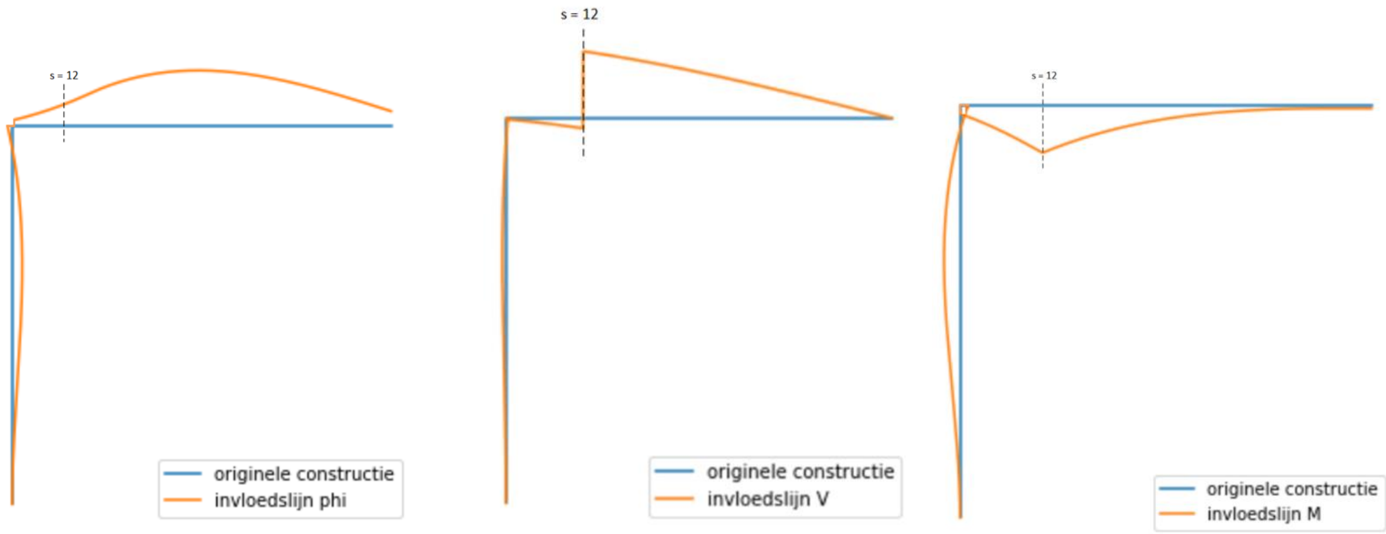
$V(10^+,a) = \sin(270°)N(10^-,a) + \cos(270°)V(10^-,a)$

Vervolgens worden de laatste randvoorwaarden bepaald uit de relatie tussen de axiale verplaatsing en doorbuiging bij hoek C:

$u(10^+,a) = \cos(270°)u(10^-,a) - \sin(270°)w(10^-,a)$

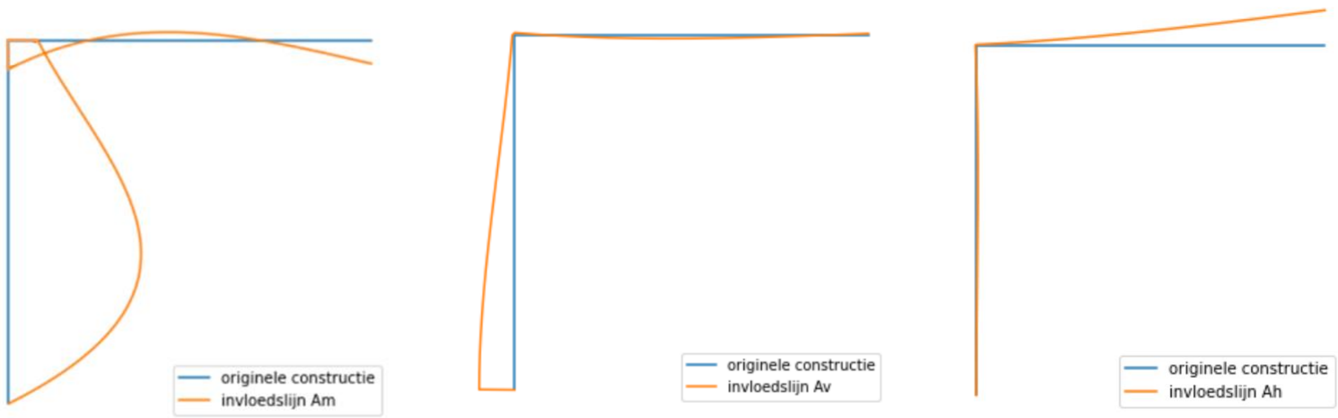
$w(10^+,a) = \sin(270°)u(10^-,a) + \cos(270°)w(10^-,a)$

Met deze 15 vergelijkingen zijn alle onbekenden opgelost. Met de verkregen vergelijkingen kunnen vervolgens alle interne krachtslijnen (met een bekende a-waarde) en invloedslijnen (met een bekende s-waarde) worden bepaald. In figuur 55 zijn de invloedslijnen gegeven voor de hoekverdraaiing, dwarskracht en moment voor s = 12.




*Figuur 55: Invloedslijnen phi, M en V voor s = 12*

Hieronder zijn vervolgens de invloedslijnen weergegeven van de oplegreacties in A.




*Figuur 56: Invloedslijnen Am, Av en Ah*

Bij de invloedslijnen voor de oplegreacties valt op dat er fouten zitten. Een verticale kracht in punt B kan namelijk geen moment toevoegen voor Am. De waardes zijn daarnaast gecheckt in matrixframe en komen niet overeen. Daarmee is ook te concluderen dat de andere invloedslijnen ook nog niet helemaal kloppen. Wel is uit de vorm te zien dat deze wel in de buurt komen van wat verwacht zou worden volgens de methode van Müller-Breslau. Waar de fout in berekening eventueel vandaan zou kunnen komen, is behandeld in de discussie.

Hieronder is de volledige berekening te vinden:

De krachtsverdeling in t richting:

$$q_t(s,a) = Am\langle s\rangle^{-2} + Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Cv\langle s-10\rangle^{-1} + w_C\langle s-10\rangle^{-4} + Bv\langle s-20\rangle^{-1}$$

Integreren naar s geeft de volgende vergelijkingen:

$$V(s,a) = \int q_t(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{-1} - Av\langle s\rangle^{0} - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - Cv\langle s-10\rangle^{0} - w_C\langle s-10\rangle^{-3} - Bv\langle s-20\rangle^{0} + Cv$$
$$V(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cv = 0}$$

$$M(s,a) = \int V(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{0} - Av\langle s\rangle^{1} - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{1} - Cv\langle s-10\rangle^{1} - w_C\langle s-10\rangle^{-2} - Bv\langle s-20\rangle^{1} + Cvs + Cm$$
$$M(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cm = 0}$$

$$EI\varphi(s,a) = \int M(s,a)ds = -Am\langle s\rangle^{1} - \frac{1}{2}Av\langle s\rangle^{2} - \frac{1}{2}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{2} - \frac{1}{2}Cv\langle s-10\rangle^{2} - w_C\langle s-10\rangle^{-1} - \frac{1}{2}Bv\langle s-20\rangle^{2} + \frac{1}{2}Cvs^2 + Cms + C\varphi$$
$$\varphi(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C\varphi = 0}$$

$$EIw(s,a) = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{2}Am\langle s\rangle^{2} + \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^{3} + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{3} + \frac{1}{6}Cv\langle s-10\rangle^{3} + w_C\langle s-10\rangle^{0} + \frac{1}{6}Bv\langle s-20\rangle^{3} - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$$
$$w(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{Cw = 0}$$

De krachtsverdeling in s richting:

$$q_s(s,a) = Ah\langle s\rangle^{-1} + Ch\langle s-10\rangle^{-1} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + u_C\langle s-10\rangle^{-2} + Bh\langle s-20\rangle^{-1}$$

Integreren naar s geeft de volgende vergelijkingen:

$$N(s,a) = \int q_s(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^{0} - Ch\langle s-10\rangle^{0} + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{0} - u_C\langle s-10\rangle^{-1} - Bh\langle s-20\rangle^{0} + C_N$$
$$N(0^-,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_N = 0}$$

$$EAu(s,a) = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^{1} - Ch\langle s-10\rangle^{1} + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{1} - u_C\langle s-10\rangle^{0} - Bh\langle s-20\rangle^{1} + C_N s + C_u$$
$$u(0,a) = 0 \rightarrow \boldsymbol{C_u = 0}$$

In deze formules wordt alpha als volgt omschreven:

$$\alpha(s) = 90\langle s\rangle^{0} - 90\langle s-10\rangle^{0} + 0\langle s-10\rangle^{0} - 0\langle s-10\rangle^{0}$$

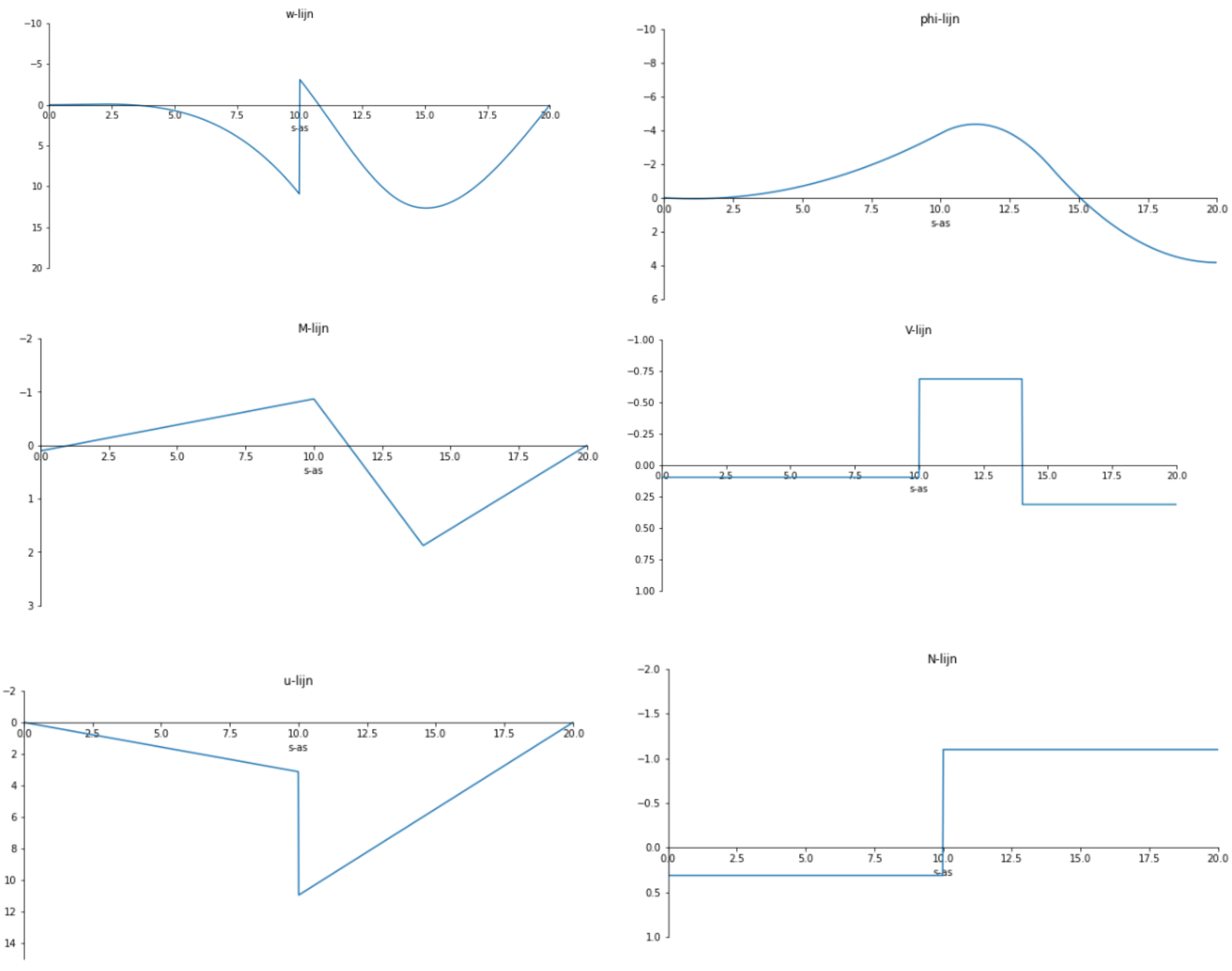
De laatste 9 onbekenden worden opgelost aan de hand van de randvoorwaarden vergelijkingen en vergelijkingen hieronder. De volledige uitwerking van deze vergelijkingen en onbekenden is terug te vinden in het python bestand in de literatuurlijst.

$$M(20,a) = 0; \quad w(20,a) = 0; \quad u(20,a) = 0$$
$$V(20^+,a) = 0; \quad N(20^+,a) = 0$$

$$N(10^+, a) = \cos(270°)N(10^-, a) - \sin(270°)V(10^-, a)$$
$$V(10^+, a) = \sin(270°)N(10^-, a) + \cos(270°)V(10^-, a)$$

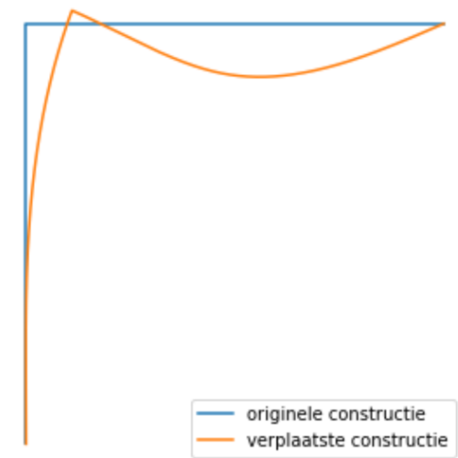
$$u(10^+, a) = \cos(270°)u(10^-, a) - \sin(270°)w(10^-, a)$$
$$w(10^+, a) = \sin(270°)u(10^-, a) + \cos(270°)w(10^-, a)$$

Met alle 15 onbekenden opgelost, worden de volgende interne krachtslijnen verkregen voor a = 14:



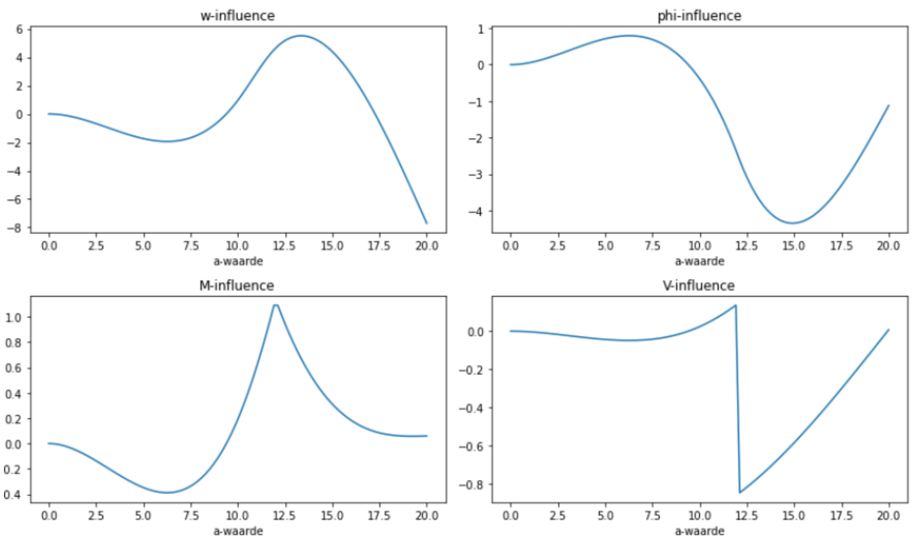

*Figuur 57: Interne krachtslijnen voor a = 14*

De tweedimensionale weergave van de verplaatste constructie voor a =14 ziet er als volgt uit:



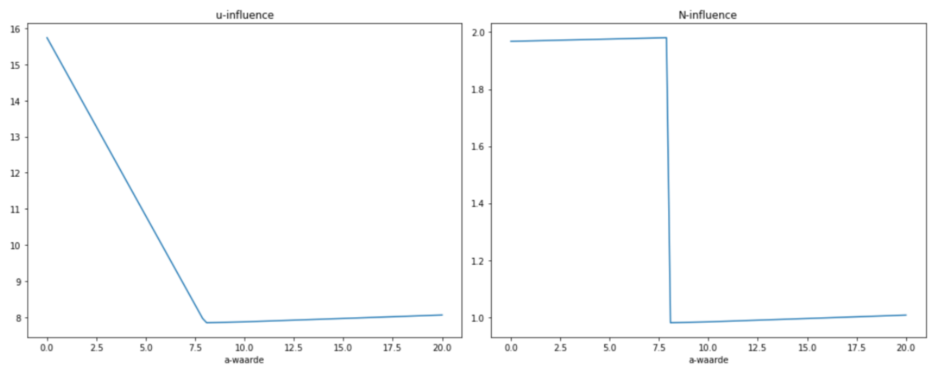

*Figuur 58: Verplaatste constructie voor a = 14*

De invoedslijnen voor s = 12:



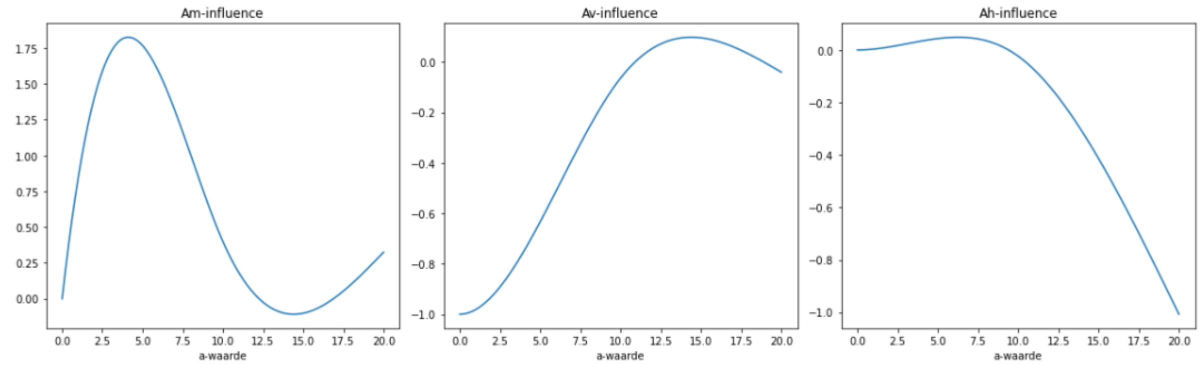

*Figuur 59: Invloedslijnen voor s = 12*

De invloedslijnen voor s = 8 voor u en N:




*Figuur 60: Invloedslijnen voor s = 8*

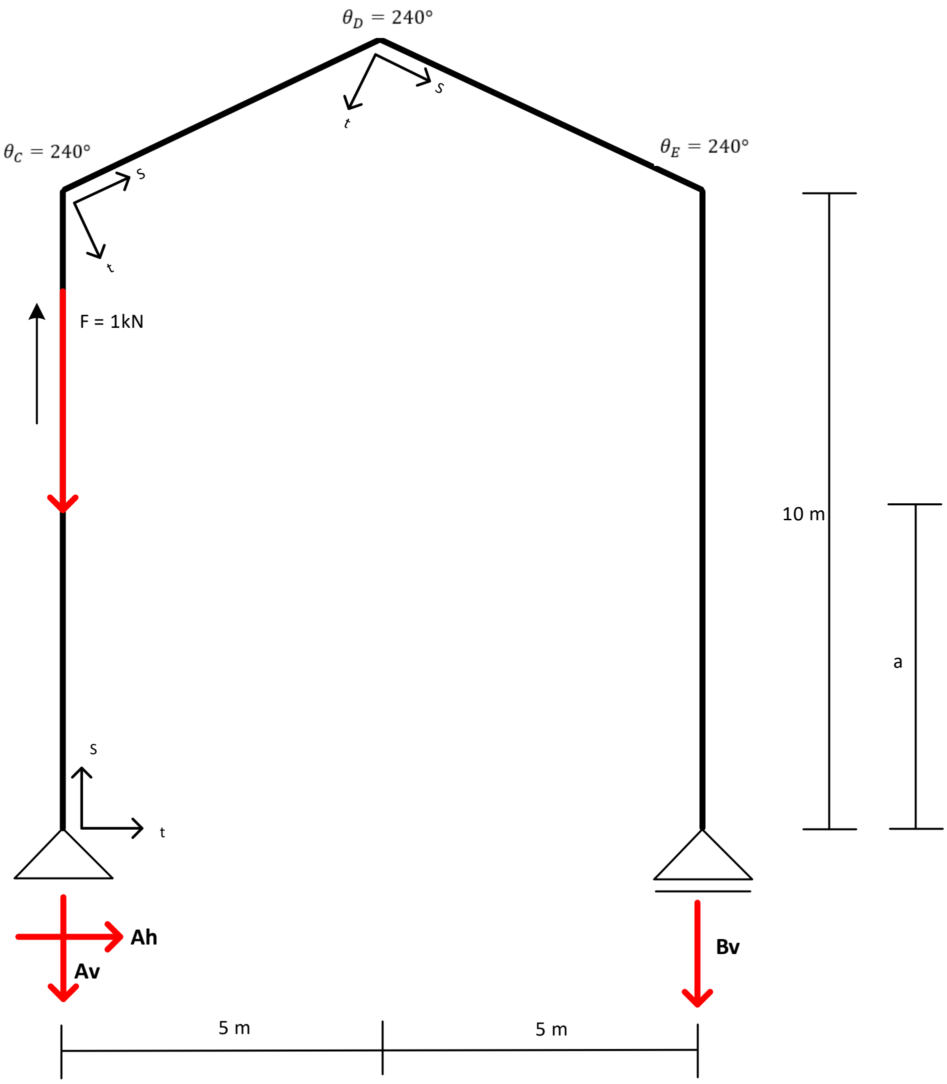
En vervolgens zien de invloedslijnen van de oplegreacties in A er als volgt uit:




*Figuur 61: Invloedslijnen van oplegreacties in A*

## Bijlagen 9: Voorbeeld 8

Dit voorbeeld is nog niet geheel opgelost en wordt daarom in deze bijlagen toegelicht. De constructie is een driescharnier spant met een starre verbinding. De constructie met krachtsverdeling is weergegeven in de figuur hieronder.




*Figuur 62: Driescharnierspant met starre verbinding*

De twee schuine afstanden worden in de volgende vergelijkingen weergegeven als ‘b’. b heeft hierbij een grootte van $5/\cos(30)$.

De krachtsverdeling in t richting:

$$q_t(s,a) = Av\langle s\rangle^{-1} + 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Cv\langle s-10\rangle^{-1} + w_C\langle s-10\rangle^{-4} + Dv\langle s-(10+b)\rangle^{-1} + w_D\langle s-(10+b)\rangle^{-4} + Ev\langle s-(10+2b)\rangle^{-1} + w_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-4} + Bv\langle s-(20+2b)\rangle^{-1}$$

Integreren naar s geven de volgende vergelijkingen:

$V(s,a) = \int q_t(s,a)ds = -Av\langle s\rangle^0 - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^0 - Cv\langle s-10\rangle^0 - w_C\langle s-10\rangle^{-3} -$
$Dv\langle s-(10+b)\rangle^0 - w_D\langle s-(10+b)\rangle^{-3} - Ev\langle s-(10+2b)\rangle^0 - w_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-3} -$
$Bv\langle s-(20+2b)\rangle^0 + Cv$

$M(s,a) = \int V(s,a)ds = -Av\langle s\rangle^1 - 1\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^1 - Cv\langle s-10\rangle^1 - w_C\langle s-10\rangle^{-2} -$
$Dv\langle s-(10+b)\rangle^1 - w_D\langle s-(10+b)\rangle^{-2} - Ev\langle s-(10+2b)\rangle^1 - w_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-2} -$
$Bv\langle s-(20+2b)\rangle^1 + Cvs + Cm$

$EI\varphi(s,a) = \int M(s,a)ds = -\frac{1}{2}Av\langle s\rangle^2 - \frac{1}{2}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^2 - \frac{1}{2}Cv\langle s-10\rangle^2 - w_C\langle s-10\rangle^{-1} -$
$\frac{1}{2}Dv\langle s-(10+b)\rangle^2 - w_D\langle s-(10+b)\rangle^{-1} - \frac{1}{2}Ev\langle s-(10+2b)\rangle^2 - w_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-1} -$
$\frac{1}{2}Bv\langle s-(20+2b)\rangle^2 + \frac{1}{2}Cvs^2 + Cms + C\varphi$

$EIw(s,a) = EI\int \varphi(s,a)ds = \frac{1}{6}Av\langle s\rangle^3 + \frac{1}{6}\cos(\alpha)\langle s-a\rangle^3 + \frac{1}{6}Cv\langle s-10\rangle^3 + w_C\langle s-10\rangle^0 +$
$\frac{1}{6}Dv\langle s-(10+b)\rangle^3 + w_D\langle s-(10+b)\rangle^0 + \frac{1}{6}Ev\langle s-(10+2b)\rangle^3 + w_E\langle s-(10+2b)\rangle^0 +$
$\frac{1}{6}Bv\langle s-(20+2b)\rangle^3 - \frac{1}{6}Cvs^3 - \frac{1}{2}Cms^2 - C\varphi s + Cw$

De krachtsverdeling in s richting:

$q_s(s,a) = Ah\langle s\rangle^{-1} + Ch\langle s-10\rangle^{-1} + u_C\langle s-10\rangle^{-2} - 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^{-1} + Dh\langle s-(10+b)\rangle^{-1} +$
$u_D\langle s-(10+b)\rangle^{-2} + Eh\langle s-(10+2b)\rangle^{-1} + u_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-2}$

Integreren naar s geeft:

$N(s,a) = \int q_s(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^0 - Ch\langle s-10\rangle^0 - u_C\langle s-10\rangle^{-1} + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^0 -$
$Dh\langle s-(10+b)\rangle^0 - u_D\langle s-(10+b)\rangle^{-1} - Eh\langle s-(10+2b)\rangle^0 - u_E\langle s-(10+2b)\rangle^{-1} + C_N$

$EAu(s,a) = \int N(s,a)ds = -Ah\langle s\rangle^1 - Ch\langle s-10\rangle^1 - u_C\langle s-10\rangle^0 + 1\sin(\alpha)\langle s-a\rangle^1 -$
$Dh\langle s-(10+b)\rangle^1 - u_D\langle s-(10+b)\rangle^0 - Eh\langle s-(10+2b)\rangle^1 - u_E\langle s-(10+2b)\rangle^0 + C_Ns + C_u$

Alpha wordt over deze constructie als volgt omschreven:
$\alpha(s) = 90\langle s\rangle^0 - 90\langle s-10\rangle^0 + 30\langle s-10\rangle^0 - 30\langle s-(10+b)\rangle^0 + 150\langle s-(10+b)\rangle^0 -$
$150\langle s-(10+2b)\rangle^0 + 90\langle s-(10+2b)\rangle^0 - 90\langle s-(20+2b)\rangle^0$

Uit de vergelijkingen komen 21 onbekenden die op te lossen zijn aan de hand van de volgende randvoorwaarden:
$M(0,a) = 0;\quad w(0,a) = 0;\quad u(0,a) = 0;\quad M((20+b),a) = 0;\quad w((20+2b),a) = 0$

Vervolgens wordt de constructie aan beide kanten doorgetrokken wat de volgende randvoorwaarden opleveren:
$V(0^-,a) = 0;\quad N(0^-,a) = 0;\quad V((20+b)^+,a) = 0;\quad N((20+2b)^+,a) = 0$

Om vervolgens de laatste 12 onbekenden op te lossen, wordt er gebruik gemaakt van de randvoorwaarden die te halen zijn uit de drie hoeken C, D en E. De randvoorwaarden voor de relatie tussen dwarskracht en normaalkracht luiden:
$N(10^+,a) = \cos(240°)N(10^-,a) - \sin(240°)V(10^-,a)$
$V(10^+,a) = \sin(240°)N(10^-,a) + \cos(240°)V(10^-,a)$
$N((10+b)^+,a) = \cos(240°)N((10+b)^-,a) - \sin(240°)V((10+b)^-,a)$
$V((10+b)^+,a) = \sin(240°)N((10+b)^-,a) + \cos(240°)V((10+b)^-,a)$

$N((10+2b)^{+},a) = \cos(240°)N((10+2b)^{-},a) - \sin(240°)V((10+2b)^{-},a)$
$V((10+2b)^{+},a) = \sin(240°)N((10+2b)^{-},a) + \cos(240°)V((10+2b)^{-},a)$

Vervolgens worden de laatste randvoorwaarden bepaald uit de relatie tussen de axiale verplaatsing (u) en doorbuiging (w) tussen de hoeken:
$u(10^{+},a) = \cos(240°)u(10^{-},a) - \sin(240°)w(10^{-},a)$
$w(10^{+},a) = \sin(240°)u(10^{-},a) + \cos(240°)w(10^{-},a)$
$u((10+b)^{+},a) = \cos(240°)u((10+b)^{-},a) - \sin(240°)w((10+b)^{-},a)$
$w((10+b)^{+},a) = \sin(240°)u((10+b)^{-},a) + \cos(240°)w((10+b)^{-},a)$
$u((10+2b)^{+},a) = \cos(240°)u((10+2b)^{-},a) - \sin(240°)w((10+2b)^{-},a)$
$w((10+2b)^{+},a) = \sin(240°)u((10+2b)^{-},a) + \cos(240°)w((10+2b)^{-},a)$

Met de verkregen 21 vergelijkingen zijn de 21 onbekenden opgelost. Deze vergelijkingen en oplossingen zijn te vinden in het python bestand uit de literatuurlijst. Echter kloppen deze vergelijkingen nog niet helemaal.