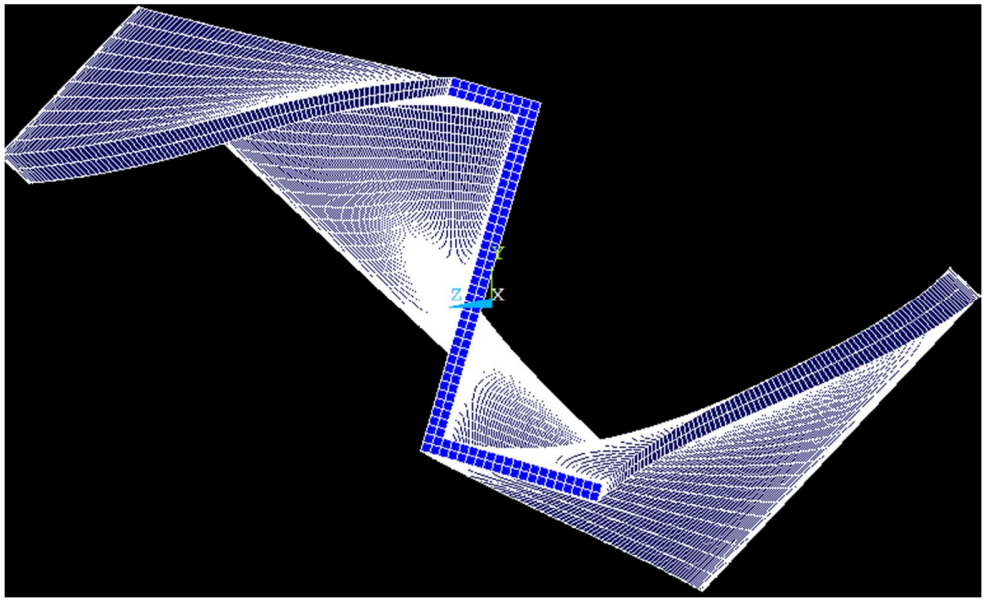
Bachelor Eindwerk

De stijfheidsmatrix van een volledig asymmetrisch profiel



Naam:	Matti Kabos
Studienummer:	1512803
Begeleiders:	Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
	Ir. P.A. de Vries

Plaats:	Delft,
Datum:	juni 2011

TU Delft

Voorwoord

Dit rapport bevat de resultaten van een onderzoek naar de stijfheidsmatrix van Z-profielen. Het onderzoek is een bachelor eindwerk voor de studie Civiele Techniek aan de TU Delft. Het onderzoek is uitgevoerd in het vierde kwartaal van het collegejaar 2010-2011. In deze periode ben ik bij mijn onderzoek begeleid door de docenten Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom en Ir. P.A. de Vries. Graag wil ik de beide heren bedanken voor hun hulp bij het bachelor eindwerk.

Delft, juni 2011

Matti Kabos

Samenvatting

Het doel van dit onderzoek is het controleren van de op analytische wijze verkregen stijfheidsmatrix van een ligger. Het is onzeker of deze matrix voldoende nauwkeurig is voor asymmetrische profielen. Daarom wordt in dit onderzoek een Z-profiel gemodelleerd met volume elementen in het programma ANSYS. Hiermee wordt een numerieke stijfheidsmatrix van het Z-profiel bepaald. Vervolgens kan deze matrix gebruikt worden om de analytische stijfheidsmatrix te controleren.

Voor het onderzoek is gekozen voor een volledig asymmetrisch Z-profiel met verschillende flenslengtes en een dikte van 10 millimeter. De doorsnede eigenschappen van dit profiel zijn parametrisch bepaald met het software pakket Maple, om eenvoudig de analytische stijfheidsmatrix van liggers van verschillende lengte of dikte te genereren. In ANSYS wordt de ligger gemodelleerd als een volume met rechthoekige elementen met 8 knopen. Om de numerieke matrix van de ligger te genereren wordt aan een uiteinde van de ligger een eenheidsverplaatsing of rotatie opgelegd met behulp van een script. Vervolgens worden de krachten en momenten aan de uiteinden van de ligger bepaald door de waarden van alle knopen in de doorsnede te sommeren. Deze waarden leveren zo telkens een kolom van de numerieke stijfheidsmatrix. Deze matrix wordt vervolgens vergeleken met de analytische matrix. Dit proces is herhaald voor liggers met verschillende lengtes, diktes en elementgrootten. Daarnaast is het effect van welving en afschuifvervorming op de nauwkeurigheid van het model onderzocht.

In het algemeen blijkt dat de analytische stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming blijkt zeer goed toepasbaar is op een Z-profiel. Vanaf liggerlengtes groter dan circa 10 meter levert een numeriek model van de ligger in ANSYS een stijfheidsmatrix die nergens meer dan 1% afwijkt van de analytische stijfheidsmatrix. Verdere vergroting van de liggerlengte geeft vrijwel geen verandering in de nauwkeurigheid van het model. Ook het verkleinen van de dikte van het profiel tot 2 millimeter heeft weinig invloed op de nauwkeurigheid.
Het numerieke model heeft een grotere wringstijfheid dan het analytische model doordat welving hier is verhindert. Afwijkingen in wringstijfheid kunnen tot minder dan 1% worden teruggebracht door de wringstijfheid te vermenigvuldigen met een vergrotingsfactor, die de invloedslengte van verhinderde welving in rekening brengt.
Door afschuifvervorming mee te nemen in de analytische matrix wordt een korte ligger nauwkeuriger gemodelleerd. Voor een ligger vanaf 5 meter lengte levert toepassing van de matrix met afschuifvervorming echter geen verbetering voor het model.

Inhoudsopgave

Voorwoord....3
Samenvatting....4
Inhoudsopgave....5
1. Inleiding....6
2. Theorie over de stijfheidsmatrix van een ligger....7
3. Doorsnede eigenschappen van het Z-profiel....8
4. Methode voor het bouwen van het numerieke model....12
5. Uitwerking....22
5.1. Wringstijfheid en welving....23
5.2. Lengte van de ligger....29
5.3. Afschuifvervorming....34
5.4. Dikte van het profiel....40
6. Voorbeeld: toepassing vergrotingsfactor voor wringstijfheid....44
7. Conclusies....47
8. Aanbevelingen....48
Bronnen....49
Bijlage 1: Maple sheet doorsnede eigenschappen....51
Bijlage 2: Script invoer geometrie ligger....60
Bijlage 3: Macro voor het opleggen van een verplaatsing of rotatie....61
Bijlage 4: Macro voor het aflezen van de snedekrachten....62
Bijlage 5: Zelfevaluatie....63

1. Inleiding

Het doel van dit onderzoek is het bouwen van een zo nauwkeurig mogelijk numeriek model van ligger met een Z-vormige doorsnede, om te kunnen beoordelen of de analytische stijfheidsmatrix (verkregen via differentiaal vergelijking) te gebruiken is voor een ligger met een volledig asymmetrische doorsnede.

De stijfheidsmatrix van een ligger geeft het verband tussen de vervormingen en de krachten in de ligger. Met behulp van de doorsnede eigenschappen van de ligger kan deze matrix worden bepaald op analytische wijze. Voor symmetrische profielen wordt deze wijze van berekenen betrouwbaar geacht, maar voor liggers met een asymmetrische doorsnede is de nauwkeurigheid van de analytische stijfheidsmatrix onzeker. In eerdere bachelor eindwerken[1] werd deze nauwkeurigheid onderzocht door een U-profiel of een T-profiel te modelleren met het programma ANSYS. Voor dit onderzoek is er gekozen om een Z-profiel met verschillende flenslengtes te gebruiken, zodat er geen enkele vorm van symmetrie meer in de doorsnede zit. In dit onderzoek wordt de analytische stijfheidsmatrix van een voldoende lange ligger volledig betrouwbaar geacht als de verschillen met de numerieke stijfheidsmatrix voor alle termen kleiner zijn dan 1%.

De opbouw van het rapport is als volgt. In hoofdstuk 2 zal de theorie voor de analytische stijfheidsmatrix worden besproken. Vervolgens worden in hoofdstuk 3 de eigenschappen van het Z-profiel besproken. Daarna volgt in hoofdstuk 4 de methode voor bouwen van een numeriek model en in hoofdstuk 5 de uitwerking van het onderzoek. In hoofdstuk 6 volgt een voorbeeld ter illustratie van de gevonden resultaten. Ten slotte bevatten hoofdstuk 7 en 8 de conclusies en aanbevelingen van het onderzoek.

[1] Noort, J.R. van (2009), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft
Bron, V. (2010), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft

2. Theorie over de stijfheidsmatrix van een ligger

Voor een driedimensionale ligger met uiteinden 1 en 2 bestaat de stijfheidsmatrix uit 12x12 elementen. Dit komt doordat ieder uiteinde 6 vrijheidsgraden (3 verplaatsingen en 3 rotaties) en ook 6 krachten (normaalkracht, dwarskracht in 2 richtingen, moment in 3 richtingen) heeft. Met behulp van de constitutieve, statische en kinematische betrekkingen kan met differentiaalvergelijkingen ieder element van deze stijfheidsmatrix worden bepaald. Het zo verkregen model voldoet aan de wet van Hooke ($\sigma = \varepsilon * E$) en het principe van Bernoulli (vlakke doorsneden blijven vlak), wat dus ook moet gelden voor het numerieke model. Als de ligger wordt gemodelleerd zonder afschuifvervorming (omdat de ligger zodanig lang is, dat de invloed hiervan zeer klein is), ziet de stijfheidsmatrix er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix} Fx1 \\ Fy1 \\ Fz1 \\ Mx1 \\ My1 \\ Mz1 \\ Fx2 \\ Fy2 \\ Fz2 \\ Mx2 \\ My2 \\ Mz2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & \frac{GI_w}{L}+\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}+\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{12e_zEI_z}{L^3} & -\frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{GI_w}{L}-\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}-\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & \frac{6e_yEI_y}{L^2} & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & \frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{12e_yEI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & \frac{12e_zEI_z}{L^3} & -\frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{GI_w}{L}-\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}-\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & \frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & \frac{GI_w}{L}+\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}+\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{6e_zEI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ux1 \\ uy1 \\ uz1 \\ \varphi x1 \\ \varphi y1 \\ \varphi z1 \\ ux2 \\ uy2 \\ uz2 \\ \varphi x2 \\ \varphi y2 \\ \varphi z2 \end{pmatrix}$$

Figuur 1: Stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming[2]

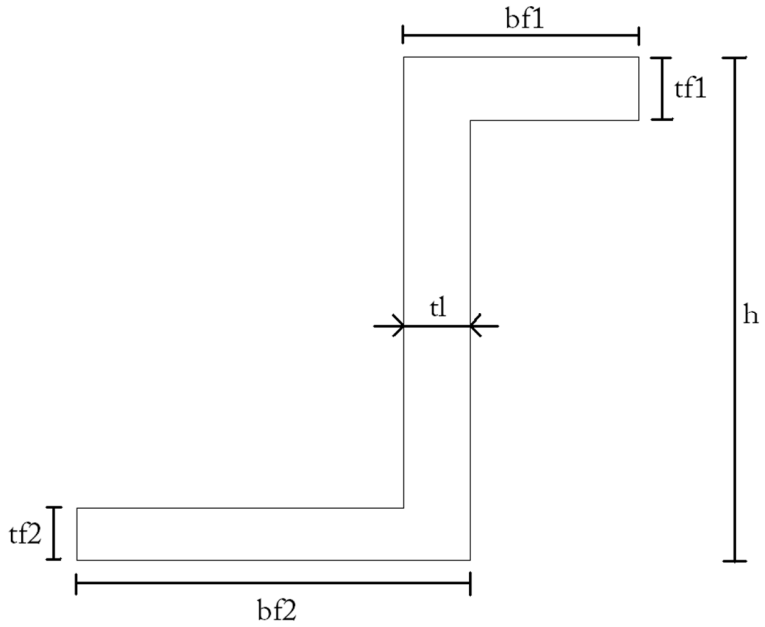
Om de waarden van deze matrix te kunnen berekenen zijn de doorsnede eigenschappen van de ligger nodig. In hoofdstuk 2 zullen de eigenschappen van het gebruikte Z-profiel worden berekend om te kunnen worden ingevuld in deze analytische stijfheidsmatrix. Hierbij wordt er rekening gehouden met het feit dat deze stijfheidsmatrix uitgaat van de traagheidsmomenten in de hoofdrichtingen.
In dit rapport zal verder alleen het kwart links boven van de matrix worden gebruikt, omdat andere delen analoog kunnen worden bepaald uit symmetrie overwegingen. Zo blijft een matrix van hanteerbaar formaat over die sneller kan worden geproduceerd en vergeleken met andere matrices.

[2] Kok, A.W.M. (1991), Numerical Mechanics, The displacement method, Delft: TU Delft, blz. 60

3. Doorsnede eigenschappen van het Z-profiel

Om de mogelijkheid om veranderingen in de maten van het profiel aan te brengen open te laten zullen de doorsnede eigenschappen parametrisch worden bepaald met behulp van het softwarepakket Maple. De volledige worksheet hiervan is te vinden in bijlage 1. Ter verduidelijking van de tekst zullen plaatjes uit deze sheet worden gebruikt.

Het gekozen Z-profiel ziet er als volgt uit:



Figuur 2: Afmetingen van het Z-profiel

Het basismodel heeft de volgende parameters:

h = 200 mm
b_{f1} = 50 mm
b_{f2} = 100 mm
t_{f1} = 10 mm
t_{f2} = 10 mm
t_l = 10 mm
E = 200.000 N/mm^2
ν = 0.27

Later zal de dikte van het profiel worden teruggebracht tot 2 mm om te onderzoeken wat het effect hiervan is op de nauwkeurigheid van het model.

Enkele overwegingen bij de keuze van de maten van het profiel:

- Bij de berekening van het dwarskrachtencentrum van de doorsnede is uitgegaan van een dunwandige doorsnede. Als de diktes van de flenzen en het lijf te groot worden, is de plaats van het dwarskrachtencentrum minder nauwkeurig.
- Ook bij berekening van het wringtraagheidsmoment is uitgegaan van een kleine dikte van het profiel, bij een grote dikte zal de factor 1/3 (voor een strip) uit de berekening moeten worden aangepast.
- Bij zeer geringe dikte van het profiel zullen er in het numerieke model veel elementen nodig zijn in de doorsnede. Aangezien de gebruikte versie van ANSYS een maximum van 3200 elementen kan gebruiken gaat dit ten koste van de lengte van de doorsnede en dus de invloed van afschuifvervorming op de stijfheidsmatrix vergroot.

De ligging van het normaalkrachtencentrum in de doorsnede en de traagheidsmomenten kunnen direct worden berekend. Hieruit volgt ook de richting van de hoofdtraagheidsassen.

$I_{zz} = 1{,}77 * 10^7$ mm^4
$I_{yy} = 2{,}80 * 10^6$ mm^4
$I_{yz} = 4{,}72 * 10^6$ mm^4
$\alpha = 0{,}28$ rad $= 16{,}1°$
$I_1 = 1{,}90 * 10^7$ mm^4
$I_2 = 1{,}44 * 10^6$ mm^4
$I_w = 1{,}10 * 10^5$ mm^4

Voor berekening van de welvingsconstante C_w wordt ShapeDesigner gebruikt. Daarnaast zal ter controle de constante worden uitgerekend met een formule voor Z-profielen met een gelijke flenslengte[3]. Om dit te kunnen doen wordt voor de flensbreedte b een gemiddelde waarde van b_{f1} en b_{f2} gebruikt:

$$C_w = \frac{th^2b^3}{12}\left(\frac{b+2h}{2b+h}\right)$$

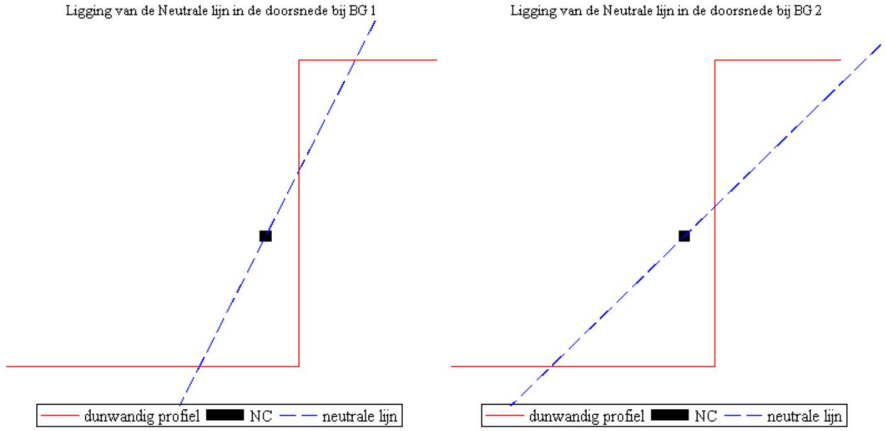
Het gebruik van deze formule levert een twee keer zo grote waarde voor de welvingsconstante als de waarde berekend door ShapeDesigner. Na experimenteren blijkt de waarde uit ShapeDesigner nauwkeurigere resultaten te geven.

[3] Young, W.C. & Budynas, R.G. (2002), Roark's formulas for stress and strain, New York: McGraw-Hill

Voor de ligging van het dwarskrachtencentrum wordt gerekend met 2 verschillende belastingsgevallen:

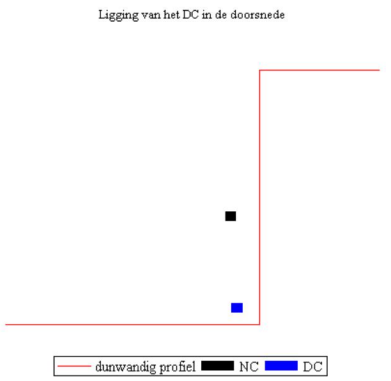
Belastingsgeval 1
M_y = 1 Nmm V_y = 1 kN
M_z = 0 Nmm V_z = 0 kN

Belastingsgeval 2
M_y = 0 Nmm V_y = 0 kN
M_z = 1 Nmm V_z = 1 kN



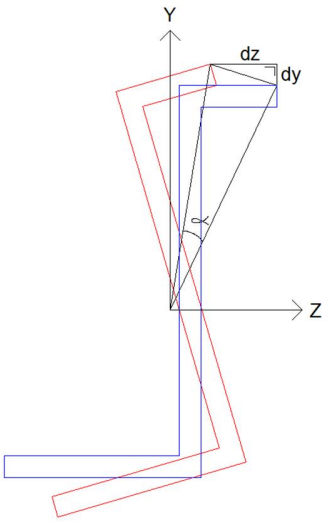
Figuur 3: Ligging van de neutrale lijn bij 2 verschillende belastingsgevallen

Bij deze belastingsgevallen worden de normaalspanningen in de doorsnede berekend. Vervolgens worden de schuifstromen bepaald door de normaalspanningen te integreren en te vermenigvuldigen met de dikte (waarbij wordt uitgegaan van een constante schuifstroom over de dikte). Door gebruik te maken van momentenevenwicht van de resulterende krachten door deze schuifstromen, wordt ten slotte de positie van het dwarskrachtencentrum bepaald. Het DC en NC zijn hieronder afgebeeld, samen met de hartlijnen van het profiel.



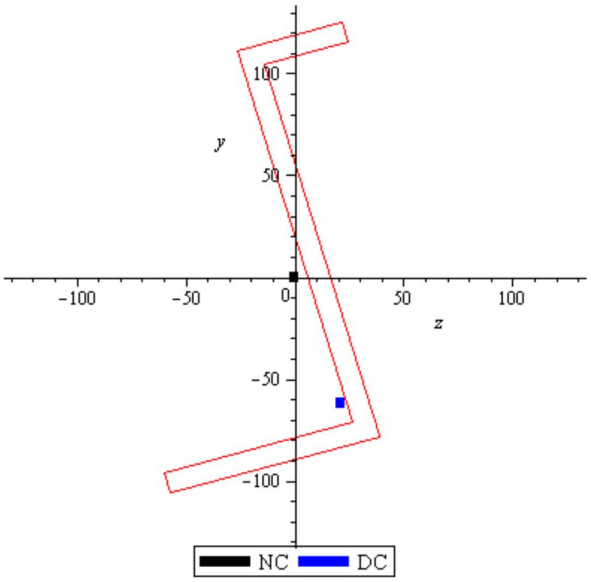
Figuur 4: Weergave van de ligging van het dwarskrachtencentrum

Zoals eerder vermeld maakt de analytische stijfheidsmatrix gebruik van de traagheidsmomenten in hoofdrichtingen. Om deze matrix te kunnen vergelijken met de numerieke matrix wordt het profiel geroteerd. De coördinaten van de hoekpunten van het profiel worden ook met Maple berekend (om in te kunnen voeren in het numerieke model). Hiervoor worden de afstanden dy en dz in figuur 5 op de volgende pagina berekend en bij de coördinaten van het rechte profiel opgeteld.



Figuur 5: Voorbeeld rotatie van het Z-profiel

Als de doorsnede wordt geroteerd zodat de y-as en z-as samenvallen met de hoofdrichtingen, met de oorsprong in het NC, ziet het profiel er als volgt uit:



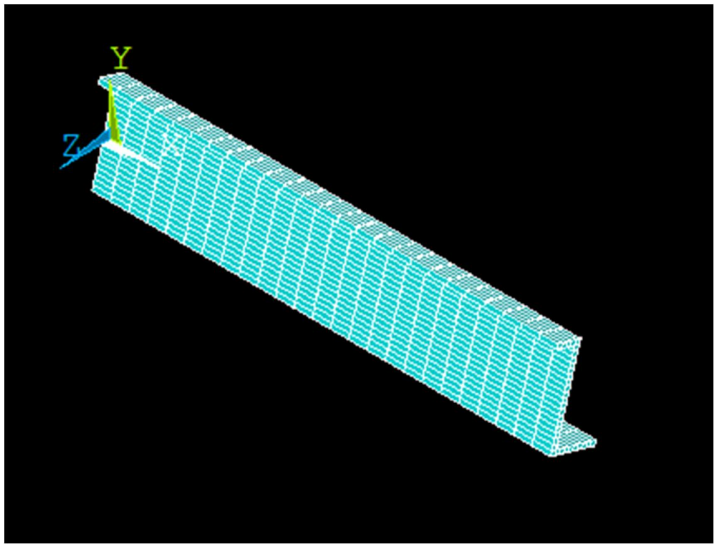
Figuur 6: Z-profiel geroteerd naar hoofdrichtingen

Omdat alle doorsnede eigenschappen nu bekend zijn kan de analytische stijfheidsmatrix van de ligger worden ingevuld. De resultaten hiervan zullen in hoofdstuk 4 en 5 worden gegeven, om ze meteen te kunnen vergelijken met de matrices uit het numerieke model.

4. Methode voor het bouwen van het numerieke model

Assenstelsel

Het assenstelsel in ANSYS verschilt van het gebruikelijke assenstel voor constructiemechanica. De gekozen oorsprong van het assenstelsel ligt in het normaalkrachtencentrum van de doorsnede, aan het linker uiteinde van de ligger. In de gebruikte manier van modelleren loopt de x-as in de lengterichting van de ligger. Zoals eerder te zien was in Maple grafieken is de y-as naar boven gedefinieerd en de z-as naar rechts. Dit geeft wellicht verwarring in de gebruikte symbolen van de worksheet, omdat voor de posities van het NC van de doorsnede nog uit is gegaan van een z-as naar beneden en een y-as naar links. Zo geeft znc de afstand vanaf de bovenkant van de doorsnede tot het NC aan en ync de afstand vanaf de linker zijkant van de doorsnede tot het NC. Grootheden die gebruikt worden om de stijfheidsmatrix in te vullen zullen echter altijd worden omgerekend naar het assenstelsel van het ANSYS model. Dit assenstelsel staat hieronder afgebeeld in figuur 7.



Figuur 7: Assenstelsel in ANSYS

Geometrie

De invoer van de geometrie van een ligger kan in ANSYS met behulp van script worden gedaan. Hiervoor worden de coördinaten van hoekpunten van het geroteerde Z-profiel (berekend met Maple) ingevoerd als knopen. Vervolgens wordt de oppervlakte van de doorsnede gemaakt door de juiste knopen met elkaar te verbinden. Deze doorsnede wordt ten slotte in lengte richting uitgerekt tot een volume. Een voorbeeld van een script voor de invoer van geometrie in ANSYS is te vinden in bijlage 2.

Randvoorwaarden van het model

Om de stijfheidsmatrix van het model in ANSYS te kunnen bepalen zullen verplaatsingen aan de uiteinden van de ligger worden opgelegd. Door een eenheidsverplaatsing of rotatie op te leggen in één van de 12 vrijheidsgraden, kunnen de waarden van 1 kolom van de stijfheidsmatrix worden bepaald. Door de krachten en momenten in de uiteinden van de ligger te bepalen volgen direct de waarden van de stijfheidsmatrix (ze worden immers met 1 vermenigvuldigd), wat het vergelijken met de analytische stijfheidsmatrix mogelijk maakt. Het opleggen van de randvoorwaarden gebeurt met behulp van een macro. Deze macro laat de knopen van de doorsnede selecteren, en legt een verplaatsing in x, y en z richting op. Een voorbeeld van een dergelijke macro is te vinden in bijlage 3. Een overzicht van de randvoorwaarden per kolom van de stijfheidsmatrix volgt in tabel 1.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
ux1	1	0	0	0	z	-y	0	0	0	0	0	0
uy1	0	1	0	-z	0	0	0	0	0	0	0	0
uz1	0	0	1	y	0	0	0	0	0	0	0	0
ux2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	z	-y
uy2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	-z	0	0
uz2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	y	0	0

Tabel 1: Randvoorwaarden per kolom van de stijfheidsmatrix

Zo wordt bijvoorbeeld voor zesde kolom een rotatie van 1 radiaal om de z-as opgelegd, wat resulteert in een vervorming zoals te zien is op de afbeelding hieronder.



Figuur 8: Voorbeeld randvoorwaarde φz=1

Ook voor het aflezen van de krachten in een uiteinde van de ligger wordt een macro gebruikt. Het script van deze macro is te vinden in bijlage 4. Door de krachten in alle elementen van de doorsnede bij elkaar op te tellen worden de krachten en momenten die in de doorsnede werken bepaald.

Vergelijken van de numerieke en analytische stijfheidsmatrix

Om de waarden uit de verkregen numerieke en analytische matrices te kunnen wordt uit het analytische en numerieke model het onderstaande deel van de stijfheidsmatrix bepaald (het kwart links boven).

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & \frac{GI_w}{L}+\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}+\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{pmatrix}$$

Figuur 9: Deel van de stijfheidsmatrix gebruikt voor vergelijken

De verkregen waarden voor kolommen van de numerieke stijfheidsmatrix uit ANSYS en de analytische stijfheidsmatrix uit Maple worden allebei geëxporteerd naar Excel om de resultaten gemakkelijk te vergelijken. Hiervoor wordt een verschilmatrix gedefinieerd die de afwijking in procenten aangeeft:

$$\text{Verschil [\%]} = \frac{\left|\,|\text{Analytische waarde}| - |\text{Numerieke waarde}|\,\right|}{|\text{Analytische waarde}|} * 100\%$$

In het volgende hoofdstuk zullen de resultaten hiervan worden besproken.

Verificatie van het model

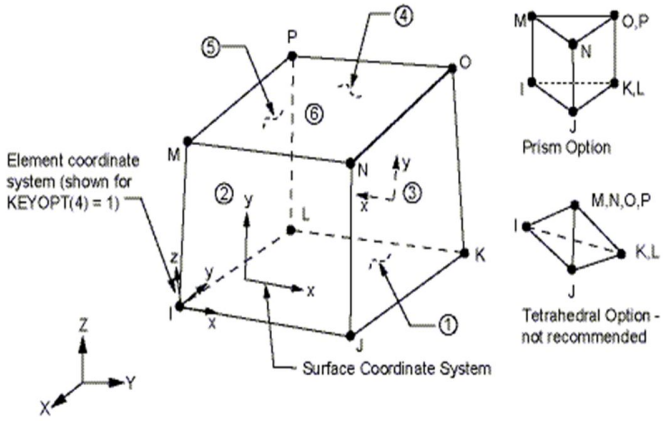
In eerder onderzoek[4] naar de stijfheidsmatrix van asymmetrische profielen is aangetoond dat met de gebruikte manier van modelleren in ANSYS tot nauwkeurige resultaten voor liggers met rechthoekige of T-vormige doorsnede kan leiden. In het bachelor eindwerk van V. Bron is een rechthoekige doorsnede gebruikt om de nauwkeurigheid van het model te toetsen. In dit eindwerk zal dit onderwerp daarom achterwege worden gelaten. Uit het onderzoek is gebleken dat een modelnauwkeurigheid van 1% bij modellering met volume elementen in ANSYS haalbaar is.

[4] Noort, J.R. van (2009), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft
Bron, V. (2010), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft

Modeltype en elementtype

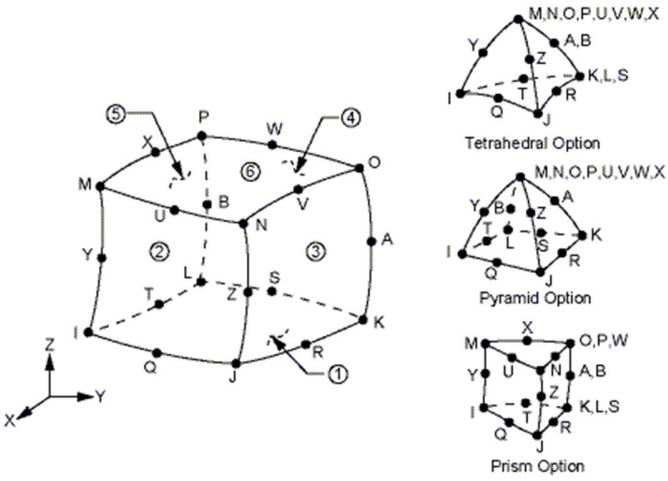
Voor de modellering in ANSYS wordt gebruik gemaakt van een lineair elastisch model. Het volume van de ligger wordt opgedeeld in elementen met knopen. Voor de gebruikte 3D modellering worden elementen met een "brick vorm" gekozen van het type solid45 of solid95. Solid95 is een hogere orde element, met meer knopen. Beide elementen zijn hieronder afgebeeld.

Figure 45.1 SOLID45 Geometry



Figuur 10: Eigenschappen van de Solid45 elementen

Figure 95.1 SOLID95 Geometry



Figuur 11: Eigenschappen van de Solid95 elementen

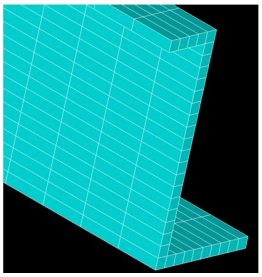
Om te kunnen bepalen of het gebruik van hogere orde (Solid95) elementen nodig is om tot een betrouwbaar numeriek model te komen wordt met beide typen elementen een numerieke stijfheidsmatrix gegenereerd, die vervolgens met de analytische matrix en met elkaar worden vergeleken.

Solid45 elementen

Mesh-elementen: 10x10x40 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,67E+02	0,00E+00	-7,70E+03	0,00E+00	9,17E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,70E+03	-1,70E+03	1,85E+06	4,25E+06	-1,92E+07
My1	0,00E+00	0,00E+00	-6,90E+04	4,25E+06	2,30E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	9,17E+05	0,00E+00	-1,92E+07	0,00E+00	3,06E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	9,25E-07	4,02E-05	-2,14E-04	2,59E+02	-2,75E+02
Vy1	9,25E-07	3,63E+02	-4,82E-02	-7,60E+03	1,20E+02	9,08E+05
Vz1	4,02E-05	-4,82E-02	2,77E+01	-1,70E+03	-6,92E+04	-1,20E+02
Mx1	-2,14E-04	-7,60E+03	-1,70E+03	2,34E+06	4,25E+06	-1,90E+07
My1	2,59E+02	1,20E+02	-6,92E+04	4,25E+06	2,30E+08	3,04E+05
Mz1	-2,75E+02	9,08E+05	-1,20E+02	-1,90E+07	3,04E+05	3,04E+09

Verschil [%]

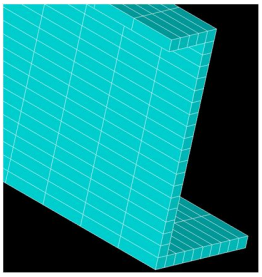
	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,16	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,89	#DIV/0!	1,20	#DIV/0!	0,89
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,03	0,20	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	1,20	0,03	26,26	0,03	1,20
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,03	0,18	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,89	#DIV/0!	1,20	#DIV/0!	0,64

Solid95 elementen

Mesh-elementen: 10x10x40 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid95



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,67E+02	0,00E+00	-7,70E+03	0,00E+00	9,17E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,70E+03	-1,70E+03	2,40E+06	4,25E+06	-1,92E+07
My1	0,00E+00	0,00E+00	-6,90E+04	4,25E+06	2,30E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	9,17E+05	0,00E+00	-1,92E+07	0,00E+00	3,06E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	8,67E-05	-4,68E-05	-2,27E-03	3,00E+02	-2,52E+02
Vy1	8,67E-05	3,63E+02	-5,67E-02	-7,59E+03	1,42E+02	9,07E+05
Vz1	-4,68E-05	-5,67E-02	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	-1,42E+02
Mx1	-2,27E-03	-7,59E+03	-1,70E+03	2,31E+06	4,24E+06	-1,90E+07
My1	3,00E+02	1,42E+02	-6,90E+04	4,24E+06	2,30E+08	3,60E+05
Mz1	-2,52E+02	9,07E+05	-1,42E+02	-1,90E+07	3,60E+05	3,03E+09

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,12	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	1,05	#DIV/0!	1,33	#DIV/0!	1,05
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,04	0,18	0,04	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	1,33	0,18	4,08	0,18	1,33
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,04	0,18	0,05	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	1,05	#DIV/0!	1,33	#DIV/0!	0,77

Verschillen tussen de elementtypen

Numeriek verschil tussen Solid45 en Solid95

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	8,67E-05	-4,68E-05	-2,27E-03	3,00E+02	-2,52E+02
Vy1	8,67E-05	3,63E+02	-5,67E-02	-7,59E+03	1,42E+02	9,07E+05
Vz1	-4,68E-05	-5,67E-02	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	-1,42E+02
Mx1	-2,27E-03	-7,59E+03	-1,70E+03	2,31E+06	4,24E+06	-1,90E+07
My1	3,00E+02	1,42E+02	-6,90E+04	4,24E+06	2,30E+08	3,60E+05
Mz1	-2,52E+02	9,07E+05	-1,42E+02	-1,90E+07	3,60E+05	3,03E+09

Verschil [%]tussen numerieke matrices van Solid45 en Solid95

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,045	9275,100	216,398	963,428	15,653	8,489
Vy1	9274,003	0,157	17,724	0,136	17,675	0,157
Vz1	216,408	17,724	0,152	0,151	0,152	17,673
Mx1	963,221	0,136	0,151	1,372	0,151	0,136
My1	15,653	17,675	0,152	0,151	0,126	18,574
Mz1	8,489	0,157	17,673	0,136	18,574	0,130

Het verschil tussen de numerieke matrices van Solid45 en Solid95 elementen is voor vrijwel alle waarden kleiner dan 0,2%. Dit verschil is zo klein dat voor de overige analyses gebruik zal worden gemaakt van de Solid45 elementen. Het voordeel hiervan is dat er meer ruimte is voor variatie in het mesh van het model, doordat er met Solid45 meer mesh-elementen kunnen worden gebruikt voordat de maximale capaciteit van de educational version van ANSYS wordt bereikt.

De grootste afwijking van het numerieke model zit in de wringstijfheid van de ligger, hieraan zal in hoofdstuk 5 meer aandacht worden besteed.

Elementgrootte

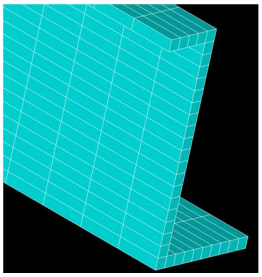
De mesh-elementen van het model moeten klein genoeg zijn om tot nauwkeurige resultaten te komen. Bij een profieldikte van 10 mm is het handig om in de doorsnede blokjes van 10x10 mm te gebruiken. In de lengterichting van de ligger kunnen elementen een stuk langer zijn, omdat de spanningen in deze richting vergeleken met de y en z-richting maar weinig variëren. Voorlopig wordt voor deze lengte van de elementen 40 mm aangehouden, maar dit zal later veranderen (voor het onderzoeken van de invloed van de lengte van de ligger wordt deze lengte vergroot, om een langere ligger te kunnen maken). Om te onderzoeken of het mesh van 10x10 mm in de doorsnede voldoende nauwkeurig is zal de numerieke matrix van dit model worden vergeleken met de matrix van een model met 5x5 mm mesh-elementen in de doorsnede.

"Normale grootte"

Mesh-elementen: 10x10x40 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1,32E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,67E+02	0,00E+00	-7,70E+03	0,00E+00	9,17E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,70E+03	-1,70E+03	1,85E+06	4,25E+06	-1,92E+07
My1	0,00E+00	0,00E+00	-6,90E+04	4,25E+06	2,30E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	9,17E+05	0,00E+00	-1,92E+07	0,00E+00	3,06E+09

Numeriek

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1,32E+05	9,25E-07	4,02E-05	-2,14E-04	2,59E+02	-2,75E+02
Vy1	9,25E-07	3,63E+02	-4,82E-02	-7,60E+03	1,20E+02	9,08E+05
Vz1	4,02E-05	-4,82E-02	2,77E+01	-1,70E+03	-6,92E+04	-1,20E+02
Mx1	-2,14E-04	-7,60E+03	-1,70E+03	2,34E+06	4,25E+06	-1,90E+07
My1	2,59E+02	1,20E+02	-6,92E+04	4,25E+06	2,30E+08	3,04E+05
Mz1	-2,75E+02	9,08E+05	-1,20E+02	-1,90E+07	3,04E+05	3,04E+09

Verschil [%]

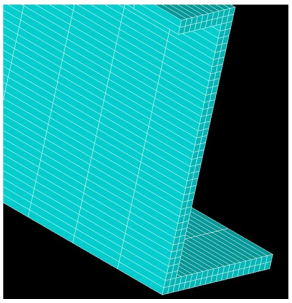
	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0,16	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,89	#DIV/0!	1,20	#DIV/0!	0,89
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,03	0,20	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	1,20	0,03	26,26	0,03	1,20
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,03	0,18	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,89	#DIV/0!	1,20	#DIV/0!	0,64

Halve grootte

Mesh-elementen: 5x5x40 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,67E+02	0,00E+00	-7,70E+03	0,00E+00	9,17E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,70E+03	-1,70E+03	1,85E+06	4,25E+06	-1,92E+07
My1	0,00E+00	0,00E+00	-6,90E+04	4,25E+06	2,30E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	9,17E+05	0,00E+00	-1,92E+07	0,00E+00	3,06E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	3,29E-04	-2,36E-03	-2,90E-01	2,61E+02	-2,74E+02
Vy1	3,29E-04	3,63E+02	-5,43E-02	-7,61E+03	1,31E+02	9,08E+05
Vz1	-2,36E-03	-5,43E-02	2,77E+01	-1,70E+03	-6,92E+04	-1,31E+02
Mx1	-2,90E-01	-7,61E+03	-1,70E+03	2,31E+06	4,25E+06	-1,90E+07
My1	2,61E+02	1,31E+02	-6,92E+04	4,25E+06	2,30E+08	3,27E+05
Mz1	-2,74E+02	9,08E+05	-1,31E+02	-1,90E+07	3,27E+05	3,04E+09

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,16	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,90	#DIV/0!	1,19	#DIV/0!	0,90
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,01	0,20	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	1,19	0,01	24,91	0,01	1,19
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,01	0,18	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,90	#DIV/0!	1,19	#DIV/0!	0,64

Verschillen

Numeriek verschil tussen 10x10 mm en 5x5 mm

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0,363	0,000	0,002	0,290	-1,821	-1,178
Vy1	0,000	0,032	0,006	0,321	-10,458	80,132
Vz1	0,002	0,006	0,000	0,318	0,674	10,290
Mx1	0,290	0,321	0,318	25049,137	-741,899	1150,940
My1	-1,821	-10,458	0,674	-741,899	-2285,400	-23090,298
Mz1	-1,178	80,132	10,290	1150,940	-23090,298	201015,000

Verschil [%]tussen numerieke matrices van 10x10 mm en 5x5 mm

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0,000	35458,460	5962,844	135492,129	0,703	0,428
Vy1	35455,463	0,009	12,783	0,004	8,680	0,009
Vz1	5963,060	12,783	0,001	0,019	0,001	8,540
Mx1	135466,454	0,004	0,019	1,071	0,017	0,006
My1	0,703	8,680	0,001	0,017	0,001	7,607
Mz1	0,428	0,009	8,540	0,006	7,607	0,007

Behalve voor de wringstijfheid is het verschil tussen de numerieke matrices zeer klein (kleiner dan één promille). Blijkbaar is het voldoende nauwkeurig om met een mesh van 10x10 mm in de doorsnede te werken. Zolang een profiel met dikte t = 10 mm wordt bekeken zal er daarom van deze elementgrootte gebruik worden gemaakt.

5. Uitwerking

Zoals eerder vermeld gebeurt het vergelijken van de analytische en numerieke matrices met behulp van Excel. Daarbij worden elementen uit de analytische matrix die 0 zijn grijs gemaakt, omdat ze niet relevant zijn. In de numerieke matrix kunnen hier waarden ongelijk aan nul ontstaat. Het gaat dan om een (ten opzichte van de andere elementen) klein getal. In de verschilmatrix verschijnt een foutmelding omdat er niet door 0 (de analytische waarde) gedeeld kan worden.

In hoofdstuk 3 zijn al twee verschillende analyses gedaan met het numerieke model, om te bepalen wat voor mesh en elementtypen er gebruikt zullen worden. Hieruit bleek tevens dat de afwijking tussen de numerieke en analytische stijfheidsmatrix bij een ligger van 5 meter lengte al minder dan 1,5% zijn. De gewenste nauwkeurigheid van het model wordt hiermee al bijna gehaald.

Een uitzondering op deze kleine afwijkingen is de wringstijfheid van de ligger (waar de afwijking groter is dan 25%). Er treedt echter in het numerieke model verhinderde welving op, wat de stijfheid van de ligger beïnvloed. Daarom zal in de analytische matrix de wringstijfheid van de ligger worden aangepast. De analyse hiervan wordt beschreven in paragraaf 5.1.

In paragraaf 5.2 wordt de invloed van de lengte ligger verder onderzocht. Hierbij worden dezelfde analyses gebruikt als in paragraaf 5.1, maar nu gericht op de hele matrix, in plaats van alleen op de wringstijfheid.

Vervolgens wordt in paragraaf 5.3 het effect van afschuifvervorming op de resultaten onderzocht.

Tenslotte wordt in paragraaf 5.4 de doorsnede aangepast naar een dikte van 2 mm, om te onderzoeken wat dit voor invloed heeft op de nauwkeurigheid van het numerieke model.

5.1. Wringstijfheid en welving

Door verhinderde welving zal een constructie zicht stijver gedragen dan de wringtheorie van De Saint Vernant voorspelt. Om dit effect in rekening te brengen zal dus de wringstijfheid I_w met een factor groter dan 1 moeten worden vermenigvuldigd. Hiervoor zijn de volgende formules gedefinieerd:

De karakteristieke lengte[5] (de lengte van het "Vlasov-gebied")

$$l_c = \sqrt{\frac{EC_w}{GI_w}}$$

Vergrotingsfactor voor de wringstijfheid[6] (wanneer beide uiteinden van de ligger niet kunnen welven)

$$f = \frac{\beta(e^{\beta}+1)}{\beta+2+(\beta-2)e^{\beta}} \text{ met } \beta = \frac{L}{l_c}$$

Voor lange liggers is dit gelijk aan: $f = \frac{l}{l-2l_c}$

Om te onderzoeken of het verschil in wringstijfheid tussen de analytische en numerieke stijfheidsmatrix inderdaad door verhinderde welving komt zal de liggerlengte worden gevarieerd. Bij een langere ligger zou dit tot kleinere verschillen moeten leiden, omdat de karakteristieke lengte gelijk blijft, maar de totale lengte van de ligger toeneemt. De vergrotingsfactor f wordt daardoor kleiner.

Daarnaast wordt de wringstijfheid I_w in de analytische stijfheidsmatrix vermenigvuldigd met de vergrotingsfactor f, waarna opnieuw de vergelijking met de numerieke matrix plaatsvindt. De stijfheidsmatrix ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{pmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\
0 & -\frac{12e_zEI_z}{L^3} & \frac{12e_yEI_y}{L^3} & f\frac{GI_w}{L}+\frac{12e_z^2EI_z}{L^3}+\frac{12e_y^2EI_y}{L^3} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & -\frac{6e_yEI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{6e_zEI_z}{L^2} & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{pmatrix}$$

Figuur 12: Stijfheidsmatrix met vergrotingsfactor

Voor deze analyse zal alleen de kolom van φ_{x1} (met de wringstijfheidsterm op de vierde rij) worden vergeleken. Er wordt naar vier verschillende liggers gekeken, telkens met een dubbele lengte: 5, 10, 20 en 40 meter.

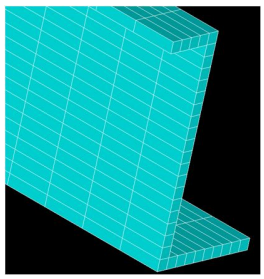
[5] Hoogenboom, P.C.J. (2008), Aantekeningen over wringing, Gouda: Betonvereniging
[6] Hoogenboom P.C.J. & Borgart A. (2005), Method for including restrained warping in traditional frame analyses, Heron, Vol. 50 No. 1, blz. 55-68.

Ligger 1

Mesh-elementen: 10x10x40 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Zonder vergrotingsfactor *Met vergrotingsfactor*

Analytisch

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-7,70E+03
Vz1	-1,70E+03
Mx1	1,85E+06
My1	4,25E+06
Mz1	-1,92E+07

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-7,70E+03
Vz1	-1,70E+03
Mx1	1,85E+06
My1	4,25E+06
Mz1	-1,92E+07

Numeriek

	φx1
N1	2,53E-04
Vy1	-7,61E+03
Vz1	-1,70E+03
Mx1	2,34E+06
My1	4,25E+06
Mz1	-1,90E+07

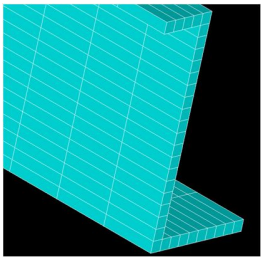
	φx1
N1	2,53E-04
Vy1	-7,61E+03
Vz1	-1,70E+03
Mx1	2,34E+06
My1	4,25E+06
Mz1	-1,90E+07

Verschil [%]

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	1,13
Vz1	0,05
Mx1	26,30
My1	0,05
Mz1	1,13

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	1,13
Vz1	0,05
Mx1	0,14
My1	0,05
Mz1	1,13

Ligger 2



Mesh-elementen: 10x10x50 mm.

Liggerlengte: 10 m

Elementtype: Solid45

Zonder vergrotingsfactor

Analytisch

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-9,62E+02
Vz1	-2,13E+02
Mx1	8,99E+05
My1	1,06E+06
Mz1	-4,81E+06

Numeriek

	φx1
N1	1,01E-03
Vy1	-9,59E+02
Vz1	-2,13E+02
Mx1	9,79E+05
My1	1,06E+06
Mz1	-4,80E+06

Verschil [%]

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,30
Vz1	0,12
Mx1	0,31
My1	0,12
Mz1	0,30

Met vergrotingsfactor

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-9,62E+02
Vz1	-2,13E+02
Mx1	9,76E+05
My1	1,06E+06
Mz1	-4,81E+06

	φx1
N1	1,01E-03
Vy1	-9,59E+02
Vz1	-2,13E+02
Mx1	9,79E+05
My1	1,06E+06
Mz1	-4,80E+06

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,30
Vz1	0,12
Mx1	8,88
My1	0,12
Mz1	0,30

Verschillen in afwijking met 5m lengte [%]

φx1
#DIV/0!
0,83
-0,08
17,42
-0,08
0,83

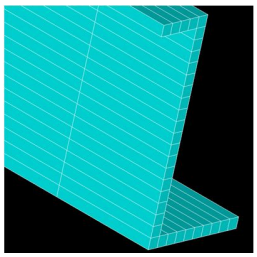
10m beter
5m beter

Ligger 3

Mesh-elementen: 10x10x100 mm.

Liggerlengte: 20 m

Elementtype: Solid45



Zonder vergrotingsfactor *Met vergrotingsfactor*

Analytisch

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-1,20E+02
Vz1	-2,66E+01
Mx1	4,37E+05
My1	2,66E+05
Mz1	-1,20E+06

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-1,20E+02
Vz1	-2,66E+01
Mx1	4,56E+05
My1	2,66E+05
Mz1	-1,20E+06

Numeriek

	φx1
N1	9,95E-04
Vy1	-1,20E+02
Vz1	-2,66E+01
Mx1	4,57E+05
My1	2,66E+05
Mz1	-1,20E+06

	φx1
N1	9,95E-04
Vy1	-1,20E+02
Vz1	-2,66E+01
Mx1	4,57E+05
My1	2,66E+05
Mz1	-1,20E+06

Verschil [%]

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,06
Vz1	0,20
Mx1	4,61
My1	0,20
Mz1	0,06

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,06
Vz1	0,20
Mx1	0,38
My1	0,20
Mz1	0,06

Verschillen in afwijking met 10m lengte [%]

φx1
#DIV/0!
0,24
-0,08
4,28
-0,08
0,24

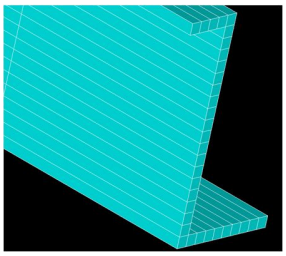
20m beter
10m beter

Ligger4

Mesh-elementen: 10x10x200 mm.

Liggerlengte: 40 m

Elementtype: Solid45



Zonder vergrotingsfactor *Met vergrotingsfactor*

Analytisch

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-1,50E+01
Vz1	-3,32E+00
Mx1	2,17E+05
My1	6,64E+04
Mz1	-3,01E+05

	φx1
N1	0,00E+00
Vy1	-1,50E+01
Vz1	-3,32E+00
Mx1	2,22E+05
My1	6,64E+04
Mz1	-3,01E+05

Numeriek

	φx1
N1	9,86E-04
Vy1	-1,50E+01
Vz1	-3,33E+00
Mx1	2,22E+05
My1	6,66E+04
Mz1	-3,01E+05

	φx1
N1	9,86E-04
Vy1	-1,50E+01
Vz1	-3,33E+00
Mx1	2,22E+05
My1	6,66E+04
Mz1	-3,01E+05

Verschil [%]

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,01
Vz1	0,24
Mx1	2,50
My1	0,24
Mz1	0,01

	φx1
N1	#DIV/0!
Vy1	0,01
Vz1	0,24
Mx1	0,41
My1	0,24
Mz1	0,01

Verschillen in afwijking met 20m lengte [%]

φx1
#DIV/0!
0,05
-0,04
2,11
-0,03
0,05

40m beter
20m beter

Opmerkingen

- De verschillen met de analytische stijfheidsmatrix worden steeds kleiner bij toename van de liggerlengte. Het effect van verhinderde welving neemt inderdaad af als de liggerlengte toeneemt.
- Andere afwijkingen in de kolom van φ_x veranderen ook, maar niet veel. Sommige verschillen worden iets kleiner, andere iets groter.
- Door I_w te vermenigvuldigen met de factor f is ligt de analytische stijfheidsmatrix voor alle geteste liggerlengtes zeer dicht in de buurt (minder dan 1% verschil) van de numerieke stijfheidsmatrix. Deze nieuwe wringstijfheid zal daarom bij alle volgende analyses worden toegepast

5.2. Lengte van de ligger

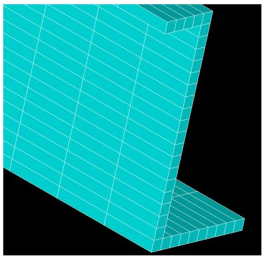
Bij deze analyse wordt het numerieke model getest voor 4 liggers, met een lengte van 5, 10, 20 en 40 meter. Het doel hiervan is het onderzoeken wat voor invloed de lengte van de ligger heeft op de nauwkeurigheid van het numerieke model. In de verschilmatrix van de liggers worden waarden die verbeterd zijn ten opzichte van de vorige ligger met groen aangegeven en waarden die zijn verslechterd ten opzichte van de vorige ligger met rood.

Ligger 1

Mesh-elementen: 10x10x50 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,67E+02	0,00E+00	-7,70E+03	0,00E+00	9,17E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	2,76E+01	-1,70E+03	-6,90E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,70E+03	-1,70E+03	1,85E+06	4,25E+06	-1,92E+07
My1	0,00E+00	0,00E+00	-6,90E+04	4,25E+06	2,30E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	9,17E+05	0,00E+00	-1,92E+07	0,00E+00	3,06E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1,32E+05	-1,16E-06	3,69E-07	2,53E-04	2,45E+02	-2,84E+02
Vy1	-1,15E-06	3,64E+02	-4,72E-02	-7,61E+03	1,18E+02	9,09E+05
Vz1	3,70E-07	-4,72E-02	2,77E+01	-1,70E+03	-6,92E+04	-1,18E+02
Mx1	2,53E-04	-7,61E+03	-1,70E+03	2,34E+06	4,25E+06	-1,90E+07
My1	2,45E+02	1,18E+02	-6,92E+04	4,25E+06	2,31E+08	2,97E+05
Mz1	-2,84E+02	9,09E+05	-1,18E+02	-1,90E+07	2,97E+05	3,04E+09

Verschil [%]

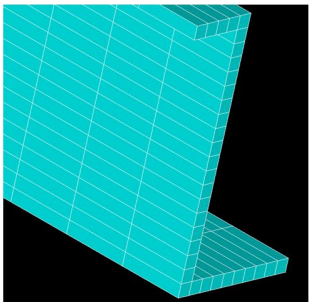
	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,19	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,82	#DIV/0!	1,13	#DIV/0!	0,82
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,27	0,05	0,27	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	1,13	0,05	0,14	0,05	1,13
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,27	0,05	0,24	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,82	#DIV/0!	1,13	#DIV/0!	0,58

Ligger 2

Mesh-elementen: 10x10x50 mm.

Liggerlengte: 10 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6,60E+04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	4,58E+01	0,00E+00	-9,62E+02	0,00E+00	2,29E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	3,45E+00	-2,13E+02	-1,73E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-9,62E+02	-2,13E+02	9,76E+05	1,06E+06	-4,81E+06
My1	0,00E+00	0,00E+00	-1,73E+04	1,06E+06	1,15E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	2,29E+05	0,00E+00	-4,81E+06	0,00E+00	1,53E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6,61E+04	-5,04E-06	8,77E-07	1,01E-03	6,12E+01	-7,09E+01
Vy1	-5,04E-06	4,58E+01	-1,56E-03	-9,59E+02	7,80E+00	2,29E+05
Vz1	8,77E-07	-1,56E-03	3,46E+00	-2,13E+02	-1,73E+04	-7,80E+00
Mx1	1,01E-03	-9,59E+02	-2,13E+02	9,79E+05	1,06E+06	-4,80E+06
My1	6,12E+01	7,80E+00	-1,73E+04	1,06E+06	1,15E+08	3,94E+04
Mz1	-7,09E+01	2,29E+05	-7,80E+00	-4,80E+06	3,94E+04	1,53E+09

Verschil [%]

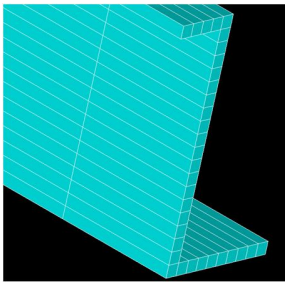
	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,09	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,09	#DIV/0!	0,30	#DIV/0!	0,09
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,18	0,12	0,18	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0,30	0,12	0,31	0,12	0,30
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,18	0,12	0,16	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,09	#DIV/0!	0,30	#DIV/0!	0,05

Ligger 3

Mesh-elementen: 10x10x100 mm.

Liggerlengte: 20 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	3,30E+04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	5,73E+00	0,00E+00	-1,20E+02	0,00E+00	5,73E+04
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	4,31E-01	-2,66E+01	-4,31E+03	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-1,20E+02	-2,66E+01	4,56E+05	2,66E+05	-1,20E+06
My1	0,00E+00	0,00E+00	-4,31E+03	2,66E+05	5,75E+07	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	5,73E+04	0,00E+00	-1,20E+06	0,00E+00	7,64E+08

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	3,30E+04	-5,05E-06	8,59E-07	9,95E-04	1,13E+01	-1,72E+01
Vy1	-5,05E-06	5,74E+00	-4,38E-05	-1,20E+02	4,38E-01	5,74E+04
Vz1	8,59E-07	-4,38E-05	4,32E-01	-2,66E+01	-4,32E+03	-4,39E-01
Mx1	9,95E-04	-1,20E+02	-2,66E+01	4,57E+05	2,66E+05	-1,20E+06
My1	1,13E+01	4,38E-01	-4,32E+03	2,66E+05	5,76E+07	4,38E+03
Mz1	-1,72E+01	5,74E+04	-4,39E-01	-1,20E+06	4,38E+03	7,65E+08

Verschil [%]

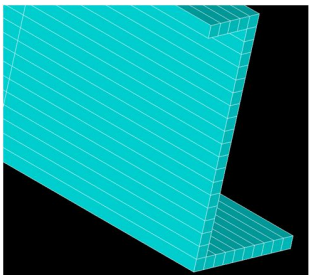
	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,08	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,13	#DIV/0!	0,06	#DIV/0!	0,13
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,20	0,20	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0,06	0,20	0,38	0,20	0,06
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,20	0,20	0,17	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,13	#DIV/0!	0,06	#DIV/0!	0,12

Ligger 4

Mesh-elementen: 10x10x200 mm.

Liggerlengte: 40 m

Elementtype: Solid45



Analytisch

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1,65E+04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	7,16E-01	0,00E+00	-1,50E+01	0,00E+00	1,43E+04
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	5,39E-02	-3,32E+00	-1,08E+03	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-1,50E+01	-3,32E+00	2,22E+05	6,64E+04	-3,01E+05
My1	0,00E+00	0,00E+00	-1,08E+03	6,64E+04	2,88E+07	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	1,43E+04	0,00E+00	-3,01E+05	0,00E+00	3,82E+08

Numeriek

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1,65E+04	-5,03E-06	8,62E-07	9,86E-04	1,58E+00	-2,94E+00
Vy1	-5,03E-06	7,17E-01	-1,12E-06	-1,50E+01	2,28E-02	1,43E+04
Vz1	8,61E-07	-1,12E-06	5,40E-02	-3,33E+00	-1,08E+03	-2,36E-02
Mx1	9,86E-04	-1,50E+01	-3,33E+00	2,22E+05	6,66E+04	-3,01E+05
My1	1,58E+00	2,28E-02	-1,08E+03	6,66E+04	2,88E+07	4,59E+02
Mz1	-2,94E+00	1,43E+04	-2,36E-02	-3,01E+05	4,59E+02	3,83E+08

Verschil [%]

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0,07	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,19	#DIV/0!	0,01	#DIV/0!	0,19
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,21	0,24	0,21	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0,01	0,24	0,41	0,24	0,01
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,21	0,24	0,17	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,19	#DIV/0!	0,01	#DIV/0!	0,16

Opmerkingen

- Door de lengte van de ligger te vergroten van 5 naar 10 meter treedt een verbetering op in de nauwkeurigheid van het model. De ligger van 5 meter lengte wordt wellicht nog door afschuifvervorming beïnvloed. Hierbij moet wel worden opgemerkt dat door deze vergroting ook een verdubbeling van het aantal elementen optreedt, wat niet het geval is bij de andere liggers.
- De overige vergrotingen (naar 20 en 40 meter) zorgen voor een zeer kleine verandering in nauwkeurigheid. 5 termen uit de matrix worden beter, 13 termen worden slechter.
- Opvallend is dat bij de vergroting van 10 naar 20 meter en de vergroting van 20 naar 40 meter dezelfde termen beter of slechter worden. De verschillen zijn echter erg klein.

5.3. Afschuifvervorming

Om afschuifvervorming mee te nemen in het model moet de analytische stijfheidsmatrix worden aangepast. Om te compenseren voor vereenvoudigingen van het verloop van de schuifspanning in de doorsnede worden zogenaamde vormfactoren voor de doorsnede ingevoerd. Deze factoren zijn afhankelijk van de richting en worden gedefinieerd als k_y en k_z. Voor de meeste profielen kunnen deze factoren worden bepaald aan de hand van tabellen[7]. Voor een Z-profiel is echter geen formule bekend. Bovendien wordt het numerieke model belast in hoofdrichtingen, waardoor de factoren in y en z-richting niet direct kunnen worden gebruikt. Er zal daarom worden onderzocht wat voor factoren de beste resultaten opleveren. De stijfheidsmatrix met afschuifvervorming ziet er als volgt uit:

$$\begin{pmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{\lambda_y}{L} & 0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & 0 & \frac{1}{2}\lambda_y & 0 & -\frac{\lambda_y}{L} & 0 & \frac{e_z\lambda_y}{L} & 0 & \frac{1}{2}\lambda_y \\
0 & 0 & \frac{\lambda_z}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & -\frac{1}{2}\lambda_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda_z}{L} & -\frac{e_y\lambda_z}{L} & -\frac{1}{2}\lambda_z & 0 \\
0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & \mu & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & \frac{e_z\lambda_y}{L} & -\frac{e_y\lambda_z}{L} & -\mu & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_z & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & p_z & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\lambda_z & \frac{1}{2}e_y\lambda_z & -q_z & 0 \\
0 & \frac{1}{2}\lambda_y & 0 & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & p_y & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_y & 0 & \frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & -q_y \\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{\lambda_y}{L} & 0 & \frac{e_z\lambda_y}{L} & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_y & 0 & \frac{\lambda_y}{L} & 0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & 0 & \frac{1}{2}\lambda_y \\
0 & 0 & -\frac{\lambda_z}{L} & -\frac{e_y\lambda_z}{L} & \frac{1}{2}\lambda_z & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & -\frac{1}{2}\lambda_z & 0 \\
0 & \frac{e_z\lambda_y}{L} & -\frac{e_y\lambda_z}{L} & -\mu & \frac{1}{2}e_y\lambda_z & \frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & \mu & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_z & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & -q_z & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_z & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & p_z & 0 \\
0 & \frac{1}{2}\lambda_y & 0 & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & -q_y & 0 & \frac{1}{2}\lambda_y & 0 & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & p_y
\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\lambda_y} = \frac{L^2}{12EI_{yy}} + \frac{1}{k_yGA} \qquad p_y = \frac{EI_{yy}}{L} + \frac{1}{4}\lambda_y L \qquad q_y = \frac{EI_{yy}}{L} - \frac{1}{4}\lambda_y L$$

$$\frac{1}{\lambda_z} = \frac{L^2}{12EI_{zz}} + \frac{1}{k_zGA} \qquad p_y = \frac{EI_{zz}}{L} + \frac{1}{4}\lambda_z L \qquad q_y = \frac{EI_{zz}}{L} - \frac{1}{4}\lambda_z L$$

$$\mu = \frac{fGI_w + \lambda_z e_y^2 + \lambda_y e_z^2}{L} \qquad f = \frac{\beta(e^\beta + 1)}{\beta + 2 + (\beta - 2)e^\beta}$$

Figuur 13: Stijfheidsmatrix met afschuifvervorming en vergrotingsfactor voor verhinderde welving

[7] Young, W.C. & Budynas, R.G. (2002), Roark's formulas for stress and strain, New York: McGraw-Hill

Voor het onderzoek zal echter weer alleen het kwart links boven worden gebruikt:

$$\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_y}{L} & 0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & 0 & \frac{1}{2}\lambda_y \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_z}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & -\frac{1}{2}\lambda_z & 0 \\ 0 & -\frac{e_z\lambda_y}{L} & \frac{e_y\lambda_z}{L} & \mu & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_z & -\frac{1}{2}e_y\lambda_z & p_z & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda_y & 0 & -\frac{1}{2}e_z\lambda_y & 0 & p_y \end{pmatrix}$$

Figuur 14: Gebruikt deel van de stijfheidsmatrix met afschuifvervorming

Voor een eerste indicatie van de grootte van de vormfactoren wordt de Z-doorsnede ingevoerd in het programma ShapeDesigner om de doorsnede eigenschappen (van het nog niet geroteerde profiel) te bepalen. Hiermee worden de vormfactoren met behulp van differentiaalvergelijkingen bepaald. Dit levert de waarden:

$$k_y = 0{,}17584$$

$$k_z = 0{,}10638$$

Voor andere dunwandige profielen worden de vormfactoren bepaald aan de hand van de verhouding van het oppervlak van het lijf en de flenzen van het profiel. Dit levert voor het gebruikte Z-profiel de volgende waarden:

$$k_y = \frac{A_{lijf}}{A_{totaal}} = \frac{200*10}{3300} = 0{,}606$$

$$k_z = \frac{A_{lijf}}{A_{totaal}} = \frac{150*10}{3300} = 0{,}455$$

Door te experimenteren met verschillende waarden voor de vormfactoren in de analytische stijfheidsmatrix blijken de beste resultaten te worden behaald met:

$$k_y = 0{,}57$$

$$k_z = 0{,}52$$

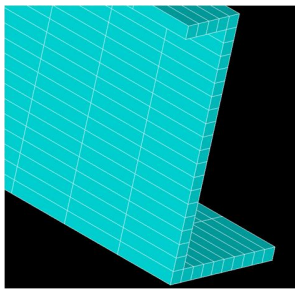
Deze waarden worden toegepast in de matrices van een ligger met 1 meter lengte en een ligger met 10 meter lengte.

Ligger 1

Mesh-elementen: 10x10x50 mm.

Liggerlengte: 1 m

Elementtype: Solid45



Analytisch zonder afschuifvervorming

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	6.60E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	4.58E+04	0.00E+00	-9.62E+05	0.00E+00	2.29E+07
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	3.45E+03	-2.13E+05	-1.73E+06	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-9.62E+05	-2.13E+05	6.09E+07	1.06E+08	-4.81E+08
My1	0.00E+00	0.00E+00	-1.73E+06	1.06E+08	1.15E+09	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	2.29E+07	0.00E+00	-4.81E+08	0.00E+00	1.53E+10

Numeriek

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	6,66E+05	-7,08E-07	-5,91E-07	-1,50E-05	6,21E+03	-7,20E+03
Vy1	-7,07E-07	3,53E+04	-1,04E+02	-7,23E+05	5,22E+04	1,76E+07
Vz1	-5,92E-07	-1,04E+02	3,37E+03	-2,00E+05	-1,69E+06	-5,22E+04
Mx1	-1,50E-05	-7,23E+05	-2,00E+05	5,43E+07	1,00E+08	-3,61E+08
My1	6,21E+03	5,22E+04	-1,69E+06	1,00E+08	1,13E+09	2,61E+07
Mz1	-7,20E+03	1,76E+07	-5,22E+04	-3,61E+08	2,61E+07	1,27E+10

Verschil [%]

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0.64	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	23.82	#DIV/0!	25.66	#DIV/0!	23.82
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	3.43	6.85	3.43	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	25.66	6.85	11.85	6.85	25.66
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	3.43	6.85	2.46	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	23.82	#DIV/0!	25.66	#DIV/0!	17.75

Analytisch met afschuifvervorming

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6.60E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	3.50E+04	0.00E+00	-7.35E+05	0.00E+00	1.75E+07
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	3.36E+03	-2.07E+05	-1.68E+06	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-7.35E+05	-2.07E+05	5.58E+07	1.04E+08	-3.67E+08
My1	0.00E+00	0.00E+00	-1.68E+06	1.04E+08	1.13E+09	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	1.75E+07	0.00E+00	-3.67E+08	0.00E+00	1.26E+10

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6,60E+05	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	3,50E+04	0,00E+00	-7,35E+05	0,00E+00	1,75E+07
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	3,36E+03	-2,07E+05	-1,68E+06	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-7,35E+05	-2,07E+05	7,51E+07	1,04E+08	-3,67E+08
My1	0,00E+00	0,00E+00	-1,68E+06	1,04E+08	1,13E+09	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	1,75E+07	0,00E+00	-3,67E+08	0,00E+00	1,26E+10

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0.64	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0.25	#DIV/0!	2.65	#DIV/0!	0.25
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.96	4.47	0.96	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	2.65	4.47	3.79	4.47	2.65
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.96	4.47	0.60	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0.25	#DIV/0!	2.65	#DIV/0!	0.03

Opmerkingen

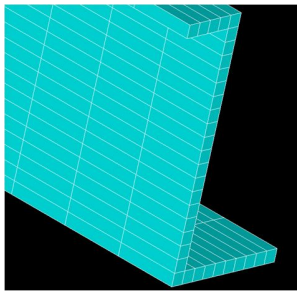
- Door het toepassen van de analytische stijfheidsmatrix met afschuifvervorming wordt de nauwkeurigheid van het model aanzienlijk verbeterd
- Alle termen met een factor e_y of e_z hebben ook na het toepassen van afschuifvervorming en de vergrotingsfactor voor de wringstijfheid nog steeds een behoorlijke afwijking ten opzichte van het numerieke model

Ligger 2

Mesh-elementen: 10x10x50 mm.

Liggerlengte: 10 m

Elementtype: Solid45



Analytisch zonder afschuifvervorming

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	6,60E+04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	4,58E+01	0,00E+00	-9,62E+02	0,00E+00	2,29E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	3,45E+00	-2,13E+02	-1,73E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-9,62E+02	-2,13E+02	9,76E+05	1,06E+06	-4,81E+06
My1	0,00E+00	0,00E+00	-1,73E+04	1,06E+06	1,15E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	2,29E+05	0,00E+00	-4,81E+06	0,00E+00	1,53E+09

Numeriek

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	6,61E+04	-5,04E-06	8,77E-07	1,01E-03	6,12E+01	-7,09E+01
Vy1	-5,04E-06	4,58E+01	-1,56E-03	-9,59E+02	7,80E+00	2,29E+05
Vz1	8,77E-07	-1,56E-03	3,46E+00	-2,13E+02	-1,73E+04	-7,80E+00
Mx1	1,01E-03	-9,59E+02	-2,13E+02	9,79E+05	1,06E+06	-4,80E+06
My1	6,12E+01	7,80E+00	-1,73E+04	1,06E+06	1,15E+08	3,94E+04
Mz1	-7,09E+01	2,29E+05	-7,80E+00	-4,80E+06	3,94E+04	1,53E+09

Verschil [%]

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0,09	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,09	#DIV/0!	0,30	#DIV/0!	0,09
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,18	0,12	0,18	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0,30	0,12	0,31	0,12	0,30
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,18	0,12	0,16	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,09	#DIV/0!	0,30	#DIV/0!	0,05

Analytisch met afschuifvervorming

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6,60E+04	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00
Vy1	0,00E+00	4,57E+01	0,00E+00	-9,59E+02	0,00E+00	2,28E+05
Vz1	0,00E+00	0,00E+00	3,45E+00	-2,12E+02	-1,72E+04	0,00E+00
Mx1	0,00E+00	-9,59E+02	-2,12E+02	9,76E+05	1,06E+06	-4,80E+06
My1	0,00E+00	0,00E+00	-1,72E+04	1,06E+06	1,15E+08	0,00E+00
Mz1	0,00E+00	2,28E+05	0,00E+00	-4,80E+06	0,00E+00	1,52E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	6,61E+04	-5,04E-06	8,77E-07	1,01E-03	6,12E+01	-7,09E+01
Vy1	-5,04E-06	4,58E+01	-1,56E-03	-9,59E+02	7,80E+00	2,29E+05
Vz1	8,77E-07	-1,56E-03	3,46E+00	-2,13E+02	-1,73E+04	-7,80E+00
Mx1	1,01E-03	-9,59E+02	-2,13E+02	9,79E+05	1,06E+06	-4,80E+06
My1	6,12E+01	7,80E+00	-1,73E+04	1,06E+06	1,15E+08	3,94E+04
Mz1	-7,09E+01	2,29E+05	-7,80E+00	-4,80E+06	3,94E+04	1,53E+09

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0,09	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0,22	#DIV/0!	0,01	#DIV/0!	0,22
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,21	0,15	0,21	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0,01	0,15	0,31	0,15	0,01
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0,21	0,15	0,18	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0,22	#DIV/0!	0,01	#DIV/0!	0,18

Opmerkingen

- De matrixelementen met alleen e_z worden verbeterd.
- De termen van extensie en wringing blijven gelijk.
- Overige termen worden slechter, maar de verschillen zijn heel erg klein. Blijkbaar speelt afschuifvervorming bij deze liggerlengte geen rol meer.

5.4. Dikte van het profiel

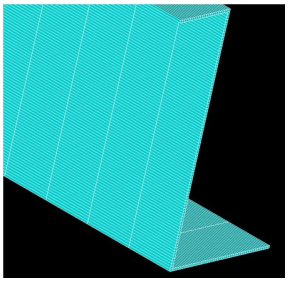
Voor deze analyse wordt de dikte van het Z-profiel teruggebracht naar 2 mm. Deze analyse wordt gebruikt om het verschil in nauwkeurigheid met het dikkere profiel aan te geven en daarnaast om te kijken of dezelfde verschijnselen optreden bij afschuifvervorming. Omdat het aantal elementen in de doorsnede nu aanzienlijk groter is, wordt de lengte van de ligger beperkt gehouden. Liggers met een lengte van 1 meter en 5 meter worden geanalyseerd.

Ligger 1

Mesh-elementen: 2x2x40 mm.

Liggerlengte: 1 m

Elementtype: Solid45



Analytisch zonder afschuifvervorming

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1.38E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	1.05E+04	0.00E+00	-2.22E+05	0.00E+00	5.25E+06
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	7.70E+02	-4.94E+04	-3.85E+05	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-2.22E+05	-4.94E+04	1.26E+07	2.47E+07	-1.11E+08
My1	0.00E+00	0.00E+00	-3.85E+05	2.47E+07	2.57E+08	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	5.25E+06	0.00E+00	-1.11E+08	0.00E+00	3.50E+09

Numeriek

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	1.39E+05	7.76E-07	2.57E-06	3.96E-05	1.11E+03	-1.24E+03
Vy1	7.75E-07	7.80E+03	-2.76E+01	-1.61E+05	1.38E+04	3.90E+06
Vz1	2.57E-06	-2.76E+01	7.44E+02	-4.59E+04	-3.72E+05	-1.38E+04
Mx1	3.96E-05	-1.61E+05	-4.59E+04	1.08E+07	2.30E+07	-8.03E+07
My1	1.11E+03	1.38E+04	-3.72E+05	2.30E+07	2.51E+08	6.88E+06
Mz1	-1.24E+03	3.90E+06	-1.38E+04	-8.03E+07	6.88E+06	2.83E+09

Verschil [%]

	ux1	**uy1**	**uz1**	**φx1**	**φy1**	**φz1**
N1	0.78	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	25.78	#DIV/0!	27.57	#DIV/0!	25.78
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	3.38	6.99	3.38	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	27.57	6.99	13.84	6.99	27.57
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	3.38	6.99	2.38	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	25.78	#DIV/0!	27.57	#DIV/0!	19.17

Analytisch met afschuifvervorming

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1.38E+05	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	7.63E+03	0.00E+00	-1.61E+05	0.00E+00	3.81E+06
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	7.48E+02	-4.79E+04	-3.74E+05	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-1.61E+05	-4.79E+04	1.12E+07	2.40E+07	-8.05E+07
My1	0.00E+00	0.00E+00	-3.74E+05	2.40E+07	2.51E+08	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	3.81E+06	0.00E+00	-8.05E+07	0.00E+00	2.78E+09

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	1.39E+05	7.76E-07	2.57E-06	3.96E-05	1.11E+03	-1.24E+03
Vy1	7.75E-07	7.80E+03	-2.76E+01	-1.61E+05	1.38E+04	3.90E+06
Vz1	2.57E-06	-2.76E+01	7.44E+02	-4.59E+04	-3.72E+05	-1.38E+04
Mx1	3.96E-05	-1.61E+05	-4.59E+04	1.08E+07	2.30E+07	-8.03E+07
My1	1.11E+03	1.38E+04	-3.72E+05	2.30E+07	2.51E+08	6.88E+06
Mz1	-1.24E+03	3.90E+06	-1.38E+04	-8.03E+07	6.88E+06	2.83E+09

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0.78	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	2.29	#DIV/0!	0.18	#DIV/0!	2.29
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.54	4.25	0.54	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0.18	4.25	3.25	4.25	0.18
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.54	4.25	0.24	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	2.29	#DIV/0!	0.18	#DIV/0!	1.77

Opmerkingen

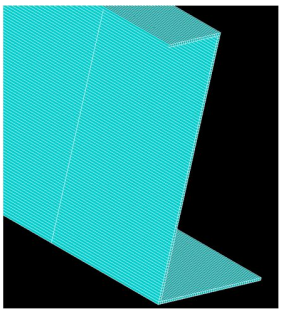
- De nauwkeurigheid van het model is vrijwel gelijk aan die van het model voor het dikkere profiel.
- Door het toepassen van de analytische stijfheidsmatrix met afschuifvervorming wordt de nauwkeurigheid van het model aanzienlijk verbeterd.
- Alle termen met e_y en e_z hebben ook na het toepassen van afschuifvervorming nog steeds een behoorlijke afwijking ten opzichte van het numerieke model.

Ligger 2

Mesh-elementen: 2x2x100 mm.

Liggerlengte: 5 m

Elementtype: Solid45



Analytisch zonder afschuifvervorming

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	2.77E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	8.41E+01	0.00E+00	-1.77E+03	0.00E+00	2.10E+05
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	6.16E+00	-3.95E+02	-1.54E+04	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-1.77E+03	-3.95E+02	1.17E+05	9.87E+05	-4.44E+06
My1	0.00E+00	0.00E+00	-1.54E+04	9.87E+05	5.14E+07	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	2.10E+05	0.00E+00	-4.44E+06	0.00E+00	7.01E+08

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	2,78E+04	-3,30E-06	1,10E-06	-1,34E-04	3,18E+01	-5,42E+01
Vy1	-3,30E-06	8,36E+01	-1,22E-02	-1,76E+03	3,05E+01	2,09E+05
Vz1	1,10E-06	-1,22E-02	6,20E+00	-3,97E+02	-1,55E+04	-3,05E+01
Mx1	-1,34E-04	-1,76E+03	-3,97E+02	1,17E+05	9,92E+05	-4,41E+06
My1	3,18E+01	3,05E+01	-1,55E+04	9,92E+05	5,16E+07	7,59E+04
Mz1	-5,42E+01	2,09E+05	-3,05E+01	-4,41E+06	7,59E+04	6,98E+08

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0.30	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0.60	#DIV/0!	0.70	#DIV/0!	0.60
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.65	0.48	0.65	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0.70	0.48	0.09	0.48	0.70
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.65	0.48	0.56	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0.60	#DIV/0!	0.70	#DIV/0!	0.38

Analytisch met afschuifvervorming

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	2.77E+04	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Vy1	0.00E+00	8.28E+01	0.00E+00	-1.75E+03	0.00E+00	2.07E+05
Vz1	0.00E+00	0.00E+00	6.16E+00	-3.94E+02	-1.54E+04	0.00E+00
Mx1	0.00E+00	-1.75E+03	-3.94E+02	1.17E+05	9.86E+05	-4.37E+06
My1	0.00E+00	0.00E+00	-1.54E+04	9.86E+05	5.13E+07	0.00E+00
Mz1	0.00E+00	2.07E+05	0.00E+00	-4.37E+06	0.00E+00	6.93E+08

Numeriek

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	2,78E+04	-3,30E-06	1,10E-06	-1,34E-04	3,18E+01	-5,42E+01
Vy1	-3,30E-06	8,36E+01	-1,22E-02	-1,76E+03	3,05E+01	2,09E+05
Vz1	1,10E-06	-1,22E-02	6,20E+00	-3,97E+02	-1,55E+04	-3,05E+01
Mx1	-1,34E-04	-1,76E+03	-3,97E+02	1,17E+05	9,92E+05	-4,41E+06
My1	3,18E+01	3,05E+01	-1,55E+04	9,92E+05	5,16E+07	7,59E+04
Mz1	-5,42E+01	2,09E+05	-3,05E+01	-4,41E+06	7,59E+04	6,98E+08

Verschil [%]

	ux1	uy1	uz1	φx1	φy1	φz1
N1	0.30	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!	#DIV/0!
Vy1	#DIV/0!	0.91	#DIV/0!	0.80	#DIV/0!	0.91
Vz1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.77	0.60	0.77	#DIV/0!
Mx1	#DIV/0!	0.80	0.60	0.41	0.60	0.80
My1	#DIV/0!	#DIV/0!	0.77	0.60	0.65	#DIV/0!
Mz1	#DIV/0!	0.91	#DIV/0!	0.80	#DIV/0!	0.75

Opmerkingen

- De nauwkeurigheid van het model is vrijwel gelijk aan die van het model voor het dikkere profiel.
- Door het toepassen van de analytische matrix met afschuifvervorming treedt geen noemenswaardige verbetering op in de nauwkeurigheid van het model bij een liggerlengte van 5 meter.

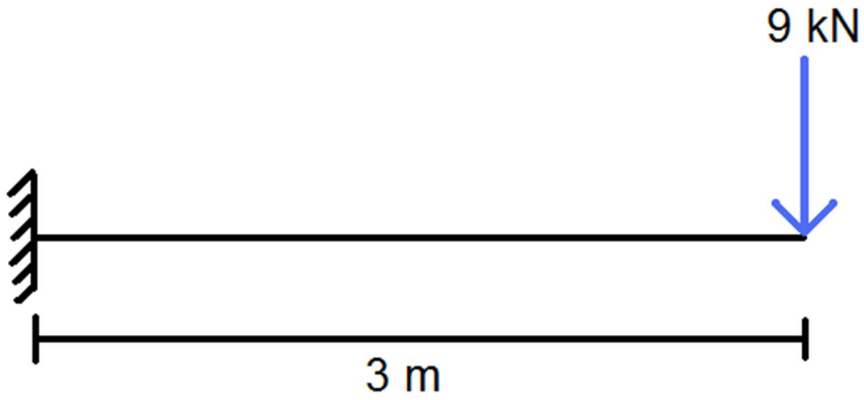
6. Voorbeeld: toepassing vergrotingsfactor voor wringstijfheid

Uit paragraaf 5.1 bleek dat de vergrotingsfactor voor wringstijfheid moet worden toegevoegd om de wringstijfheid van een ligger nauwkeurig te kunnen bepalen. Deze vergrotingsfactor zit echter in geen enkel raamwerkprogramma verwerkt. Om een uitspraak te kunnen doen over eventuele gevolgen hiervan, wordt een simpel voorbeeld gebruikt om de krachten en verplaatsingen met en zonder vergrotingsfactor uit te rekenen.

Het gebruikte Z-profiel met een dikte van 10 mm wordt toegepast in de constructie van een dak. Hiervoor worden de volgende gegevens gebruikt:

- Lengte van het Z-profiel: 3 meter
- Hart op hart afstand van de liggers: 3 meter
- Belasting op het dak: 1 kN/m^2

Normaal gesproken zit de ligger uiteraard vast, maar om het verschil in verplaatsingen te kunnen analyseren zal het profiel als uitkragende ligger worden gemodelleerd. Omdat het model alleen krachten en verplaatsingen aan de uiteinden van de ligger bevat, zal de belasting als een puntlast op de ligger worden gezet. Dit betekent dat de variabele belasting van 3 kN/m wordt vertaald naar een puntlast van 9 kN op het uiteinde van de ligger. De kracht wordt ontbonden in de hoofdtraagheidsrichtingen. Het probleem ziet er dan als volgt uit:



Figuur 15: Geschematiseerd probleem

In deze situatie zijn de verplaatsingen aan de linkerkant en de krachten aan de rechterkant bekend. Door gebruik te maken van de stijfheidsmatrix kunnen de andere 12 onbekenden worden opgelost. Hiervoor wordt Maple gebruikt. De stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming is eerder berekend als K1. Hieruit kunnen 12 vergelijking worden gegenereerd. Vervolgens worden de bekende variabelen ingevoerd en kan het systeem worden opgelost. De uitwerking hiervan volgt in de Maple sheet op de volgende pagina.

Maple sheet

```
> with(LinearAlgebra) :

> f := Matrix([[N1], [Vy1], [Vz1], [Mx1], [My1], [Mz1], [N2], [Vy2], [Vz2], [Mx2], [My2], [Mz2]]) :

> a := Matrix([[ux1], [uy1], [uz1], [φx1], [φy1], [φz1], [ux2], [uy2], [uz2], [φx2], [φy2], [φz2]]) :

> GenerateEquations(K1, [ux1, uy1, uz1, φx1, φy1, φz1, ux2, uy2, uz2, φx2, φy2, φz2], ⟨N1, Vy1, Vz1, Mx1,
      My1, Mz1, N2, Vy2, Vz2, Mx2, My2, Mz2⟩) :

> equations := {%[1], %[2], %[3], %[4], %[5], %[6], %[7], %[8], %[9], %[10], %[11], %[12]} :

>
  ux1 := 0 :
  uy1 := 0 :
  uz1 := 0 :
  φx1 := 0 :
  φy1 := 0 :
  φz1 := 0 :
  N2 := 0 :
  Vy2 := 9000·cos(αT) :
  Vz2 := 9000· sin(αT) :
  Mx2 := 0 :
  My2 := 0 :
  Mz2 := 0 :

> Solutions := solve(equations, {N1, Vy1, Vz1, Mx1, My1, Mz1, ux2, uy2, uz2, φx2, φy2, φz2}) :

> assign(Solutions);

> f;
```

$$\begin{bmatrix} 12 \text{ x } 1 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$$

```
> a;
```

$$\begin{bmatrix} 12 \text{ x } 1 \text{ Matrix} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$$

Dit proces wordt herhaald zonder de vergrotingsfactor en beide oplossingen worden geëxporteerd naar Excel om de verschillen te bepalen.

Krachten

	zonder f	met f	verschil	percentage
N1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
Vy1	-8,64E+03	-8,64E+03	0,00E+00	0,00
Vz1	-2,51E+03	-2,51E+03	0,00E+00	0,00
Mx1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
My1	3,22E+06	3,22E+06	0,00E+00	0,00
Mz1	-1,11E+07	-1,11E+07	0,00E+00	0,00
N2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
Vy2	8,64E+03	8,64E+03	0,00E+00	0,00
Vz2	2,51E+03	2,51E+03	0,00E+00	0,00
Mx2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
My2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
Mz2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00

Verplaatsingen

	zonder f	met f	verschil	percentage
ux1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
uy1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
uz1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
phix1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
phiy1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
phiz1	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
ux2	0,00E+00	0,00E+00	0,00E+00	0,00
uy2	5,35E+00	5,02E+00	-3,32E-01	-6,61
uz2	1,84E+01	1,74E+01	-9,74E-01	-5,60
phix2	1,16E-01	1,00E-01	-1,58E-02	-15,73
phiy2	5,60E-03	5,60E-03	0,00E+00	0,00
phiz2	-1,46E-03	-1,46E-03	0,00E+00	0,00

Uit deze vergelijking blijkt dat de fout in de krachten en verplaatsingen kan oplopen tot 15,73% bij deze lengte van 3m. Bij een lengte van 3 meter is de vergrotingsfactor (met welving aan 1 kant verhinderd) voor de ligger:

> $vergrotingsfactor1kant := \frac{L}{L - lc};$

$vergrotingsfactor1kant := 1.15728897$

Dit werkt zeer direct door in de rotatie om de x-as aan het uiteinde van de ligger, want de vermenigvuldiging met de vergrotingsfactor levert precies de gevonden maximale fout. Daarnaast blijkt dat door het toepassen van de vergrotingsfactor de verplaatsingen en rotaties kleiner worden. Dit was uiteraard te verwachten aangezien de wringstijfheid van de ligger wordt vergroot. Dat betekent gelukkig ook dat het weglaten van de vergrotingsfactor niet onveilig is.

7. Conclusies

Algemeen
De analytische stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming blijkt zeer goed toepasbaar op een Z-profiel. Vanaf liggerlengtes groter dan circa 10 meter levert een numeriek model van de ligger in ANSYS een stijfheidsmatrix die nergens meer dan 1% afwijkt van de analytische stijfheidsmatrix.

Afwijkingen en parameters
Wringstijfheid
Het numerieke model heeft een grotere wringstijfheid dan het analytische model doordat welving hier is verhindert. Afwijkingen in wringstijfheid kunnen tot minder dan 1% worden teruggebracht door de stijfheid te vermenigvuldigen met de vergrotingsfactor $f = \frac{\beta(e^{\beta}+1)}{\beta+2+(\beta-2)e^{\beta}}$ met $\beta = \frac{L}{l_c}$ en $l_c = \sqrt{\frac{EC_w}{GI_w}}$.
Uit een voorbeeld van een uitkragende ligger van 3 meter lang bleek dat de rotatie om de x-as 15% groter is wanneer men geen vergrotingsfactor toepast op de wringstijfheid.

Lengte van de ligger
Vanaf een liggerlengte van 10 meter treden er geen significante veranderingen op in de nauwkeurigheid van het model door de liggerlengte verder te vergroten. Voor liggers van 5 meter en kleiner wordt de gewenste 1% nauwkeurigheid van het model niet gehaald.

Afschuifvervorming
Door afschuifvervorming mee te nemen in de analytische matrix wordt een ligger van 1 meter lengte nauwkeuriger gemodelleerd. Voor het gemodelleerde Z-profiel zijn de gekalibreerde parameters voor afschuifvervorming $k_y = 0,57$ en $k_z = 0,52$. Voor lange liggers levert toepassing van de matrix met afschuifvervorming geen verbetering voor het model.

Dikte van de ligger
Modellering van een Z-profiel met een dikte van 2 mm i.p.v. 10 mm levert een model met vergelijkbare nauwkeurigheid. Ook voor het dunne profiel geldt dat de nauwkeurigheid van een ligger van 1 meter lengte kan worden verbeterd door afschuifvervorming mee te nemen in de analytische stijfheidsmatrix. Voor een ligger van 5 meter lengte levert dit geen noemenswaardige verbeteringen op.

8. Aanbevelingen

De verschillen tussen de numerieke en analytische stijfheidsmatrix van het onderzochte Z-profiel zijn erg klein. Dit betekent dat de analytische stijfheidsmatrix inderdaad gebruikt kan worden voor asymmetrische profielen en de manier van modelleren met volume elementen in ANSYS behoorlijk nauwkeurig is. De gebruikte methode van modelleren zou ook voor andere doeleinden gebruikt kunnen worden, bijvoorbeeld voor het onderzoeken van kip of knik verschijnselen van liggers. Als alternatief zou een modellering met schaalelementen gebruikt kunnen worden.

Daarnaast zou de theorie over de stijfheidsmatrix kunnen worden uitgebreid. Hierbij valt te denken aan het meenemen van de theorie over welving. Zo zou de stijfheidsmatrix kunnen worden uitgebreid met de relatie tussen vervorming door welving en bi-momenten. De vergrotingsfactor voor de wringstijfheid kan verder ook in raamwerkprogramma's worden toegepast.

Wat betreft Z-profielen kan de theorie over afschuifvervorming enige aanvulling gebruiken. Zo ontbreken formules voor afschuifvormfactoren van Z-profielen. Bovendien zijn de vormfactoren niet direct toepasbaar in hoofdrichtingen, het zou handig zijn als men hiervoor een formule ontwikkeld. Hetzelfde geldt voor de formule voor de welvingsconstante C_w. Daarvoor bestaat nog geen formule voor Z-profielen met ongelijke flenslengtes.

Bronnen

Literatuur
Bron, V. (2010), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft

Hoogenboom P.C.J. & Borgart A. (2005), Method for including restrained warping in traditional frame analyses, Heron, Vol. 50 No. 1, blz. 55-68

Hoogenboom, P.C.J. (2008), Aantekeningen over wringing, Gouda: Betonvereniging

Kok, A.W.M. (1991), Numerical Mechanics, The displacement method, Delft: TU Delft

Noort, J.R. van (2009), Bachelor eindwerk: Stijheidsmatrix van asymmetrische profielen, Delft: TU Delft

Simone, A. (2010), An introduction to the analysis of slender structures, Delft: TU Delft

Young, W.C. & Budynas, R.G. (2002), Roark's formulas for stress and strain, New York: McGraw-Hill

Software
ANSYS Academic Teaching Introductory 11.0 (2011), online, http://www.ansys.com/

Maple 13, online, http://www.maplesoft.com/

Microsoft Excel (2007), online, http://office.microsoft.com/en-us/excel/

ShapeDesigner (2011), online, http://www.mechatools.com/

Bijlagen

Bijlage 1: Maple sheet doorsnede eigenschappen
Bijlage 2: Script invoer geometrie ligger
Bijlage 3: Macro voor het opleggen van een verplaatsing of rotatie
Bijlage 4: Macro voor het aflezen van snedekrachten
Bijlage 5: Zelfevaluatie

Bijlage 1: Maple sheet doorsnede eigenschappen

```
> # Invoer maten van het Z-profiel
> restart;
>
```

$$h := 200;$$
$$bf1 := 50;$$
$$tf1 := 10;$$
$$bf2 := 100;$$
$$tf2 := 10;$$
$$tl := 10;$$
$$E := 200000;$$
$$\nu := 0.27;$$
$$b1 := bf2 - 0.5\cdot tl;$$
$$b2 := bf1 - 0.5\cdot tl;$$
$$h1 := h - 0.5\cdot tf1 - 0.5\cdot tf2;$$
$$b := \frac{b1 + b2}{2};$$
$$Cw := 71.997\cdot 10^{8};$$
$$Cw2 := evalf\left(\frac{tl\cdot h1^{2}\cdot b^{3}}{12}\cdot\left(\frac{b + 2\cdot h1}{2\cdot b + h1}\right)\right);$$
$$G := \frac{E}{2\cdot(1+\nu)};$$
$$L := 3000;$$

$$A := (bf1\cdot tf1) + (tl\cdot(h - tf1 - tf2)) + (bf2\cdot tf2);$$

```
> #Berekening NC van de doorsnede
```

$$znc := \frac{(bf1\cdot tf1)\cdot 0.5\cdot tf1 + (tl\cdot(h - tf1 - tf2))\cdot 0.5\cdot h + (bf2\cdot tf2)\cdot(h - 0.5\cdot tf2)}{A};$$

$$ync := \frac{(bf1\cdot tf1)\cdot(0.5\cdot bf1 + bf2 - tl) + (tl\cdot(h - tf1 - tf2))\cdot(bf2 - 0.5\,tl) + (bf2\cdot tf2)\cdot 0.5\,bf2}{A};$$

```
> #Berekening traagheidsmomenten
```

$$Izz := \frac{1}{12}\cdot bf2\cdot tf2^{3} + bf2\cdot tf2\cdot(h - znc - 0.5\cdot tf2)^{2} + \frac{1}{12}\cdot tl\cdot(h - tf1 - tf2)^{3} + tl\cdot(h - tf1 - tf2)\cdot(znc - 0.5\cdot h)^{2} + \frac{1}{12}\cdot bf1\cdot tf1^{3} + bf1\cdot tf1\cdot(znc - 0.5\cdot tf1)^{2};$$

$$Iyy := \frac{1}{12}\cdot tf2\cdot bf2^{3} + bf2\cdot tf2\cdot(ync - 0.5\,bf2)^{2} + \frac{1}{12}\cdot(h - tf1 - tf2)\cdot tl^{3} + tl\cdot(h - tf1 - tf2)\cdot(bf2 - 0.5\cdot tl - ync)^{2} + \frac{1}{12}\cdot tf1\cdot bf1^{3} + bf1\cdot tf1\cdot(0.5\cdot bf1 + bf2 - tl - ync)^{2};$$

$$Iyz := bf2\cdot tf2\cdot(h - znc - 0.5\cdot tf2)\cdot(ync - 0.5\cdot bf2) + tl\cdot(h - tf1 - tf2)\cdot(znc - 0.5\,h)\cdot(bf2 - 0.5\,tl - ync) + bf1\cdot tf1\cdot(znc - 0.5\cdot tf1)\cdot(0.5\cdot bf1 + bf2 - tl - ync);$$

$$\alpha T := \frac{1}{2}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{2\,Iyz}{Izz - Iyy}\right);$$

$$hoek1 := \frac{\alpha T}{2\cdot 3.1415926535}\cdot 360;$$

> $Ieen := \frac{Iyy + Izz}{2} + \frac{\sqrt{(Iyy - Izz)^2 + 4 \cdot Iyz^2}}{2};$

> $Itwee := \frac{Iyy + Izz}{2} - \frac{\sqrt{(Iyy - Izz)^2 + 4 \cdot Iyz^2}}{2};$

> *#dunwandig profiel (b >>h)*

> $Iw1 := \frac{1}{3} \cdot (bf1 - 0.5 \cdot tl) \cdot tf1^3 + \frac{1}{3} \cdot (h - 0.5 \cdot tf1 - 0.5 \cdot tf2) \cdot tl^3 + \frac{1}{3} \cdot (bf2 - 0.5 \cdot tl) \cdot tf2^3;$

> *#Aangepast aan redelijke dikte (b >h)*

> $Iw2 := 0.292 \cdot (bf1 - 0.5 \cdot tl) \cdot tf1^3 + 0.318 \cdot (h - 0.5 \cdot tf1 - 0.5 \cdot tf2) \cdot tl^3 + 0.314 \cdot (bf2 - 0.5 \cdot tl) \cdot tf2^3;$

> $lc := \sqrt{\frac{E \cdot Cw}{G \cdot Iw1}};$

> $\beta v := \frac{L}{lc};$

> $vergrotingsfactor := \frac{\beta v \cdot (e^{\beta v} + 1)}{\beta v + 2 + (\beta v - 2) \cdot e^{\beta v}};$

> $vergrotingsfactor2 := \frac{L}{L - 2 \cdot lc};$

> $vergrotingsfactor1kant := \frac{L}{L - lc};$

> $Iw1nieuw := vergrotingsfactor1kant \cdot Iw1;$

>

> ***# Berekening DC van de doorsnede***

> $EIyy := E \cdot Iyy;\ EIzz := E \cdot Izz;\ EIyz := E \cdot Iyz;\ zncdun := znc - 0.5 \cdot tf1;\ yncdun := ync;$

> *#Belastingsgeval 1 : My = 1,0 Nmm; Mz = 0 Nmm; Vy = 1,0 N; Vz = 0 N*

> $\kappa y := \frac{EIzz}{EIyy \cdot EIzz - EIyz^2};\ \kappa z := \frac{-EIyz}{EIyy \cdot EIzz - EIyz^2};$

>

```
with(plots):
G1 := plot(25, x = 0..b1, legend = "dunwandig profiel", axes = none):
H1 := plot(h1 + 25, x = b1..(b1 + b2)):
J1 := plot((-κy·(x - yncdun))/κz + (h1 - zncdun) + 25, x = 0..(b1 + b2), y = 0..(h1 + 50), linestyle = dash, color
      = blue, legend = "neutrale lijn", title = "Ligging van de Neutrale lijn in de doorsnede bij BG 1"):
K1 := plot((h1 - zncdun) + 25, x = (yncdun - 2)..(yncdun + 2), color = black, thickness = 10, legend = "NC"):
L1 := plot([b1, y, y = 25..(h1 + 25)]):
display({G1, H1, J1, K1, L1});
```

> #Normaalspanningen

>

$$\sigma A := E\cdot(\kappa y\cdot yncdun + \kappa z\cdot(h1 - zncdun));$$
$$\sigma B := E\cdot(\kappa y\cdot(yncdun - b1) + \kappa z\cdot(h1 - zncdun));$$
$$\sigma C := E\cdot(\kappa y\cdot(yncdun - b1) + \kappa z\cdot(-zncdun));$$
$$\sigma D := E\cdot(\kappa y\cdot(yncdun - b1 - b2) + \kappa z\cdot(-zncdun));$$
$$f1 := \sigma A - \frac{(abs(\sigma A) + abs(\sigma B))}{b1}\cdot m;$$
$$f2 := \sigma B + \frac{(abs(\sigma B) + abs(\sigma C))}{h1}\cdot m;$$
$$f3 := \sigma C - \frac{(abs(\sigma C) + abs(\sigma D))}{b2}\cdot m;$$

plot(f1, m = 0..b1, title = "Normaalspanning in deel AB");
plot(f2, m = 0..h1, title = "Normaalspanning in deel BC");
plot(f3, m = 0..b2, title = "Normaalspanning in deel CD");

> #Schuifstromen

> $sAB := -tf2\int f1\,dm$: plot(sAB, m = 0..b1, title = "Schuifstroom in AB"); $sxB := -tf2\int_0^{b1} f1\,dm;$

> $sBC := sxB - tl\int f2\,dm$: plot(sBC, m = 0..h1, title = "Schuifstroom in BC"); $sxC := sxB - tl\int_0^{h1} f2\,dm;$

>

$sCD := sxC - tf1\int f3\,dm$:

plot(sCD, m = 0..b2, title = "Schuifstroom in CD");

$sxD := sxC - tf1\int_0^{b2} f3\,dm;$

#Deze schuifstroom moet gelijk zijn aan 0

>

> #Resulterende krachten (op 2 manieren)

> $Rab := \int_0^{b1} sAB\,dm;\ Rab2 := \int_0^{b1} -tf2\cdot m\cdot\left(\sigma A + \frac{0.5\cdot(\sigma B - \sigma A)\cdot m}{b1}\right)dm;$

> $Rbc := \int_0^{h1} sBC\,dm;\ Rbc2 := \int_0^{h1} sxB - tl\cdot m\cdot\left(\sigma B + \frac{0.5\cdot(\sigma C - \sigma B)\cdot m}{h1}\right)dm;$

> $Rcd := \int_0^{b2} sCD\,dm;\ Rcd2 := \int_0^{b2} sxC - tf1\cdot m\cdot\left(\sigma C + \frac{0.5\cdot(\sigma D - \sigma C)\cdot m}{b2}\right)dm;$

> #Resultate kracht in z −richting moet gelijk zijn aan Vz=0 N $Rresz := Rbc;$

> #Resultate kracht in y −richting moet gelijk zijn aan Vy=-1,0 N $Rresy := Rab + Rcd;$

> #afstand DC vanaf de bovenkant van de doorsnede

> $ey1 := -Rab\cdot h1 + 0.5\cdot tf1;\ ey2 := h1 - abs(Rcd)\cdot h1 + 0.5\cdot tf1;$

> #Belastingsgeval 2 : My = 0 Nmm; Mz = 1,0 Nmm; Vy = 0 N; Vz = 1,0 N

> $\kappa y2 := \frac{-EIyz}{EIyy \cdot EIzz - EIyz^2}$; $\kappa z2 := \frac{EIyy}{EIyy \cdot EIzz - EIyz^2}$;

>
```
with(plots):
G2 := plot(25, x = 0..b1, legend = "dunwandig profiel", axes = none):
H2 := plot(h1 + 25, x = b1..(b1 + b2)):
J2 := plot((-κy2·(x - yncdun)) / κz2 + (h1 - zncdun) + 25, x = 0..(b1 + b2 + 15), y = 0..(h1 + 50), linestyle
    = dash, color = blue, legend = "neutrale lijn", title = "Ligging van de Neutrale lijn in de doorsnede bij BG 2"):
K2 := plot((h1 - zncdun) + 25, x = (yncdun - 2)..(yncdun + 2), color = black, thickness = 10, legend = "NC"):
L2 := plot([b1, y, y = 25..(h1 + 25)]):
display({G2, H2, J2, K2, L2});
```

> #Normaalspanningen

>
```
σA2 := E·(κy2·yncdun + κz2·(h1 - zncdun));
σB2 := E·(κy2·(yncdun - b1) + κz2·(h1 - zncdun));
σC2 := E·(κy2·(yncdun - b1) + κz2·(-zncdun));
σD2 := E·(κy2·(yncdun - b1 - b2) + κz2·(-zncdun));
f12 := σA2 + (abs(σA2) + abs(σB2)) / b1 ·m;
f22 := σB2 - (abs(σB2) + abs(σC2)) / h1 ·m;
f32 := σC2 + (abs(σC2) - abs(σD2)) / b2 ·m;
plot(f12, m = 0..b1, title = "Normaalspanning in deel AB");
plot(f22, m = 0..h1, title = "Normaalspanning in deel BC");
plot(f32, m = 0..b2, title = "Normaalspanning in deel CD");
```

> #Schuifstromen

> $sAB2 := -tf2\int f12\,dm$: plot(sAB2, m = 0..b1, title = "Schuifstroom in AB"); $sxB2 := -tf2\int_0^{b1} f12\,dm$;

> $sBC2 := sxB2 - tl\int f22\,dm$: plot(sBC2, m = 0..h1, title = "Schuifstroom in BC"); $sxC2 := sxB2 - tl\int_0^{h1} f22\,dm$;

>
```
sCD2 := sxC2 - tf1∫f32 dm :
plot(sCD2, m = 0..b2, title = "Schuifstroom in CD");
sxD2 := sxC2 - tf1∫_0^b2 f32 dm;
#Deze schuifstroom moet gelijk zijn aan 0
```

>

> #Resulterende krachten (op 2 manieren)

> $Rab2 := \int_0^{b1} sAB2\,dm$; $Rab22 := \int_0^{b1} -tf2 \cdot m \cdot \left(\sigma A2 + \frac{0.5 \cdot (\sigma B2 - \sigma A2) \cdot m}{b1}\right) dm$;

```
> Rbc2 := int(sBC2, m = 0 .. h1): Rbc22 := int(sxB2 - tl*m*(σB2 + 0.5*(σC2 - σB2)*m/h1), m = 0 .. h1):
> Rcd2 := int(sCD2, m = 0 .. b2): Rcd22 := int(sxC2 - tf1*m*(σC2 + 0.5*(σD2 - σC2)*m/b2), m = 0 .. b2):
> #Resultate kracht in z  -richting moet gelijk zijn aan Vz=-1,0 N   Rresz := Rbc2;
> #Resultate kracht in y  -richting moet gelijk zijn aan Vy=0 N   Rresy := Rab2 + Rcd2;
> #afstand DC vanaf de linkerkant van de doorsnede (het uiteinde van de onderflens)
>  ez1 := b1 - abs(Rcd2)*h1;  ez2 := b1 - abs(Rab2)*h1;
> #Verschil tussen NC en DC
> eygem := (ey1 + ey2)/2: ezgem := (ez1 + ez2)/2: ezrecht := ezgem - ync: eyrecht := znc - eygem:
> #coordinaten knopen (ANSYS)
> #recht
>
y1 := -(h - znc):
z1 := -ync:
y2 := -(h - znc):
z2 := bf2 - ync:
y3 := h - tf1 - (h - znc):
z3 := bf2 - ync:
y4 := h - tf1 - (h - znc):
z4 := bf2 + bf1 - tl - ync:
y5 := h - (h - znc):
z5 := bf2 + bf1 - tl - ync:
y6 := h - (h - znc):
z6 := bf2 - tl - ync:
y7 := tf2 - (h - znc):
z7 := bf2 - tl - ync:
y8 := tf2 - (h - znc):
z8 := -ync:
yDC := eyrecht:
zDC := ezrecht:

> k, 1, 0, y1, z1: k, 2, 0, y2, z2: k, 3, 0, y3, z3: k, 4, 0, y4, z4: k, 5, 0, y5, z5: k, 6, 0, y6, z6: k, 7, 0, y7, z7: k, 8, 0, y8, z8:
>
points1 := [[z1, y1], [z2, y2], [z3, y3], [z4, y4], [z5, y5], [z6, y6], [z7, y7], [z8, y8], [z1, y1]]:
O1 := plot(points1, z = -(0.5*h + 20) .. 0.5*h + 20, y = -(0.5*h + 20) .. 0.5*h + 20, style = line):
P1 := plot(0, x = -2 .. 2, color = black, thickness = 7, legend = "NC"):
Q1 := plot(yDC, x = zDC - 2 .. zDC + 2, color = blue, thickness = 7, legend = "DC"):
display({O1, P1, Q1});

> #geroteerd naar hoofdtraagheidsassen
```

>

$$\beta T := \frac{3.1415926535 - \alpha T}{2}:$$

$$a1 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y1^2 + z1^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 1 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z1}{y1}\right)\right):$$
$$\gamma 1 := 3.1415926535 - \alpha 1 - \beta T:$$

$$a2 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y2^2 + z2^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 2 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{y2}{z2}\right)\right):$$
$$\gamma 2 := 3.1415926535 - \alpha 2 - \beta T:$$

$$a3 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y3^2 + z3^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 3 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z3}{y3}\right)\right):$$
$$\gamma 3 := 0.5\cdot 3.1415926535 - \alpha 3 - \beta T:$$

$$a4 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y4^2 + z4^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 4 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z4}{y4}\right)\right):$$
$$\gamma 4 := 3.1415926535 - \alpha 4 - \beta T:$$

$$a5 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y5^2 + z5^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 5 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z5}{y5}\right)\right):$$
$$\gamma 5 := 3.1415926535 - \alpha 5 - \beta T:$$

$$a6 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y6^2 + z6^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 6 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z6}{y6}\right)\right):$$
$$\gamma 6 := 0.5\cdot 3.1415926535 - \alpha 6 - \beta T:$$

$$a7 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y7^2 + z7^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 7 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{y7}{z7}\right)\right):$$
$$\gamma 7 := 3.1415926535 - \alpha 7 - \beta T:$$

$$a8 := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{y8^2 + z8^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha 8 := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{z8}{y8}\right)\right):$$
$$\gamma 8 := 3.1415926535 - \alpha 8 - \beta T:$$

$$aDC := \sin(\alpha T)\cdot\frac{\sqrt{yDC^2 + zDC^2}}{\sin(\beta T)}:$$
$$\alpha DC := \tan^{-1}\left(\mathrm{abs}\left(\frac{yDC}{zDC}\right)\right):$$
$$\gamma DC := 3.1415926535 - \alpha DC - \beta T:$$

```
>
y1R := y1 - cos(γ1)·a1:
z1R := z1 + sin(γ1)·a1:
y2R := y2 + sin(γ2)·a2:
z2R := z2 + cos(γ2)·a2:
y3R := y3 - sin(γ3)·a3:
z3R := z3 - cos(γ3)·a3:
y4R := y4 + cos(γ4)·a4:
z4R := z4 - sin(γ4)·a4:
y5R := y5 + cos(γ5)·a5:
z5R := z5 - sin(γ5)·a5:
y6R := y6 - sin(γ6)·a6:
z6R := z6 - cos(γ6)·a6:
y7R := y7 + sin(γ7)·a7:
z7R := z7 + cos(γ7)·a7:
y8R := y8 - cos(γ8)·a8:
z8R := z8 + sin(γ8)·a8:
yDCR := yDC + sin(γDC)·aDC:
zDCR := zDC + cos(γDC)·aDC:

>
k, 1, 0, y1R, z1R;
k, 2, 0, y2R, z2R;
k, 3, 0, y3R, z3R;
k, 4, 0, y4R, z4R;
k, 5, 0, y5R, z5R;
k, 6, 0, y6R, z6R;
k, 7, 0, y7R, z7R;
k, 8, 0, y8R, z8R;

>
points2 := [[z1R, y1R], [z2R, y2R], [z3R, y3R], [z4R, y4R], [z5R, y5R], [z6R, y6R], [z7R, y7R], [z8R, y8R], [z1R,
    y1R]]:
O2 := plot(points2, z = -2/3 h .. 2/3 h, y = -2/3 h .. 2/3 h, style = line):
P2 := plot(0, x = -2..2, color = black, thickness = 7, legend = "NC"):
Q2 := plot(yDCR, x = zDCR - 2..zDCR + 2, color = blue, thickness = 7, legend = "DC"):
display({O2, P2, Q2});

>
```

> *#Stijfheidsmatrix zonder afschuifvervorming*

> $EA := E \cdot A;\ EIy := E \cdot Itwee;\ EIz := E \cdot Ieen;\ Iw := IwInieuw;\ ey := yDCR;\ ez := zDCR;$

>

$$K1 := \text{Matrix}\left(\left[\left[\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0\right], \left[0, \frac{12\,EIz}{L^3}, 0, -\frac{12\,ez\cdot EIz}{L^3}, 0, \frac{6\,EIz}{L^2}, 0, -\frac{12\,EIz}{L^3}, 0, \frac{12\,ez\cdot EIz}{L^3}, 0, \frac{6\,EIz}{L^2}\right], \left[0, 0, \frac{12\,EIy}{L^3}, \frac{12\cdot ey\cdot EIy}{L^3}, -\frac{6\,EIy}{L^2}, 0, 0, 0, -\frac{12\,EIy}{L^3}, -\frac{12\cdot ey\cdot EIy}{L^3}, -\frac{6\,EIy}{L^2}, 0\right], \left[0, -\frac{ez\cdot 12\cdot EIz}{L^3}, \frac{ey\cdot 12\cdot EIy}{L^3}, \frac{G\cdot Iw}{L} + \frac{ez^2\cdot 12\,EIz}{L^3} + \frac{ey^2\cdot 12\,EIy}{L^3}, -\frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, -\frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, \frac{ez\cdot 12\cdot EIz}{L^3}, -\frac{ey\cdot 12\cdot EIy}{L^3}, -\frac{G\cdot Iw}{L} - \frac{ez^2\cdot 12\,EIz}{L^3} - \frac{ey^2\cdot 12\,EIy}{L^3}, -\frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, -\frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}\right], \left[0, 0, -\frac{6\,EIy}{L^2}, -\frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{4\,EIy}{L}, 0, 0, 0, \frac{6\,EIy}{L^2}, \frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{2\,EIy}{L}, 0\right], \left[0, \frac{6\,EIz}{L^2}, 0, -\frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, \frac{4\,EIz}{L}, 0, -\frac{6\,EIz}{L^2}, 0, \frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, \frac{2\,EIz}{L}\right], \left[-\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0\right], \left[0, -\frac{12\,EIz}{L^3}, 0, \frac{12\,ez\cdot EIz}{L^3}, 0, -\frac{6\,EIz}{L^2}, 0, \frac{12\,EIz}{L^3}, 0, -\frac{12\,ez\cdot EIz}{L^3}, 0, -\frac{6\,EIz}{L^2}\right], \left[0, 0, -\frac{12\,EIy}{L^3}, -\frac{12\,ey\cdot EIy}{L^3}, \frac{6\,EIy}{L^2}, 0, 0, 0, \frac{12\,EIy}{L^3}, \frac{12\,ey\cdot EIy}{L^3}, \frac{6\,EIy}{L^2}, 0\right], \left[0, \frac{ez\cdot 12\cdot EIz}{L^3}, -\frac{ey\cdot 12\cdot EIy}{L^3}, -\frac{G\cdot Iw}{L} - \frac{ez^2\cdot 12\,EIz}{L^3} - \frac{ey^2\cdot 12\,EIy}{L^3}, \frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, -\frac{ez\cdot 12\cdot EIz}{L^3}, \frac{ey\cdot 12\cdot EIy}{L^3}, \frac{G\cdot Iw}{L} + \frac{ez^2\cdot 12\,EIz}{L^3} + \frac{ey^2\cdot 12\,EIy}{L^3}, \frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}\right], \left[0, 0, -\frac{6\,EIy}{L^2}, -\frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{2\,EIy}{L}, 0, 0, 0, -\frac{6\,EIy}{L^2}, -\frac{ey\cdot 6\cdot EIy}{L^2}, \frac{4\,EIy}{L}, 0\right], \left[0, \frac{6\,EIz}{L^2}, 0, -\frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, \frac{2\,EIz}{L}, 0, \frac{6\,EIz}{L^2}, 0, -\frac{ez\cdot 6\cdot EIz}{L^2}, 0, \frac{4\,EIz}{L}\right]\right]\right);$$

> *#Stijfheidsmatrix met afschuifvervorming*

>

$ky := 0.57;$

$kz := 0.52;$

$$\lambda y := \left(\frac{L^2}{12\cdot EIz} + \frac{1}{ky\cdot G\cdot A}\right)^{-1};$$

$$\lambda z := \left(\frac{L^2}{12\cdot EIy} + \frac{1}{kz\cdot G\cdot A}\right)^{-1};$$

$$py := \frac{EIz}{L} + \frac{1}{4}\cdot\lambda y\cdot L;$$

$$\text{pz} := \frac{EIy}{L} + \frac{1}{4}\cdot\lambda z\cdot L;$$

$$qy := \frac{EIz}{L} - \frac{1}{4}\cdot\lambda y\cdot L;$$

$$qz := \frac{EIy}{L} - \frac{1}{4}\cdot\lambda z\cdot L;$$

$$\mu l := \frac{G\cdot Iw + \lambda z\cdot ey^2 + \lambda y\cdot ez^2}{L};$$

```
>
```

$$K2 := \mathrm{Matrix}\left(\left[\left[\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0\right], \left[0, \frac{\lambda y}{L}, 0, -\frac{ez\cdot\lambda y}{L}, 0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, -\frac{\lambda y}{L}, 0, \frac{ez\cdot\lambda y}{L}, 0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y\right], \left[0, 0, \frac{\lambda z}{L}, \frac{ey\cdot\lambda z}{L}, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, 0, 0, 0, -\frac{\lambda z}{L}, -\frac{ey\cdot\lambda z}{L}, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, 0\right], \left[0, -\frac{ez\cdot\lambda y}{L}, \frac{ey\cdot\lambda z}{L}, \mu 1, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, \frac{ez\cdot\lambda y}{L}, -\frac{ey\cdot\lambda z}{L}, -\mu 1, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y\right], \left[0, 0, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, pz, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\cdot\lambda z, \frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, -qz, 0\right], \left[0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, py, 0, -\frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, \frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, -qy\right], \left[-\frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{EA}{L}, 0, 0, 0, 0, 0\right], \left[0, -\frac{\lambda y}{L}, 0, \frac{ez\cdot\lambda y}{L}, 0, -\frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, \frac{\lambda y}{L}, 0, -\frac{ez\cdot\lambda y}{L}, 0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y\right], \left[0, 0, -\frac{\lambda z}{L}, -\frac{ey\cdot\lambda z}{L}, \frac{1}{2}\cdot\lambda z, 0, 0, 0, \frac{\lambda z}{L}, \frac{ey\cdot\lambda z}{L}, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, 0\right], \left[0, \frac{ez\cdot\lambda y}{L}, -\frac{ey\cdot\lambda z}{L}, -\mu 1, \frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, \frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, -\frac{ez\cdot\lambda y}{L}, \frac{ey\cdot\lambda z}{L}, \mu 1, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y\right], \left[0, 0, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, -qz, 0, 0, 0, -\frac{1}{2}\cdot\lambda z, -\frac{1}{2}\cdot ey\cdot\lambda z, \mathrm{pz}, 0\right], \left[0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, -qy, 0, \frac{1}{2}\cdot\lambda y, 0, -\frac{1}{2}\cdot ez\cdot\lambda y, 0, py\right]\right];$$

```
> with(LinearAlgebra):
> f := Matrix([[N1], [Vy1], [Vz1], [Mx1], [My1], [Mz1], [N2], [Vy2], [Vz2], [Mx2], [My2], [Mz2]]):
> a := Matrix([[ux1], [uy1], [uz1], [φx1], [φy1], [φz1], [ux2], [uy2], [uz2], [φx2], [φy2], [φz2]]):
> GenerateEquations(K1, [ux1, uy1, uz1, φx1, φy1, φz1, ux2, uy2, uz2, φx2, φy2, φz2], ⟨N1, Vy1, Vz1, Mx1, My1, Mz1,
      N2, Vy2, Vz2, Mx2, My2, Mz2⟩):
> equations := {%[1], %[2], %[3], %[4], %[5], %[6], %[7], %[8], %[9], %[10], %[11], %[12]}:
>
  ux1 := 0:
  uy1 := 0:
  uz1 := 0:
  φx1 := 0:
  φy1 := 0:
  φz1 := 0:
  N2 := 0:
  Vy2 := evalf(9000·cos(αT));
  Vz2 := evalf(9000·sin(αT));
  Mx2 := 0:
  My2 := 0:
  Mz2 := 0:

> Solutions := solve(equations, {N1, Vy1, Vz1, Mx1, My1, Mz1, ux2, uy2, uz2, φx2, φy2, φz2}):
> assign(Solutions);
> f;
> a;
```

Bijlage 2: Script invoer geometrie ligger

```
/prep7
et,1,45
mp,ex,1,2e5
mp,prxy,1,0.29
k, 1, 0, -105.7164338, -57.22560832
k, 2, 0, -77.87724419, 38.82114863
k, 3, 0, 104.6115940, -14.07331164
k, 4, 0, 115.7472698, 24.34539114
k, 5, 0, 125.3519455, 21.56147211
k, 6, 0, 111.4323507, -26.46190629
k, 7, 0, -71.05648746, 26.43255398
k, 8, 0, -96.11175810, -60.00952728
a,1,2,3,4,5,6,7,8
vext,1,3,1,5000,,
lesize,1,5
lesize,2,5
lesize,3,5
lesize,4,5
lesize,5,5
lesize,6,5
lesize,7,5
lesize,8,5
lesize,9,5
lesize,10,5
lesize,11,5
lesize,12,5
lesize,13,5
lesize,14,5
lesize,15,5
lesize,16,5
lesize,17,50
lesize,18,50
lesize,19,50
lesize,20,50
lesize,21,50
lesize,22,50
lesize,23,50
lesize,24,50
vsweep,1
```

Bijlage 3: Macro voor het opleggen van een verplaatsing of rotatie

```
! ANSYS macro
! φx = 1

/PMACRO
*Get,nnode,NODE,,num,max      !Bepaal het totaal aantal knopen
NSEL,S,P                      !Node-select tool om de knopen te selecteren op het scherm
*DO,i,1,nnode                 !Doe voor knoop 1 tot knoop nnodes (de laatste knoop)
  *GET,t,NODE,i,NSEL          !Kijk of de knoop geselecteerd is (1 = ges., -1 = niet ges.)
  *IF,t,EQ,1,then             !Als de knoop geselecteerd is
    *GET,zc,NODE,i,LOC,Z      !Bepaal de z coordinaat van de knoop
    *GET,yc,NODE,i,LOC,Y      !Bepaal de y coordinaat van de knoop
    D,i,Ux,0
    D,i,Uy,-zc
    D,i,Uz,yc
  *ENDIF
*ENDDO
NSEL,ALL
```

Bijlage 4: Macro voor het aflezen van de snedekrachten

```
! ANSYS macro
! Bereken de krachten en moment in een doorsnede loodrecht op de x-as
! N= Normaalkracht, Dy, Dz = Dwarskrachten, My, Mz, Mx = Momenten
/NOPR                                   !Geen output
/PMACRO
*GET,nnode,node,,num,max                !Bepaal het totaal aantal knopen
NSEL,S,P                                !Node-select tool om de knopen te selecteren op het scherm
*SET,N,0                                !Definieer parameters voor de snede krachten
*SET,Dy,0
*SET,Dz,0
*SET,My,0
*SET,Mz,0
*SET,Mx,0
*DO,i,1,nnode                           !Doe voor knoop 1 tot knoop nnodes
*GET,t,NODE,i,NSEL                      !Kijk of de knoop geselecteerd is
  *IF,t,EQ,1,then                       !Als de knoop geselecteerd is
    *GET,y,NODE,i,LOC,Y                 !Bepaal de y coördinaat van de knoop
    *GET,z,NODE,i,LOC,Z                 !Bepaal de z coördinaat van de knoop
    *Set,Rx,0                           !Definieer reactiekrachten
    *Set,Ry,0
    *GET,Rx,NODE,i,Rf,FX                !Bepaal de reactiekracht van knoop i in x-richting
    *GET,Ry,NODE,i,Rf,FY                !Bepaal de reactiekracht van knoop i in y-richting
    *GET,Rz,NODE,i,Rf,FZ                !Bepaal de reactiekracht van knoop i in z-richting
    *SET,N,N+Rx                         !Tel de kracht op bij het totaal
    *SET,Dy,Dy+Ry
    *SET,Dz,Dz+Rz
    *SET,My,My+z*Rx
    *SET,Mz,Mz-y*Rx
    *SET,Mx,Mx+y*Rz-z*Ry
  *ENDIF
*ENDDO
/GO                                     !Output weer aan
*SET,N,N
*SET,Dy,Dy
*SET,Dz,Dz
*SET,Mx,Mx
*SET,My,My
*SET,Mz,Mz
/NOPR
NSEL,ALL
```

Bijlage 5: Zelfevaluatie

Onderwerp
Achteraf ben ik nog steeds blij met de keuze van mijn onderwerp. Tijdens de hele periode van het bachelor eindwerk heb ik nooit het gevoel gehad dat het niet boeiend of niet uitdagend genoeg was. Daarnaast was het voor mij vanaf het begin duidelijk wat ik ging doen, waardoor het opstarten van het eindwerk vooral uit het leren omgaan met de gebruikte software bestond en minder met het afbakenen van het onderwerp.

Voorkennis
Voor het grootste deel van het onderzoek bleek de voorkennis uit de mechanica vakken in de bachelor voldoende. Verder bleek dat de minor Bend&Break en de keuzevakken van structural engineering erg handig waren. Zo is in de Bend&break minor de theorie over wringing uitgebreid behandeld en levert Constructiemechanica 4 de nodige kennis over de doorsnede eigenschappen van inhomogene doorsneden. Aanvullingen uit andere literatuur waren verder nodig voor het gebruik van 1 matrix voor alle stijfheidsrelaties van de ligger en de theorie over afschuifvervorming.

Studielast
De studielast van het bachelor eindwerk is mij behoorlijk mee gevallen. Ik heb niet de volle 280 uur die voor het vak staan nodig gehad om alle aspecten die ik vooraf heb gekozen te onderzoeken. Daarbij denk ik dat het voor mij handig was dat sommige problemen met de modellering al door andere studenten, in eerdere eindwerken zijn opgelost. Hierdoor kon ik mij vooral richten op het probleem zelf, zonder vast te lopen op allerlei aspecten bij het modelleren. Verder bleek de planning die ik in week 1 heb opgezet goed haalbaar. De werklast van het eindwerk was hierdoor goed verdeeld over de weken.

Begeleiding
Vergeleken met de andere vakken in de bachelor, vereist het bachelor eindwerk veel meer zelfstandigheid. Behalve de deadlines voor de startnotitie, tussenpeiling en het eindverslag staat er niet veel vast. Deze vrijheid vond ik eigenlijk zeer prettig. Door zelf om assistentie te vragen wanneer dat nodig was en goed te plannen heb ik het nergens te druk gehad in een bepaalde week. Dat is in andere perioden met meerdere vakken en projecten tegelijk ook wel eens anders geweest.
Op de volgende pagina's volgen per gesprek met de begeleiders de belangrijkste punten van wat er besproken is. De meeste gesprekken gingen over specifieke vragen over de modellering of de resultaten van het onderzoek.

Startnotitie (week 1)

- Startnotitie ok.
- De planning kan wellicht nog veranderen, maar een eerste opzet is goed.
- Omdat al eerder bachelor eindwerken over de stijfheidsmatrix van een ligger zijn gemaakt zal dit werk zich meer toespitsen op de complexiteit van een volledig asymmetrisch profiel en minder op de manier van modelleren (omdat de opzet daarvoor al is gemaakt).
- Voldoende tijd besteden aan vertrouwd raken met de software is belangrijk.

Assistentie week 3

- Oorsprong van het numerieke model moet in het NC liggen om de resultaten te kunnen vergelijken met het analytische model.
- Uitzoeken van manieren om het mesh van het numerieke model aan te kunnen passen om ook voor een Z-profiel rechthoekige elementen te kunnen gebruiken.

Tussenpeiling (week 4)

- Zelfstandigheid goed, werk op schema
- Nauwkeurigheid van minder dan 1% -> uitzoeken welk mesh daarvoor haalbaar is, maar ook hogere orde elementen (om de nauwkeurigheid met minder rekenwerk te halen). Numerieke nauwkeurigheid kan getest worden aan de hand van extensie.
- Rotatie van de doorsnede zou bij de lineaire berekening niet op alleen torsie voor verschillen kunnen zorgen. Er is dan waarschijnlijk ook geen evenwicht. Afwijking zou volledig door welving kunnen komen -> onderzoeken aan de hand van het langer maken van de ligger (verschil neemt af), of het dunner maken van de doorsnede (verschil neemt toe).
- Elementen kunnen langer zijn in lengterichting, het bezwaar van verlies van nauwkeurigheid door hele grote en hele kleine getallen in de stijfheidsmatrix van ANSYS gaat niet meer zo op, omdat de computers nu met 16 digits nauwkeurigheid rekenen.
- Bepalen van hoe nauwkeurig het mesh moet zijn kan via halveren van elementgrootte.
- Volgende gezamenlijke bespreking begin juni (2-3 weken verder)

Verdere aanpak voor analyses:

1. Elementtype
2. Elementgrootte
3. Met het juiste mesh welving onderzoeken (lengte richting variëren, kleine rotaties)
4. Andere doorsnede eigenschappen variëren
5. Afschuifvervorming

Assistentie week 5

- Fout in wringingsterm opgelost door vergrotingsfactor (verhinderde welving).
- Parameterstudie voor aspecten als lengte en dikte van het model en de invloed daarvan op de nauwkeurigheid is interessant.

Assistentie week 6

- Werk op schema, vrijwel alle aspecten onderzocht
- Vergrotingsfactor is anders voor kleine lengtes (artikel in Heron)
- Mesh in lengte richting is wellicht voor het dunne profiel niet nauwkeurig genoeg
- Verbetering van alleen termen uit de stijfheidsmatrix die e_z bevatten hoeft geen patroon te zijn, ze kunnen binnen de ruis vallen (te zien aan de extensie term)
- Matrices van parameter studie hoeven niet in de bijlage

Bespreking concept eindrapport week 7

- Het eindrapport zou er duidelijker op worden als het meer plaatjes bevat. Zo zou een plaatje van het mesh de vele verschillende analyses verduidelijken.
- Aanbevelingen en conclusies zijn nog te voorzichtig geformuleerd.
- C_w is de welvingsconstante, het feit dat de formule hiervoor niet goed werkte kan leiden tot een aanbeveling om dit te verbeteren.
- Randvoorwaarden en verificatie van het model horen voor de analyses met elementtype en elementgrootte, omdat ze hier al gebruikt worden.
- Het hoofdstuk resultaten kan beter uitwerking, parameter studie of gevoeligheidsanalyse heten omdat er niet alleen resultaten worden gepresenteerd.
- Resultaten van het gebruik van de vergrotingsfactor voor wringstijfheid kunnen verduidelijkt worden met een voorbeeld van de gevolgen van het weglaten van deze factor. Hiervoor kan een uitkragende ligger met het Z-profiel worden gebruikt.
- Conclusies moeten enigszins herschreven worden en verwijzen naar een nieuw hoofdstuk met het voorbeeld