Bachelor eindwerk

Spanningen in de koepel van Florence



TU Delft Delft University of Technology

Bachelor eindwerk

Student
Christine Yip

Studienummer
1511122

Juli 2012

Eindversie

Rapport

Hoofdbegeleider
Dr.Ir. P.C.J. Hoogenboom

Begeleider
Ir. S. Pasterkamp

Richting
Constructiemechanica

Inhoud

1. Inleiding 5
2. De koepel van Florence 6
   - 2.1 Achtergrondinformatie 6
   - 2.2 De vorm van de koepel 6
     - 2.2.1 Een octogonale vorm 6
     - 2.2.2 Een spitse vijfde boog (*pointed fifth arch*) 6
   - 2.3 De afmetingen van de koepel 7
     - 2.3.1 De diameter van de koepel 7
     - 2.3.2 De diktes van de schillen 7
     - 2.3.3 De hoogte van de koepel 7
   - 2.4 De constructie van de koepel 7
     - 2.4.1 Ribben 7
     - 2.4.2 Visgraatpatroon in het metselwerk (*herring-bone*) 8
     - 2.4.3 Een ronde koepel binnen de octagonale koepel 9
     - 2.4.4 Kettingen van zandsteen 10
     - 2.4.5 Ketting van hout 11
   - 2.5 Uitgangspunten belastingen 11
   - 2.6 Uitgangspunten sterkte materialen 12
3. Krachtswerking 13
   - 3.1 Krachtswerking in de koepel 13
   - 3.2 De druklijn 14
   - 3.3 De ringdruk- en trekkrachten 22
   - 3.4 Windbelasting 23
4. Sterktes van de materialen 29
   - 4.1 Kettingen van zandsteen 29
   - 4.2 Ketting van hout 29
   - 4.3 Metselwerk 29
   - 4.4 Opmerking 31
5. Unity check 32
   - 5.1 Veiligheidsfactoren 32
   - 5.2 Unity checks 32
6. Scia engineer 35
   - 6.1 Halve bol met deksel 35

Juli 2012

Eindversie

Rapport

6.2 Meerdere halve bolsegmenten met deksel 36
6.3 Octogonale koepel 38
Discussie 40
Conclusies en aanbevelingen 41
Referentielijst afbeeldingen 42
Bijlage I Doorsnede koepel 43
Bijlage II Details stenen ketting en houten ketting 44



Juli 2012

Eindversie

Rapport

1. Inleiding

De kathedraal Santa Maria del Fiore, die op drie na de grootste is in Europa, stijgt boven de stad uit en is het dominerende symbool van Florence, zie afb.1.1. Vooral het bouwen van de grote koepel van de kerk was één van de grootste uitdagingen in de 14e eeuw. Er was toentertijd namelijk nog geen één koepel gebouwd met zulke afmetingen sinds de klassieke oudheid. Tot op het heden weet men nog steeds niet hoe de krachtswerking is binnen deze koepel.

Een van de mysteries over de krachtswerking binnen de koepel is de vraag of er een ijzeren trekring in de koepel zit. De aanwezigheid van een ijzeren trekring zou veel kunnen verklaren over het draagvermogen van de koepel. Ijzer kan namelijk veel meer trekkracht opnemen dan zandsteen, het materiaal waaruit de de andere aanwezige trekringen in de koepel bestaan. Echter, deze ijzeren trekring, die zo'n grote rol zou spelen in de krachtswerking binnen de koepel, is ook één van de grootste geheimen van de koepel. De ijzeren trekring, die zou zijn ingemetseld in de koepel, staat wel op de historische tekeningen, maar bij een magnetisch onderzoek in 1970 is deze ijzeren ring niet gevonden. Toch zijn velen nog steeds ervan overtuigd dat er een ijzeren trekring in de koepel aanwezig moet zijn.

Bij dit bachelor-eindwerk is er onderzoek gedaan naar de krachtswerking in de koepel van Florence. Hierbij wordt eerst de materialen in berekening genomen, waarvan men zeker weet dat ze in de constructie aanwezig zijn, onder andere de ringen die uit zandsteen bestaan. Wat zijn dan de spanningen in de koepel?

Om een antwoord op deze vraag te kunnen vinden, is er eerst informatie verzameld over de bouw, de materialen, de afmetingen en andere achtergrondinformatie over de koepel. Met de bekende uitgangspunten is hierna de krachtswerking in de koepel bepaald. Vervolgens worden de belastingen vergeleken met de geschatte sterktes van de koepel. Verder is de koepel ook gemodelleerd in het programma *Scia Engineer*. Dit is allemaal gedaan met als doel om het mysterie over het draagvermogen van de koepel te ontrafelen.



Afb. 1.1 De koepel van Florence [1]

2. De koepel van Florence

2.1 Achtergrondinformatie

In de 13e eeuw werd er in de stad Florence besloten dat op de kathedraal Santa Maria del Fiore een koepel zou worden gebouwd met een gemiddelde diameter van 43,7 meter.[1] Sinds de klassieke oudheid was er toen nog geen één koepel gebouwd met die afmeting. De koepel van de Santa Maria del Fiore zou dan niet alleen de koepel worden met de grootste diameter, maar ook de hoogste koepel die ooit was gebouwd. De bouw van de koepel begon namelijk boven de tamboer van de kathedraal, die op bijna 52 meter hoogte zit. Dit vroeg om nieuwe bouwmethodes en –technieken. De man achter de nieuwe uitvindingen van de koepel was Filippo Brunelleschi. Tot op heden is de koepel van Florence nog steeds de grootste koepel van de wereld, die uit metselwerk bestaat. Tegenwoordig worden voor zulke grote overspanningen 'moderne' materialen gebruikt, zoals bijvoorbeeld hoge sterkte staal. Dit is het meesterwerk van Brunelleschi om zo'n grote koepelconstructie te bouwen die slechts uit metselwerk bestaat. In afbeelding 2.1 is de koepel te zien.



Afb. 2.1 De koepel van Florence [2]

2.2 De vorm van de koepel

2.2.1 Een octogonale vorm

De koepel is eigenlijk niet rond. Het grondvlak van de koepel is octogonaal. Ook de tamboer waarop de koepel rust, is octogonaal.

Doordat de koepel een octogonale vorm moest hebben, werd het ontwerp ingewikkelder. De koepel is namelijk gebouwd, alsof het een ronde koepel was, maar delen aan de binnen- en buitenkant zijn weggesneden om een octogonale vorm te creëren, zie afb.2.2.



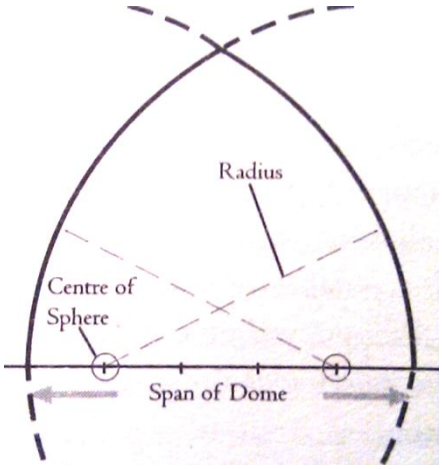
Afb. 2.2 De koepel van binnen gezien [3]

2.2.2 Een spitse vijfde boog (*pointed fifth arch*)

De koepel heeft een spitse vijfde boog kromming, een *pointed fifth arch*. In tegenstelling tot een profiel die uit een halfronde boog bestaat, kruisen bij een spitse vijfde profiel de stralen van beide bogen elkaar op viervijfde deel van de overspanning van de koepel, zie afb. 2.3.

[1] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 9

Een spitse vijfde boog heeft als voordeel dat de koepel hoger wordt dan wanneer de koepel half rond is. Op deze manier kon de koepel de gewenste hoogte bereiken van 84 meter boven maaiveld.



Afb. 2.3 Spitse vijfde bogen [4]

2.3 De afmetingen van de koepel

2.3.1 De diameter van de koepel

De diameter van de binnenkant van de koepel is **42,7 meter** bij de voet van de koepel en **6,1 meter** bij de top.[2]
De gemiddelde diameter van de koepel is **44,7 meter**.[3]

De diameter van de lantaarn boven de koepel is **2,4 meter**.[4]

2.3.2 De diktes van de schillen

De koepel bestaat uit twee schillen, een binnenschil en een buitenschil. De grote buitenschil is ervoor bedoeld om een grotere hoogte te geven aan het gebouw en om de binnenschil te beschermen tegen invloeden van buitenaf. Tussen deze twee schillen zit nog een beetje ruimte voor paden, waardoor men kan lopen. De twee schillen zijn beiden breder bij de voet en de dikte neemt af naarmate de hoogte toeneemt. Bij de top zijn de diktes het kleinst. Hieronder zijn de diktes van de schillen vermeld[5]:
De buitenschil heeft beneden bij de voet een dikte van ongeveer **0,65 meter.**
Bij de top heeft de buitenschil een dikte van ongeveer **0,35 meter**.
De binnenschil heeft bij de voet een dikte van ongeveer **2,1 meter**.
Bij de top heeft de binnenschil een dikte van ongeveer **1,5 meter**.
Bij de voet heeft de koepel een totale dikte van **4,3 meter**.[6]

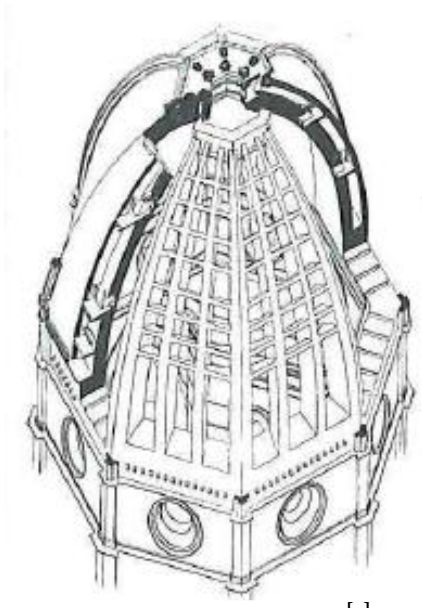
2.3.3 De hoogte van de koepel

Zonder de lantaarn komt de koepel tot ongeveer **88 meter** boven maaiveld.
De koepel begint op een hoogte van **52 meter** boven maaiveld.
De hoogte van de koepel is dus **36 meter**.

2.4 De constructie van de koepel

2.4.1 Ribben

De koepel bestaat vooral uit een metselwerk van vele stenen. Het metselwerk werd laag voor laag gebouwd, zodat tijdens de bouw de hoogte van de koepel geleidelijk steeg. De octogonale


Afb. 2.4 De ribben in de koepel [5]

[2] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 86
[3] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 9
[4] http://www.florence-nu.nl/met-kinderen/5347-een-deuk-in-de-stoep.html, d.d. 18-6-2012
[5] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 106, 96
[6] J.Oosterhoff, Constructies, blz 44

binnenkoepel heeft 8 grote hoofdribben die uiteindelijk samen komen bij de top. Tussen de hoofdribben zitten nog 16 andere ribben, zie afb.2.4. Voordat er een laag stenen werd gemetseld, werden eerst de ribben voor een paar lagen gebouwd. Zo konden de ribben dienen als een leiddraad voor de vertikale kromming van de koepel. Nadat er op de hoekpunten 'stukken rib' waren aangelegd, werden vervolgens de tussenliggende gedeeltes gevuld. Verder zijn er ook nog tussenliggende tussenribben.

2.4.2Visgraatpatroon in het metselwerk (*herring-bone*)

Nadat de koepel een hoogte van 17,5 meter heeft bereikt, staan de stenen van het metselwerk in een hoek van 30 graden met de horizontaal. Dit is net de grenshoek dat de stenen niet naar beneden glijden. Voorbij deze hoogte staan de stenen in een steeds scherpere hoek met de horizontaal.



Afb. 2.5 visgraatpatron in het metselwerk [6]

In 14e eeuw was het gebruikelijk een houten bekisting of steunconstructie onder de koepels te plaatsen tijdens de bouw, zodat de stenen erop konden worden gemetseld. Nadat de mortel sterk genoeg was geworden, zou men dan de onderliggende steuncontructie weer verwijderen.

Voor de bouw van deze koepel was deze methode echter niet geschikt. Ten eerste begon de koepel op een hoogte van 52 meter boven maaiveld. Dit zou betekenen dat er een reusachtige houten steunconstructie zou moeten worden gebouwd. Zoveel eikenhout was er niet beschikbaar. Ook de grote schaal van de koepel zorgde voor problemen. Hout is namelijk onderhevig aan kruip. Bij een houten steunconstructie met zulke grote afmetingen zou ook veel kruip optreden. De koepel zou dan op een snel tempo gebouwd moeten worden, zodat het metselwerk al klaar zou zijn voordat er kruip zou optreden in de onderliggende houten steunconstructie. Het was echter onmogelijk om zo'n enorme koepel op zo'n snelle tempo te bouwen. Om deze redenen werd de koepel op een voor die tijd geheel nieuwe manier gebouwd, namelijk met behulp van een visgraatpatroon in het metselwerk, ookwel *herring-bone pattern* genoemd.

Hierbij werden de metselstenen niet alleen maar plat gelegd, maar in beiden schillen werden deze kringen van metselstenen op regelmatige intervals onderbroken door grotere stenen die rechtop werden geplaatst, zie afb. 2.5. Deze rechtopstaande stenen, die elk vier of vijf horizontale kringen doorkruisten, klommen in een schuine richting naar boven tot de top van de koepel, zodat er een zigzaggend visgraatpatroon (*herring-bone)* ontstond.

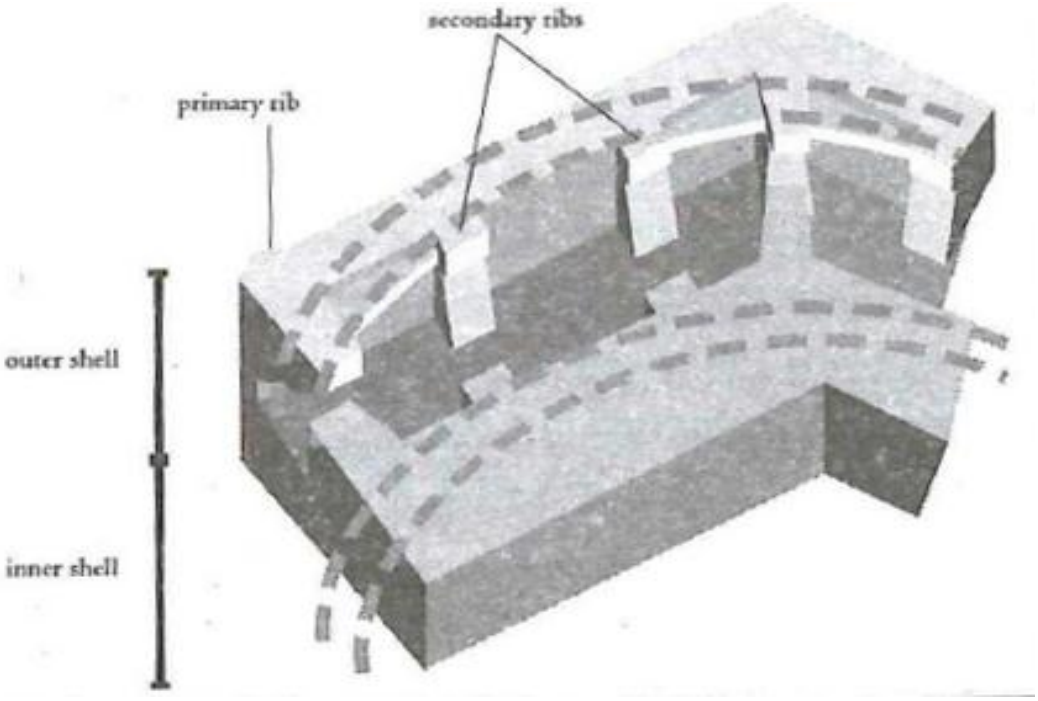
Dit visgraatpatroon is cruciaal voor de bouw van deze koepel. In die tijd werd een boog normaal gesproken altijd op een andere, ondersteunende boog gebouwd. Zo werden de stenen op hun plaats gehouden door de onderlinge druk die ontstond door het eigen gewicht. Nadat de constructie was voltooid, zouden de stenen elkaar ondersteunen. Ook bij het bouwen van een koepel was een tijdelijke ondersteuning nodig totdat de kringen van stenen volledig zijn gesloten. Zonder ondersteuning zou het metselwerk naar binnen vallen. Bij de bouw van de koepel van Florence voorkwam het visgraatpatroon het naar binnen vallen van de stenen. Daarom werd het visgraatpatroon toegepast vanaf 17,5 meter, waar de stenen binnenwaarts begonnen te draaien. De rechtopstaande stenen van het visgraatpatroon dienden dan als klemmen, die de horizontaal liggende stenen op hun

plaats hielden totdat de mortel sterk genoeg was. Ongeveer om de één meter onderbreken rechtopstaande stenen de horizontale kringen, zodat de laag stenen werd onderverdeeld in korte delen die elk ongeveer 5 stenen lang zijn. Deze stenen waren als het ware ingeklemd tussen de rechtopstaande stenen, zodat nieuwe lagen tijdens de bouw eigenlijk tijdelijk werden gedragen door de onderliggende lagen die zichzelf al wel konden ondersteunen. De visgraatpatroon was dus noodzakelijk om de koepel te bouwen.[7]

Deze rechtopstaande stenen, die in een spiraalvorm door de koepel lopen, hebben echter ook een nadeel. Rechtopstaande stenen kunnen minder goed de ringtrekkrachten binnen de koepel opnemen, waardoor de kans op scheurvorming groter wordt.

2.4.3Een ronde koepel binnen de octagonale koepel

De binnenschil van de octagonale koepel is zo dik dat binnen deze schil een complete ronde koepel past van 0,76 meter dik, zie afb.2.6. De binnenkoepel werd eigenlijk gebouwd alsof het als ware een ronde koepel was. Delen van de binnen- en buitenkant van de ronde koepel werden alleen aangepast, zodat van binnen en buiten gezien de koepel perfect octogonaal eruit ziet. Het visgraatpatroon werd dan op plaatsen toegepast, waar de stenen buiten de ronde koepel naar het midden van de koepel uitstaken om de octogonale vorm te

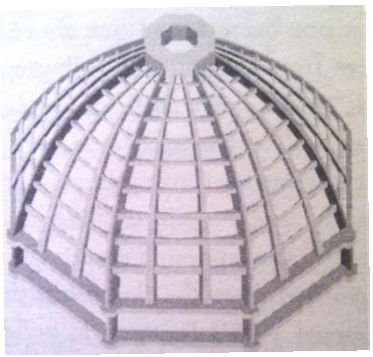


Afb. 2.6 Een ronde koepel binnen de octogonale koepel [7]

De buitenschil is echter veel dunner dan de binnenschil. Met een dikte van 0,65 meter bij de voet en 0,35 meter bij de top was het onmogelijk om binnen de octogonale schil nog een rond gewelf te bouwen. Om de buitenschil toch te kunnen bouwen zodat het, netals de binnenschil, zichzelf kon ondersteunten zonder een steunconstructie, werden er negen horizontale ringen gebouwd aan de binnenkant van de buitenschil. Stenen werden gemetseld in de vorm van een onafgebroken ring. Deze negen ringen zijn deel van de

[7] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 107

octogonale structuur van de buitenschil, zie afb. 2.7. Elk van deze gemetselde ringen zijn ongeveer 0,9 meter breed en 0,6 meter hoog. De eerste ring zit net boven 14 meter, en erna omcircellen ze de koepel om de 2,4 meter.

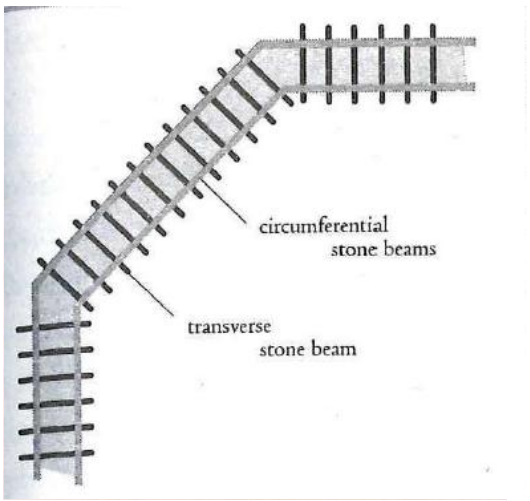


Afb. 2.7 De negen ringen van de buitenschil [8]

Op verschillende plekken zijn de ringen zichtbaar in paden tussen de schillen. Ze verbinden hoofribben met de tussenribben. Deze negen ringen zijn niet bedoeld om de zijwaartse druk op te nemen, maar het is wel mogelijk dat ze het gewicht van de buitenschil overbrengen op de binnenschil.[8] Deze ringen waren een tijdelijke maatregel voor tijdens de bouw. Als het later zou blijken dat ze in de weg zitten, zouden ze verwijderd worden na de voltooiing van de koepel. Maar tijdens de bouw waren deze negen ringen wel essentieel. Ze beginnen op een hoogte van 21 meter boven de voet van de koepel, waar de schil onder een hoek staat dat groter is dan de kritieke hoek van 30 graden. Dit bevestigt ook dat de functie van de ringen niet is om de ringtrekkrachten van de koepel op te nemen, want pas onder deze hoogte zijn de ringtrekkrachten veel groter. Deze ringen voorkomen dat het metselwerk van de buitenschil naar binnen valt. De ringen zijn bijna helemaal verborgen in het metselwerk, slechts op paar plekken tussen de twee schillen zijn delen van deze ringen te zien. De buitenrand van de ringen worden op plaatsen verdikt (vooral bij de hoeken), zodat van buitenaf de koepel er ortogonaal uitziet.

2.4.4 Kettingen van zandsteen

Bij de koepel van Florence was ervoor gekozen om geen gebruik te maken van steunberen om de druklijn af te buigen naar de verticaal, zoals bij veel Ghotische kerken, maar om een aantal stenen- of houten kettingen toe te passen. Deze kettingen zouden rondom de koepel worden geplaatst om de ringtrekkrachten van de koepel op te nemen. In tegenstelling tot steunberen, zouden deze kettingen, die onder het metselwerk zitten, dan niet te zien zijn. Zo wordt het idee opgewekt dat een enorme koepel hoog boven de stad oprijst zonder zichtbare opleggingen.



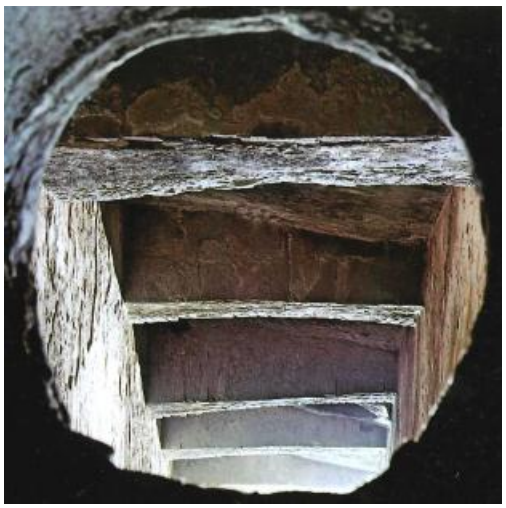
Afb. 2.8 De ketting van zandsteen [9]

In de koepel zijn er vier stenen kettingen geplaatst die uit zandsteen bestaan. De vier kettingen zitten ongeveer op een afstand van 10,7 meter van elkaar.[9] Om precies te zijn, de eerste ketting van zandsteen begint op een hoogte van 3,5 meter boven de voet van de koepel, de tweede ketting zit op een hoogte van 11,9 meter, de derde ketting op 23,2 meter en de laatste ketting van zandsteen, die ook als afsluiting van de top van de koepel dient, zit op een hoogte van 33,3 meter boven de voet van de koepel. Zie bijlage I voor de doorsnede van de koepel. De ketting bestaat eigenlijk uit twee

[8] Mainstone, *Brunelleschi's Dome of S. Maria del Fiore,* blz. 164
[9] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 77

horizontaal aangelegde kettingen met een gemeenschappelijk middelpunt. Voor deze kettingen werden lange en korte balken van zandsteen geproduceerd. De lange balken zijn 2,3 meter lang en 0,4 meter in doorsnede. Bovendien werden aan de onderkand van de lange balken gleuven gesneden. De kettingen bestonden uit lange balken die op de korte balken rusten, die om de 0,9 meter dwars onder de lange balken in de gleuven waren geplaatst. Zo lijkt de stenen ketting op een spoorwegligger, zie afb. 2.8. De eerste ketting van onder bestond uit meer dan 100 lange balken en uit bijna ook zoveel korte balken. Om goed te kunnen functioneren als een ketting die de ringtrekkrachten van de koepel opneemt, moesten de stenen, die bij elkaar samenkwamen in een hoek van 45 graden, goed verbonden worden. Dit gebeurde met stalen klemmen. Om deze stalen verbindingen te bescherme n tegen het roesten, zodat er geen scheuren zouden ontstaan in het omringende metselwerk, werd het staal na het smeden met lood bedekt.[10]

Op bepaalde plekken in de gangpaden tussen de twee schillen zijn de dwarsliggende balken van de stenen ketting te zien als dikke balken, die dicht bij het plafond van de ene kant loopt naar de andere kant, zie afb. 2.9.



Afb. 2.9 De dwarsliggende balken in het gangpad[10]

In bijlage II zijn er meer detailtekeningen van de stenen ketting te vinden.

2.4.5 Ketting van hout

Vier kettingen van hout waren gepland voor de bouw van de koepel, maar uiteindelijk is er maar één uitgevoerd. Blijkbaar werden de drie andere houten ringen tijdens de bouw niet meer noodzakelijk geacht. Behalve een structurele rol, speelde de gebouwde houten ketting ook zeker een politieke rol.[11]

Houten balken werden in de ketting van hout aan elkaar geklemd met speciale platen, die vervaardigd zijn uit eikenhout. Deze zijn zowel boven als onder de verbingen bevestigd door middel van ijzeren bouten. Vervolgens werden de houten balken bedekt met ijzeren banden om het splijten van het hout door de bouten te voorkomen. Gedurende de 18e eeuw waren de originele balken van kastanjehout vervangen, doordat ze begonnen te rotten.

Ook delen van de houten ketting is zichtbaar in het gangpad. In bijlage II zijn er meer detailtekeningen te zien van de houten ketting.

2.5 Uitgangspunten belastingen

De verborgen kettingen in het metselwerk beschermen de koepel tegen zowel windbelasting en belastingen als gevolg van aarbevingen.

Aarbevingen waren wel een factor. Florence is namelijk in 1510, 1675 en 1895 getroffen door aardbevingen. Echter geen van deze aardbevingen heeft de koepel beschadigd. Omdat dit niet binnen de stof valt van de bachelor, zal er bij dit bachelor-eindwerk verder niet meer worden gekeken naar de belastingen ten gevolge van aardbevingen.

[10] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 73,74
[11] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 77

Het eigengewicht van de koepel wordt geschat op 37.000 ton.[12]

Het gewicht van de lantaarn boven op de koepel wordt geschat op ongeveer 500 ton.[13]

Er wordt uitgegaan van de volgende gewichten:

- zandstenen	:	2.325	kg/m^3
- lichte metselstenen	:	2.000	kg/m^3

2.6 Uitgangspunten sterkte materialen

De materiaalsterktes worden als volgt geschat:

-zware zandstenen druksterkte	:	110	N/mm^2
-zware zandstenen treksterkte	:	20	N/mm^2
-lichte metselstenen druksterkte	:	15	N/mm^2
-mortel druksterkte	:	0.5	N/mm^2
-eikenhout	:	11	N/mm^2

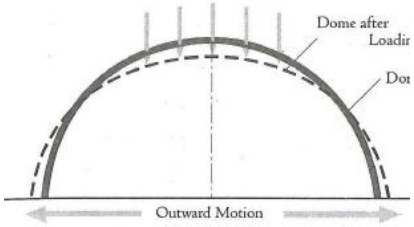
Opmerking
De aanname van de sterkte van het eikenhout is aan de veilige kant. Hierin zitten ook alle veiligheidsfactoren al in verwerkt. Eikenhout zou misschien wel een sterkte van 30 N/mm^2 kunnen hebben i.p.v. 11 N/mm^2.

[12] Paolo Galluzzi, *Mechanical Marvels: Invention in the Age of Leonardo* (Florence: Giunti, 1996), p.20.
[13] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 145

3. Krachtswerking

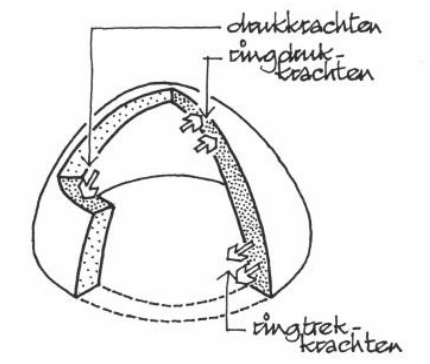
3.1 Krachtswerking in de koepel

Verticale drukkrachten veroorzaken geen moeilijke problemen voor het ontwerp. Zandsteen en metselstenen hebben namelijk grote druksterktes, zodat constructies met grote dimensies tot een grote hoogte kunnen worden gebouwd, zonder dat de stenen bij de basis van de constructie kapot worden gedrukt. Bij een koepel wordt de constructie echter niet alleen belast door belastingen van boven, maar ook door naar buitenwaards gerichte trekkrachten, bekend als ringtrekkrachten.



Afb. 3.1 Uitwijken door verticale belasting [11]

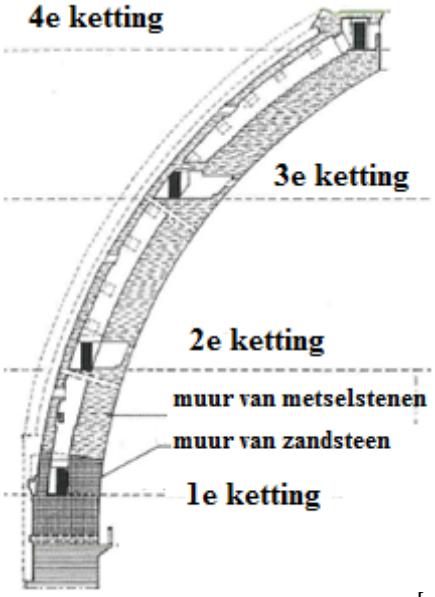
Door het eigengewicht van de koepel ontstaan er namelijk naar beneden gerichte drukkrachten. Door deze drukkrachten wil de koepel bij de voetpunten zijdelings uitwijken, zie afb.3.1. Een ring aan de voet van de koepel kan dienst doen om deze trekkrachten op te nemen. In een verticale doorsnede van de koepelgewerlf ontstaan er dus onderin horizontale trekkrachten, ookwel ringtrek-krachten, en bovenin ringdruk-krachten, zie afb. 3.2.



Afb. 3.2 Ringdruk- en trekkrachten [12]

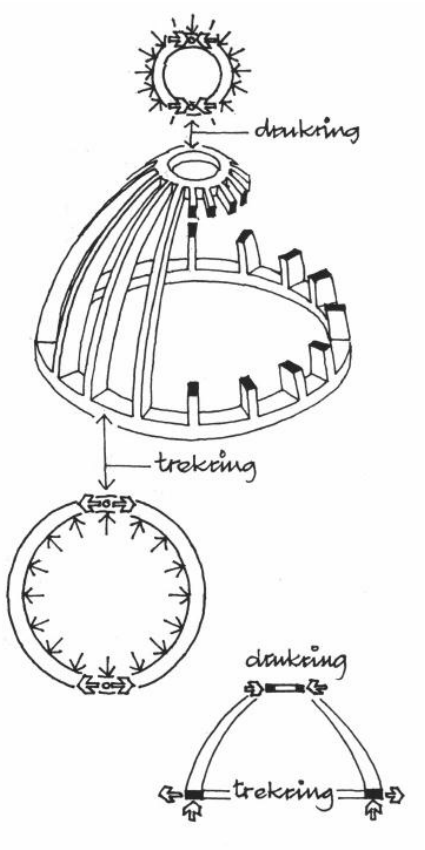
Het grote gevaar is dat de ringtrekkrachten zo groot worden, dat ze niet meer kunnen worden opgenomen door de constructie. Het metselwerk kan namelijk niet goed trekkrachten opnemen. Hierdoor zouden er scheuren in de koepel kunnen ontstaan, waardoor de constructie uiteindelijk zal bezwijken.

Wat velen fascineert, is dat de koepel van Florence van buiten gezien geen zichtbare steunberen of trekringen heeft die krachten in de koepel opnemen. Hoe blijft de koepel dan overeind? In de gotiek werden zulke krachten opgevangen door steunberen. Door de zware massa van de steunberen werd de druklijn naar beneden afgebogen, richting de oplegging. Bij de koepel in Florence zijn er andere maatregelen toegepast.



Afb. 3.3 Doorsnede koepel van Florence [13]

Zoals in hoofdstuk 2.3.2 al is beschreven, de koepel van Brunelleschi bestaat uit twee schillen. Van buiten gezien is de dikte van de koepel constant. Echter, de schillen zijn bij de voet van de koepel het dikst en de dikte neemt af naarmate men dichter bij de top komt. Dit is van buiten niet te zien, omdat de ruimte tussen de schillen steeds breeder wordt naarmate de top wordt bereikt. Deze variabele dikte heeft een gunstige werking op de krachtswerking in de koepel. Doordat de dikte bij de top klein is, is de belasting die daar ontstaat door het eigengewicht kleiner. Indien de verticale belasting daar op de koepel kleiner is, zal het effect in afb. 3.1, het willen uitwijken door ringtrekkrachten, kleiner zijn.



Afb. 3.4 Druk- en trekringen[14]

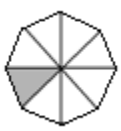
Van de top af wordt de dikte steeds groter. Hierdoor neemt het eigengewicht toe en wordt de verticale belasting aan de zijkanten steeds groter. Netals de steunberen bij gotische kerken, buigen deze verticale belastingen de druklijn verder af naar beneden. Voor nog meer effect bestaat de voet van de koepel tot een hoogte van 7 meter boven de voet uit zware zandstenen. Vanaf 7 meter hoogte bestaat de koepel uit lichtere metselstenen. Ook is de voet tot en met een hoogte van 3,5 meter extra zwaar, doordat het uit massief zandsteen bestaat.

Verder zijn er ook nog vier kettingen van zandsteen en één ketting van hout geplaatst om de ringtrek- en drukkrachten in de koepel op te nemen, zie afb.3.3. Bij de voet is er een trekring en bovenin de koepel een drukring net zoals in afbeelding 3.4.

Om erachter te komen of deze methodes voldoende zijn om de spanningen in de koepel op te nemen, worden eerst deze belangrijke ringkrachten bepaald en vervolgens zullen de spanningen in de materialen onderzocht worden.

3.2 De druklijn

De druklijn van de koepel kan grafisch worden weergegeven. Hiervoor wordt de koepel eerst in segmenten verdeeld. In een ronde koepel lopen de verticale krachten recht naar beneden naar de voet van de koepel. In dit geval heeft de koepel van Florence acht ribben en heeft het een octogonale vorm. De drukkrachten zullen niet recht naar beneden lopen, maar naar de 8 hoekpunten omdat de constructie op deze plekken stijver is. Bij het tekenen van de druklijn, zal deze invloed verwaarloosd worden en zal de koepel gemodelleerd worden als een ronde koepel. Hiervoor wordt de koepel in acht stukken verdeeld, zie afb 3.5.

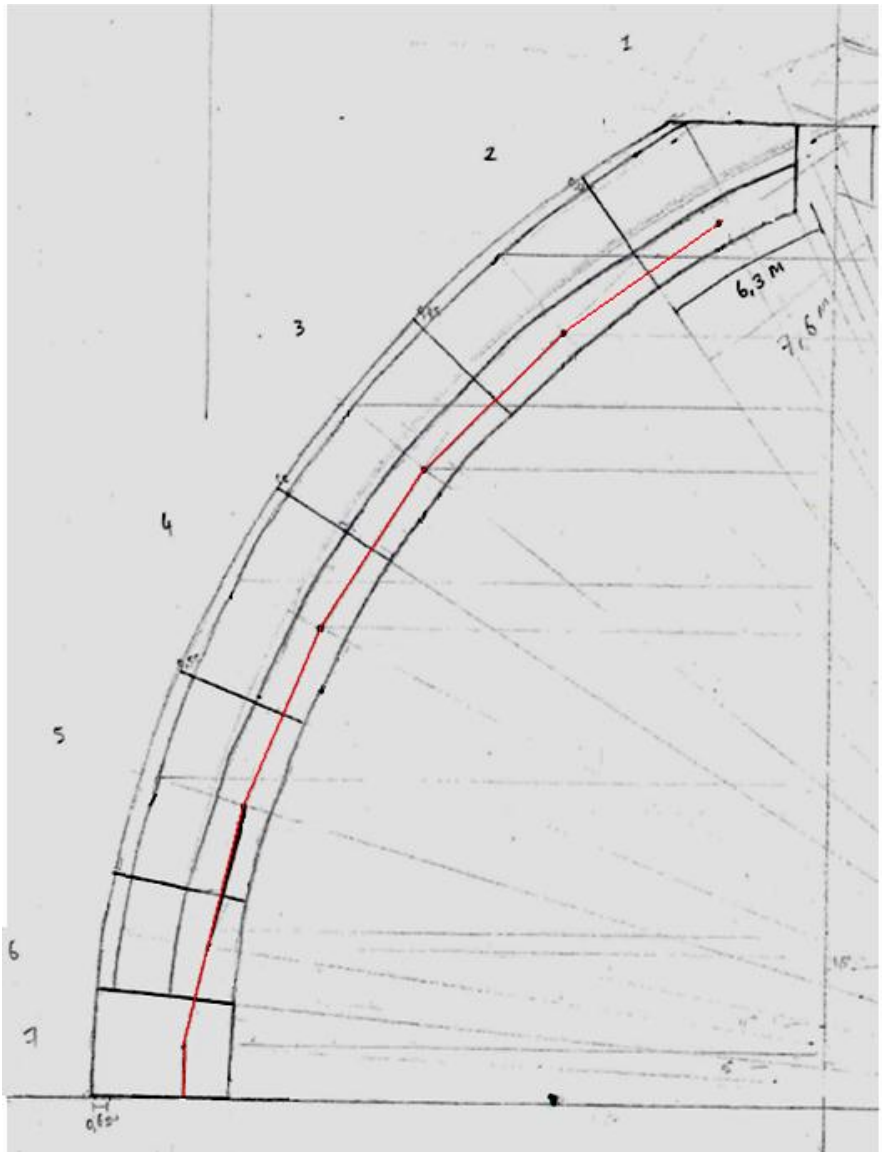


Afb. 3.5 Verdeling koepeldeel

Dit gedeelte van de koepel wordt in de verticale doorsnede nogmaals in zeven segmenten verdeeld, zoals te zien is in afb 3.5. Segmenten 1 tot en met 6 bestaan uit een buitenschil, een tussenruimte en een dikkere binnenschil. De schillen van de bovenste segmenten, tot en met segment 4, bestaan uit lichte metselstenen. Onder segment 4 bestaan de schillen van de koepel uit zandsteen. Segment 7 bestaat uit massief zandsteen.

Opmerking
Bij het verdelen zijn de segmenten vereenvoudigd tot mooie rechte stukken. In werkelijkheid zijn er nog ribben en andere uitsteeksels aanwezig (hoofdstuk 2.4.1). Het eigengewicht en dus ook de belastingen t.g.v. het eigengewicht zijn dus eigenlijk groter.

In afbeelding 3.6 is ook de druklijn met een rode kleur weergegeven. In segment 7 is de druklijn zodanig getekend, zodat de druklijn nog net door de kern van de doorsnede gaat op 1/3 van de dikte in plaats van door het normaalkrachtcentrum.



Afb. 3.6 Segmenten van de koepel met verticale belastingen

Hierna worden de belastingen ten gevolge van het eigengewicht van de zeven segmenten berekend met behulp van de volgende formules en afbeelding 3.7:

$F_{eg} = Volume_{segment} * s * g$

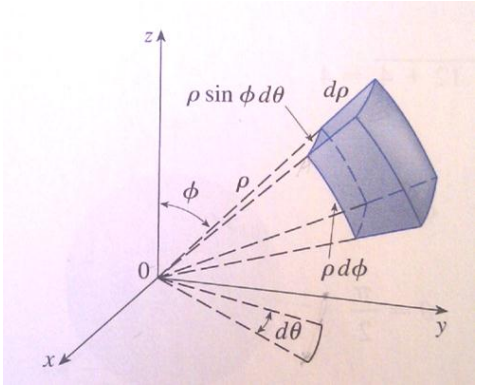
F_{eg} = Eigengewicht

s = soortelijke massa

$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

$Volume_{segment} = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$

$\{(\rho, \theta, \varphi) | \, a \leq \rho \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d\}$



Afb. 3.7 Volume van een segment[15]

Opmerking
Zoals hierboven te zien, is de spitse vijfde boog vereenvoudigd tot een rond boog. Deze afwijking in het volume van de segmenten kan wel 20% zijn.

Hieronder zijn in de tabellen 3.1 tot en met 3.7 de belastingen van respectievelijk segment 1 tot en met segment 7 weergegeven. Op segement 1 is er naast het eigengewicht van het segment nog een extra kracht ten gevolge van de lantaarn boven de koepel.

Tabel 3.1 Drukkracht in segment 1

Segment 1 binnenwand		Segment 1 buitenwand	
a (m)	33,56	a (m)	37,59
b (m)	35,11	b (m)	37,96
alpha (rad)	0	alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785	beta (rad)	0,785
c (rad)	0,436	c (rad)	0,506
d (rad)	0,611	d (rad)	0,628
Volume (m^3)	125,1	Volume (m^3)	27,6
Soortelijk gewicht	2000	Soortelijk gewicht	2000
Verticale kracht(MN)	2,5	Verticale kracht(MN)	0,5
Totaal verticale drukkracht (MN)			7,9

Tabel 3.2 Drukkracht in segment 2

Segment 2 binnenwand		Segment 2 buitenwand	
a (m)	33,56	a (m)	37,54
b (m)	35,21	b (m)	37,96
alpha (rad)	0	alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785	beta (rad)	0,785
c (rad)	0,611	c (rad)	0,628
d (rad)	0,820	d (rad)	0,820
Volume (m^3)	210,2	Volume (m^3)	60,4
Soortelijk gewicht	2000	Soortelijk gewicht	2000
Verticale kracht(MN)	4,1	Verticale kracht(MN)	1,2
Totaal verticale drukkracht (MN)			5,3

Tabel 3.3 Drukkracht in segment 3

Segment 3 binnenwand		Segment 3 buitenwand	
a (m)	33,56	37,49	37,49
b (m)	35,31	37,96	37,96
alpha (rad)	0	0	0
beta (rad)	0,785	0,785	0,785
c (rad)	0,820	0,820	0,820
d (rad)	1,012	1,012	1,012
Volume (m^3)	247,9	80,7	80,7
Soortelijk gewicht	2000	2000	2000
Verticale kracht(MN)	4,9	1,6	1,6
Totaal verticale drukkracht (MN)			6,4

Tabel 3.4 Drukkracht in segment 4

Segment 4 binnenwand		Segment 4 buitenwand	
a (m)	33,56	a (m)	37,44
b (m)	35,41	b (m)	37,96
alpha (rad)	0	alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785	beta (rad)	0,785
c (rad)	1,012	c (rad)	1,012
d (rad)	1,196	d (rad)	1,196
Volume (m^3)	282,4	Volume (m^3)	95,8
Soortelijk gewicht	2000	Soortelijk gewicht	2000
Verticale kracht(MN)	5,5	Verticale kracht(MN)	1,9
Totaal verticale drukkracht (MN)			7,4

Tabel 3.5 Drukkracht in segment 5

Segment 5 binnenwand		Segment 5 buitenwand	
a (m)	33,56	a (m)	37,39
b (m)	35,51	b (m)	37,96
alpha (rad)	0	alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785	beta (rad)	0,785
c (rad)	1,196	c (rad)	1,196
d (rad)	1,379	d (rad)	1,379
Volume (m^3)	321,0	Volume (m^3)	112,6
Soortelijk gewicht	2325	Soortelijk gewicht	2325
Verticale kracht(MN)	7,3	Verticale kracht(MN)	2,6
Totaal verticale drukkracht (MN)			9,9

Tabel 3.6 Drukkracht in segment 6

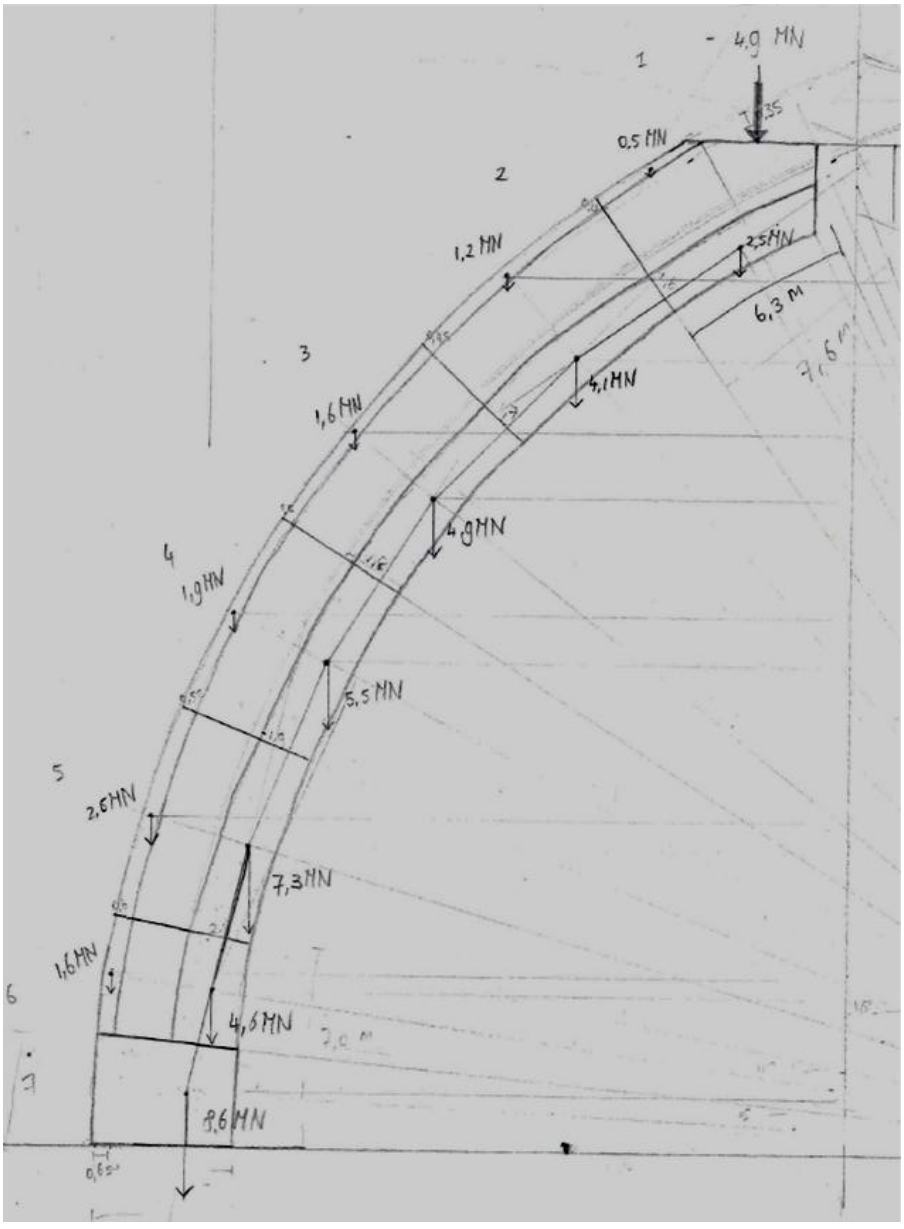
Segment 1 binnenwand		Segment 1 buitenwand	
a (m)	33,56	a (m)	37,34
b (m)	35,61	b (m)	37,96
alpha (rad)	0	alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785	beta (rad)	0,785
c (rad)	1,379	c (rad)	1,379
d (rad)	1,484	d (rad)	1,484
Volume (m^3)	199,7	Volume (m^3)	72,1
Soortelijk gewicht	2325	Soortelijk gewicht	2325
Verticale kracht(MN)	4,6	Verticale kracht(MN)	1,6
Totaal verticale drukkracht (MN)			6,2

Tabel 3.7 Drukkracht in segment 7

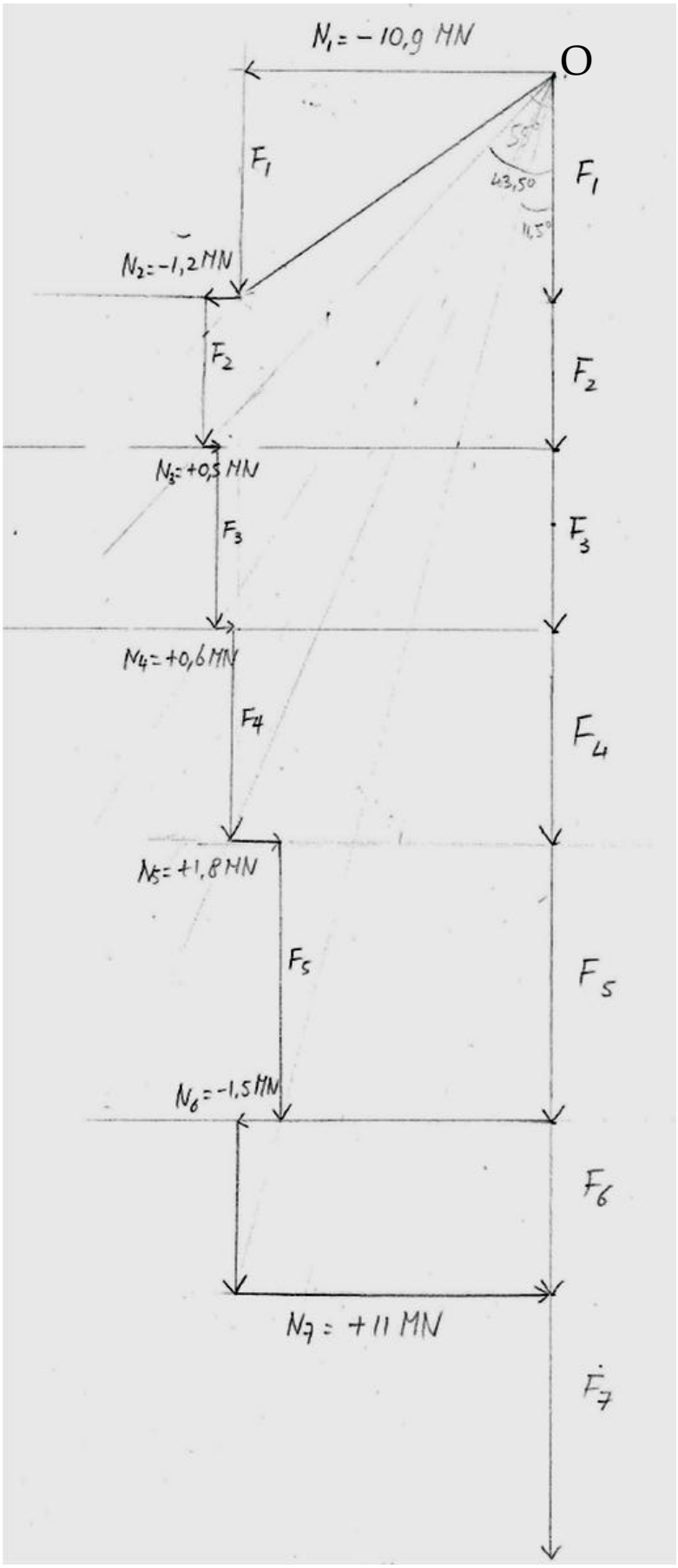
Segment 7	
a (m)	33,66
b (m)	37,96
alpha (rad)	0
beta (rad)	0,785
c (rad)	1,484
d (rad)	1,571
Volume (m^3)	377,9
Soortelijk gewicht	2325
Totaal verticale drukkracht (MN)	8,6

Door de berekende krachten in de tekening met segmenten te tekenen, wordt de stangenveelhoek verkregen, zie afb. 3.8. In dit figuur zijn de belastingen en de richting van de druklijn bekend. Hiermee kan het poolfiguur worden getekend, ookwel *magnitude plan*, zie afb.3.9.

Opmerking
In het poolfiguur zijn bij elk segment de verticale belastingen van dat deel samengevoegd tot één verticale kracht. Hierbij is voor het gemak de som van alle verticale belastingen van het betreffende segment genomen. Indien nauwkeurigere resultaten gewenst zijn, dient dit op een ander manier te worden gedaan. De werklijnen van de verticale krachten vallen namelijk eigenlijk niet samen, zoals in afb.3.8 te zien is.



Afb. 3.8 Stangenveelhoek



Afb. 3.9 Poolfiguur

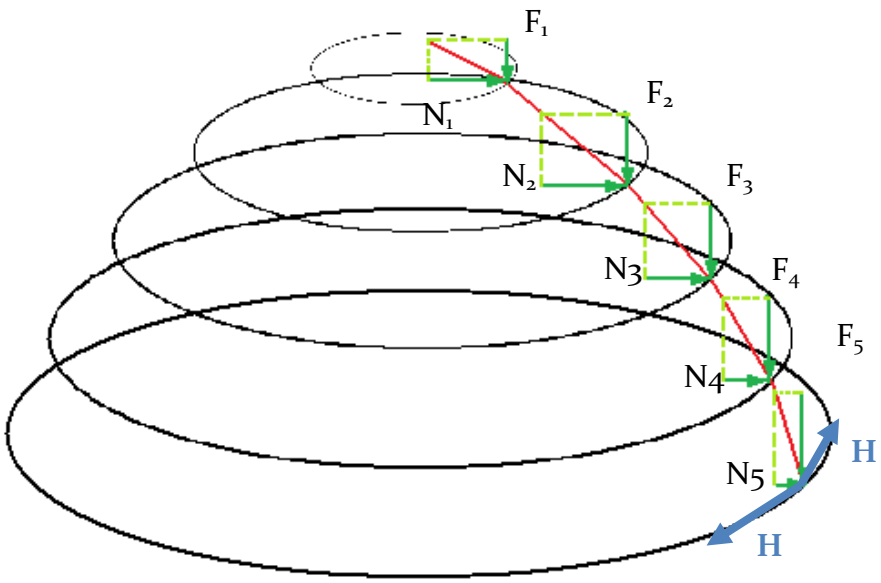
In het poolfiguur zijn vanuit het punt O de richtingen van de druklijn getekend. De richtingen van de druklijn komen overeen met de richtingen van de druklijn in elk segment van de stangenveelhoek (afb.3.8). Nu de grootte van de verticale kracht èn de richting van de resultante kracht bekend zijn, kan met behulp van een krachtenveelhoek de horizontale component van elk segment worden bepaald. De horizontale componenten *N* zijn weergegeven in tabel 3.8.

Tabel 3.8 Horizontale componenten N

Segment	N(MN)
1	- 10,9
2	- 1,2
3	+ 0,5
4	+ 0,6
5	+ 1,8
6	- 1,5
7	+ 11,0

3.3 De ringdruk- en trekkrachten

Nu de horizontale componenten N van elk segment bekend zijn, kunnen de ringdruk- en trekkrachten H worden berekend, zie afb.3.10.



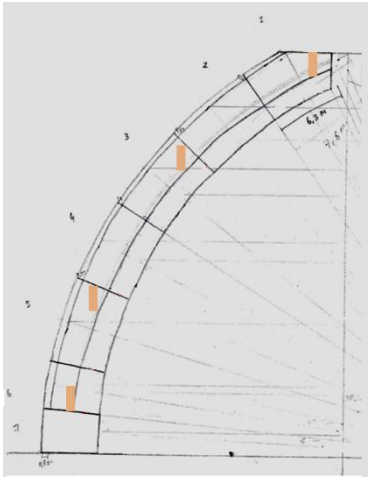
Afb. 3.10 De verticale en horizontale componenten

De ringkrachten kunnen worden berekend met de volgende formule:

$$H = \frac{N}{\beta - \alpha}$$

Tabel 3.8 ringkrachten in de koepel

Segment	N(MN)	H(MN)
1	- 10,9	-13,9
2	- 1,2	-1,5
3	+ 0,5	+0,6
4	+ 0,6	+0,8
5	+ 1,8	+2,3
6	- 1,5	-1,9
7	+ 11,0	+14,0



Afb. 3.11 ligging kettingen

In afb. 3.11 zijn de liggingen van de zandstenen kettingen weergegeven. Hieruit blijkt dat de kettingen gunstig in de koepel zijn gelegen. De eerste ketting (van onder) zit net boven de massieve voet van de koepel. Zoals in tabel 3.8 te zien, is hier de ringtrekkracht het grootst.

De tweede ketting ligt in segment 5. Ook hier zijn er grote ringtrekkrachten (doch kleiner dan de ringtrekkrachten bij de voet van de koepel). Verder zijn er ook nog ringtrekkrachten in segment 3, die worden opgenomen door de derde ketting, en bij de top van de koepel sluit de vierde ketting van zandsteen de koepel af. Ook deze ligging van de ketting is zeer gunstig, aangezien er grote ringdrukkrachten zijn in segment 1.

De vier kettingen van zandsteen spelen dus zeker een grote rol bij de krachtopname van de koepel.

3.4 Windbelasting

Behalve het eigengewicht wordt de koepel ook belast door windbelasting. De windbelasting kan worden berekend door

$W_i = A_i * C_i * p_w$

W_i = De windbelasting in [kN]

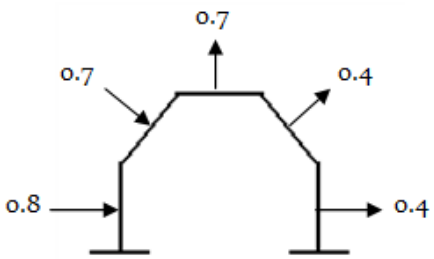
A_i = Het door de wind getroffen oppervlak [m^2]

C_i = De windvormfactoren

p_w = De extreme waarde van de stuwdruk in [kN/m^2]

De waarde van p_w verschilt per gebied. Florence is vergelijkbaar met een bebouwde regio II van de regio-indeling in de infomap.[14]

De windbelasting wordt berekend met de volgende windvormfactoren:



Afb. 3.12 Windvormfactoren

Het door de wind getroffen oppervlak A_i wordt berekend met

$$A_{segment} = \int_c^d \int_\alpha^\beta R_b d\theta \, R_h \sin\varphi \, d\varphi$$

$\{(\theta, \varphi) | \, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d\}$

Opmerking
Deze formule is enigszins vereenvoudigd. De formule hoort te zijn:

$$A_{segment} = \int_c^d \int_\alpha^\beta R_b d\theta \, R_h \sin\omega \, d\varphi$$

[14] TU Delft, Info map constructieleer versie april 2008, ab 8.

$\{(\theta, \varphi) | \ \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d\}$ en $\omega = \omega(\varphi)$

De resultaten zijn hieronder weergegeven in tabel 3.9 tot en met tabel 3.15.

Tabel 3.9 Windbelasting in segment 1

Segment 1	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	0,506
d (rad)	0,628
Oppervlak (m2)	40,3
Hoogte	81,9
Pw	1,6108
Windfactor	0,7
Windbelasting (kN)	45,4

Tabel 3.10 Windbelasting in segment 2

Segment 2	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	0,628
d (rad)	0,820
Oppervlak (m2)	77,9
Hoogte	78
Pw	1,588
Windfactor	0,7
Windbelasting (kN)	86,6

Tabel 3.11 Windbelasting in segment 3

Segment 3	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	0,820
d (rad)	1,012
Oppervlak (m2)	93,3
Hoogte	73,1
Pw	1,56
Windfactor	0,7
Windbelasting (kN)	101,9

Tabel 3.12 Windbelasting in segment 4

Segment 4	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	1,012
d (rad)	1,196
Oppervlak (m2)	100,7
Hoogte	67,9
Pw	1,52
Windfactor	0,8
Windbelasting (kN)	122,4

Tabel 3.13 Windbelasting in segment 5

Segment 5	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	1,196
d (rad)	1,379
Oppervlak (m2)	107,7
Hoogte	62
Pw	1,476
Windfactor	0,8
Windbelasting (kN)	127,1

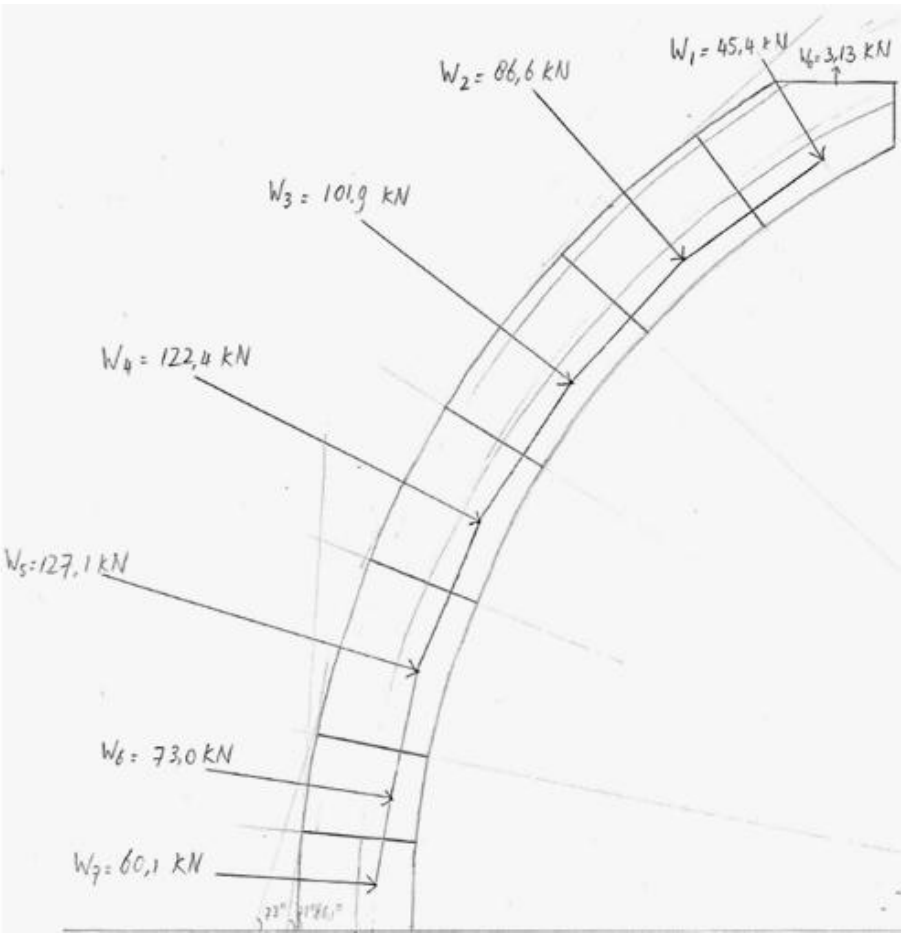
Tabel 3.14 Windbelasting in segment 6

Segment 6	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	1,379
d (rad)	1,484
Oppervlak (m2)	63,8
Hoogte	56,2
Pw	1,43
Windfactor	0,8
Windbelasting (kN)	73,0

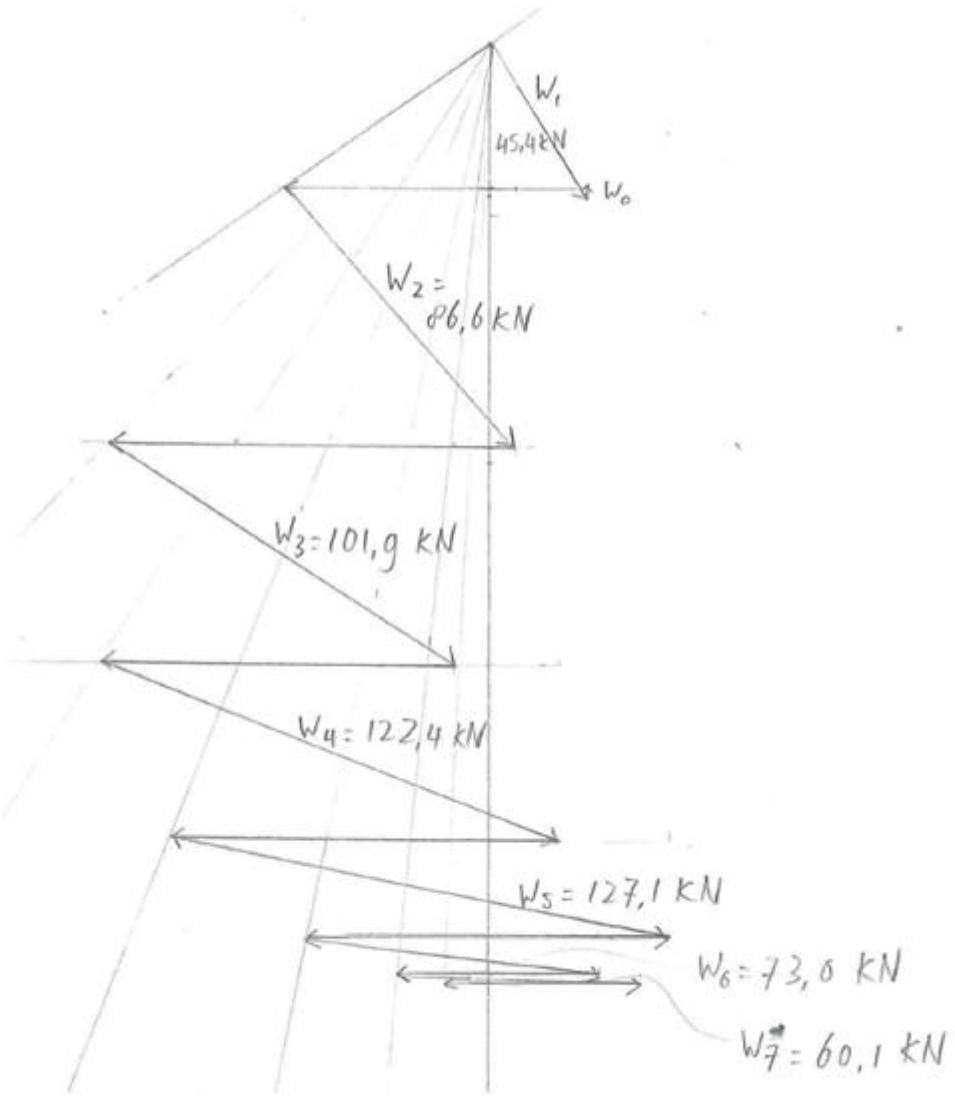
Tabel 3.15 Windbelasting in segment 7

Segment 7	
alpha (rad)	0
beta (rad	0,785
c (rad)	1,484
d (rad)	1,571
Oppervlak (m2)	53,3
Hoogte	53,8
Pw	1,408
Windfactor	0,8
Windbelasting (kN)	60,1

Met de berekende windbelastingen kunnen nu weer een stangenveelhoek en een poolfiguur worden gemaakt. Deze keer wordt de koepel niet door het eigengewicht belast, maar door windbelasting, zie afb.3.13.



Afb. 3.13 Stangenveelhoek met windbelasting



Afb. 3.14 Poolfiguur met windbelasting

Uit het poolfiguur, afb.3.14, kunnen de horizontale componenten N worden bepaald. Met de bekende N, kunnen de ringkrachten H ten gevolge van windbelasting worden berekend.

Tabel 3.16 Drukkracht in segment 1

Segment	Ringkrachten door windbelasting (kN)	Ringkrachten door eigengewicht (MN)	Verhouding ringkrachten tgv wind/ringkrachten tgv eigengewicht (%)
1	-81,5	-13,9	0,6
2	-127,3	-1,5	8,3
3	-124,8	0,6	-19,6
4	-122,2	0,8	-16,0
5	-114,6	2,3	-5,0
6	-63,7	-14,3	0,4
7	-61,1	26,5	-0,2



In tabel 3.16 is te zien dat bij segment 3 de grootte van de ringkracht door windbelasting bijna 20% is van de ringkracht in de koepel door het eigengewicht. Echter, de ringkracht ten gevolge van de windbelasting is een ringdrukkracht. Dit is gunstig voor de krachtenverdeling in de koepel. Het zelfde geldt voor de grote ringdrukkracht in segment 4. De grootste ringtrekkracht is hier in segment 2. Deze bedraagt minder dan 10% van de ringtrekkrachten, die worden veroorzaakt door het eigengewicht, en is daarom verwaarloosbaar.

In de stangenveelhoek is het linkerdeel van de koepel getekend. Hierbij drukt de wind tegen de koepel aan. Aan de andere kant van de koepel treedt er echter zuig op. Door zuig zullen aan deze kant van de koepel ringtrekkrachten ontstaan. De ringtrekkrachten aan deze kant zullen eveneens het grootst zijn in segment 3. Echter, de ringtrekkracht door zuig van de wind zal niet 20% zijn van de ringtrekkrachten door het eigengewicht, maar ongeveer de helft, 10%. Dit komt doordat de windvormfactoren bij zuig twee keer zo klein is dan de windvormfactoren waarbij de wind naar het vlak toe gericht is.

Indien de extra ringtrekkracht door windbelasting maar 10% is van de ringtrekkracht door het eigengewicht, mag de windbelasting verwaarloosd worden.

Opmerking

Deze aanname is bovendien nog aan de veilige kant. Bij het berekenen van het eigengewicht is namelijk het eigengewicht van de ribben niet meegenomen. De ringtrekkrachten door het eigengewicht zijn dus eigenlijk nog een beetje groter. Door de grote dimensies van het bouwwerk mag daarom worden aangenomen dat de windbelasting niet tot bijzondere gevolgen leidt.

4. Sterktes van de materialen

4.1 Kettingen van zandsteen

De kettingen van zandsteen hebben een doorsnede van 2 x 2,3 x 0,44 meter = 2,0 m^2

De treksterkte van zandsteen is 20 N/mm^2.

De kettingen van zandsteen zouden dus **40,5 MN** aan ringtrekkrachten kunnen opnemen.

De druksterkte van zandsteen is 128 N/mm^2.

De kettingen van zandsteen kunnen dus **259 MN** aan ringdrukkrachten kunnen opnemen.

4.2 Ketting van hout

Het oppervlak van de doorsnede van de houten ketting is 0,16 m^2. De houten ketting is gelegen in segment 3 op 2 meter afstand onder de tweede ketting van zandsteen.

Voor de treksterkte wordt 11 N/mm^2 genomen.

De houten ketting kan dus **1,8 MN** aan ringtrekkrachten opnemen.

4.3 Metselwerk

Behalve de kettingen, kan ook het metselwerk voor een deel de ringkrachten opnemen.

Onderaan bij de voet bestaat de koepel voor een hoogte van 3,5 meter uit massief zandsteen. Hier treden er vooral ringtrekkrachten op. Omdat het een metselwerk is, zal de treksterkte van de mortel maatgevend zijn. Normaal gesproken heeft een metselwerk dan een treksterkte van 0 – 0,5 N/mm^2. In dit geval bij de koepel van Florence is er sprake van nauwkeurig vakmanschap.[15] Om de koepel te bouwen zijn alle stenen zorgvuldig in bepaalde posities gemetseld, bijv. het visgraatpatroon. Ook werden de ribben eerst gemetseld en vervolgens pas de tussengelegen ruimtes, zodat de ribben als leiddraad konden dienen. Precisie was bij de bouw van de koepel van essentieel belang, omdat het metselwerk natuurlijk weer bijeen moet komen bij de top.

Niet alle metselwerken werden in die tijd zo zorgvuldig gebouwd. Bij vele andere werken is er te zien dat vaak de grootte van de stenen veel van elkaar verschillen. In dit geval zijn de stenen allemaal even groot. Zelfs nu, na achthonderd jaren, is te zien hoe netjes de koepel is gemetseld. Ook zijn de groeven tussen de stenen (en dus de dikte van de mortel) heel smal en de stenen zijn nog steeds in goede staat. Dit wijst erop dat het een metselwerk is

[15] Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 55

van uitstekende kwaliteit. Daarom wordt voor de treksterkte van het metselwerk hier 0,5 N/mm² gekozen.

De doorsnede van het massieve gedeelte aan de voet van de koepel heeft een oppervlak van 4,3 x 3,5 m = 15,5 m².

Voor de treksterkte is 0,5 N/mm² gekozen.

Het massieve gedeelte aan de voet van de koepel (segment 7) kan dus **7,5 MN** aan ringtrekkrachten opnemen.

Boven de massieve voet bestaat de koepel uit 2 schillen. Nog steeds is voor een hoogte van een volgende 3,5 meter zandsteen gebruikt. Voor de doorsnede wordt 2,6 x 3,5 m = 9,1 m² genomen.

De (ring)treksterkte is daar (segment 6) dan **4,6 MN.**

De (ring)druksterkte van het zandsteen hier is 9,1 m² x 128 N/mm² = **1165 MN**.

Indien voor de druksterkte van het metselwerk 2,5 N/mm² wordt gekozen, de druksterkte van het zandsteen in samenwerking met de mortel, dan is de ringdruksterkte van het metselwerk **22,8 MN.**

Vanaf een hoogte van 7 meter zijn er lichtere metselstenen gebruikt in plaats van zandsteen. Voor de ringtreksterkte maakt dat niet veel uit, aangezien de mortel nog steeds maatgevend is. Vanaf 7 meter tot en met 17,5 meter boven de voet van de koepel (segmenten 4 en 5), wordt het oppervlak van geschat op 2,45 x 7 x 2 m = 34,4 m².

Segmenten 4 en 5 kunnen dan samen **17,2 MN** aan ringtrekkrachten opnemen.

Bij de hoogte van 17,5 meter boven de voet van de koepel staan de metselstenen onder een hoek van 30°. Dit is net de grenshoek dat de stenen niet naar beneden glijden. Om de koepel toch te kunnen bouwen zonder bekisting, is bij de uitvoering vanaf deze hoogte het visgraatpatroon in het metselwerk toegepast, zie hoofdstuk 2.4.2. Bij het visgraatpatroon werd het metselwerk ongeveer om de één meter onderbroken door rechtop geplaatste metselstenen. Deze visgraatpatroon was noodzakelijk om de koepel te bouwen. Echter, deze rechtopstaande stenen die in een spiraalvorm door de koepel naar de top lopen, hebben een nadelig gevolg voor de treksterkte van het metselwerk. Rechtopstaande stenen kunnen namelijk veel minder goed de ringtrekkrachten binnen de koepel opnemen. Een lange tijd na de bouw van de koepel zijn er ook scheuren ontdekt in de koepel, die langs het visgraatpatroon lopen.

Door de aanwezigheid van het visgraatpatroon wordt daarom boven een hoogte van 17,5 meter (bij segmenten 1, 2 en 3) de ringtreksterkte van het metselwerk op **0 N/mm²** geschat. Om deze reden werd het visgraatpatroon (waarschijnlijk) ook vanaf een bepaalde hoogte pas toegekost, waar de ringtrekkrachten geringer zijn. Zo kan het onderliggend metselwerk nog wel wat ringtrekkrachten opnemen.

De ringdruksterkte van de metselstenen wordt geschat op 2,5 N/mm². Met een oppervlakte van gemiddeld 2,05 x 7 m = 14,4 m² wordt er geschat dat segment 2 **35,9 MN** kan opnemen aan ringdrukkrachten.

4.4 Opmerking

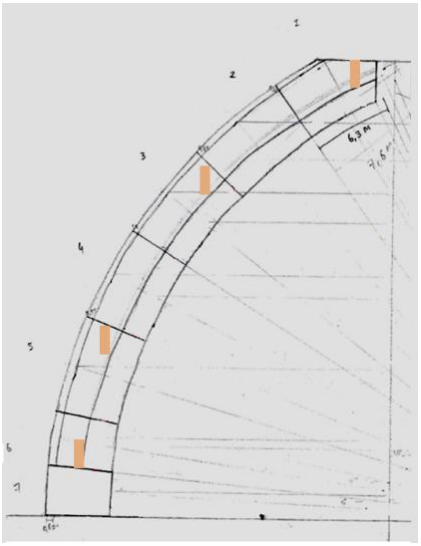
Behalve de sterkte van de kettingen en het metselwerk, zijn ook de sterktes van de verbindingen van belang. Echter, zelfs na veel onderzoek zijn de afmetingen van de verbindingen nog steeds onbekend. Ook zijn de afmetingen moeilijk te schatten op basis van de gevonden afbeeldingen. Omdat de resultaten van zulke grove schattingen niet betrouwbaar zijn, wordt de sterkte van de verbindingen verder niet meer bekeken en wordt er aangenomen dat de verbindingen sterk genoeg zijn.
Toch vormt deze aanname een belangrijke voorwaarde bij het trekken van een conclusie. Smeedijzer in een vochtige omgeving gaat namelijk na 50 tot 100 jaar corroderen.[16] Het is bekend dat er op de ijzeren verbindingen coating is aangebracht, maar het blijft een vraag of deze coating door de eeuwen heen nog steeds goed functioneert.

[16] Mondelinge opmerking van Dr.Ir. P.C.J. Hoogenboom

5. Unity check

Tabel 3.17 ringkrachten in rekenwaardes

Segment	H (MN)	Sterkte kettingen (MN)	Sterkte metselwerk (MN)
1	-16,7	-138,3	-19,9
2	-1,8		-19,9
3	0,7	22,5	0,0
4	1,0		4,8
5	2,8	24,3	4,8
6	-2,3	-138,3	-12,7
7	16,8		4,2



Afb. 5.1 ligging kettingen

5.1 Veiligheidsfactoren

In tabel 3.17 zijn de rekenwaardes van de ringkrachten weergegeven. Ernaast zijn de liggingen van de kettingen van zandsteen in afbeelding 5.1 weergegeven. Voor het berekenen van de rekenwaardes van de ringkrachten zijn de volgende veiligheidsfactoren gebruikt:

- Belastingfactor eigengewicht: $\gamma_{Q,eigengewicht} = 1{,}2$
- Materiaalfactor zandsteen $\gamma_{zandsteen} = 1{,}8$
- Materiaalfactor metselsteen $\gamma_{metselsteen} = 1{,}8$

Bij de houten ketting is in hoofdstuk 4.2 al de rekenwaarde van de sterkte berekend. Voor de sterkte van het materiaal was namelijk 11 N/mm² genomen. In deze waarde zijn alle veiligheidsfactoren al verwerkt.

5.2 Unity checks

Segment 1

In segment 1 wordt de grote ringdrukkracht van 16,7 MN bij de top van de koepel vooral opgenomen door de zandstenen ketting. Zoals in hoofdstuk 4.1 is berekend, kan de ketting wel 249 MN aan ringdrukkrachten opnemen. De rekenwaarde hiervoor is 249/1,8 = 138,3 MN.

Unity check segment 1 :

$$\frac{-16{,}7}{-138.3} = 0{,}121$$

Segment 2

In segment 2 wordt de aanwezige ringdrukkracht van 1,8 MN door het metselwerk opgenomen. De ringdruksterkte van segment 2 werd immers geschat op 35,9/1,8 = 19,9 MN.

Unity check segment 2 :

$$\frac{-1,8}{-19,9} = 0,090$$

Segment 3

In segment 3 wordt de geringe ringtrekkracht van 0,7 MN opgenomen door de ketting van zandsteen. Eigenlijk kan de ketting veel meer trekkracht opnemen, namelijk 40,5/1,8 = 22,5 MN. De ketting beschermt de koepel echter niet alleen van windbelasting en het eigengewicht, maar ook van aardbevingen. Wellicht zal er meer gebruik worden gemaakt van de treksterkte van deze ketting bij het optreden van aardbevingen.

Unity check segment 3 :

$$\frac{0,7}{22,5} = 0,031$$

Segment 4

In segment 4 wordt de geringe ringtrekkracht van 1,0 MN opgenomen door het metselwerk. Het metselwerk in segment 4 kan namelijk ongeveer 17,2/2/1,8 = 4,8 MN opnemen aan ringtrekkrachten, zoals berekend in hoofdstuk 4.3.

Unity check segment 4 :

$$\frac{1,0}{4,8} = 0,208$$

Segment 5

De ringtrekkracht van 2,8 MN in segment 5 kan weer opgenomen worden door de ketting van zandsteen. De ketting van zandsteen kan 22,5 MN opnemen. Verder zit in dit segment ook de houten ketting. De houten ketting kan ook een klein deel (1,8 MN) van de ringtrekkrachten opnemen.

Unity check segment 5 :

$$\frac{2,8}{(22,5 + 1,8)} = 0,115$$

Segment 6

In segment 6 kan de ringdrukkracht van 2,3 MN worden opgenomen door het metselwerk en de ketting. Beiden bestaan uit zandsteen. Zandsteen kan veel drukkracht opnemen.

Unity check segment 6 :

$$\frac{-2,3}{-(138,3 + 12,7)} = 0,015$$

Segment 7

In segment 7 is door middel van de stangenveelhoek en het poolfiguur bepaald dat de rekenwaarde van de ringtrekkracht 16,8 MN is. In werkelijkheid zal de druklijn niet precies zo verlopen, zoals in de stangenveelhoek getekend. De kettingen spelen namelijk ook een grote rol. De ringtrekkracht wordt voor een groot deel ook opgenomen door de onderste

ketting van zandsteen. De ketting van zandsteen kan 22,5 MN aan ringtreksterkte opnemen. Verder kan het massieve gedeelte aan de voet van de koepel ook nog 4,2 MN aan trekkrachten opnemen.

Unity check segment 7 :

$$\frac{16{,}8}{(22{,}5 + 4{,}2)} = 0{,}629$$

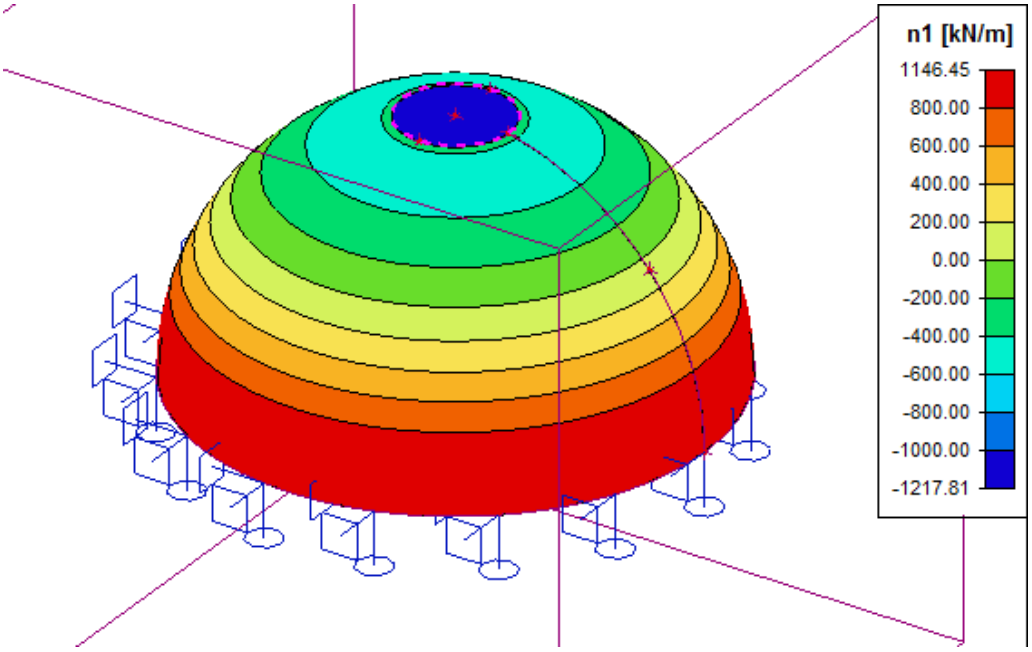


6. Scia engineer

6.1 Halve bol met deksel

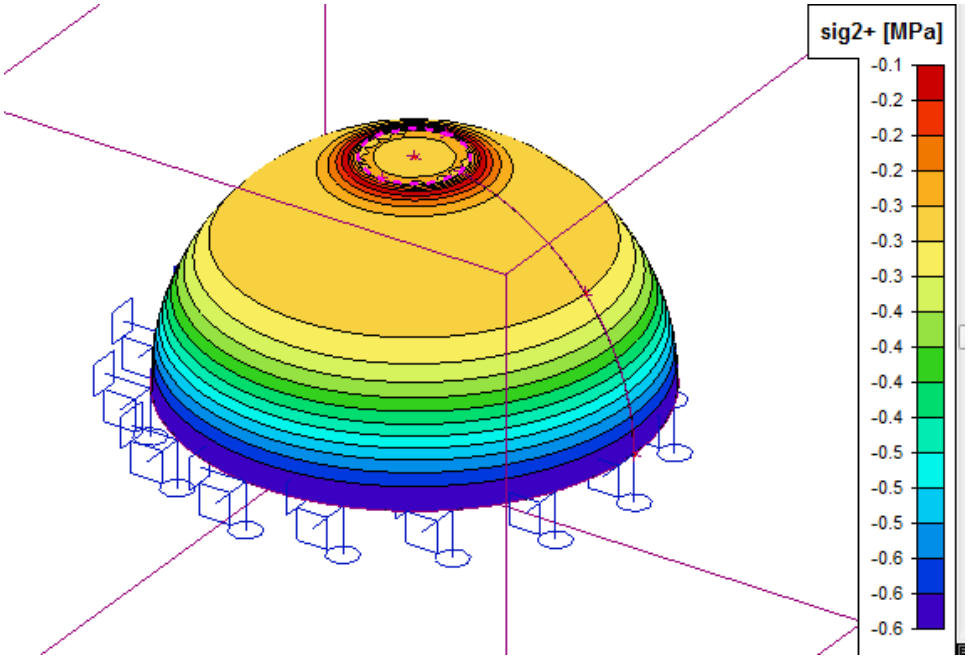
Naast de handberekening is de koepel ook in het programma *Scia Engineer* gemodelleerd. In afb. 6.1 en 6.2 is de koepel gemodelleerd als een halve bol met deksel.

In afb. 6.1 zijn de horizontale ringkrachten te zien. Net zoals eerder in hoofdstuk 3 al was weergeven, is hier te zien dat bij de top van de koepel ringdrukkrachten heersen en bij de voet ringtrekkrachten. Volgens deze resultaten zou er in segment 7 een ringtrekkracht zitten van 1146,45 x 3,5 = 4012,58 kN = 4,0 MN. Volgens de handberekening met behulp van de stangenveelhoek en het poolfiguur zou de ringtrekkracht daar 14MN moeten zijn (zie hoofdstuk 3.3). Dit verschil kan worden verklaard door de afwijkende vorm van het model. De halve bol heeft bij de voet wel dezelfde diameter als de koepel, maar door de vorm heeft het model in *Scia Engineer* een kleinere hoogte. De hoogte van dit bolvormig model is slechts 65% van de originele koepel met de spitse vijfde bogen.



Afb. 6.1 De horizontale ringkrachten in de halve bol met deksel

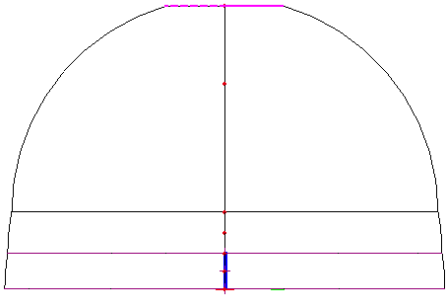
In afb. 6.2 zijn de verticale drukspanningen weergegeven. Ook hier zullen de waardes enigszins afwijken van de werkelijke spanningen, onder andere door de afwijkende vorm van het model.



Afb. 6.2 De verticale drukspanningen in de halve bol met deksel

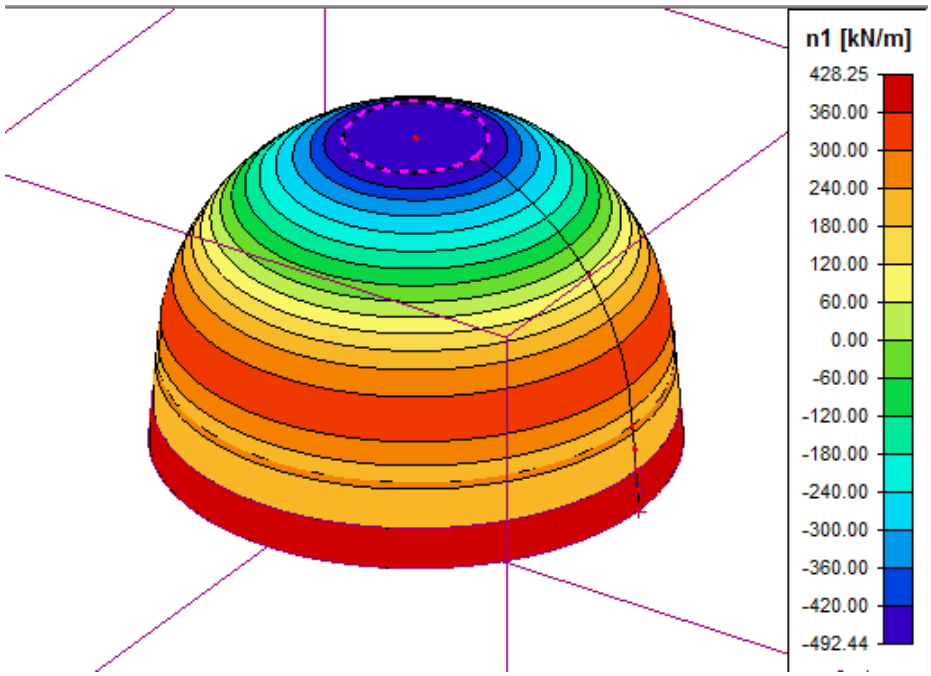
6.2 Meerdere halve bolsegmenten met deksel

In het volgende model is de vorm in het programma ingevoerd door gebruik te maken van meerdere bolsegmenten. Als eerste is de onderste laag van de koepel ingevoerd. Deze is 3,5 meter hoog en 4,3 meter breed, bestaande uit massief zandsteen (segment 7) en het heeft dezelfde diameter als de koepel. Segment 6 is als de volgende laag ingevoerd met een dikte van 2,7 meter. Ook deze laag heeft een dichtheid van 2325 kg/m^3 (zandsteen) en het sluit aan op de onderliggende laag. Als laatste is hierop nog een derde halve bolsegment geplaatst die aansluit op de vorige laag, zie afb. 6.3. Alsnog bereikt dit model nog steeds niet dezelfde hoogte als de werkelijke koepel. De hoogte van het model is ruim 10% kleiner.

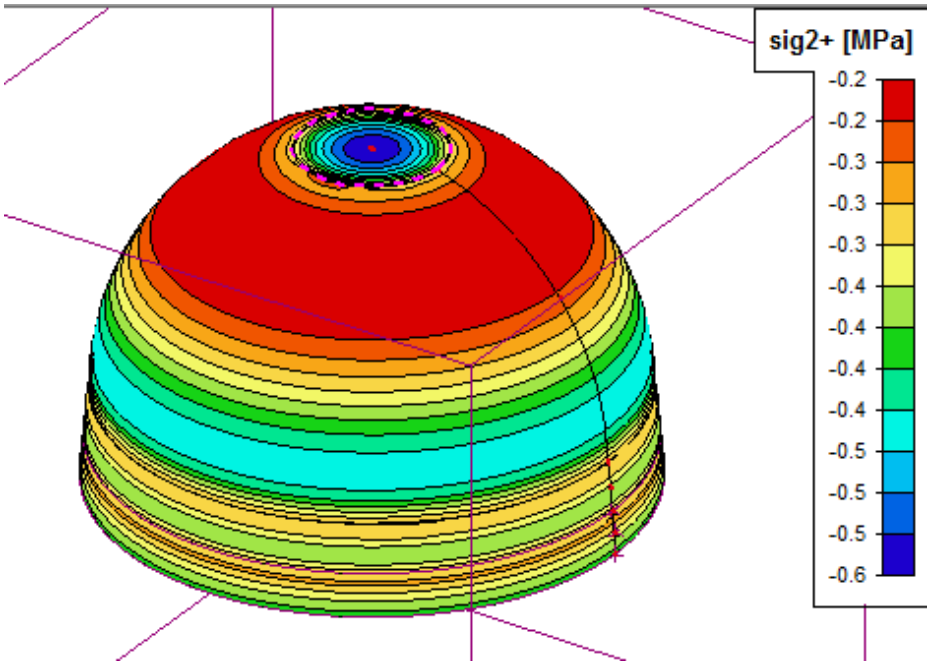


Afb. 6.3 Vorm tweede model

In afb.6.4 zijn weer de horizontale ringkrachten weergegeven. Nog steeds wijken de waardes van dit model af van de eerder met de hand berekende waardes. De weergegeven ringtrekkracht bij de voet van het model is nog steeds veel kleiner dan de eerder berekende waarde. Dit model heeft een grotere hoogte, maar toch is de ringtrekkracht nog kleiner dan het vorig model. Dit kan verklaard worden door de vorm van dit model. De kromming van de koepel wijkt erg af van de werkelijke spitse vijfde boog. Voor een grote hoogte loopt de koepel in dit model erg steil. Daarom is de krachtenverdeling ook anders. Dit geeft aan dat niet alleen de hoogte (grootte) van de koepel maar ook de vorm van de druklijn erg belangrijk is voor de krachtenverdeling.



Afb. 6.4 De horizontale ringkrachten in het tweede model

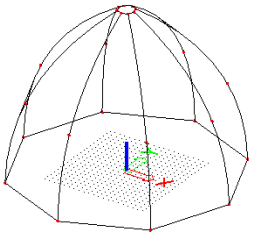


Afb. 6.5 De verticale krachten in het tweede model

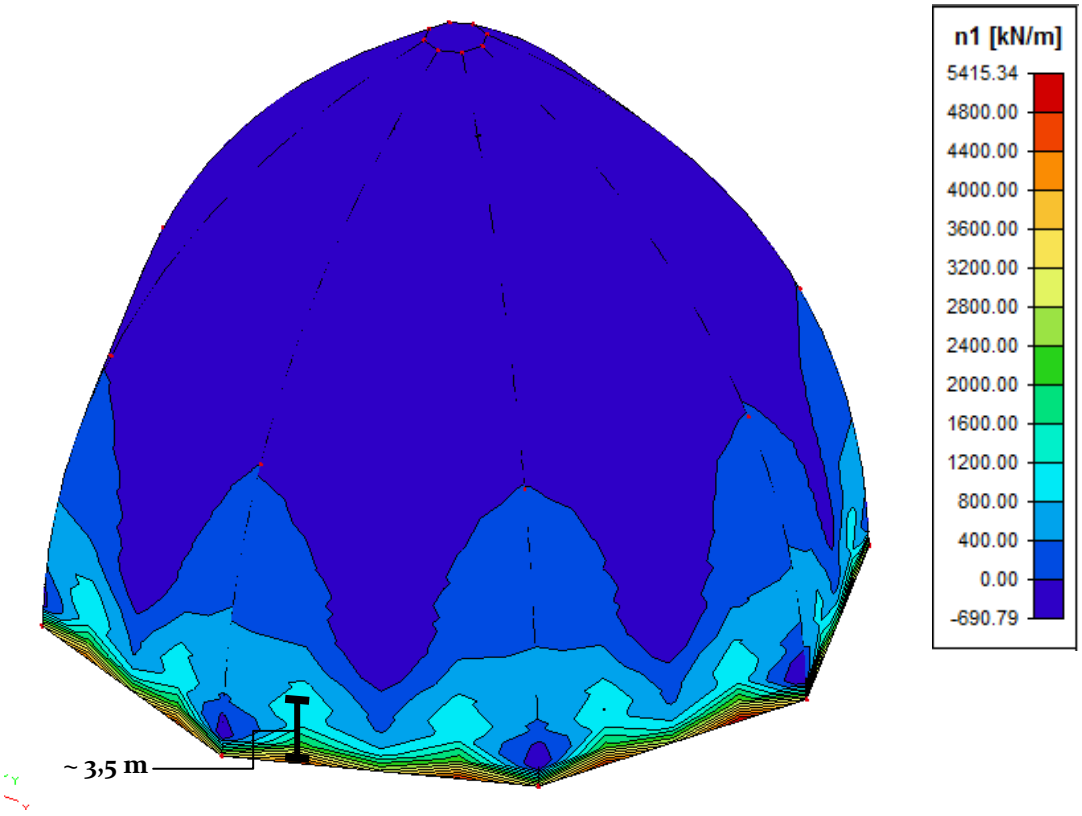
In afb. 6.5 zijn de spanningen te zien die van de top van de koepel naar de voet lopen. Doordat in dit model de onderste twee lagen een grotere dikte hebben, zijn de spanningen lager.

6.3 Octogonale koepel

Als laatst wordt een octogonale koepel in *Scia Engineer* ingevoerd. Vergeleken met de anderen komt de vorm van dit model het meest overeen met de werkelijke koepel, zie afb.6.6. Ook heeft dit model dezelfde hoogte als de werkelijke koepel en de wanden hebben een variabele dikte waarbij de wand bij de voet van de koepel het dikst is, en bij de top van de koepel zijn de wanden het dunst.



Afb. 6.6 Octogonaal model



Afb. 6.7 Horizontale ringkrachten in het model

In afbeelding 6.7 zijn de horizontale ringkrachten in het model te zien. Het is te zien dat door een octogonale vorm de krachtenverdeling in werkelijkheid anders is. Boven een hoogte van 7,5 meter zijn er alleen maar ringdrukkrachten.

De ringtrekkrachten zijn geconcentreerd bij de voet. Volgens deze gegevens zou op bepaalde plaatsen in segment 7 een ringtrekkracht van ongeveer 10 MN aanwezig zijn. Op sommige plaatsen in de onderste laag zijn de ringtrekkrachten nog kleiner. Volgens de handberekening was de ringtrekkracht 14 MN. Dit komt aardig overeen. Het verschil tussen de handberekening en dit model is dat bij de handberekening de koepel was vereenvoudigd tot een ronde koepel in plaats van een octogonale koepel (de spitse vijfde vorm was wel aanwezig). Blijkbaar heeft de octogonale vorm een gunstig invloed op de krachtenverdeling. De ringtrekkrachten aan de voet van de koepel worden kleiner door de aanwezigheid van de acht ribben.

In afb. 6.7 is te zien dat de grootste ringtrekkrachten bij de voet van de koepel tussen twee hoekpunten zitten. Op deze plaatsen zitten in werkelijkheid nog ribben, zie afb. 1.4. Wellicht zal dit extra aanwezige materiaal ook nog een gunstig invloed hebben op het opnemen van de krachten.

De resultaten van de handberekening zitten dus aan de veilige kant, want door ribben in de octogale vorm verandert de krachtsverdeling en zijn de aanwezige ringtrekkrachten bij de voet kleiner. Ook is het gunstig dat boven een hoogte van 7,5 meter alleen maar ringdrukkrachten aanwezig zijn, want het metselwerk kan goed de drukkrachten opnemen.

Discussie

Essentiële eigenschappen van de koepel voor het draagvermogen

Het draagvermogen van de koepel kan onder andere worden verklaard door de afname van de dikte van de schillen naarmate de top wordt bereikt. Op deze manier is het eigengewicht boven bij de top van de koepel kleiner dan het eigengewicht bij de voet.

Dit effect wordt versterkt door het gebruik van zwaardere zandstenen in de onderste 7 meter van de koepel en het gebruik van lichtere metselstenen in het koepeldeel erboven.

Verder worden de ringtrek- en drukkrachten voor een groot deel opgenomen door de vier aanwezigen kettingen van zandsteen.

Beperking van het gevonden resultaat

Tijdens het proces om tot de gevonden resultaten te komen zijn er veel vereenvoudigingen gemaakt. Hierdoor zijn de resultaten niet nauwkeurig. Het is niet aan te raden om de gevonden sterktes en belastingen verder te gebruiken voor andere nauwkeurige berekeningen. De werkelijke sterktes en belastingen kunnen (flink) verschillen met de gevonden waardes.

Gemaakte aannames en vereenvoudigingen die een negatief invloed hebben op de betrouwbaarheid van het resultaat:

- De belastingen t.g.v. het eigengewicht zijn eigenlijk groter door de vereenvoudiging van de segmenten en het rekenen met poolcoördinaten van een bol i.p.v. een koepel met een spitse vijfde boog (zie opmerkingen bij hoofdstuk 3.2).
- Onnauwkeurigheid door het gebruik van een grafische methode bij het berekenen van de ringkrachten. (hoofdstuk 3.2 en 3.4).
- Vereenvoudiging integraalformule (hoofdstuk 3.4).

Er zijn ook vereenvoudigingen en aannames die aan de veilige kant zitten:

- Veilige aanname sterkte materialen van bijv. eikenhout (hoofdstuk 2.6).
- Rekenwaardes gebruikt bij unity check (hoofdstuk 5.2).
- Vereenvoudiging van octogonale tot ronde koepel bij het berekenen van ringkrachten is gunstig voor de krachtenverdeling (hoofdstuk 6.3).

Bij de unity check was de hoogste waarde 0,629. Dit betekent dat er nog ruimte is voor 37% onnauwkeurigheid, dan zal nog steeds aan de unity check worden voldaan. Ondanks de onnauwkeurigheden wordt toch verondersteld dat de fouten binnen de 37% zitten.

Verder is er ook aangenomen dat de verbindingen sterk genoeg zijn. Door het ontbreken van de informatie over de afmetingen van de verbindingen zijn er geen betrouwbare waardes van de sterkte van verbindingen berekend. Er is dus een eis dat de verbindingen van de kettingen sterk genoeg moeten zijn (hoofdstuk 4.4).

Conclusies en aanbevelingen

De krachtswerking in de koepel is bepaald met handberekeningen en eindige-elementenberekeningen. Bij de handberekeningen is de koepel gemodelleerd met zeven horizontale ringen. In deze ringen treden drukkrachten en trekkrachten op. De onderste ring is maatgevend. Hierin treedt een trekkracht op van 14 MN door het eigen gewicht. De ringkrachten door windbelasting blijken verwaarloosbaar te zijn. Uit de eindige-elementen-berekeningen volgt ook dat de onderste ring maatgevend is. De ringkracht volgens de eindige-elementenberekening is 10 MN.

Het metselwerk van de koepel wordt versterkt door horizontale "kettingen" van natuursteen en hout. Uit archieven blijkt dat ook een ketting van smeedijzer is ingemetseld, maar de aanwezigheid hiervan is niet vastgesteld. Ter plaatse van de onderste ring bevinden zich een natuurstenen ketting en natuursteen metselwerk. Uit voorzichtige schattingen van afmetingen en materiaalsterkten volgt dat deze ketting 17 MN kan opnemen. Het metselwerk kan 4 MN opnemen. Er is derhalve voldoende veiligheidsmarge aanwezig (17 + 4 > 14). De houten ketting draagt weinig bij aan de draagkracht. Een ijzeren ketting is niet noodzakelijk voor het dragen van het eigengewicht en de windbelasting.

Hieruit blijkt dat de natuurstenen ketting in de onderste ring essentieel is voor de veiligheid van de koepel. Deze ketting bestaat uit natuurstenen blokken gekoppeld door smeedijzeren ankers. Deze ankers zijn essentieel: Als een verbinding tussen twee blokken van de onderste ketting zou breken, dan stort de koepel plotseling in. Er is weinig informatie gevonden over de exacte vorm en afmetingen van de ankers. Waarschijnlijk zijn de ankers ingemetseld en niet toegankelijk voor inspectie. Smeedijzer in een vochtige omgeving gaat corroderen na 50 tot 100 jaar. Het is daarom belangrijk dat het metselwerk droog blijft. Aanbevolen wordt om de vochtigheidsgraad van het metselwerk continu te meten en te beoordelen. Voor de zekerheid kunnen voorspankabels om de onderste ring van de koepel worden aangebracht.

In dit bacheloreindwerk zijn aardbevingen buiten beschouwing gelaten. De koepel heeft aardbevingen doorstaan in 1510, 1675 en 1895 zonder schade op te lopen. Dit zou onderwerp kunnen zijn van een vervolgstudie.

Referentielijst afbeeldingen

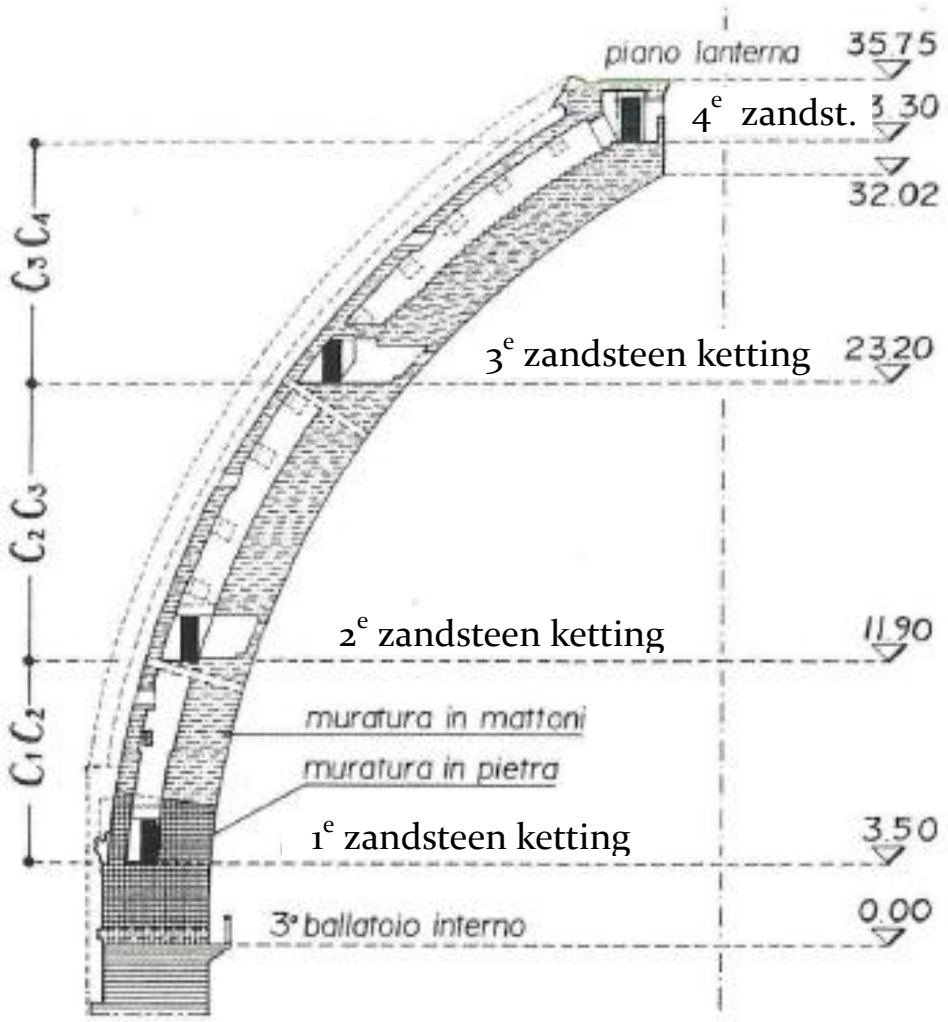
1 http://www.orangesmile.com/ru/foto/top-churches/basillica-di-santa-maria-del-fiore-florence_s.jpg , d.d. 9-7-2012
2 Eugenio Luporini, Brunelleschi, blz. 25
3 http://4.bp.blogspot.com/_CijcaA9yq58/SWkSgm3GXhI/AAAAAAAABgU/-vzbLszFiEw/s400/Better+Florence+Cathedral+dome+interior.jpg , d.d. 9-7-2012
4 Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 88
5 http://www.obscure.org/~perky/uofr/fall2002/ISYS203U/Duomo_Site/images/constructiona.gif , d.d. 9-7-2012
6 http://2.bp.blogspot.com/_CijcaA9yq58/SWkQIJz2rCI/AAAAAAAABgE/KrowHJInm8E/s400/Florence+cathedral+herring+bone+brick+work.jpg , d.d. 9-7-2012
7 Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 108
8 Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 108
9 Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 73
10 Giovanni Fanelli, Brunelleschi, blz. 30
11 Ross King, *Brunelleschi's Dome*, blz. 31
12 J. Oosterhoff, Bouwtechniek in Nederland 4, blz.50
13 A. Bruschi, Filippo Brunelleschi, blz. 40
14 J. Oosterhoff, Bouwtechniek in Nederland 4, blz.50
15 James Stewart, Calculus 6th edition, blz. 1007

Juli 2012

Eindversie

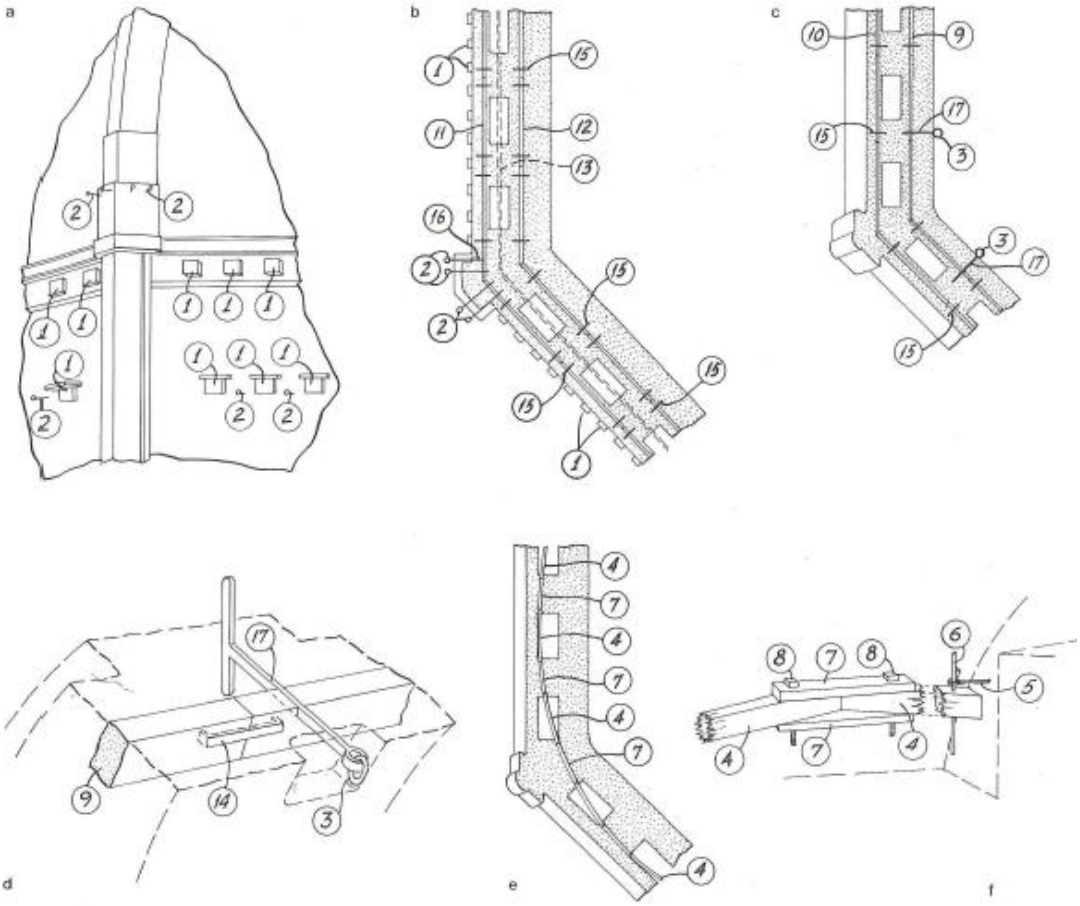
Rapport

Bijlage I Doorsnede koepel



Bron: A. Bruschi, Filippo Brunelleschi, blz. 40

Bijlage II Details stenen ketting en houten ketting



135. Das System der „Ketten" nach Prager und Scaglia.
a) Details der „Steinketten" an der Außenseite. b) Die „Steinketten" der höheren Ebenen. c) Die unteren „Steinketten". d) Details der unteren „Steinketten". e) Der Ringanker aus Holzbalken. f) Details des aus Holzbalken zusammengesetzten Ringankers.

Die sichtbaren Teile: 1) Die Außenenden der Steinblöcke. 2 und 3) die äußeren und die inneren Enden der eisernen Zuganker. 4) Der Ringanker aus Holzbalken. 5) Die Metallklammern, mit denen die „Kette" der Holzbalken im Mauerwerk verankert ist. 6) Ankersplint mit Ankerkopf. 7, 8) Die verbindenden Laschen und Bolzen bei dem Ringanker aus Holzbalken.

Die vermuteten Teile: 9) Der verbindende innere Steinring. 10–13) Weitere Ringe. 14) Metallklammern. 15) Verbindende Klammern. 16) Metallstangen mit Haken an der Außenseite. 17) Metallstangen mit innen angebrachten Ringen.

Bron: G. Marchini, Baptiserium, Dom und Dom-museum in Florenz, blz. 137