Invarianten van tensoren

Onderzoeksgroep: ConstructieMechanica

Inleiding

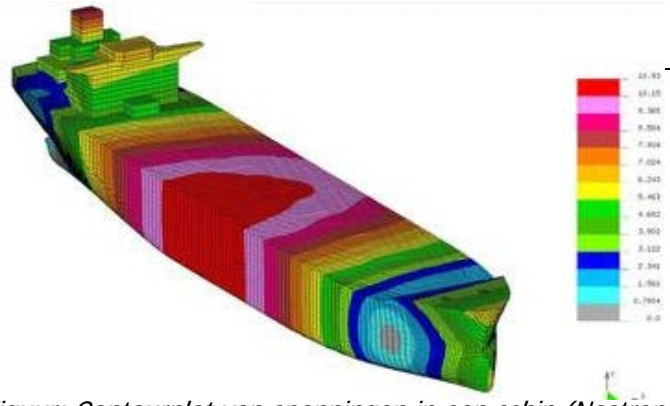
Veel fysische grootheden worden beschreven als een tweede orde tensor. Bijvoorbeeld momenten in platen, normaalkrachten in schijven, krommingen van schalen en spanningen in drie dimensies. De hoofdwaarden van bijvoorbeeld de spanningstensor zijn de eigenwaarden. In platen zijn er twee hoofdwaarden en in volumes zijn er drie. Uit de afleiding van deze hoofdwaarden volgt dat er ook twee respectievelijk drie invarianten zijn. Dit zijn grootheden die niet afhankelijk zijn van de richting van het assenstelsel.

Onafhankelijkheid van het assenstelsel is belangrijk bij het plotten van rekenresultaten. Stel bijvoorbeeld dat we een contourplot maken van σ_{xx} in een schip (zie figuur). Vervolgens draaien we het assenstelsel 30° om de *y* as. De constructie en de belasting zijn niet veranderd. Niettemin verandert de contourplot van σ_{xx} volkomen. In een punt waar eerst 123 N/mm2 wordt afgebeeld staat na draaiing -45 N/mm2. Dit is niet praktisch als we willen beoordelen of de spanning ergens te groot is. Het is handiger de hoofdspanning σ_1 af te beelden in plaats van σ_{xx} omdat de waarden van hoofdspanningen niet afhankelijk zijn van het assenstelsel. De invarianten zijn ook niet afhankelijk van het assenstelsel. (De Von Mises-spanning en de Tresca-spanning ook niet.)

Een bijkomend voordeel van invarianten is dat ze veel sneller kunnen worden uitgerekend dan eigenwaarden. Om die reden maken veel geavanceerde materiaal-modellen gebruik van de invarianten.

Probleemstelling

We beperken ons even tot tweedimensionale tensorvelden, bijvoorbeeld spanning in het oppervlak van een schaalconstructie. In dit veld zitten bijzondere punten met de naam *umbilic* (Latijn voor navel). Deze punten zijn gedefinieerd als die waarbij de hoofdwaarden aan elkaar gelijk zijn. Als de hoofdrichtingen worden geplot, lijkt het of alle spanningen naar deze umbilics lopen. We kunnen wiskundig afleiden dat in een umbilic zes hoofdrichtingen



Figuur: Contourplot van spanningen in een schip (Nastran)

kunnen optreden. (Normale punten van een 2D tensorveld hebben twee hoofdrichtingen.) Aangezien er zes hoofd-richtingen zijn, zijn er ook zes hoofspanningen op enige (infinitesimale) afstand van een umbilic. Het ligt voor de hand dat er ook zes invarianten zijn. Deze invarianten zijn nog niet gevonden. Er bestaan slechts vijf internationale publicaties over dit onderwerp en hierin wordt van één invariant melding gemaakt.

Opdracht

Vindt de invarianten van een tensorveld rond een umbilic.

Aanpak

De opdracht moet wiskundig worden uitgewerkt. Het probleem kan worden geformuleerd met middelbare-schoolwiskunde. De uitwerking kan verschillende onderzoeks-lijnen volgen en gebruikmaken van verschillende wiskundige gereedschappen. Begonnen kan worden met twee dimensies en later kan uitbreiding naar drie dimensies volgen.

Relevantie

De invarianten van een umbilic zullen ongetwijfeld kunnen helpen om de umbilic te classificeren. Er bestaan namelijk vier typen umbilic (lemon, star, monstar, flame) en die zijn vaak heel moeilijk op het oog te onderscheiden. Mogelijke verdere toepassingen zijn 1) generalisatie van gradient plasticity models, 2) beoordelen van de benodigde fijnheid van een elementennet, 3) vuistregels voor ontwerpverbeteringen ten aanzien van knik. Ook toepassingen in andere wetenschappen zijn mogelijk zoals vloeistofmechanica, meteorologie en medische scanners.

Begeleiders:

Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
Ir. C. Kasbergen

Meer informatie:

Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom
Kamer: Hoofdgebouw 6.48
T: (+31) (0)15 2788081
E: p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl