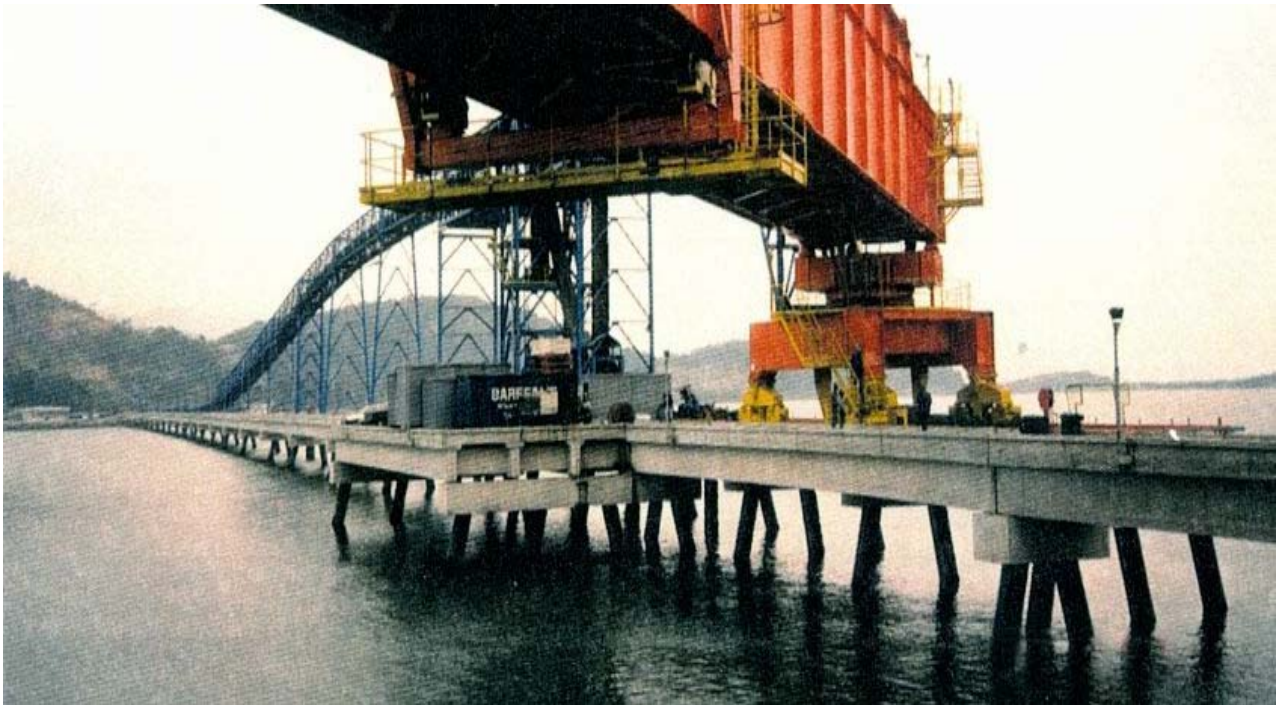


# Tijdafhankelijk gedrag van Trestlebruggen



**R. Parandakhteh**  
mei 2007

 Delta Marine  
Consultants bv

 TU Delft  
Technische Universiteit Delft

## Voorwoord

Dit rapport is geschreven voor de afronding van mijn studie aan de Faculteit Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft bij de afdeling Bouw.

De afstudeercommissie is als volgt samengesteld:

Prof.ir. A.Q.C. van der Horst	-Hoogleraar TU-Delft (Construction Technology) en Delta Marine Consultants
Dr.ir. A. Romeijn	-Begeleider TU-Delft (Staal- en Houtconstructies)
Dr.ir. P.C.J. Hoogenboom	-Begeleider TU-Delft (Constructie Mechanica)
Dr.ir. H.E.J.G. Schlangen	-Begeleider TU-Delft (Microlab)
Ir. L.A.M. Groenewegen	-Begeleider Delta Marine Consultants
Ir. L.J.M. Houben	-Afstudeercoördinator TU-Delft

Deze bovengenoemde personen wil ik graag bedanken voor hun deskundige begeleiding en ondersteuning gedurende mijn afstudeerperiode. Daarnaast gaat mijn dank uit naar de Delta Marine Consultants voor de geboden faciliteiten en diensten.

Delft, mei 2007

Rohaam Parandakhteh

# Samenvatting

Tijdafhankelijk gedrag van Trestlebruggen

R. Parandakhteh, mei 2007

In dit afstudeerproject is het tijdafhankelijke gedrag van betonnen trestlebruggen bestudeerd. Hiervoor is een raamwerkprogramma geschreven wat krimp, kruip, relaxatie en thermische uitzetting in rekening brengt. Hiermee zijn de krachtswerking en vervormingen berekend zoals die zich ontwikkelen gedurende de uitvoering en levensduur van constructies.

In een casestudie is een veel voorkomende trestlebrug gemodelleerd. De brug bestaat uit prefab betonnen voorspanliggers (B45) met prefab nagerekt gekromde kabels en een in situ gestorte gewapend betonnen druklaag (B45). Deze constructiecomponenten vertonen in de tijd een eigen mechanisch karakter die op elkaar inwerken. De vervormingen, krachtverdelingen en voorspanverlies van de brug zijn berekend over een periode van 20 jaar.

De parameters die invloed kunnen hebben op het tijdafhankelijke gedrag van de brug zijn gevarieerd. Deze parameters zijn de aanvangsvoorspankracht, de uitvoeringswijze van de liggers (voorspanliggers met nagerekt gekromde kabels of voorspanliggers met recht voorgerekte voorspanelementen), de betonsoort van de liggers en druklaag, doorsnede van de ligger, druklaag en palen, de verticale en horizontale belastingen, klimaat en locatie. Met name belangrijk zijn de gevolgen voor het voorspanverlies en de horizontale verkorting van de brug. Het voorspanverlies van kabels speelt namelijk een rol bij het bepalen van de aanvangsvoorspanning. De horizontale vervorming van de brug is een belangrijke factor voor het ontwerp van de dilatatievoegen.

Een belangrijke conclusie van het project is dat de berekening van het tijdafhankelijk gedrag onzekerheid wegneemt over de ontwikkeling van de krachtswerking en vervorming van gewapende en voorgespannen betonconstructies. Daardoor kan het een belangrijke ondersteuning zijn voor constructeurs bij het maken van ontwerpbeslissingen. Het wordt daarom aanbevolen om deze methode ook te implementeren in commercieel beschikbare raamwerkprogramma's.

# Inhoudsopgave

<b>VOORWOORD</b> .....	<b>I</b>
<b>SAMENVATTING</b> .....	<b>II</b>
<b>INHOUDSOPGAVE</b> .....	<b>III</b>
<b>1 INTRODUCTIE</b> .....	<b>1</b>
1.1 INLEIDING.....	1
1.2 PROBLEEMSTELLING .....	2
1.3 GEGEVENS .....	2
1.4 BELANGRIJKE PARAMETERS.....	3
1.5 OPBOUW VAN DIT RAPPORT .....	7
<b>2 REKENPROGRAMMA VOOR STAAFCONSTRUCTIES</b> .....	<b>9</b>
2.1 INLEIDING.....	9
2.2 ASSENSTELSEL VOOR DIT PROGRAMMA [5].....	9
2.3 INVOERPAKKET .....	9
2.4 UITVOER VAN HET PROGRAMMA .....	12
2.5 PRINCIPE VAN HET PROGRAMMA.....	12
2.6 BASISRELATIES VOOR STAAFELEMENT .....	12
2.7 STIJFHEIDMATRIX EN OPLEGREACTIE [5] .....	15
2.8 BELASTINGSVECTOR .....	17
2.8.1 <i>Eerste berekeningstap, de knoopbelasting</i> .....	17
2.8.2 <i>Tweede berekeningstap, de elementstijfheidsmatrix [5]</i> .....	32
2.9 TOETSING .....	33
2.10 CONCLUSIE.....	33
<b>3 STAAF MET SCHARNIERENDE VERBINDINGEN</b> .....	<b>34</b>
3.1 INLEIDING.....	34
3.2 VORMEN VAN DE MATRIX D [5].....	34
3.3 BEREKENING VAN STIJFHEIDMATRIX, PRIMAIRE KNOOPBELASTINGEN .....	36
3.3.1 <i>Eerste geval</i> .....	36
3.3.2 <i>Tweede geval</i> .....	37
3.3.3 <i>Derde geval</i> .....	38
3.4 TOETSING .....	39
3.5 CONCLUSIE.....	41

<b>4</b>	<b>VEERELEMENTEN</b> .....	<b>42</b>
4.1	INLEIDING.....	42
4.2	VERENDE OPLEGGING MET HET LINEAIRE GEDRAG [5].....	42
4.3	TOETSING.....	44
4.4	VERENDE OPLEGGING MET HET NIET-LINEAIRE GEDRAG.....	45
4.5	TOETSING.....	48
4.6	CONCLUSIE.....	52
<b>5</b>	<b>VISKEUZE ELEMENTEN</b> .....	<b>53</b>
5.1	INLEIDING.....	53
5.2	ILLUSTRATIE VAN VISKEUS GEDRAG.....	53
5.3	ILLUSTRATIE VAN VISCOELASTISCH GEDRAG [6].....	53
5.4	VISKEUSELEMENT.....	55
5.5	CONCLUSIE.....	58
<b>6</b>	<b>TEKEN VAN REKENRESULTATEN</b> .....	<b>59</b>
6.1	INLEIDING.....	59
6.2	TEKENING VAN DE GEOMETRIE.....	59
6.3	TEKENING VAN DE MOMENT- , DWARSKRACHT- EN NORMAAL-KRACHTLIJNEN.....	60
6.4	BEREKENING EN TEKENING VAN DE VERVORMING.....	61
6.5	TOETSEN.....	64
6.6	CONCLUSIE.....	64
<b>7</b>	<b>KRUIP, KRIMP EN RELAXATIE</b> .....	<b>65</b>
7.1	INLEIDING [7].....	65
7.2	ALGEMENE GRONDBEGINSELEN.....	66
7.2.1	<i>Kruip [7]</i> .....	66
7.2.2	<i>Krimp [7]</i> .....	70
7.2.3	<i>Relaxatie [7]</i> .....	73
7.3	IMPLEMENTATIE VAN HET KRUIP- EN RELAXATIEGEDRAG.....	74
7.3.1	<i>Vereenvoudigde methoden voor de berekening van het krimp- en kruipgedrag van constructies [7]</i> .....	74
7.3.2	<i>Implementatie van het kruipgedrag</i> .....	79
7.3.3	<i>Toetsing</i> .....	80
7.4	IMPLEMENTATIE VAN HET KRIMPGEDRAG.....	81
7.4.1	<i>Toetsing</i> .....	82

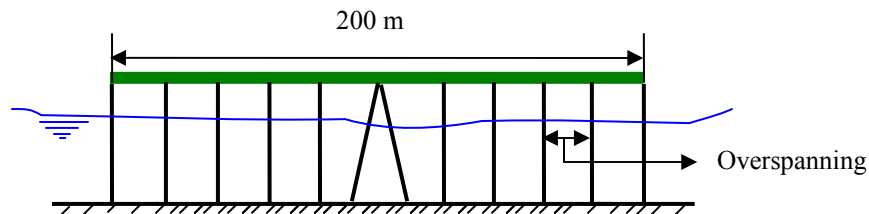
7.5	CONCLUSIE.....	82
<b>8</b>	<b>TEMPERATUURINVLOED .....</b>	<b>84</b>
8.1	INLEIDING.....	84
8.2	BEGRIIP OPGELEGDE VERVORMING [9].....	84
8.3	OPGELEGDE VERVORMINGEN- "ACTIES" [9].....	86
8.4	TEMPERATUURBELASTING [9].....	86
8.4.1	<i>Oorzaken van temperatuurverschillen.....</i>	<i>86</i>
8.4.2	<i>Voorschriften.....</i>	<i>87</i>
8.5	TEMPERATUURVERVORMING IN VERHARD BETON [9].....	94
8.6	IMPLEMENTEREN VAN TEMPERATUURINVLOED.....	95
8.7	TOETSING .....	97
8.8	CONCLUSIE.....	100
<b>9</b>	<b>CONTROLE VAN DE MODELLERING.....</b>	<b>101</b>
9.1	INLEIDING.....	101
9.2	EERSTE MODEL .....	101
9.3	TWEEDE MODEL.....	105
9.4	CONCLUSIE.....	108
<b>10</b>	<b>MODELLERING VAN EEN TRESTLE BRUG .....</b>	<b>109</b>
10.1	INLEIDING.....	109
10.2	TIJDSHEMA EN BOUWFASE .....	111
10.3	HOOFDDEEL VAN DE TRESTLE BRUG .....	113
10.4	VERVORMING TENGEVOLGE VAN DE VOORSPANKRACHT .....	121
10.5	RESULTATEN NA DE EERSTE DAG VAN DE GEBRUIKFASE .....	122
10.6	RESULTATEN NA HET TWEEDE JAAR .....	124
10.7	RESULTATEN NA HET TWINTIGSTE JAAR .....	129
10.8	VOORSPANVERLIES IN DE LOOP VAN DE TIJD .....	135
10.9	INTERACTIE TUSSEN DRUKLAAG EN VOORSPANLIJGERS .....	136
<b>11</b>	<b>PARAMETERSTUDIE.....</b>	<b>140</b>
11.1	INLEIDING.....	140
11.2	AANVANGSVOORSPANKRACHT.....	140
11.2.1	<i>Nagerekte voorspanliggers met gekromde kabels.....</i>	<i>140</i>
11.2.2	<i>Voorgerekte voorspanliggers met rechte kabels.....</i>	<i>144</i>
11.3	BETONSOORT .....	148

11.3.1	<i>Druklaag</i>	148
11.3.2	<i>Ligger</i>	149
11.4	DOORSNEDE	151
11.4.1	<i>Ligger</i>	151
11.4.2	<i>Druklaag</i>	154
11.4.3	<i>paaldiameter</i>	157
11.5	BELASTINGEN	159
11.5.1	<i>Verticale belastingen</i>	159
11.5.2	<i>Horizontale belastingen</i>	160
11.6	KLIMAAT	162
11.7	LOCATIE	163
11.7.1	<i>Grondsoort</i>	164
11.7.2	<i>Zeeniveau</i>	165
<b>12</b>	<b>CONCLUSIES EN AANBEVELINGEN</b>	<b>168</b>
12.1	CONCLUSIES	168
12.2	AANBEVELINGEN	169
	<b>REFERENTIES</b>	<b>170</b>
	<b>BIJLAGEN</b>	<b>172</b>

# 1 Introductie

## 1.1 Inleiding

Trestlebruggen worden gebruikt voor het verbinden van marineconstructies en -eilanden met het vaste land. Deze bruggen in de olie en gasindustrie worden meestal opgedeeld in lengten van ongeveer 200 m. Deze hoofddelen bestaan uit een aantal overspanningen en zijn constructief gescheiden door voegen. Een overspanning varieert met 9, 18 of 21 m, zie figuur 1.1.



*Figuur 1.1: Hoofddeel van een trestle brug*

Dek en liggers zijn meestal van gewapend beton die in een combinatie van prefab en in-situ worden uitgevoerd. De onderbouw bestaat meestal uit betonnen of stalen palen met een betonnen kesp. Dit brugtype is relatief goedkoop, eenvoudig uitvoerbaar en wordt voor zoveel industriële als utilitaire doeleinden toegepast. Binnen dit concept zijn overspanningen groter dan 21 m nog niet toegepast. In dat geval moeten de liggers onder voorspanning worden gebracht om de belastingen te kunnen dragen. Vragen die hierbij gesteld worden zijn:

1. Wat is het mechanische gedrag van de totale constructie?
2. Wat voor “tijds”effecten heeft de interactie tussen voorspanliggers en dek en welke parameters spelen hierbij een rol van betekenis?
3. Wat is de maximale lengte van een hoofddeel?
4. Hoe zullen de spanningen zich ontwikkelen gedurende de levensduur van de constructie?
5. Hoe groot dient de aanvangsvoorspanning te zijn om voldoende eindvoorspanning te garanderen?



## **1.2 Probleemstelling**

In deze casestudie wordt het tijdafhankelijke gedrag van trestle bruggen bestudeerd. Parameters die tijdafhankelijke gedrag van een betonconstructie beïnvloeden zijn:

- Krimp
- Kruip
- Temperatuurveranderingen, algeheel en gradiënt
- Relaxatie
- Elastische verkorting door voorspanning

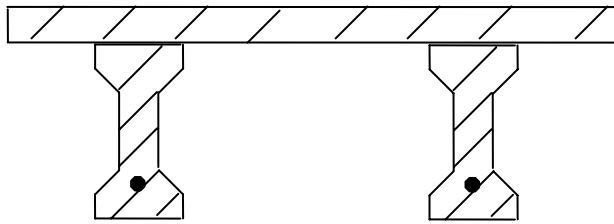
Het is nodig dat een model van één hoofddeel van deze brug wordt gemaakt om dit tijdafhankelijke gedrag te beoordelen. Met behulp van gebruikelijke rekenprogramma's voor constructies zoals Matrix Frame kan geen tijdafhankelijke berekeningen worden gemaakt. Daarom wordt in dit afstudeerproject een rekenprogramma ontwikkeld. Dit programma kan een raamwerk met tijdafhankelijke belastingen en stijfheden berekenen. Niet-lineaire veerelementen zijn aan het programma toegevoegd voor modellering van grond en interactie van constructie-elementen.

### **Doelstelling:**

Beoordelen van het tijdafhankelijke gedrag van een veel voorkomend hoofddeel van een trestle brug uitgevoerd met voorgespannen liggers. Daarna zal worden onderzocht wat het effect van parameters is op het ontwerp.

## **1.3 Gegevens**

- De locatie van de trestle brug is tussen het vaste land en een offshore constructie.
- De totale lengte van deze brug kan meer dan 2 kilometer zijn en de brug wordt opgedeeld in lengten van ongeveer 200 m.
- De hoofddelen zijn constructief gescheiden door voegen.
- Elke van deze hoofddelen bestaan uit:
  - Overspanningen met dubbel I- voorspanliggers en gewapend betondek, zie figuur 1.2,
  - Palen die alleen de verticale belastingen kunnen opnemen. Dit zijn meestal stalen buizen van 914 of 762 mm diameter,
  - Een gemodificeerde oplegging in het midden van elk hoofddeel die de naast verticale ook horizontale belastingen kan opnemen. Deze oplegging wordt toegepast voor de stabiliteit van het hoofddeel.



*Figuur 1.2: Dubbel T-voorspanligger doorsnede*

- De lengte van de overspanningen zijn 21 m.
- Gewapend betonnen kespen.
- Monoliete verbinding tussen overspanningen.
- Voegloos dek uitgevoerd voor elk hoofddeel.
- Ontwerplevensduur van brug is 20 jaar.
- Monoliete verbinding tussen boven en onderbouw.

In figuren 1.3, 1.4 en 1.5 zijn foto's en een schema van een trestle brug te zien. In figuur 1.6 zijn tevens het schema van de oplegging die verticale en horizontale krachten kan opnemen (1) en het schema van de monoliete verbinding tussen de stalen paal die alleen verticale krachten kan opnemen en bovenbouw van de trestle brug (2) te zien.

#### **1.4 Belangrijke parameters**

- De interactie tussen ligger en dek speelt vermoedelijk een belangrijke rol bij het dimensioneren van de constructie. Het betondek en de betonnen voorspanliggers hebben verschillende materiaaleigenschappen en worden op verschillende tijdstippen gestort en belast. Dat beïnvloedt mede de tijdafhankelijke berekeningen.
- De interactie tussen grondlagen en palen speelt waarschijnlijk een rol van betekenis bij het dimensioneren.
- Belastingen op constructie
  - I. Permanente belastingen:
    1. Eigen gewicht
    2. Rustende belasting
    3. Voorspanning

## II. Veranderlijke belastingen:

1. Verkeerbelasting
2. Rem- en versnellingskrachten
3. Temperatuur
4. Wind
5. Zeegolf

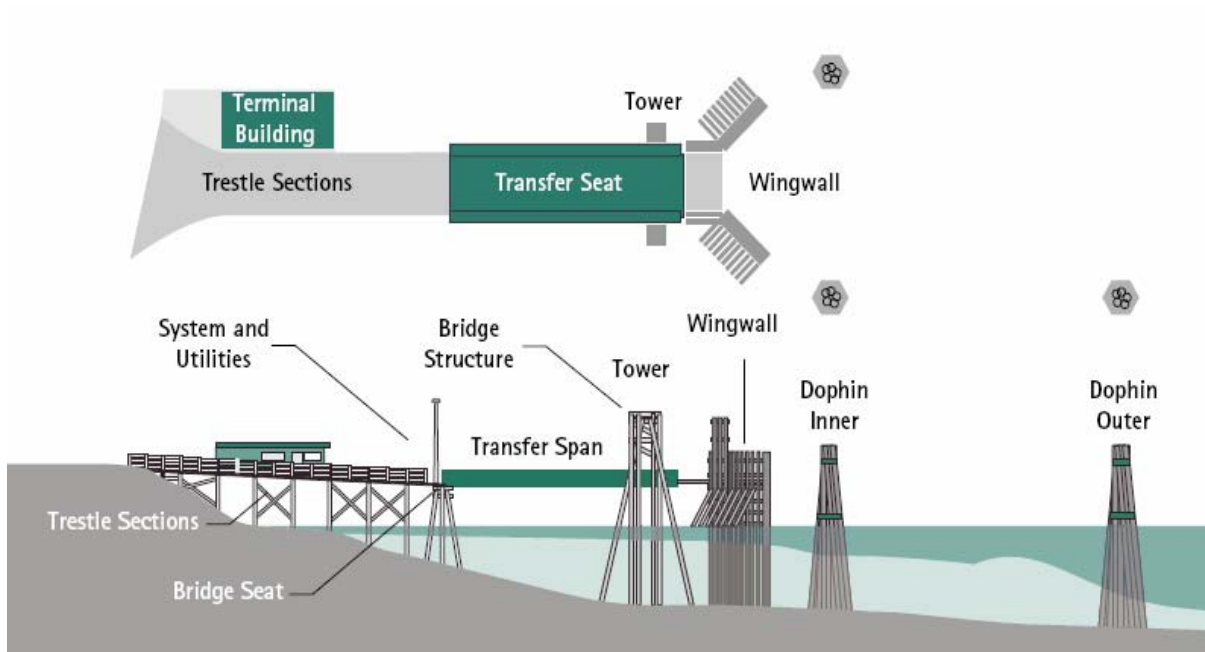
- Horizontale verplaatsingen

Het brugdek ondergaat gedurende zijn levensduur verschillende verplaatsingen. Belangrijke verplaatsingen waar in het ontwerp van een brug in rekening mee moet worden gehouden zijn de verplaatsingen in de lengterichting van de brug. Deze kunnen worden veroorzaakt door de volgende verschijnselen:

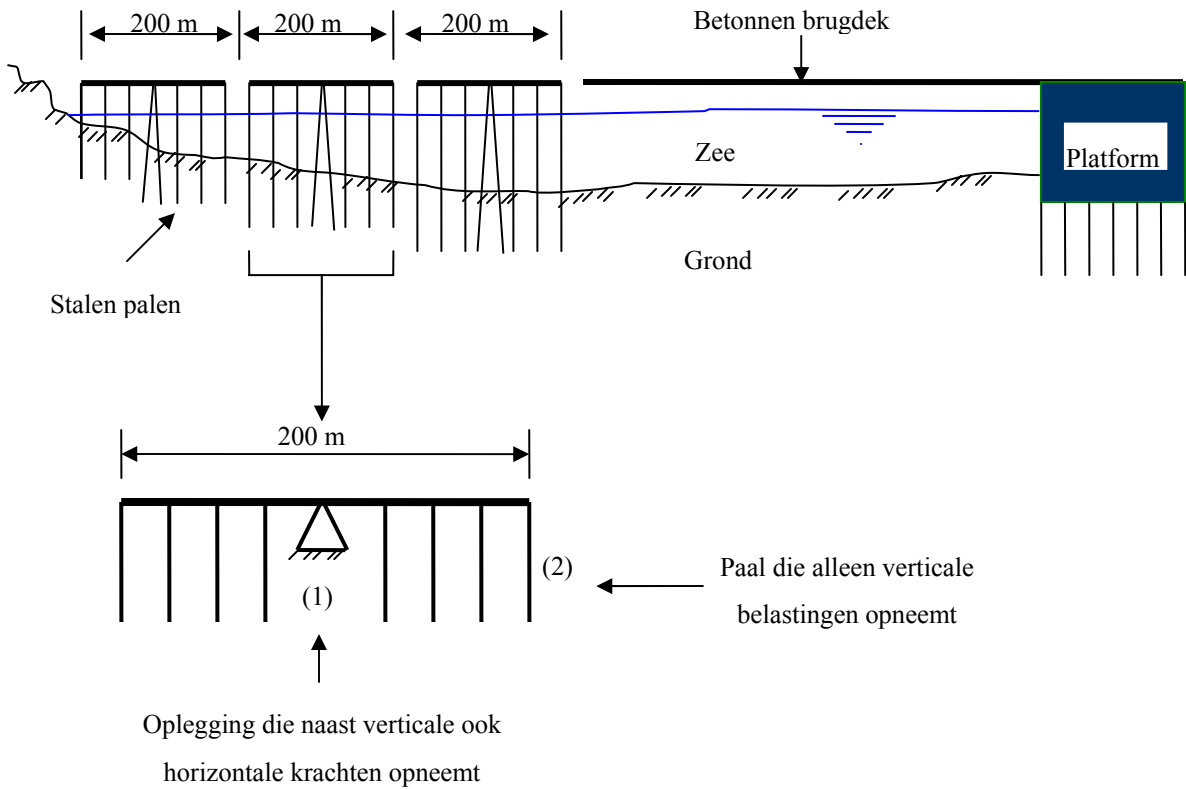
1. Temperatuursveranderingen
  2. Kruip van beton
  3. Krimp van beton
  4. Relaxatie
  5. Elastische verkorting door voorspanning
- Betonsoort en uitvoerwijze van de afzonderlijke constructieonderdelen van de brug spelen tevens een rol bij het tijdafhankelijke gedrag van de brug. Als er voor een trestle brug een gewapend betondek met betonklasse B25 gecombineerd met voorspanliggers wordt gekozen dan is het tijdafhankelijke gedrag tussen dek en voorspanligger naar verwachting anders dan het tijdafhankelijke gedrag tussen een betondek met betonklasse B55 en voorspanliggers.
  - Locatie en klimaat zijn tevens factoren die een rol spelen bij de tijdafhankelijk berekeningen. Want deze factoren beïnvloeden respectievelijk het soort van grondlagen en temperatuur. Klimaat en locatie hebben tevens invloed op bouwmethode, bouw- tijdschema en planning. Maar de laatste genoemde parameters worden in deze studie niet behandeld.
  - Corrosie van materiaal.



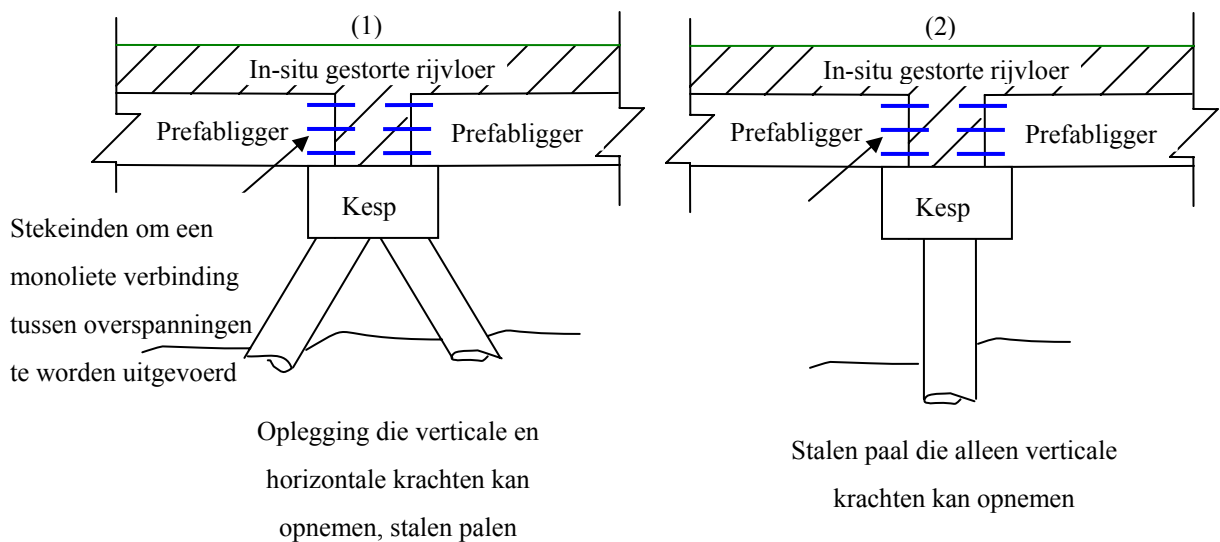
*Figuur 1.3: Trestle brug tussen het vaste land en een offshore constructie [2]*



*Figuur 1.4: Het schema van een trestle brug tussen land en offshore constructie [3]*



*Figuur 1.5: Het schema van een trestle brug tussen land en offshore constructie*



*Figuur 1.6: Het schema van de oplegging in het midden van het hoofddeel (1) en het schema van de monoliete verbinding tussen de stalen paal en de bovenbouw van de trestle in de eindfase(2)*

## ***1.5 Opbouw van dit rapport***

Deze studie bevat primair het onderzoek naar het tijdafhankelijke gedrag van de trestle brug. In hoofdstuk 2 wordt een Matlab programma opgesteld. Met behulp van dit programma kunnen allerlei portalen met verschillende belastinggevallen worden gemodelleerd. In hoofdstuk 3 wordt implementatie van staaf met scharnierende verbindingen aan het programma toegevoegd. Veerelementen worden in hoofdstuk 4 aan het programma toegevoegd. Hierdoor kan de interactie gedrag tussen grondlagen en palen worden gemodelleerd. In hoofdstuk 5 wordt het visceuselement geïmplementeerd. Met behulp van visceuselementen kan het kruipgedrag en relaxatie worden gemodelleerd. Plotten van rekenresultaten worden in hoofdstuk 6 geïmplementeerd en bespreken. Hiervan wordt voor het tekenen van de momentlijnen, normaalkrachtlijnen, dwarskrachtlijnen en vervorming van een constructie gebruik gemaakt. In hoofdstuk 7 en 8 wordt tijdafhankelijkheid zoals de krimp-, kruip-, relaxatie- en temperatuurinvloed in het programma ingebouwd. Hierdoor kan men het gedrag van de constructies in der loop van de jaren bestuderen.

In hoofdstuk 9 wordt vakwerkanalogie toegepast. Hierdoor kan het dekmodel bepaald worden. Hoofdstuk 10 bestaat uit de modellering van een bestaande trestle brug en hier wordt tevens het tijdafhankelijke gedrag in beschouwing genomen. Hier wordt van een raamwerkmodel voor het dek gebruik gemaakt.

In hoofdstuk 11 wordt een parameterstudie uitgevoerd. Dat houdt het effect van parameters op het ontwerp in. Ten slotte volgen in hoofdstuk 12 de conclusies en aanbevelingen van de casestudie.



Figuur 1.7: Beaufort and Morehead spoorweg trestle brug over de rivier van Nieuwpoort tussen stad Morehead en Radioeiland. Deze trestle brug bestaat uit: geprefabriceerde T-voorgespanliggers, gewapende betonnen prefabkespen, en staalbeton palen. De palen bestaan uit: stalen buispalen van 600 mm die zijn beschermd door betonnen cilinderpalen van 900 mm [4]

## 2 Rekenprogramma voor Staafconstructies

### 2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt een rekenprogramma in Matlab opgesteld. Het programma wordt gebaseerd op de eindige-elementenmethode voor staafconstructies. Dit programma kan de oplegreacties, de normaalkrachten, de momenten en de dwarskrachten van verschillende raamwerken berekenen. Dit programma kan tevens dwarskrachten-, momenten- en normaalkrachtenlijnen per element tekenen. In dit hoofdstuk wordt er alleen het prismatische staafelement tussen twee gewone knopen behandeld. Dit zijn knopen waarin de vrijheidsgraden zijn gedefinieerd in de richting van het globale assenstelsel  $x, z$ . In dit hoofdstuk kan er geen staaf met dwarskrachtvervorming, scharnierende verbindingen of verende verbindingen worden berekend. In de volgende hoofdstukken worden het programma uitgebreid totdat het programma raamwerken met staaf met scharnierende verbindingen, lineair en niet-lineaire veerelementen, plotten van rekenresultaten, visceuselementen en tijdafhankelijke belastingen en stijfheden kunnen berekenen.

### 2.2 Assenstelsel voor dit programma [5]

In dit programma wordt er een rechtsdraaiend assenstelsel  $x,y,z$  gekozen waarvan twee assen in het vlak van de tekening liggen en de derde loodrecht daarop. Er wordt een globaal assenstelsel geprefereerd met de  $x$ -as horizontaal, de  $z$ -as naar beneden en de  $y$ -as naar lezer toe. Eenzelfde assenstelsel wordt ook lokaal gebruikt per element, waarbij de lokale  $x$ -as samenvalt met de staafas en loopt van het begin knoopnummer naar het eind knoopnummer.

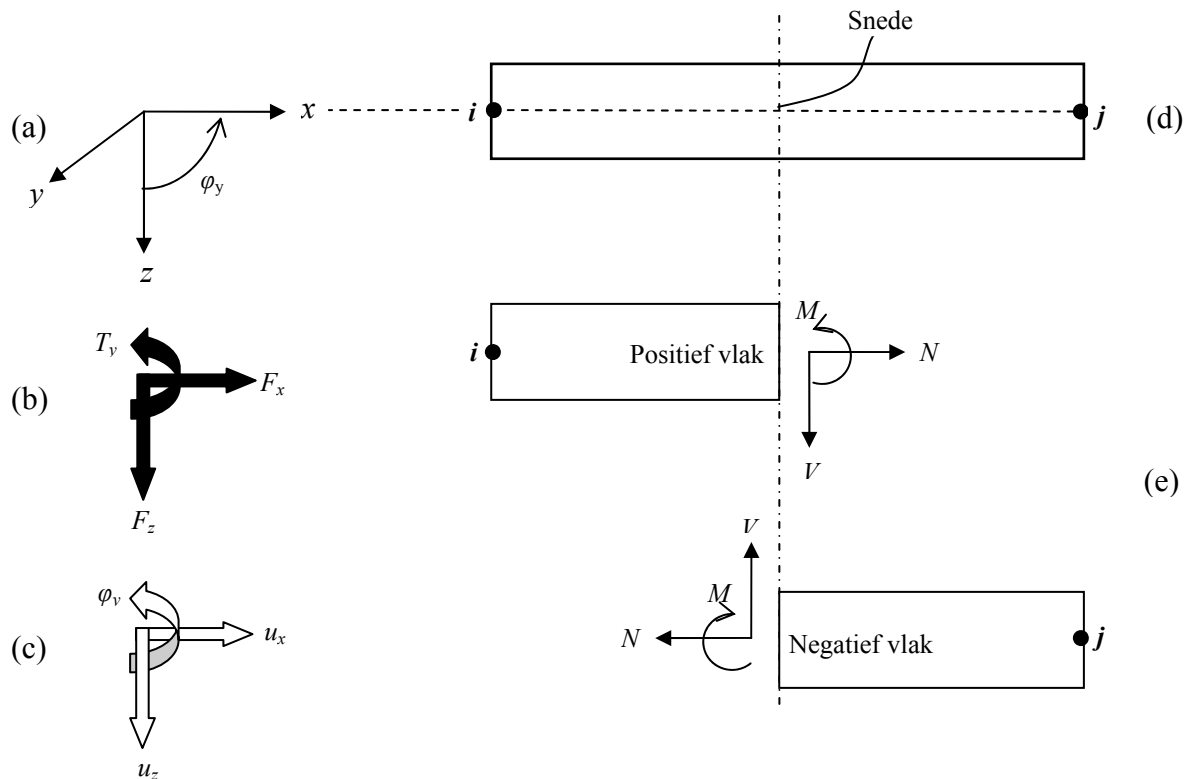
Er is niet alleen een globaal assenstelsel nodig voor de coördinaten en belastingen, maar ook per element een lokaal assenstelsel om het teken van de normaalkracht, het moment en de dwarskracht in een staafdoorsnede te definiëren. Men kan het lokale assenstelsel en consistente tekenafpraak voor normaalkracht, buigend moment en dwarskracht in de figuur 2.1 zien.

### 2.3 Invoerpakket

Invoerpakket bestaat uit:



1. Het aantal vrijheidsgraden per knoop:  $vg$
2. Het aantal elementen van een raamwerk:  $ne$
3. Het aantal knopen van een raamwerk:  $nk$
4. Knoopscoördinaten:  $kcr$
5. Element gegevens:  $elm$
6. Bepaling van vrijheidsgraden per knoop:  $U$
7. Belastinggevallen:  $Fv\_load, Fh\_load, Qv\_load, Qh\_load, M\_load$



*Figuur 2.1: Keuze voor assenstelsel en consistente tekenafspraken voor normaalkracht, buigend moment en dwarskracht*

### **Knoopscoördinaten**

Voor knoopscoördinaten wordt een  $nk \times 3$  matrix gevormd. In de eerste tot derde kolom wordt respectievelijk het nummer van de knoop, de  $x$ -coördinaat en de  $z$ -coördinaat ingevoerd.

### **Element gegevens**

Voor element gegevens wordt een  $ne \times 6$  matrix gevormd. In de eerste tot zesde kolom

wordt respectievelijk element nummer, begin knoopnummer, eind knoopnummer, elasticiteitsmodulus, doorsnedenoppervlakte en traagheidsmoment ingevoerd.

### **Bepaling van vrijheidsgraden per knoop**

Iedere knoop heeft drie vrijheidsgraden  $u_x$ ,  $u_z$  (respectievelijk translatie in  $x$  en  $z$  richting) en  $\varphi_y$  (rotatie in het  $x, z$ -vlak), mits deze niet zijn verhinderd door de randvoorwaarden. Er wordt een  $(3 \times nk) \times 1$  matrix voor de vrijheidsgraden per knoop gevormd. Als de staaf in elke van deze richtingen vrij mag verplaatsen dient er het getal 1 voor desbetreffende richting aan matrix te worden ingevoerd. Als staafverplaatsingen in elke van deze richtingen worden verhinderd dan dient er het getal 0 voor desbetreffende richting aan matrix te worden ingevoerd.

### **Belastinggevallen**

De belastinggevallen bestaan uit:

1. Verticale puntlast ( $Fv\_load$ ):

Er wordt een  $n \times 4$  matrix voor dit belastinggeval gevormd. Het aantal rijen van de matrix ( $n$ ) is gelijk aan het aantal verticale puntlasten op constructie. In de eerste tot en met vierde kolom van matrix wordt er respectievelijk het nummer van de puntlasten, het nummer van element die belasting daarop ligt, de afstand van de beginknoop van het element tot de puntlast en de grootte van de puntlast ingetypt.

2. Verticale gelijkmatige of ongelijkmatige verdeelde belasting ( $Qv\_load$ ):

Hier wordt een  $n \times 6$  matrix gevormd. Het aantal rijen van de matrix ( $n$ ) is gelijk aan het aantal verdeelde belastingen op de constructie. In de eerste tot en met zesde kolom van matrix wordt respectievelijk er het aantal van de verdeelde belastingen, het nummer van element die belasting daarop ligt, de afstand van de beginknoop van het element tot het begin van de verdeelde belastingen, de afstand van de beginknoop van het element tot het eind van de verdeelde belastingen, de beginwaarde van de verdeelde belasting en eindwaarde van de belasting ingetypt.

3. Horizontale puntlast ( $Fh\_load$ ):

Deze matrix heeft dezelfde vorm en grootte als de matrix van de verticale puntlasten.

4. Horizontale gelijkmatige of ongelijkmatige verdeelde belasting ( $Qh\_load$ ):

Deze matrix heeft dezelfde vorm en grootte als de matrix van de matrix van verticale verdeelde belasting ( $Qv\_load$ ).

5. Geconcentreerde momentlast ( $M\_load$ ):

Deze matrix heeft dezelfde vorm en grootte als de matrix van de verticale puntlasten.

Het programma kan een raamwerk met allerlei combinaties van de alle bovenstaande belastingen berekenen.

## **2.4 Uitvoer van het programma**

De resultaten die als programma-uitvoer zal verschijnen zijn:

1. De momenten van het raamwerk en het momentverloop van elke staaf
2. De dwarskracht van het raamwerk en het dwarskrachtenverloop van elke staaf
3. De normaalkracht van het raamwerk en het normaalkrachtverloop van elke staaf
4. Oplegreacties

De elementkrachten zijn eigenlijk interne grootheden in de methode die in het algemeen niet zullen behoren tot de programma-uitvoer. Veelal kun je ze als een optie opvragen als er vragen zijn over de verkregen resultaten.

## **2.5 Principe van het programma**

Het principe van dit programma is de eindige-elementmethode. In de eerste instantie dient programma de elementstijfheidsmatrices  $K^e$  te vormen. In de tweede instantie wordt er globale stijfheidsmatrix  $K$  geassembleerd. In de derde instantie wordt er het rechterlid (belastingvector) opgesteld. In de vierde instantie wordt er voorgeschreven verplaatsingen  $u^0$  verwerkt en gereduceerde stijfmatrix  $K^r$  opgesteld. In de vijfde instantie wordt er de vergelijkingen  $u^r = (K^r)^{-1} \times F^r$  opgelost. In de zesde instantie dient het programma elementenkrachten per element te berekenen. In de zevende instantie wordt er de oplegreactie bepaald. In de achtste instantie wordt snedengrootheden ofwel spanningsresultanten

$s = D \times B \times u^e$  bepaald. Ten slotte kan het programma de momenten, dwarskrachten en normaalkrachten van het raamwerk berekenen en het verloop hiervan tekenen.

In de figuur 2.2 is er het verfijnde blokschema van een EEM-programma voor raamwerkconstructies te zien. Links is bijgeschreven welke voeding voor een blok nodig is en rechts wat in het betreffende blok wordt geproduceerd.

## **2.6 Basisrelaties voor staafelement**

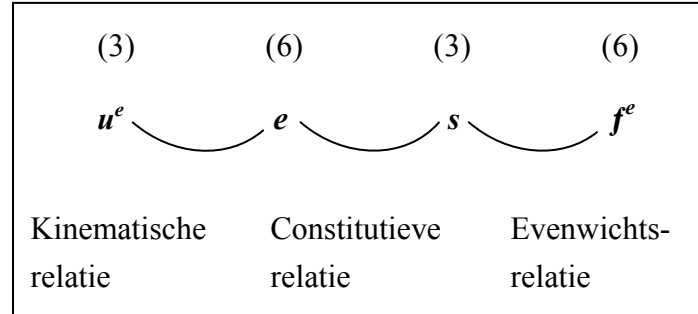
Element waarvan elementstijfheidsmatrix berekend zal worden is de integratie van het vakwerkelement en het liggerelement. Het samengestelde element mag willekeurige oriëntatie in het  $x, z$ -vlak hebben. Integratie van het vakwerkelement en het liggerelement betekent dat we rekening houden met extensie en buiging.

Voor extensie wordt er gehanteerd één vervormingsparameter die er  $e_N$  genoemd. Hiermee gaat een contante normaalkracht  $N$  gepaard.

Voor buiging hanteren we twee vervormingsparameters  $e_1$  en  $e_2$ , die corresponderen met het lineaire momentverloop tussen  $M_1$  en  $M_2$ . Hier wordt gewerkt met drie vrijheidsgraden per knoop, de twee verplaatsingen  $u_x$  en  $u_z$  en rotatie  $\varphi_y$ . Het staafelement tussen twee knopen  $i$  en  $j$  kent dus zes vrijheidsgraden en zes elementkrachten. Er wordt nu gedefinieerd de volgende vier vectoren:

1.  $\mathbf{e} = \{e_N, e_1, e_2\}^T$
2.  $\mathbf{s} = \{N, M_1, M_2\}^T$
3.  $\mathbf{u}^e = \{u_{xi}, u_{zi}, \varphi_{yi}, u_{xj}, u_{zj}, \varphi_{yj}\}^T$
4.  $\mathbf{f}^e = \{F_{xi}, F_{zi}, T_{yi}, F_{xj}, F_{zj}, T_{yj}\}^T$

De vector  $\mathbf{s}$  bevat de sendegrootheden. Dat zijn geen spanningen maar spanningsresultanten over de doorsnede. De tekenafspraken voor de componenten van  $\mathbf{e}$  en  $\mathbf{s}$  is dezelfde als voor vakwerken en liggers. De relatie tussen de vier vectoren is figuur 2.3 getekend.

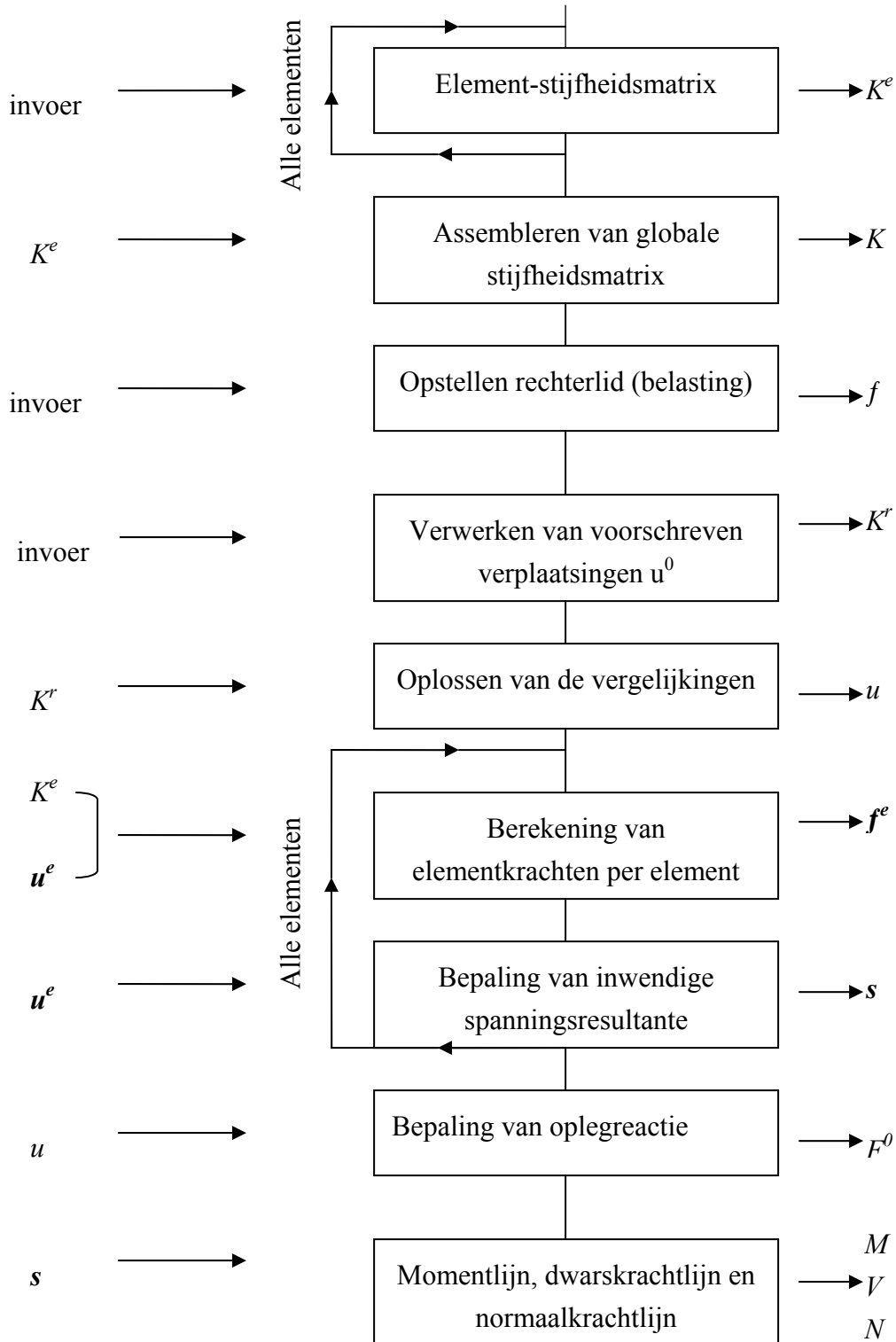


*Figuur 2.3: Basisrelaties voor algemeen staafelement*

Het is dus zaak de kinematische matrix  $B$  en de constitutieve matrix  $D$  te bepalen. De stijfheidmatrix wordt op bekende wijze berekend met

$$K^e = B^T D B$$

Er wordt een staaf tussen de knopen  $i$  en  $j$  in het globale  $x,z$ -vlak beschouwd, zoals getekend in figuur 2.4. Langs de staaf kiezen we een lokaal assenstelsel  $x_l, z_l$  met de



Figuur 2.2: Verfijnd blokschema van EEM-programma voor staafconstructies [5]

oorsprong in knoop  $i$ . De  $x_i$ -as staat hier loodrecht op. De  $x$ -as maakt een hoek  $\alpha$  met elkaar, zoals gedefinieerd in figuur 2.4. De tekenafspraken voor  $e$  en  $s$  gelden in dit lokale assenstelsel.

## 2.7 Stijfheidmatrix en oplegreactie [5]

### Elementstijfheidsmatrix

In deze paragraaf bepalen we de stijfheidmatrix voor een prismatisch staafelement tussen twee gewone knopen. Dit zijn knopen waarin de vrijheidsgraden zijn gedefinieerd in de richting van het globale assenstelsel  $x, z$ . Voor de bepaling van de kinematische matrix worden achtereenvolgens zes eenheidsverplaatsingen beschouwd. De eenheidsverplaatsingen wordt ontbonden in de richting van de lokale assen. Dat geeft drie vervormingen:

$$e_N = \sin \alpha, e_l = \cos \alpha / L \text{ en } e_2 = -\cos \alpha / L$$

waarbij  $L + e_N$  is vervangen door 1 omdat  $e_N$  zeer klein is ten opzichte van  $L$ . Deze drie vervormingen vormen de vijfde kolom van B matrix omdat deze betrokken is op de beschouwde  $u_{zi}$ . Het totale resultaat is, met de verkorte notatie  $c$  voor  $\cos \alpha$  en  $s$  voor  $\sin \alpha$ , als volgt:

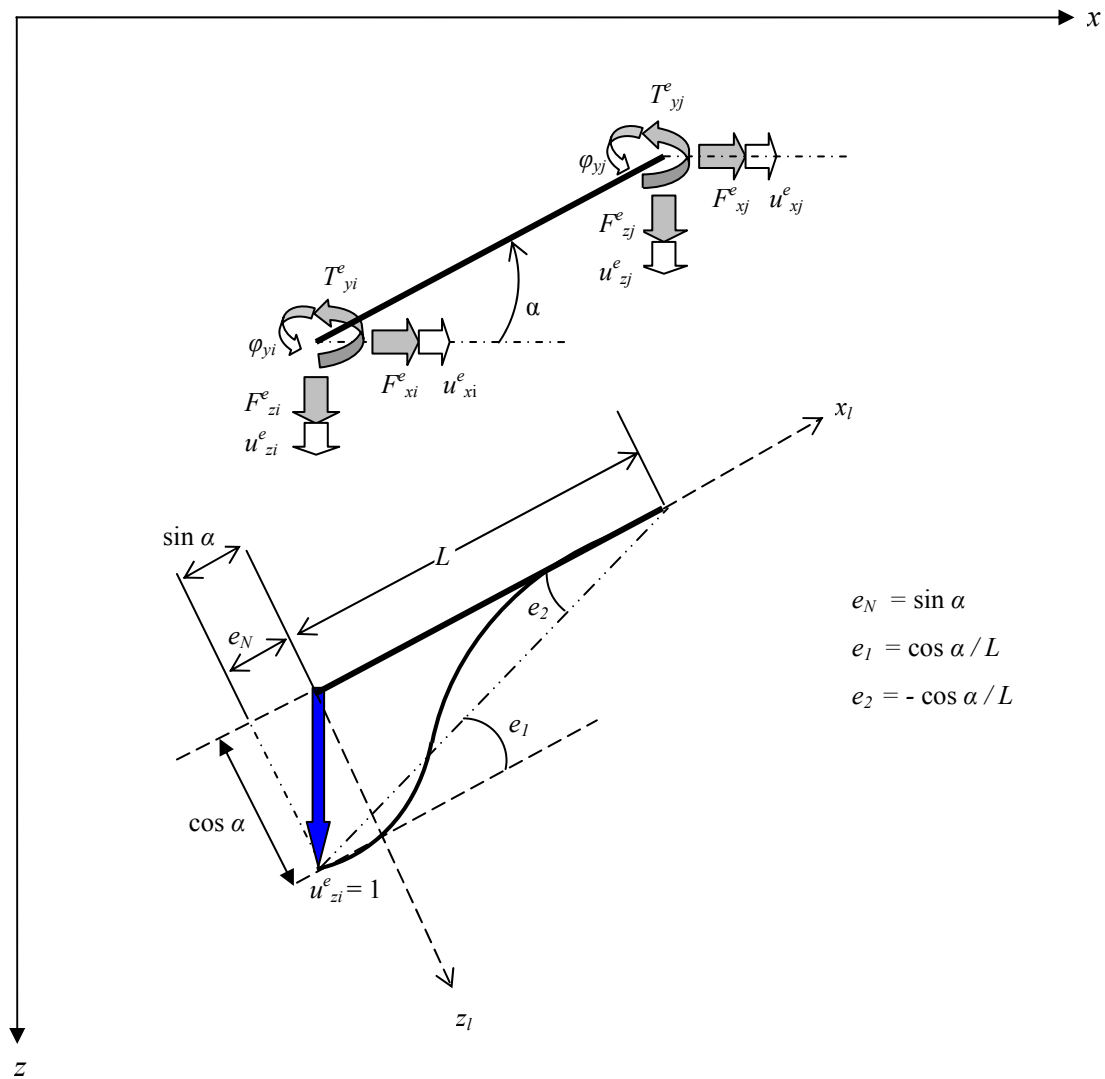
$$\begin{Bmatrix} e_N \\ e_l \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -c & s & 0 & c & -s & 0 \\ s/L & c/L & -1 & -s/L & -c/L & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{zi} \\ \varphi_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{zj} \end{Bmatrix}^e$$

$$e = B u^e$$

Hier wordt de constitutieve vergelijkingen behandeld. De relaties voor extensie en buiging beïnvloeden elkaar niet bij de kleine verplaatsingen die hier wordt beschouwd, en ze kunnen samengevoegd worden tot één totale relatie.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_l \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 4EI/L & -2EI/L \\ 0 & -2EI/L & 4EI/L \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e_N \\ e_l \end{Bmatrix}$$

$$s = D e$$



Figuur 2.4: Berekening van de vervormingen  $e_N$ ,  $e_l$  en  $e_2$  uit de eenheidsverplaatsing  $u_{zi}^e = 1$  [5]

De dwarskracht  $V$  wordt berekend als de afgeleide van moment dus  $V = (M_2 - M_1)/L$ .

De berekening van de stijfheidmatrix gebeurt vervolgens aan de hand van het recept van

$$K^e = B^T D B$$

Dit wordt hier niet verder uitgeschreven. De matrixvermenigvuldigingen kunnen door de computer worden gedaan.

### **Globale stijfheidmatrix [5]**

Het assembleren van elementmatrices tot globale stijfheidmatrix verloopt hetzelfde als het boek Eindige- Elementen Methode.

### **Oplegreactie**

Als de verplaatsingen zijn gevonden door oplossing van de vergelijkingen, worden per element de vervormingen  $e$  berekend aan de hand van  $e = B u^e$  en daaruit de spanningsresultanten  $s$  met behulp van  $s = D e$ . Oplegreacties volgen uit automatisch uit de rijen van het globale stelsel die corresponderen met de voorgeschreven verplaatsingen.

## **2.8 Belastingsvector**

### **Belasting op knopen [5]**

Dit type krachtswerking verloopt hetzelfde als het boek.

### **Belasting op het element [5]**

Voor dit soort belaste elementen wordt er de berekeningen in twee stappen uitgevoerd. Deze stappen zijn in het boek uitgelegd.

#### **2.8.1 Eerste berekeningstap, de knoopbelasting**

In de eerste stap wordt er de knopen vast gehouden, zodat de rotaties worden verhinderd. Elke element is dan aan zijn einden in geklemd. De eerste stap betekent dus dat we per element een berekening uitvoeren zonder interactie met de andere elementen.

Er dient de oplegreacties voor de alle vijf belastinggevallen te worden berekend. Voor de alle vijf belastinggevallen beschouwen we de  $M(\mathbf{b})$ ,  $N(\mathbf{b})$  en  $Q(\mathbf{b})$  als koppel, horizontale en verticale oplegreacties van de beginknoop  $\mathbf{b}$  van het element en  $M(\mathbf{e})$ ,  $N(\mathbf{e})$  en  $Q(\mathbf{e})$  als oplegreacties van de eindknoop  $\mathbf{e}$  van het element.

De onderstaande differentiaal vergelijkingen gelden voor alle op buiging belaste elementen.



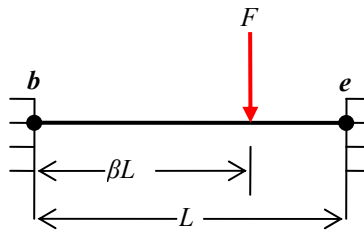
$$\left\{ \begin{array}{l} EIw''''(x) = q \\ EIw'''(x) = -Q \\ EIw''(x) = -M \\ w'(x) = -\varphi \\ w(x) = \text{Zaking, richting } z_1\text{-as} \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

De differentiaal vergelijkingen 2.1 gelden voor alle op extensie belaste elementen.

$$\left\{ \begin{array}{l} EAU''(x) = -q \\ EAU'(x) = N \\ U(x) = \text{Extensie, richting } x_1\text{-as} \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

### 1. Verticale puntlast

In het algemeen wordt er een op buiging belaste element met een verticale puntlast  $F$  daarop als figuur 2.5 gemodelleerd.



Figuur 2.5: Verticale Puntlast model

In figuur 2.6a zien we de oplegreacties, in figuur 2.6b de momentenlijn en in de figuur 2.6c het verloop van de dwarskrachten. We noemen deze momenten en dwarskrachten de primaire krachtsverdeling in het element. Figuur 2.6d laat de interactiekrachten in de verbindingen tussen het element en gefixeerde knopen zien. Er worden deze de primaire interactiekrachten of primaire verbindingskrachten. De verbindingskrachten die op het element wordt uitgeoefend is dus de primaire elementkracht.

De vergelijkingen van 2,1 zijn voor dit probleem geldig en dan:

Als  $0 \leq x \leq \beta L$

$$EIw_1''''(x) = 0$$

$$EIw_1''''(x) = C1$$

$$EIw_1'''(x) = C1x + C2$$

$$EIw_1''(x) = \frac{1}{2}C1x^2 + C2x + C3$$

$$EIw_1'(x) = \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4$$

Als  $\beta L < x \leq L$

$$EIw_2''''(x) = 0$$

$$EIw_2''''(x) = C5$$

$$EIw_2'''(x) = C5x + C6$$

$$EIw_2''(x) = \frac{1}{2}C5x^2 + C6x + C7$$

$$EIw_2'(x) = \frac{1}{6}C5x^3 + \frac{1}{2}C6x^2 + C7x + C8$$

Randvoorwaarden:

$$1 \rightarrow w_1(0) = 0$$

$$2 \rightarrow w_2(L) = 0$$

$$3 \rightarrow w_1'(0) = 0$$

$$4 \rightarrow w_2'(L) = 0$$

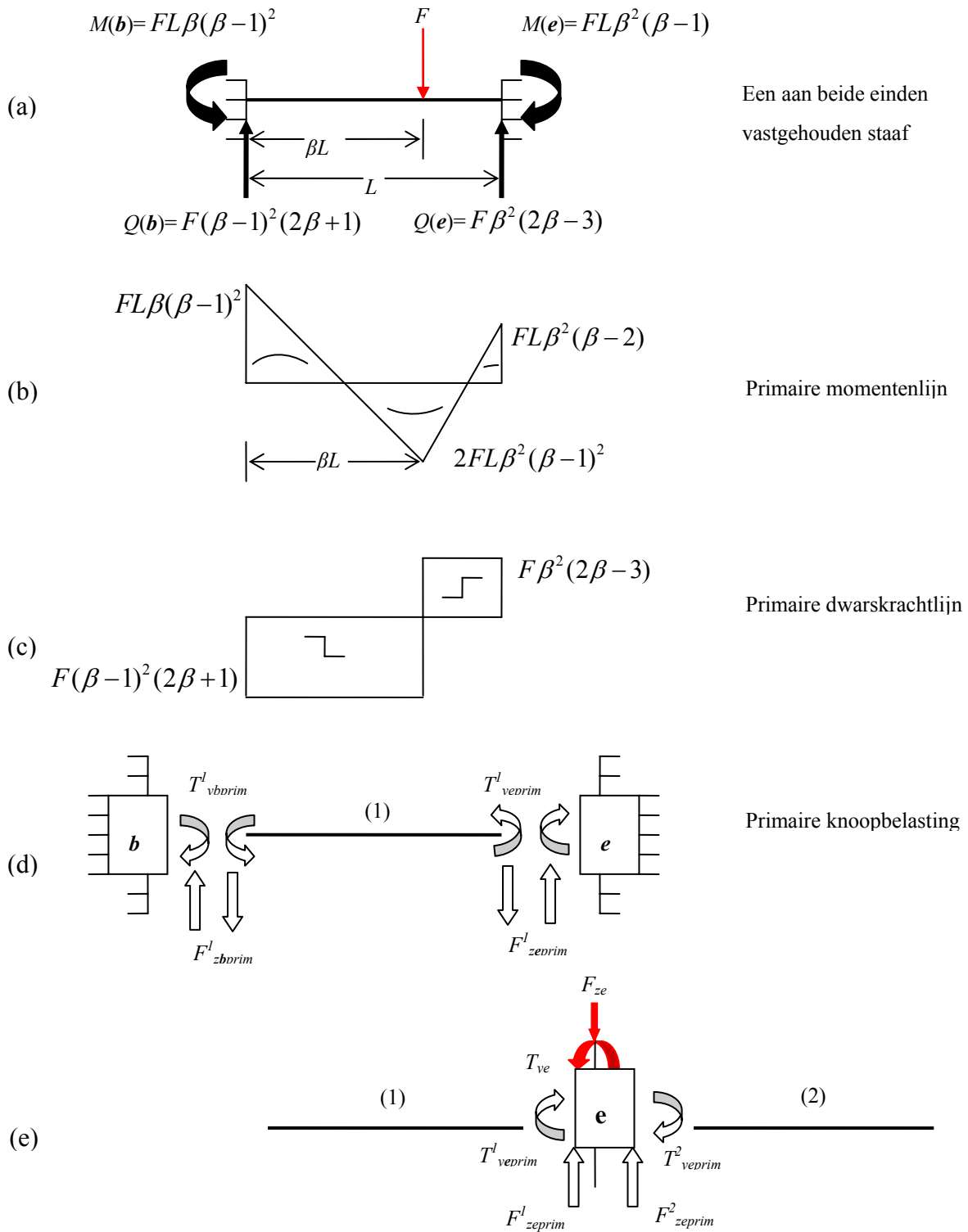
$$5 \rightarrow w_1(\beta L) = w_2(\beta L)$$

$$6 \rightarrow w_1'(\beta L) = w_2'(\beta L)$$

$$7 \rightarrow w_1''(\beta L) = w_2''(\beta L)$$

$$8 \rightarrow w_1'''(\beta L) = w_2'''(\beta L)$$

Deze vergelijkingen worden er op het Maple programma opgelost. De oplossingen van deze vergelijkingen en tevens alle andere belastinggevallen staan in bijlage A.



Figuur 2.6: In de eerste berekeningstap worden per element de primaire  $M$  en  $V$ -Verdeling bepaald en primaire belasting op de knoop [5]

De resultaten van het momentenverloop en dwarskrachtenverloop zijn als volgt:

$$\begin{aligned}
 M(l) &= F(\beta - 1)^2(2\beta x - L\beta + x) && \text{als } 0 \leq x \leq \beta L \\
 M(r) &= F\beta^2(2\beta x - L\beta - 3x + 2L) && \text{als } \beta L \leq x \leq L \\
 Q(l) &= F(2\beta + 1)(\beta - 1)^2 && \text{als } 0 \leq x \leq \beta L \\
 Q(r) &= F\beta^2(-3 + 2\beta) && \text{als } \beta L \leq x \leq L
 \end{aligned}$$

Van deze vergelijkingen kunnen we de koppel en de verticale kracht van de beide einden van het element als oplegreacties berekenen:

$$\begin{aligned}
 M(b) &= -FL\beta(\beta - 1)^2 && \text{als } x = 0 \\
 M(e) &= F\beta^2L(\beta - 1) && \text{als } x = L \\
 Q(b) &= F(2\beta + 1)(\beta - 1)^2 && \text{als } x = 0 \\
 Q(e) &= F\beta^2(-3 + 2\beta) && \text{als } x = L
 \end{aligned}$$

Bij beginknoop **b** geldt (vergelijk figuur 2.6a met figuur 2.6d):

$$\begin{aligned}
 T_{ybprim}^1 &= M(b) = FL\beta(\beta - 1)^2 \\
 F_{zbprim}^1 &= -Q(b) = -F(\beta - 1)^2(2\beta + 1)
 \end{aligned}$$

Bij knoop **e**:

$$\begin{aligned}
 T_{yeprim}^1 &= M(e) = FL\beta^2(\beta - 1) \\
 F_{zeprim}^1 &= Q(e) = F\beta^2(2\beta - 3)
 \end{aligned}$$

Deze primaire elementkrachten werken op de gefixeerde knopen in de tegengestelde richting.

Er wordt nu de belastingen op de gefixeerde knoop **e** tussen de elementen 1 en 2 beschouwd. Zie figuur 2.6e. De totale belasting op knoop **e** is:

$$\begin{aligned}
 T_{yetot} &= T_{ye} - T_{yeprim} \\
 F_{zetot} &= F_{ze} - F_{zeprim}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

waarin  $T_{yeprim}$  staat voor de som van de twee primaire momentverbindingskrachten en

$F_{z\text{eprim}}$  voor de som van de twee primaire verbindingskrachten richting z-as die op de knoop  $e$  worden uitgeoefend:

$$\begin{aligned} T_{yeprim} &= T_{yeprim}^1 + T_{yeprim}^2 \\ F_{zeprim} &= F_{zeprim}^1 + F_{zeprim}^2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Op deze wijze moet de belasting op elke gefixeerde knoop  $i$  worden bepaald. De vector van alle knoopbelastingen  $T_{yi}$  en  $F_{zi}$  noemen we  $\mathbf{f}$  en de vector van alle primaire knoopbelastingen  $T_{yiprim}$  en  $F_{ziprim}$  noemen we  $\mathbf{f}_{prim}$ . De totale knoopbelasting is dan

$$\mathbf{f}_{tot} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{prim} \quad (2.5)$$

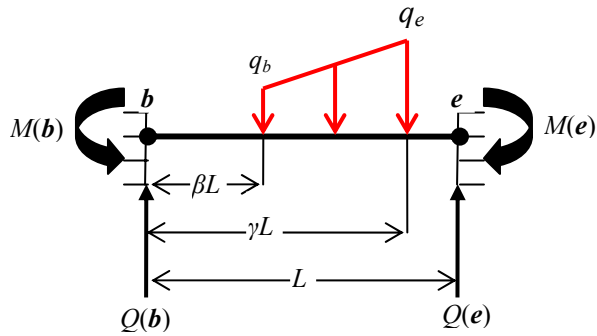
Dit is voor de voorbeeldconstructie van figuur 2.5 uitgewerkt in tabel 2.1. De rechterkolom van deze tabel vormt de totale vector  $\mathbf{f}_{tot}$  van knoopbelastingen.

$\mathbf{f}_{prim}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}_{tot}$	
$T_{ybprim}^1 = FL\beta(\beta - 1)^2$	$T_{yb}^1 = 0$	$T_{yb}^1 - T_{ybprim}^1 = -FL\beta(\beta - 1)^2$	Knoop $b$
$F_{zbprim}^1 = -F(\beta - 1)^2(2\beta + 1)$	$F_{zb}^1 = 0$	$F_{zb}^1 - F_{zbprim}^1 = F(\beta - 1)^2(2\beta + 1)$	
$T_{yeprim}^1 = FL\beta^2(\beta - 1)$	$T_{ye}^1 = 0$	$T_{ye}^1 - T_{yeprim}^1 = -FL\beta^2(\beta - 1)$	Knoop $e$
$F_{zeprim}^1 = F\beta^2(2\beta - 3)$	$F_{ze}^1 = 0$	$F_{ze}^1 - F_{zeprim}^1 = -F\beta^2(2\beta - 3)$	

TABEL 2.1

## 2. Verticale verdeelde belasting

Er wordt een op buiging belaste element met een verticale verdeelde als figuur 2.7 gemodelleerd. Het belastingverloop tussen  $q_b$  en  $q_e$  is lineair. Het principe van de berekening van de totale vector  $\mathbf{f}_{tot}$  van knoopbelastingen van een op buiging belaste element met een verticale verdeelde belasting daarop is hetzelfde als een element met een verticale puntlast  $F$  daarop. Er wordt alleen de differentiaal vergelijkingen, de resultaten van de momenten en dwarskrachten, de oplegreacties en de totale vector  $\mathbf{f}_{tot}$  behandeld. De vergelijkingen van de 2.1 zijn voor dit probleem ook geldig.



Figuur 2.7: Verticale verdeelde belasting model

Als  $0 \leq x \leq \beta L$

$$EIw_1''''(x) = 0$$

$$EIw_1'''(x) = C1$$

$$EIw_1''(x) = C1x + C2$$

$$EIw_1'(x) = \frac{1}{2}C1x^2 + C2x + C3$$

$$EIw_1(x) = \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4$$

Als  $\beta L < x \leq \gamma L$

$$EIw_2''''(x) = q_e + \frac{(q_b - q_e)(\gamma L - x)}{(\gamma - \beta)L}$$

$$EIw_2'''(x) = C5$$

$$EIw_2''(x) = C5x + C6$$

$$EIw_2'(x) = \frac{1}{2}C5x^2 + C6x + C7$$

$$EIw_2(x) = \frac{1}{6}C5x^3 + \frac{1}{2}C6x^2 + C7x + C8$$

Als  $\gamma L < x \leq L$

$$EIw_3''''(x) = 0$$

$$EIw_3'''(x) = C9$$

$$EIw_3''(x) = C9x + C10$$

$$EIw_3'(x) = \frac{1}{2}C9x^2 + C10x + C11$$

$$EIw_3(x) = \frac{1}{6}C9x^3 + \frac{1}{2}C10x^2 + C11x + C12$$

Randvoorwaarden :

$$1 \rightarrow w_1(0) = 0$$

$$2 \rightarrow w_3(L) = 0$$

$$3 \rightarrow w_1'(0) = 0$$

$$4 \rightarrow w_3'(L) = 0$$

$$5 \rightarrow w_1(\beta L) = w_2(\beta L)$$

$$6 \rightarrow w_1'(\beta L) = w_2'(\beta L)$$

$$7 \rightarrow w_1''(\beta L) = w_2''(\beta L)$$

$$8 \rightarrow w_1'''(\beta L) = w_2'''(\beta L)$$

$$9 \rightarrow w_2(\gamma L) = w_3(\gamma L)$$

$$10 \rightarrow w_2'(\gamma L) = w_3'(\gamma L)$$

$$11 \rightarrow w_2''(\gamma L) = w_3''(\gamma L)$$

$$12 \rightarrow w_2'''(\gamma L) = w_3'''(\gamma L)$$

De resultaten voor het momentenverloop en dwarskrachtenverloop zijn als volgt:

$$M(l) = -\frac{1}{60}(-\gamma + \beta)(30\gamma^2 Lq_e - 9L\beta^2 q_b \gamma - 6\beta^2 \gamma q_e L - 6\beta Lq_b \gamma^2 - 9\gamma^2 Lq_e \beta + 18x\beta^2 \gamma q_b + 12x\beta^2 \gamma q_e + 12x\beta \gamma^2 q_b + 18x\beta \gamma^2 q_e + 30\beta^2 \gamma q_b + 10\beta^2 \gamma q_e + 20\beta \gamma q_b + 20\beta \gamma q_e + 10Lq_b \gamma^2 + 30xq_e - 30\beta \gamma xq_e - 30\beta \gamma xq_b + 24x\beta^3 q_b + 6x\beta^3 q_e + 24x\gamma^3 q_e + 6x\gamma^3 q_b - 10\beta Lq_e - 20\beta Lq_b - 45x\beta^2 \gamma q_b - 15x\beta^2 q_e + 30xq_b - 10Lq_b \gamma - 20L\gamma q_e - 15xq_b \gamma^2 - 45xq_e \gamma - 12L\gamma^3 q_e - 12L\beta^3 q_b - 3L\beta^3 q_e - 3L\gamma^3 q_b)$$

$$Q(l) = -\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma + 4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e + 10q_e - 10q_e \gamma \beta - 10q_b \gamma \beta + 8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e + 8\gamma^3 q_e + 2\gamma^3 q_b - 15\beta^2 q_b - 5q_e \beta^2 + 10q_b - 5\gamma^2 q_b - 15\gamma^2 q_e)$$

Als  $\beta L \leq x \leq \gamma L$

$$M(m) = \frac{1}{60}(\beta - \gamma)(10L^3 q_b \gamma^3 - 30L^3 q_e \gamma^4 + 20L^3 q_b \gamma^3 + 30\gamma x^2 Lq_b - 30\beta x^2 q_e - 10q_b x^3 + 10q_e x^3 - 30L^3 q_e \beta \gamma^2 - 30L^3 q_b \beta^4 - 10L^3 q_e \beta^4 + 40L^3 q_b \beta^3 \gamma + 40L^3 q_e \beta \gamma^3 - 10L^3 q_b \gamma^4 - 30L^2 q_e \gamma^2 + 15L^2 q_b \gamma^4 + 45L^2 x \gamma^4 q_e - 6L^2 x q_b \gamma^5 - 24L^2 x q_e \gamma^5 + 3L^3 x q_b \gamma^5 + 12L^3 x q_e \gamma^5 - 30L^2 q_b \gamma^2 + 45L^2 x \beta^4 q_b + 15L^2 q_e \beta^4 - 24L^2 x q_b \beta^5 - 6L^2 x q_e \beta^5 + 12L^3 x q_b \beta^5 + 3L^3 q_e \beta^5 + 60L^2 x q_e \gamma \beta - 15L^3 q_b \beta \gamma + 30L^2 q_b \gamma \beta^4 + 30L^2 q_e \gamma^4 \beta - 60L^2 x q_b \gamma \beta^3 - 60L^2 x q_e \gamma^3 \beta - 15L^3 q_e \beta \gamma^4)$$

$$Q(m) = \frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(20q_b Lx\gamma - 20q_e Lx - 10q_b x^2 - 10q_e L^2\gamma^2 + 5\gamma^4 q_b L^2 + 15q_e \gamma^4 L^2 - 2\gamma^5 q_b L^2 - 8\gamma^5 q_e L^2 - 10L^2\gamma^2 q_b + 15q_b \beta^4 L^2 + 5\beta^4 L^2 q_e - 8\gamma^5 L^2 q_b - 2\beta^5 L^2 q_e + 20\beta\gamma L^2 q_e + 10L^2 \beta^4 \gamma q_b + 10\gamma^4 L^2 q_e \beta - 20L^2 \beta^3 q_b \gamma - 20\gamma^3 q_e L^2 \beta)$$

Van deze vergelijkingen kunnen we de momenten en de dwarskrachten van de beide einden van het element als oplegreacties berekenen:

Als  $x = 0$

$$M(b) = -\frac{1}{60}(-\gamma + \beta)(30\gamma^2 Lq_e - 9L\beta^2 q_b \gamma - 6\beta^2 \gamma q_e L - 6\beta Lq_b \gamma^2 - 9\gamma^2 Lq_e \beta + 30\beta^2 \gamma q_b + 10\beta^2 \gamma q_e + 20\beta\gamma q_b + 20\beta\gamma q_e + 10Lq_b \gamma^2 - 10\beta Lq_e - 20\beta Lq_b - 10Lq_b \gamma - 20L\gamma q_e - 12L\gamma^3 q_e - 12L\beta^3 q_b - 3L\beta^3 q_e - 3L\gamma^3 q_b)$$

$$Q(b) = -\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma + 4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e + 10q_e - 10q_e \gamma \beta - 10q_b \gamma \beta + 8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e + 8\gamma^3 q_e + 2\gamma^3 q_b - 15\beta^2 q_b - 5q_e \beta^2 + 10q_b - 5\gamma^2 q_b - 15\gamma^2 q_e)$$

Als  $x = L$

$$M(e) = \frac{1}{60}(\beta - \gamma)(-10Lq_e \gamma \beta - 5Lq_b \gamma^2 + 12q_e \gamma^3 L + 3\gamma^3 Lq_b + 3L\beta^3 q_e + 12\beta^3 Lq_b - 15Lq_e \gamma^2 + 9q_b L\beta^2 \gamma + 6Lq_e \beta^2 \gamma + 6Lq_b \gamma^2 \beta - 10Lq_b \beta \gamma + 9\gamma^2 Lq_e \beta - 15Lq_b \gamma^2 - 5L\beta^2 q_e)$$

$$Q(e) = -\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e - 15\beta^2 q_b - 5q_e \beta^2 + 6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma - 10q_b \gamma \beta - 10q_e \gamma \beta + 4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e - 5\gamma^2 q_b - 15\gamma^2 q_e + 2\gamma^3 q_b + 8\gamma^3 q_e)$$

De belastingvector  $f_{\text{tot}}$  voor de tweede belastingsstap wordt met behulp van de formules 2.3 tot en met 2.5 samengesteld in tabel 2.2.

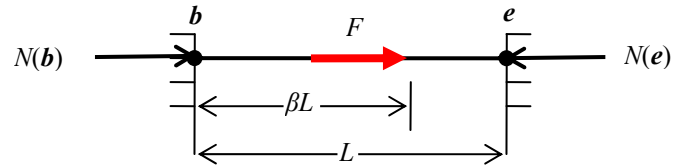


$f_{\text{prim}}$	$f$	$f_{\text{tot}}$	
$T^1_{ybprim} =$ $\frac{1}{60}(\beta - \gamma)(30\gamma^2 Lq_e - 9L\beta^2 q_b \gamma -$ $6\beta^2 \gamma q_e L - 6\beta Lq_b \gamma^2 - 3L\gamma^3 q_b - 10Lq_b \gamma +$ $30\beta^2 \gamma q_b + 10\beta^2 \gamma q_e + 20\beta \gamma q_b + 20\beta \gamma q_e +$ $10Lq_b \gamma^2 - 10\beta Lq_e - 20\beta Lq_b - 20L\gamma q_e -$ $12L\gamma^3 q_e - 12L\beta^3 q_b - 3L\beta^3 q_e - 9\gamma^2 Lq_e \beta)$ $F^1_{zbprim} =$ $\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma - 5\gamma^2 q_b +$ $4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e + 10q_e - 10q_e \gamma \beta -$ $10q_b \gamma \beta + 8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e + 8\gamma^3 q_e + 2\gamma^3 q_b -$ $15\beta^2 q_b - 5q_e \beta^2 + 10q_b - 15\gamma^2 q_e)$	$T^l_{yb} = 0$  $F^l_{zb} = 0$	$T^1_{yb} - T^1_{ybprim} =$ $-\frac{1}{60}(\beta - \gamma)(30\gamma^2 Lq_e - 9L\beta^2 q_b \gamma -$ $6\beta^2 \gamma q_e L - 6\beta Lq_b \gamma^2 - 9\gamma^2 Lq_e \beta - 3L\beta^3 q_e +$ $30\beta^2 \gamma q_b + 10\beta^2 \gamma q_e + 20\beta \gamma q_b + 20\beta \gamma q_e +$ $10Lq_b \gamma^2 - 10\beta Lq_e - 20\beta Lq_b - 10Lq_b \gamma -$ $20L\gamma q_e - 12L\gamma^3 q_e - 12L\beta^3 q_b - 3L\gamma^3 q_b)$ $F^1_{zb} - F^1_{zbprim} =$ $-\frac{L}{20}(\beta - \gamma)(6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma + 4q_b \beta \gamma^2 +$ $6\gamma^2 \beta q_e + 10q_e - 10q_e \gamma \beta - 10q_b \gamma \beta + 8\beta^3 q_b +$ $2\beta^3 q_e + 8\gamma^3 q_e + 2\gamma^3 q_b - 15\beta^2 q_b - 5q_e \beta^2 +$ $10q_b - 5\gamma^2 q_b - 15\gamma^2 q_e)$	Knoop b
$T^1_{yeprim} =$ $-\frac{1}{60}(\beta - \gamma)(-10Lq_e \gamma \beta - 5Lq_b \gamma^2 +$ $12q_e \gamma^3 L + 3\gamma^3 Lq_b + 3L\beta^3 q_e + 12\beta^3 Lq_b -$ $15Lq_e \gamma^2 + 9q_b L\beta^2 \gamma + 6Lq_e \beta^2 \gamma +$ $6Lq_b \gamma^2 \beta - 10Lq_b \beta \gamma + 9\gamma^2 Lq_e \beta -$ $15Lq_b \gamma^2 - 5L\beta^2 q_e)$ $F^1_{zeprim} =$ $-\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e - 15\beta^2 q_b -$ $5q_e \beta^2 + 6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma - 10q_b \gamma \beta -$ $10q_e \gamma \beta + 4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e - 5\gamma^2 q_b -$ $15\gamma^2 q_e + 2\gamma^3 q_b + 8\gamma^3 q_e)$	$T^l_{ye} = 0$  $F^l_{ze} = 0$	$T^1_{ye} - T^1_{yeprim} =$ $\frac{1}{60}(\beta - \gamma)(-10Lq_e \gamma \beta - 5Lq_b \gamma^2 +$ $12q_e \gamma^3 L + 3\gamma^3 Lq_b + 3L\beta^3 q_e +$ $12\beta^3 Lq_b - 15Lq_e \gamma^2 + 9q_b L\beta^2 \gamma +$ $6Lq_e \beta^2 \gamma + 6Lq_b \gamma^2 \beta - 10Lq_b \beta \gamma +$ $9\gamma^2 Lq_e \beta - 15Lq_b \gamma^2 - 5L\beta^2 q_e)$ $F^1_{ze} - F^1_{zeprim} =$ $\frac{1}{20}L(\beta - \gamma)(8\beta^3 q_b + 2\beta^3 q_e - 15\beta^2 q_b -$ $5q_e \beta^2 + 6\beta^2 q_b \gamma + 4q_e \beta^2 \gamma - 10q_b \gamma \beta -$ $10q_e \gamma \beta + 4q_b \beta \gamma^2 + 6\gamma^2 \beta q_e - 5\gamma^2 q_b -$ $15\gamma^2 q_e + 2\gamma^3 q_b + 8\gamma^3 q_e)$	Knoop e

TABEL 2.2

### 3. Horizontale puntlast

Er wordt een op extensie belaste element met een horizontale puntlast als figuur 2.8 gemodelleerd.



*Figuur 2.8: Horizontale puntlast model*

Voor dit belastinggeval gelden de vergelijkingen van 2.2.

*Als  $0 \leq x \leq \beta L$*

$$EAU_1''(x) = 0$$

$$EAU_1'(x) = C1$$

$$EAU_1(x) = C1x + C2$$

*Als  $\beta L \leq x \leq L$*

$$EAU_2''(x) = 0$$

$$EAU_2'(x) = C3$$

$$EAU_2(x) = C3x + C4$$

*Randvoorwaarden :*

$$1 \rightarrow U_1(0) = 0$$

$$2 \rightarrow U_2(L) = 0$$

$$3 \rightarrow U_1(\beta L) = U_2(\beta L)$$

$$4 \rightarrow U_1'(\beta L) = U_2'(\beta L)$$

De resultaten van het normaalkrachtverloop zijn als volgt:

$$N(l) = -F(1 - \beta)^2 \quad \text{als } 0 \leq x \leq \beta L$$

$$N(r) = F\beta \quad \text{als } \beta L \leq x \leq L$$

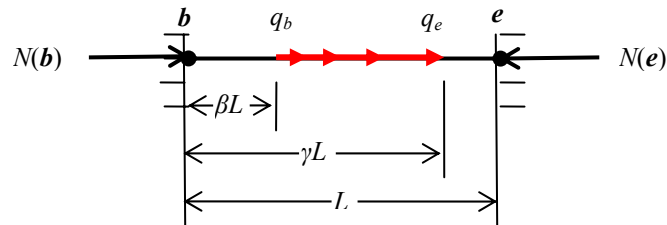
De belastingvector  $f_{\text{tot}}$  voor de tweede belastingsstap wordt met behulp van de formules 2.3 tot en met 2.5 samengesteld in tabel 2.3.

$f_{\text{prim}}$	$f$	$f_{\text{tot}}$	
$F^1_{xbprim} = -F(1-\beta)^2$	$F^1_{xb} = 0$	$F^1_{xb} - F^1_{xbprim} = F(1-\beta)$	Knoop $b$
$F^1_{xeprim} = -F\beta$	$F^1_{xe} = 0$	$F^1_{xe} - F^1_{xeprim} = F\beta$	Knoop $e$

TABEL 2.3

#### 4. Horizontale verdeelde belasting

Er wordt een op extensie belaste element met een horizontale verdeelde belasting als figuur 2.9 gemodelleerd. Het belastingverloop tussen  $q_b$  en  $q_e$  is een lineair verloop:



Figuur 2.9: Horizontale verdeelde belasting model

Voor dit belastinggeval gelden de vergelijkingen van 2.2 ook. Dus er zijn:

$$\text{Als } 0 \leq x \leq \beta L$$

$$EAU_1''(x) = 0$$

$$EAU_1'(x) = C_1$$

$$EAU_1(x) = C_1x + C_2$$

$$\text{Als } \beta L \leq x \leq \gamma L$$

$$EAU_2''(x) = -q_e + \frac{(q_b - q_e)(\gamma L - x)}{(\gamma - \beta)L}$$

$$EAU_2'(x) = C_3$$

$$EAU_2(x) = C_3x + C_4$$

Als  $\beta L \leq x \leq \gamma L$

$$EAU_3''(x) = 0$$

$$EAU_3'(x) = C_5$$

$$EAU_3(x) = C_5x + C_6$$

*Randvoorwaarden*

$$1 \rightarrow U_1(0) = 0$$

$$2 \rightarrow U_3(L) = 0$$

$$3 \rightarrow U_1(\beta L) = U_2(\beta L)$$

$$4 \rightarrow U_1'(\beta L) = U_2'(\beta L)$$

$$5 \rightarrow U_2(\gamma L) = U_3(\gamma L)$$

$$6 \rightarrow U_2'(\gamma L) = U_3'(\gamma L)$$

De resultaten van het normaalkracht verloop zijn als volgt:

als  $0 \leq x \leq \beta L$

$$N(l) = \frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta - 3q_e + q_b\gamma - 3q_b + 2q_e\gamma)$$

als  $0 \leq x \leq \beta L$

$$N(l) = \frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta - 3q_e + q_b\gamma - 3q_b + 2q_e\gamma)$$

als  $\beta L \leq x \leq \gamma L$

$$N(m) = -\frac{1}{6L(-\gamma + \beta)}(-6q_b\gamma Lx + 3q_bx^2 - 3q_ex^2 + 6q_e\gamma\beta x + 3q_b\gamma^2L^2 + 3q_e\gamma^2L^2 - 6q_e\gamma\beta L^2 + 3q_bL^2\beta^2\gamma + 3q_eL^2\gamma^3\beta - 2q_eL^2\gamma^3 - q_bL^2\gamma^3 - 2q_bL^2\beta^3 - q_eL^2\beta^3)$$

als  $\gamma L \leq x \leq L$

$$N(r) = -\frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta + q_b\gamma + 2q_e\gamma)$$

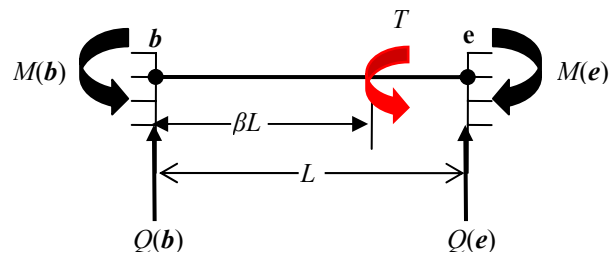
De belastingvector  $f_{\text{tot}}$  voor de tweede belastingsstap wordt met behulp van de formules 2.3 tot en met 2.5 samengesteld in tabel 2.4.

$f_{\text{prim}}$	$f$	$f_{\text{tot}}$	
$F^1_{xbprim} = -\frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta - 3q_e + q_b\gamma - 3q_b + 2q_e\gamma)$	$F^1_{xb} = 0$	$F^1_{xb} - F^1_{xbprim} = -\frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta - 3q_e + q_b\gamma - 3q_b + 2q_e\gamma)$	Knoop b
$F^1_{xepri} = \frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta + q_b\gamma + 2q_e\gamma)$	$F^1_{xe} = 0$	$F^1_{xe} - F^1_{xepri} = -\frac{1}{6}L(-\gamma + \beta)(2q_b\beta + q_e\beta + q_b\gamma + 2q_e\gamma)$	Knoop e

TABEL 2.4

## 5. Geconcentreerde momentlast

Er wordt een op buiging belaste element met een Geconcentreerde momentlast T als figuur 2.10 gemodelleerd.



Figuur 2.10: Verticale Puntlast model

Voor dit belastinggeval gelden de vergelijkingen van formule 2.1.

$$\text{Als } 0 \leq x \leq \beta L$$

$$EIw_1''''(x) = 0$$

$$EIw_1'''(x) = C1$$

$$EIw_1''(x) = C1x + C2$$

$$EIw_1'(x) = \frac{1}{2}C1x^2 + C2x + C3$$

$$EIw_1(x) = \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4$$

Als  $\beta L < x \leq L$

$$EIw_2''''(x) = 0$$

$$EIw_2'''(x) = C5$$

$$EIw_2''(x) = C5x + C6$$

$$EIw_2'(x) = \frac{1}{2}C5x^2 + C6x + C7$$

$$EIw_2(x) = \frac{1}{6}C5x^3 + C6x^2 + C7x + C8$$

Randvoorwaarden :

$$1 \rightarrow w_1(0) = 0$$

$$2 \rightarrow w_2(L) = 0$$

$$3 \rightarrow w_1'(0) = 0$$

$$4 \rightarrow w_2'(L) = 0$$

$$5 \rightarrow w_1(\beta L) = w_2(\beta L)$$

$$6 \rightarrow w_1'(\beta L) = w_2'(\beta L)$$

$$7 \rightarrow w_1''(\beta L) = w_2''(\beta L) - T$$

$$8 \rightarrow w_1'''(\beta L) = w_2'''(\beta L)$$

De resultaten van het momentenverloop en dwarskrachtenverloop zijn als volgt:

$$M(l) = \frac{T(\beta-1)}{L}(6\beta x - 3L\beta + L) \quad \text{als } 0 \leq x \leq \beta L$$

$$M(r) = -\frac{T\beta}{L}(6\beta x - 3L\beta - 6x + 4L) \quad \text{als } \beta L \leq x \leq L$$

$$Q(l) = -\frac{6T\beta}{L}(\beta-1) \quad \text{als } 0 \leq x \leq \beta L$$

$$Q(r) = -\frac{6T\beta}{L}(\beta-1) \quad \text{als } \beta L \leq x \leq L$$

Van deze vergelijkingen kunnen we de momenten en de dwarskrachten van de beide einden van het element als oplegreacties berekenen:

$$M(b) = \frac{T(\beta-1)}{L}(-3L\beta + L) \quad \text{als } x = 0$$

$$M(e) = -\frac{T\beta}{L}(3\beta L - 2L) \quad \text{als } x = L$$

$$Q(b) = -\frac{6T\beta}{L}(\beta - 1) \quad \text{als } x = 0$$

$$Q(e) = -\frac{6T\beta}{L}(\beta - 1) \quad \text{als } x = L$$

De belastingvector  $\mathbf{f}_{\text{tot}}$  voor de tweede belastingsstap wordt met behulp van de formules 2.3 tot en met 2.5 samengesteld in tabel 2.5.

$\mathbf{f}_{\text{prim}}$	$\mathbf{f}$	$\mathbf{f}_{\text{tot}}$	
$T^1_{ybprim} = \frac{T(\beta-1)}{L}(-3L\beta+L)$ $F^1_{zbprim} = \frac{6T\beta}{L}(\beta-1)$	$T^1_{yb} = 0$ $F^1_{zb} = 0$	$T^1_{yb} - T^1_{ybprim} = -\frac{T(\beta-1)}{L}(-3L\beta+L)$ $F^1_{zb} - F^1_{zbprim} = -\frac{6T\beta}{L}(\beta-1)$	Knoop <i>b</i>
$T^1_{yeprim} = -\frac{T\beta}{L}(3\beta L - 2L)$ $F^1_{zeprim} = -\frac{6T\beta}{L}(\beta-1)$	$T^1_{ye} = 0$ $F^1_{ze} = 0$	$T^1_{ye} - T^1_{yeprim} = \frac{T\beta}{L}(3\beta L - 2L)$ $F^1_{ze} - F^1_{zeprim} = \frac{6T\beta}{L}(\beta-1)$	Knoop <i>e</i>

TABEL 2.5

## 2.8.2 Tweede berekeningstap, de elementstijfheidsmatrix [5]

Voor de tweede berekeningsstap moeten we weer beschikken over stijfheidsmatrix. Het element heeft nu zes vrijheidsgraden waarmee zes elementenkrachten corresponderen. Het element wordt alleen aan de uiteinden belast, dus het momentenverloop is weer lineair en de dwarskracht en normaalkracht constant. Het momentenverloop ligt ook nu met twee parameters  $M_1$  en  $M_2$  vast en opnieuw zijn er twee vervormingsparameters  $e_1$  en  $e_2$ . De tekenafspraken hiervoor is als in de vorige paragrafen. De relatie tussen de zes elementverplaatsingen en elementkrachten luidt voluit voor een willekeurig element:

$$\mathbf{f}^e = K^e \mathbf{u}^e \quad (2.4)$$

Er worden in de paragrafen 2.5.1, 2.5.2 en 2.5.3 de elementstijfheidsmatrix en tevens de globale stijfheidsmatrix berekend. In de formule 2.4 is  $\mathbf{f}^e$  gelijk aan  $\mathbf{f}^e_{\text{tot}}$  en  $\mathbf{f}$  systeem is gelijk aan  $\mathbf{f}_{\text{tot}}$ , die in de stap1 zijn berekend. De elementstijfheidsmatrix en de globale stijfheidsmatrix zijn ook bekend dus het kan  $\mathbf{u}^e$  en  $\mathbf{u}$  worden berekend. Vervolgens worden

er vervormingparameters berekend. Ten slotte worden er doorsnedengrootheden  $N$ ,  $M1$ ,  $M2$  en  $V$  berekend. De dwarskracht  $V$  wordt weer berekend als de afgeleide van het moment.

### **Berekening van momenten, dwarskrachten en normaalkrachten**

Momenten-, dwarskrachten- en normaalkrachtverloop van een constructie zijn som van uitkomsten van de stap 1 en 2.

## **2.9 Toetsing**

Er wordt nu de uitkomsten van het programma vergeleken met de uitkomsten van de MatrixFrame met behulp van 2 voorbeelden. Deze voorbeelden zijn in bijlage C te zien.

## **2.10 Conclusie**

Uit de resultaten van de bovenstaande voorbeelden mogen we concluderen dat het uitgewerkte programma een betrouwbaar programma is om een portaal te berekenen. Hierna zullen we dit programma uitbreiden om een portaal met de tijdsafhankelijke parameters en de tijdsafhankelijke belastingen te berekenen.



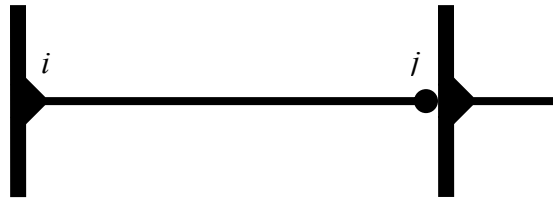
## 3 Staaf met scharnierende verbindingen

### 3.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de staaf met scharnierende verbindingen geïmplementeerd. In hoofdstuk 2 is de staafconstructie alleen met momentvaste verbindingen geprogrammeerd. Maar dit is niet altijd het geval. Soms is het noodzakelijk dat een model met scharnierende verbinding gemaakt worden. Daarom wordt hier implementatie van staaf met scharnierende verbindingen uitgevoerd.

### 3.2 Vormen van de matrix $D$ [5]

Stilzwijgend is er tot hier van uitgegaan dat elke buigstaaf in beide uiteinden momentvast wordt verbonden met andere staven. Dit hoeft niet altijd het geval te zijn. Ook scharnierende aansluitingen komen voor, zie figuur 3.1.



*Figuur 3.1: Staaf tussen knopen  $i$  en  $j$  heeft bij knoop  $j$  een scharnierende verbinding [5]*

Er wordt een staaf tussen de knopen  $i$  en  $j$  beschouwd. Aan uiteinde  $j$  wordt de staaf scharnierend met de knoop verbonden. In de vergelijking

$$\begin{aligned}e_1 &= C_{11}M_1 + C_{12}M_2 \\e_2 &= C_{21}M_1 + C_{22}M_2\end{aligned}$$

Is nu het moment  $M_2$  nul. De vervorming  $e_2$  is er nog wel. Maar is voor de berekening niet relevant. Nu is alleen van belang

$$e_1 = C_{11}M_1$$

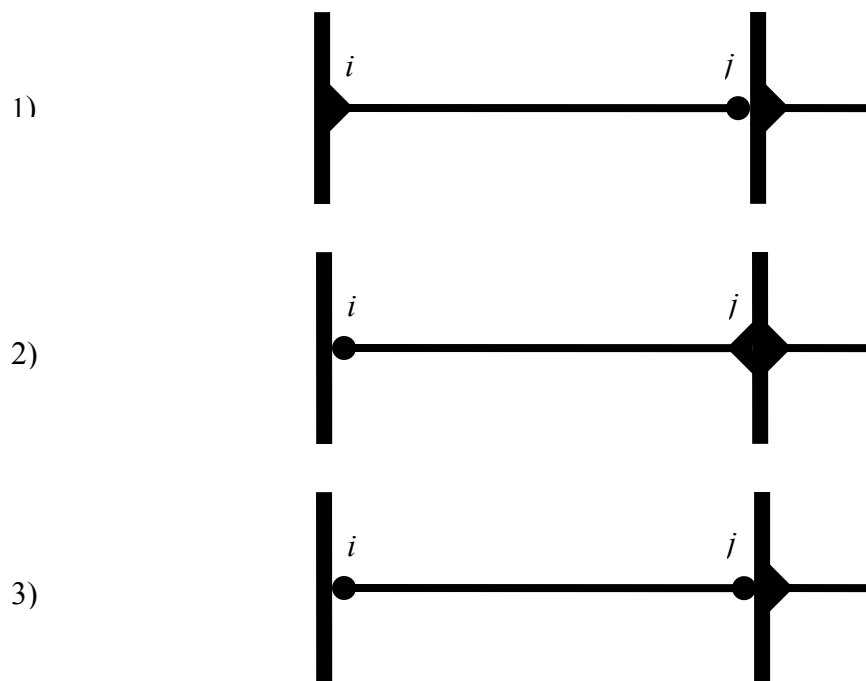
De  $2 \times 2$  matrix  $D$  wordt in dit geval:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ C_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

En verder verloopt alles hetzelfde. In dien gewenst, wordt  $C_{11}$  vermeerderd met  $C_v$  voor het meenemen van dwarskrachtvervorming. Het scharnier ook bij knoop  $j$  kan voorkomen en de term  $1/ C_{11}$  in (2.5) dan verandert in  $1/ C_{22}$  en rechtsonder in de  $2 \times 2$  matrix  $D$  voorkomt. Als zowel bij knoop  $i$  als knoop  $j$  een scharnier voorkomt in de  $2 \times 2$  matrix  $D$  geheel gevuld met nullen. De staaf is dan een vakwerkelement geworden.

Als alle elementen die in een knoop  $i$  samenkomen bij die knoop een scharnier hebben, is de rotatie  $\varphi_{yi}$  bij die knoop niet verhinderd. Op de rij een kolom die met die rotatie corresponderen, staan dan uitsluitend nullen, ook op de hoofddiagonaalpositie. En dat veroorzaakt een onbedoelde programmastop, of de antwoorden zijn onbetrouwbaar. Dit kan worden voorkomen door een dergelijke rotatie voor te schrijven (waarde nul) of door een van de daar samenkommende elementen wel momentvast aan de knoop te verbinden. De knoop zal dan de eindrotatie van die staaf krijgen.

Er kan 3 verschillende gevallen voor scharnierende verbindingen worden beschouwd. Deze gevallen zijn in figuur 3.2 weergegeven.



*Figuur 3.2: Scharnierende verbindingen*

Voor elke van deze 3 gevallen dient de stijfheidmatrix, dwarskracht- en momentverloop, en primaire knoopbelastingen te worden berekend.

### 3.3 Berekening van stijfheidmatrix, primaire knoopbelastingen

Hier wordt de stijfheidmatrix voor de 3 gevallen berekend. Om de primaire knoopbelastingen, het dwarskracht- en momentverloop voor 5 belastinggevallen die er in de paragraaf 2.3.4 zijn benoemd te berekenen dient tevens van 3.2 en 3.4 gebruik te worden gemaakt. De antwoorden worden er in het programma geïmplementeerd.

#### 3.3.1 Eerste geval

In dit geval is de eerste zijde momentvast en tweede scharnier. De onderstaande differentiaal vergelijkingen gelden voor alle op buiging belaste elementen.

$$\left. \begin{array}{l} EIw''''(x) = q \\ EIw'''(x) = -Q \\ EIw''(x) = -M \\ w'(x) = -\varphi \\ w(x) = \text{Zaking, richting } z_1\text{-as} \end{array} \right\} \quad (3.2)$$

De differentiaal vergelijkingen 3.3 gelden voor alle op extensie belaste elementen. Maar de vergelijkingen voor berekening van de normaalkracht veranderd niet in dit gevallen en ze blijven dezelfde als momentvaste verbindingen in beide kanten.

$$\left. \begin{array}{l} EAU''(x) = -q \\ EAU'(x) = N \\ U(x) = \text{Extensie, richting } x_1\text{-as} \end{array} \right\} \quad (3.3)$$

Voor de verplaatsingen van een op buiging belaste elementen geldt:

$$\begin{array}{l} w_1(0) = u_{z_i} \\ w_1(L) = u_{z_j} \\ w_1'(0) = \varphi_{y_i} \\ w_1'(L) = \varphi_{y_j} \end{array} \quad (3.4)$$

Randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow w_1(0) = 0 \\
 2 &\rightarrow w_2(L) = 0 \\
 3 &\rightarrow w_1'(0) = 0 \\
 4 &\rightarrow M(L) = -EIw_2''(L) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Uit substitutie van 3.2 en 3.4 met 3.5 wordt de stijfheidmatrix voor dit staaftype berekend als volgt:

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ T_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{zj} \\ T_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{-3EI}{L^2} & 0 & \frac{-3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{L^2} & \frac{-3EI}{L} & 0 & \frac{-3EI}{L^2} & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{zi} \\ \varphi_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{zj} \\ \varphi_{yj} \end{pmatrix}$$

De D matrix van dit geval is:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 3.3.2 Tweede geval

In dit geval heeft de linkerzijde scharnierende en rechterzijde momentvaste verbinding. Het proces is hetzelfde als het eerste geval maar de randvoorwaarden dient te worden veranderd.

Randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow w_1(0) = 0 \\
 2 &\rightarrow w_2(L) = 0 \\
 3 &\rightarrow M(0) = -EIw_1''(0) = 0 \\
 4 &\rightarrow w_2'(L) = 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Uit substitutie van 3.2 en 3.4 met 3.6 wordt de stijfheidmatrix voor dit staaftype berekend als volgt:

$$\begin{pmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ T_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{zj} \\ T_{yj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-3EI}{L^3} & \frac{-3EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-3EI}{L^3} & \frac{-3EI}{L^2} \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3EI}{L^2} & 0 & 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{-3EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{xi} \\ u_{zi} \\ j_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{zj} \\ j_{yj} \end{pmatrix}$$

De D matrix van dit geval is:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3EI}{L} \end{pmatrix}$$

### 3.3.3 Derde geval

In dit geval heeft de linkerzijde scharnierende en rechterzijde momentvaste verbinding. Het proces is hetzelfde als het eerste geval maar de randvoorwaarden dient te worden veranderd.

Randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow w_1(0) = 0 \\
 2 &\rightarrow w_2(L) = 0 \\
 3 &\rightarrow M(0) = -EIw_1''(0) = 0 \\
 4 &\rightarrow M(L) = -EIw_2''(L) = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

Uit substitutie van 3.2 en 3.4 met 3.7 wordt de stijfheidmatrix voor dit staaftype berekend als volgt:

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{zi} \\ T_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{zj} \\ T_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xi} \\ u_{zi} \\ \varphi_{yi} \\ u_{xj} \\ u_{zj} \\ \varphi_{yj} \end{Bmatrix}$$

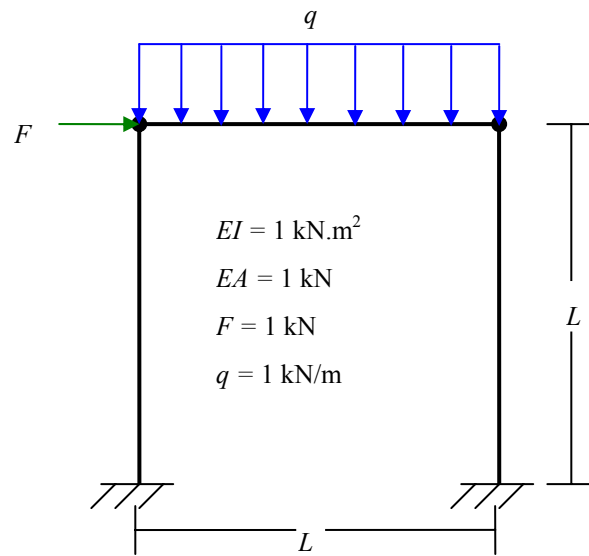
De D matrix van dit geval is:

$$D = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

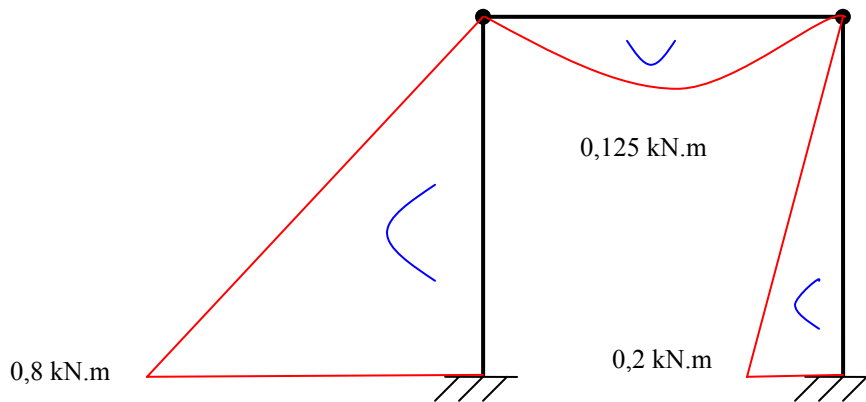
### 3.4 Toetsing

Hier wordt een raamwerk met onderstaande gegevens behandeld, zie figuur 3.3.

De momentenlijn van het raamwerk is in figuren 3.4 weergegeven. Deze resultaten zijn hier door het programma berekend.

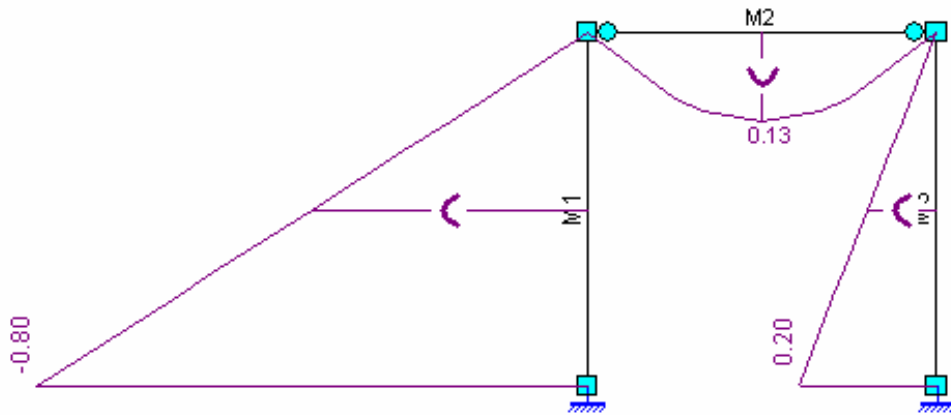


*Figuur 3.3: Raamwerk met scharnierende verbindingen*



*Figuur 3.4: Momentenlijn van het raamwerk.*

Hier wordt dit raamwerk door het programma MatrixFrame berekend. De resultaten van momentenlijn is in figuur 3.5 weergegeven.



*Figuur 3.5: Momentenlijn berekend door MatrixFrame.*

### **3.5 Conclusie**

De resultaten van het programma naar verwachting zijn en het is te zien dat deze resultaten dezelfde als de resultaten van de MatrixFrame zijn.

Er kan geconcludeerd worden dat de resultaten van de berekende staaf met scharnierende verbinding door het programma betrouwbaar zijn.



## 4 Veerelementen

### 4.1 Inleiding

Voor modellering van grond en interactie van constructie-elementen dient niet-lineaire veerelementen worden aan het Matlab programma toegevoegd. In de eerste stap wordt een lineair veerelement als een verende oplegging aan het programma toegevoegd en daarna wordt het programma op een niet-lineair veerelement ontwikkeld.

### 4.2 Verende oplegging met het lineaire gedrag [5]

Er wordt een stelsel met  $n$  vrijheidsgraden beschouwd. De knoop waarin vrijheidsgraad  $u_i$  voorkomt wordt in de richting van deze vrijheidsgraad verend verbonden met de vaste omgeving. De veerconstante wordt er  $K_i$  genoemd, zie figuur 4.1. Er wordt aangenomen dat het stelsel vergelijkingen geheel geassembleerd is, uitgezonderd het verwerken van de veer. De  $i$ -de rij van het totale stelsel luid:

$$K_{i1}u_1 + \dots + K_{ii}u_i + \dots + K_{in}u_n = F_i^* \quad (4.1)$$

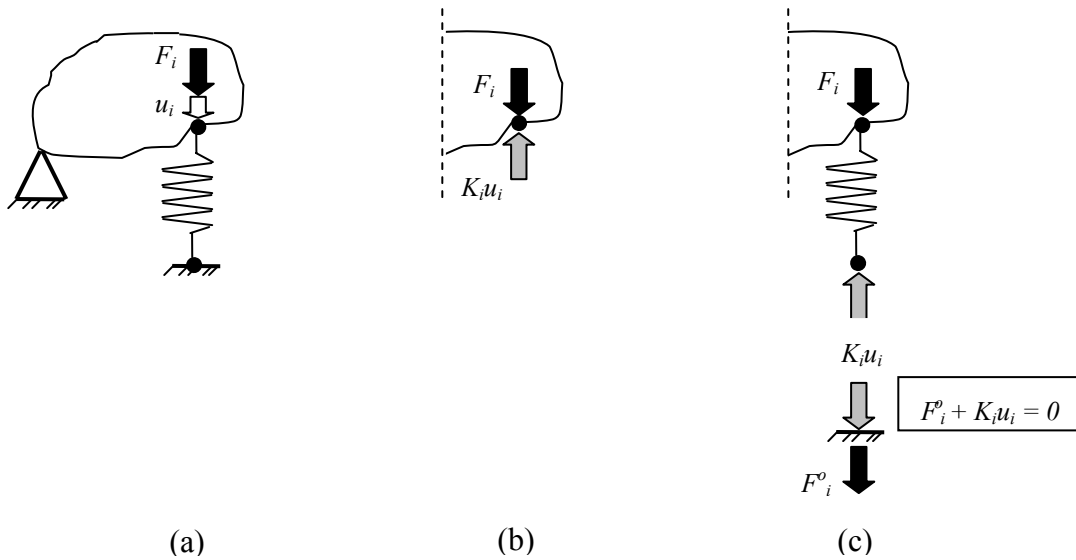
Het linkerlid van deze vergelijking is ontstaan uit bijdragen van alle staven die op de vrijheidsgraad  $u_i$  aansluiten. In het rechterlid hebben we met  $F_i^*$  aangegeven de totale kracht die op de constructie wordt uitgeoefend in de richting van de vrijheidsgraad  $u_i$  op de knoop waar de veer is aangesloten. De kracht  $F_i^*$  bestaat uit twee bijdragen, ten eerste de gegeven belasting  $F_i$  in de richting van  $u_i$  en ten tweede de door de veer op de constructie uitgeoefende kracht.

Bij een verplaatsing  $u_i$  oefent de veer op de constructie een kracht uit die tegengesteld is aan de richting van  $u_i$  (ter grootte van  $K_i u_i$ ), dus tegen  $F_i$ -richting in. Derhalve is  $F_i^*$ , zie figuur 4.1b:

$$F_i^* = F_i - K_i u_i$$

De  $i$ -de rij zou hiermee in zijn rechterlid nog een onbekende term bevatten, want  $u_i$  moet nog uit de berekening volgen. Maar deze term kan worden overgebracht naar het linkerlid en worden gecombineerd met de term  $K_{ii}u_i$ . De  $i$ -de vergelijking wordt daarmee:

$$K_{i1}u_1 + \dots + (K_{ii} + K_i)u_i + \dots + K_{in}u_n = F_i$$



Figuur 4.1: Verende ondersteuning in de richting van vrijheidsgraad  $u_i$ . De belasting voor de vrijheidsgraad bestaat uit de uitwendige belasting  $F_i$  en de veerkracht  $k_i u_i$ . [5]

Er is te concluderen: het in rekening brengen van een verende ondersteuning in de richting van vrijheidsgraad  $u_i$  gebeurt door het toevoegen van de veerconstante  $K_i$  aan de hoofddiagonaalterm die met die vrijheidsgraad correspondeert.

Het stelsel vergelijkingen gaat er dan als volgt uitzien:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} + K_i & \dots & K_{in} \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \cdot \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_i \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_i \\ \cdot \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

▪ **Oplegreactie [5]**

De oplegreactie volgt nu uit het evenwicht voor de onderste knoop van de veer, zie figuur 4.1c. Deze is voor een verende ondersteuning bij vrijheidsgraad  $u_i$ :

$$F_i^o = -K_i u_i \quad (4.3)$$

### 4.3 Toetsing

Er wordt nu de uitkomsten van ons programma vergeleken met de uitkomsten van de handberekeningen met behulp van een voorbeeld.

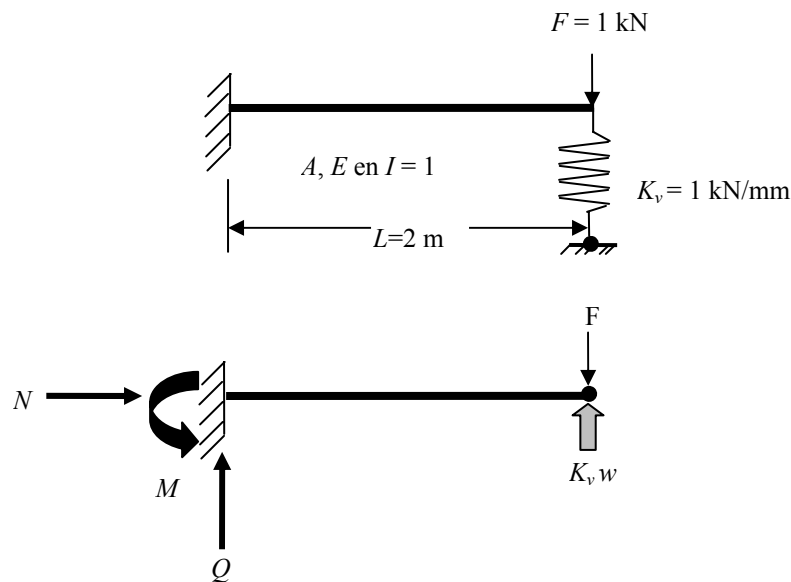
#### Voorbeeld

Er wordt de ingeklemde ligger met een verende oplegging behandeld, zie figuur 4.2.

Ten eerste wordt er de ligger handberekend:

Hier kan van de vergelijkingen (2.1) gebruik worden gemaakt:

$$\begin{aligned} EIw_1''''(x) &= 0 \\ -Q &= EIw_1'''(x) = C1 \\ -M &= EIw_1''(x) = C1x + C2 \\ -EI\varphi &= EIw_1'(x) = \frac{1}{2}C1x^2 + C2x + C3 \\ EIw_1(x) &= \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4 \end{aligned} \quad (4.4)$$



Figuur 4.2: ingeklemd ligger met een verende oplegging

Van evenwichtvergelijkingen komen uit:

$$\begin{aligned}
N &= 0 \\
Q &= F - K_v w = (1 - w) \\
M &= L(F - K_v w) = 2(1 - w)
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

Als er de resultaten van evenwichtvergelijkingen (4.5) aan de vergelijkingen van (4.4) worden toegevoegd dan is  $w = 0,7272$  mm. De oplegreacties van de ligger zijn:

$$\begin{aligned}
Q &= -0,2727 \\
N &= 0 \\
M &= 0,5455
\end{aligned}$$

Hier wordt de uitkomsten van het programma bekeken:

```
oplegreacties =
-0.2727
-0.0000
0.5455
```

De resultaten van het programma en de handberekeningen zijn precies dezelfde dus de uitkomsten van het programma zijn betrouwbaar in verband met de lineaire veerelementen.

#### **4.4 Verende oplegging met het niet-lineaire gedrag**

Voor de berekening van een niet-lineair veerelement kan er van verschillende veerkracht-verplaatsing diagrammen gebruik worden gemaakt, zie figuur 4.3(a), (b) en (c). Voor het modelleren van het grondgedrag met veerelementen dient er te worden onderzocht welke van deze diagrammen op het grondgedrag rond de palen lijkt. Daarna wordt er het diagram gekozen. In dit hoofdstuk wordt er het diagram 4.3(a) gekozen. Na het bestuderen van de grondeigenschappen als het nodig is dan wordt van andere diagrammen gebruik gemaakt.

In de eerste instantie wordt een tijdverloop aan het programma toegevoegd. Want het niet-lineaire gedrag van het veerelement is een tijdafhankelijk gedrag. Dit tijdverloop is tussen begintijd  $t_b = 0$  and eindtijd  $t_e = 20$  jaar opgedeeld in 1 uur. In de tweede instantie neemt elke uur de uitwendige krachten van de constructie met een waarde van  $\Delta F$  toe. Deze toenemingwaarde komt voor omdat de belastingen op de constructie, zoals

variabele belastingen, toenemen ofwel de constructiesterkte ten gevolge van allerlei redenen in de loop der tijd afneemt.

De veerkracht  $F_v$  (kracht die veerelement kan opnemen) neemt tot  $F_p$  evenredig met de veerverplaatsing in de bijbehorende knoop toe. Deze fase wordt er elastische fase genoemd. Als er in deze fase de constructie wordt ontlast blijft geen verplaatsing in het veerelement dus  $U = 0$ . Na deze fase zal het veerelement andere gedrag vertonen. Dat betekent dat het veerelement  $F_v$  constant  $F_p$  blijft maar de verplaatsing van de veer toeneemt. Dit gedrag wordt plastische fase genoemd. Als er de constructie in deze fase wordt ontlast blijft nog een verplaatsing in de constructie, bijvoorbeeld  $U_{p1}$  of  $U_{p2}$ , zie figuur 4.4(a). Om dit in het programma te realiseren met een acceptabele benadering wordt er een kracht- verplaatsingverloop als figuur 4.4(b) beschouwd. Voor elke uur berekent het programma de veerconstant met behulp van de formule

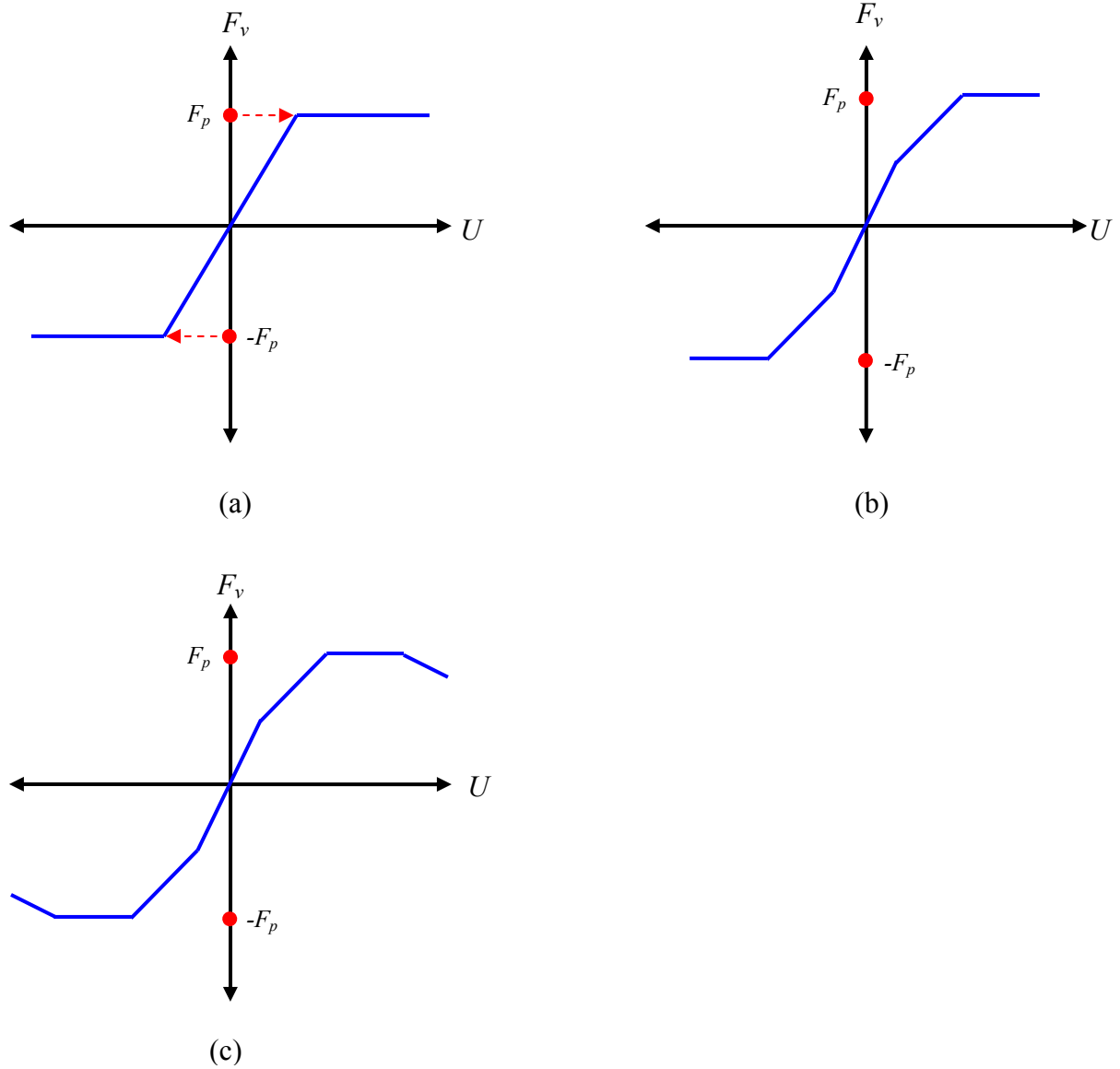
$$K_{it} = F_{vit} / U_{it} \quad (4.6)$$

In de derde instantie berekent het programma nieuwe verplaatsingen en krachten in elke knoop van de constructie voor elke uur met toename van de uitwendige krachten. Hoe waarde van de  $\Delta F$  kleiner is hoe de benadering van antwoorden van het programma keuriger wordt. Zo wordt er de verplaatsing van het veerelement in de bijbehorende knoop en de veerkracht met behulp van de formule (4.6) berekend.

In de vierde instantie wordt bepaald of de veerkracht kleiner of gelijk aan de  $F_p$  is. In dit geval blijft de veerconstant in de matrix (4.2) constant ( $K_{it} = K_I$ ) en nemen de uitwendige belastingen met veerkracht en verplaatsing evenredig toe. Als de veerkracht groter dan  $F_p$  is dan wordt veerkracht  $F_v$  gelijk aan constante waarde  $F_p$ . In dit geval berekent het programma een nieuwe veercontant met behulp van de formule

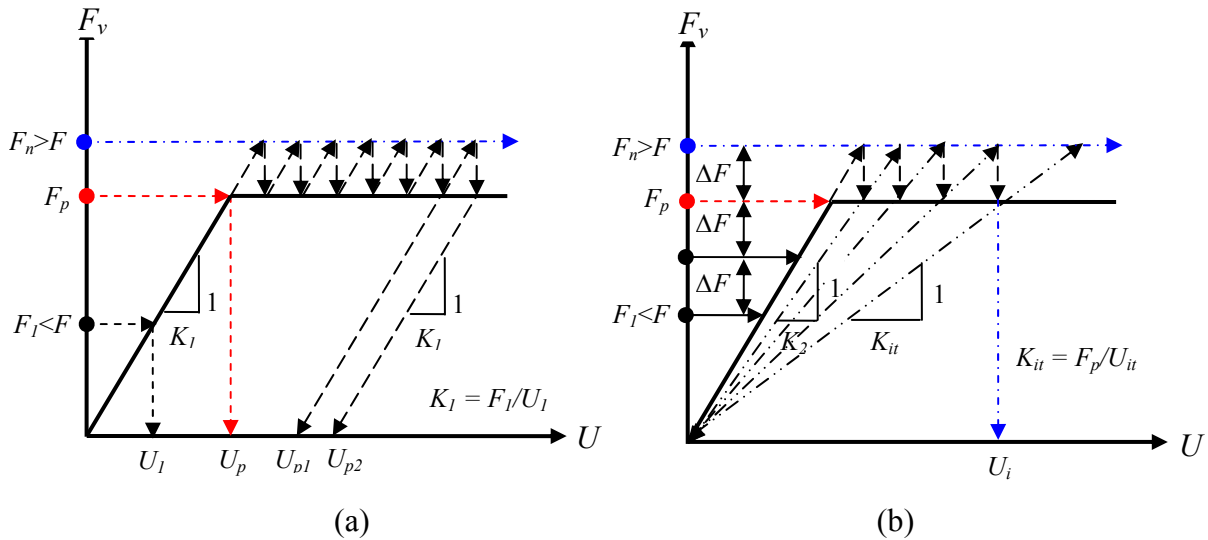
$$K_{it} = F_p / U_{it} \quad (4.7)$$

In de formule (4.7) wordt nieuwe verplaatsing  $U_{it}$  groter in de loop der tijd ten gevolge van belastingstoename terwijl de veerkracht constant blijft ( $F_{vit} = F_p$ ). Dus de nieuwe veercontant  $K_{it}$  wordt slaper.



*Figuur 4.3: Verschillende veerkracht- verplaatsing diagrammen*

In de vijfde instantie berekent het programma de matrix (4.2) met de nieuwe waarde van  $K_{ii}$  in plaats van  $K_i$ . Dit proces loopt tot het eind van de twintigste jaar door.



Figuur 4.4: Veerkracht- verplaatsing diagrammen

## 4.5 Toetsing

De uitkomsten van het programma wordt vergeleken met de uitkomsten van de handberekeningen met behulp van een voorbeeld. Hier wordt het veerkracht- en verplaatsingverloop en het belasting- en verplaatsing diagram van de constructie in bijbehorende knoop met beide berekeningswijzen behandeld. Daarna worden er de resultaten van de beide wijzen met elkaar vergeleken.

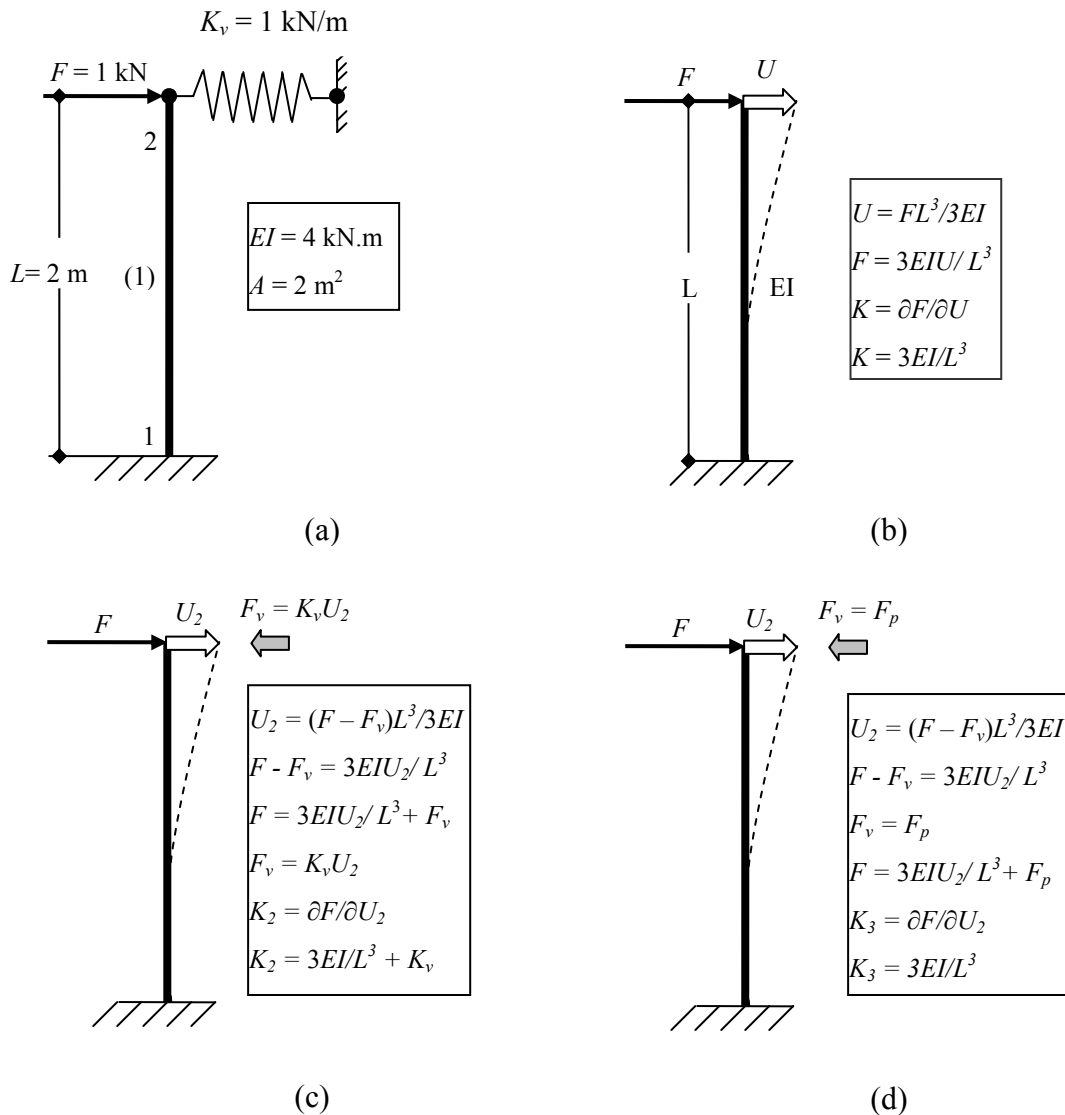
- **Eerste toets:**

Hier wordt veerkracht- en verplaatsingverloop van een ingeklemde kolom met toenemende belasting in de loop van 80 uur behandeld. De kolom heeft een verende oplegging in de top, zie figuur 4.5(a).

In de eerste instantie wordt het probleem met de hand berekend. De beginwaarde van de belasting  $F$  is gelijk aan 1 kN. De belasting neemt met een waarde  $\Delta F = 0.05$  kN in elke uur toe. De veerconstant is gelijk aan 2 kN/m en  $F_p = 2$  kN dus  $U_p = 1$  m. Op tachtigste uur belasting  $F$  is gelijk aan  $1 + 0.05 \times 80 = 5$  kN.

Hier wordt voor de handberekening van de formules 4.8 gebruik gemaakt. De formules (4.8) worden van de vergeet-me-nietjes afgeleid, zie figuur 4.5(b) en (c):

$$U_2 = (F - F_v)L^3/3EI \quad \text{en} \quad K = \partial F/\partial U_2 \quad (4.8)$$

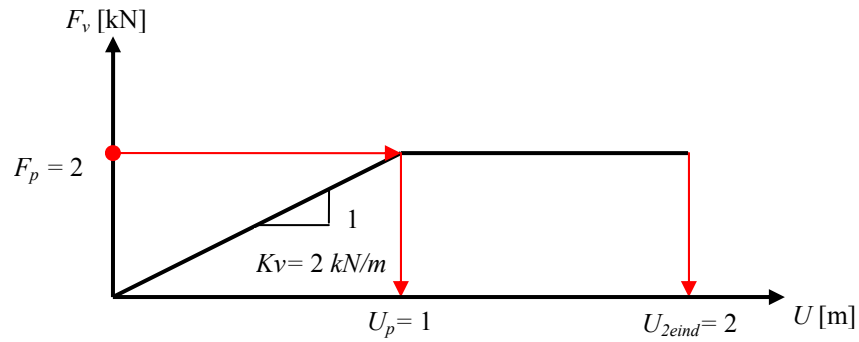


Figuur 4.5: Ingekleemde kolom met een verende oplegging en toenemende belasting  $F$

Als de veerkracht  $F_v$  in de loop van de tijd groter is dan  $F_p$  dan wordt de constante waarde  $F_v = F_p = 2$  in de formule (4.8) ingevuld, zie figuur 4.5(d).

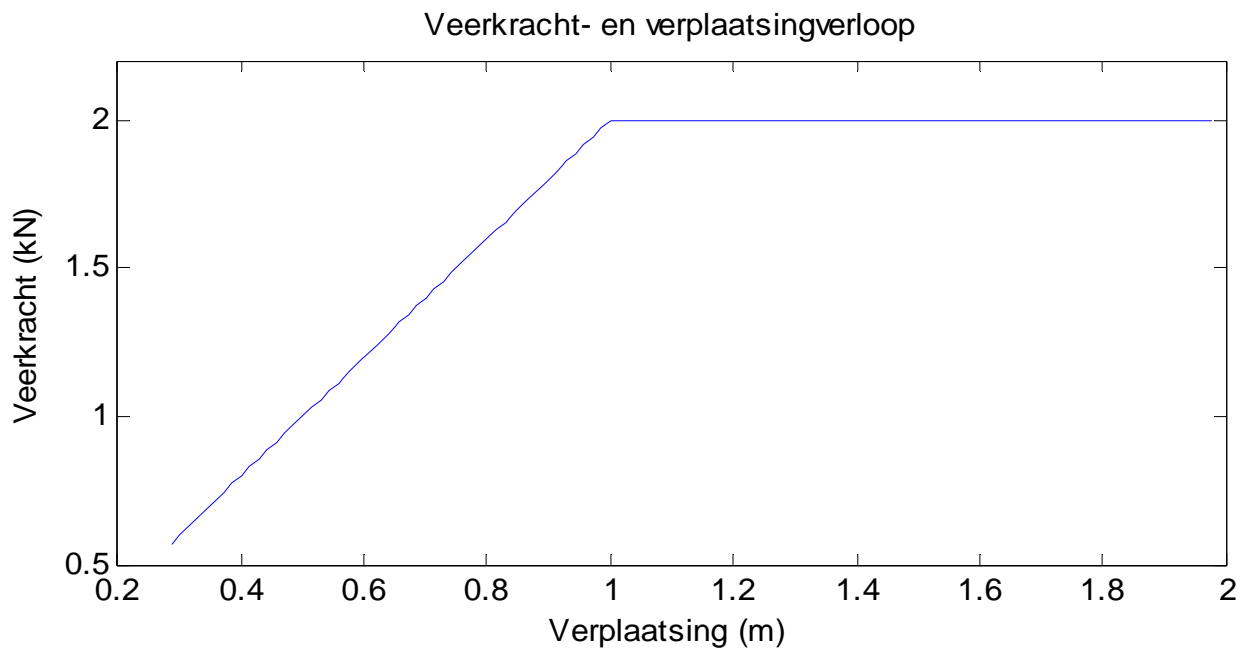
Hier wordt het veerkracht- verplaatsing diagram getekend, zie figuur 4.6.





*Figuur 4.6: Veerkracht- verplaatsing verloop gedurende 80 uren (de handberekening)*

In de tweede instantie wordt het probleem met behulp van het programma berekend. In figuur 4.7 wordt de veerkracht- en verplaatsing diagram door het programma getekend.



*Figuur 4.7: Veerkracht- en verplaatsingverloop, gedurende 80 uren (het rekenprogramma)*

De resultaten zijn bijna hetzelfde, met een goede benadering. De handberekende  $U_{2eind}$  is gelijk aan 2 m terwijl het resultaat van het rekenprogramma is  $U_{2eind} = 1,9768$  m. Het verschil in percentage is 1,16% dus er is geen groot verschil tussen beide antwoorden.

- **Tweede toets:**

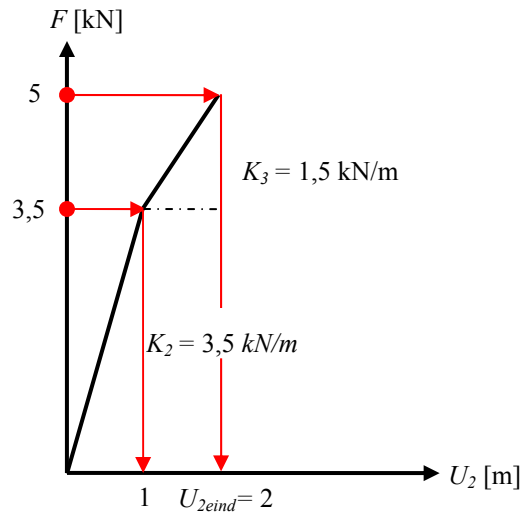
Hier wordt het belasting- en verplaatsingverloop van een ingeklemde kolom met toenemende belasting in de loop van 80 uur behandeld. In de eerste instantie wordt het probleem met de hand berekend. Voordat de veerkracht  $F_v$  aan  $F_p$  gelijk wordt zijn de formules (4.9) geldig:

$$F = 3EIU_2/L^3 + F_v \quad \text{met} \quad F_v = K_v U_2 \quad \text{en} \quad K_2 = 3EI/L^3 + K_v \quad (4.9)$$

Daarna zijn de formules (4.10) geldig:

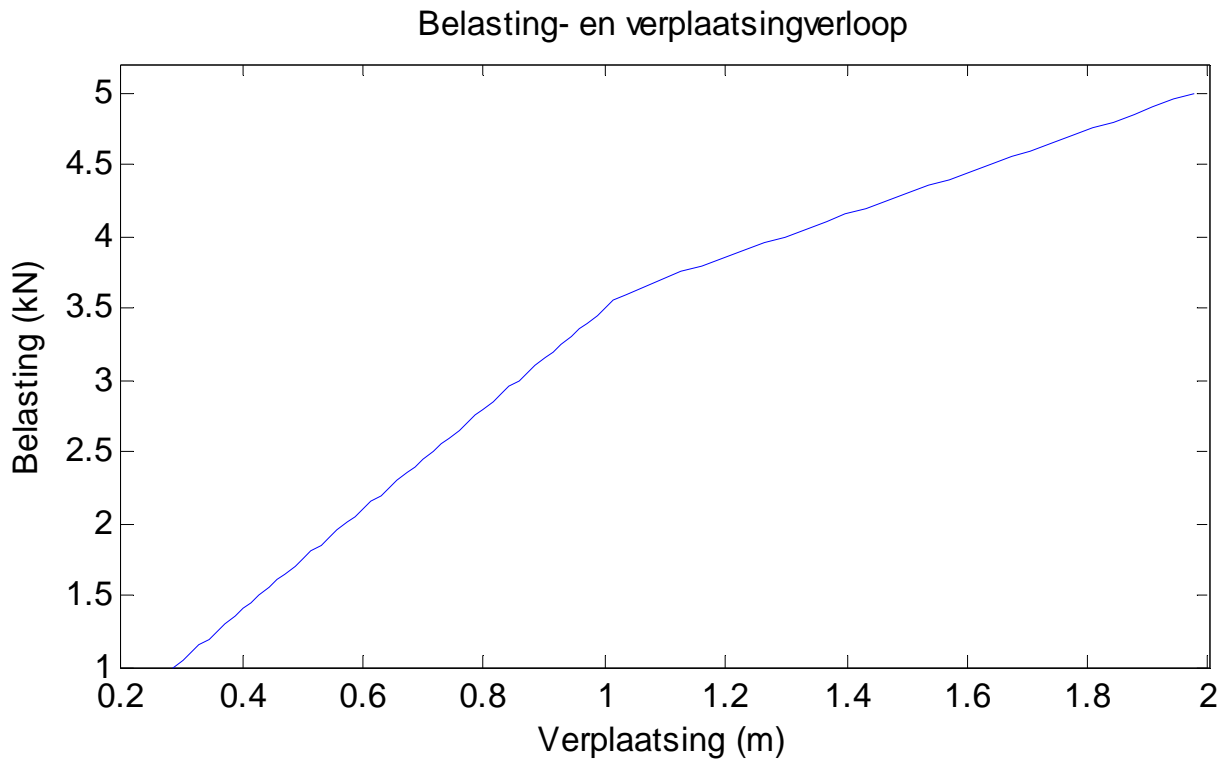
$$F = 3EIU_2/L^3 + F_p \quad \text{en} \quad K_3 = 3EI/L^3 \quad (4.10)$$

In de eerste toets is de waarde van  $U_2 = 1$  m al berekend waarbij  $F_v$  gelijk aan  $F_p$ . Er is tevens berekend waarbij  $F$  naar 5 kN toeneemt dan is de verplaatsingwaarde gelijk aan 2 m. Als de bijbehorende waarden in de (4.9) en (4.10) worden ingevuld dan kan het belasting- verplaatsingverloop worden getekent, zie figuur 4.8:



*Figuur 4.8: Belasting- verplaatsingverloop van knoop 2 gedurende 80 uren (de handberekening)*

In tweede instantie wordt er de belasting- verplaatsing diagram van de knoop 2 door het programma getekend, zie figuur 4.9.



*Figuur 4.9: Belasting- verplaatsingverloop van knoop 2 gedurende 80 uren (het rekenprogramma)*

De handberekende  $U_{2eind}$  is gelijk aan 2 m terwijl het resultaat van het rekenprogramma is  $U_{2eind} = 1,9768$  m. In de eerste toets is er geen verschil tussen het handberekende resultaat en resultaat van het programma. Het verschil in percentage is 1,16% dus er is geen groot verschil tussen beide antwoorden.

#### **4.6 Conclusie**

Het verschil tussen handberekende problemen en berekende problemen door het programma zijn minder 1,2%. Dus de resultaten van het programma zijn met een goede benadering acceptabel.

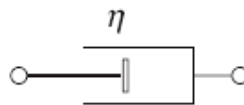
## 5 Viskeuze elementen

### 5.1 Inleiding

Met een viskeuselement kan “kruip” en “relaxatie” van een betonconstructie gemodelleerd worden. In dit hoofdstuk wordt eerst viskeus gedrag en viscoelastisch gedrag geïllustreerd. Daarna wordt het toevoegen van viskeuselement aan het programma aan de hand van een voorbeeld beschreven. Ten slotte worden de resultaten van het rekenprogramma met verschillende viscositeit vertoond.

### 5.2 Illustratie van viskeus gedrag

Het gedrag van een lineaire vloeistof kan worden beschreven met de wet van Newton:



*Figuur 5.1: Schema van een viskeuselement,  $\sigma = \eta \cdot \dot{\epsilon}$*

Deze wetmatigheid stelt dat de spanning  $\sigma$  recht evenredig is met de aangelegde reksnelheid  $\dot{\epsilon}$ , de evenredigheidsfactor  $\eta$  wordt viscositeit genoemd. Het mechanisch analogon van een viskeus materiaal is een demper.

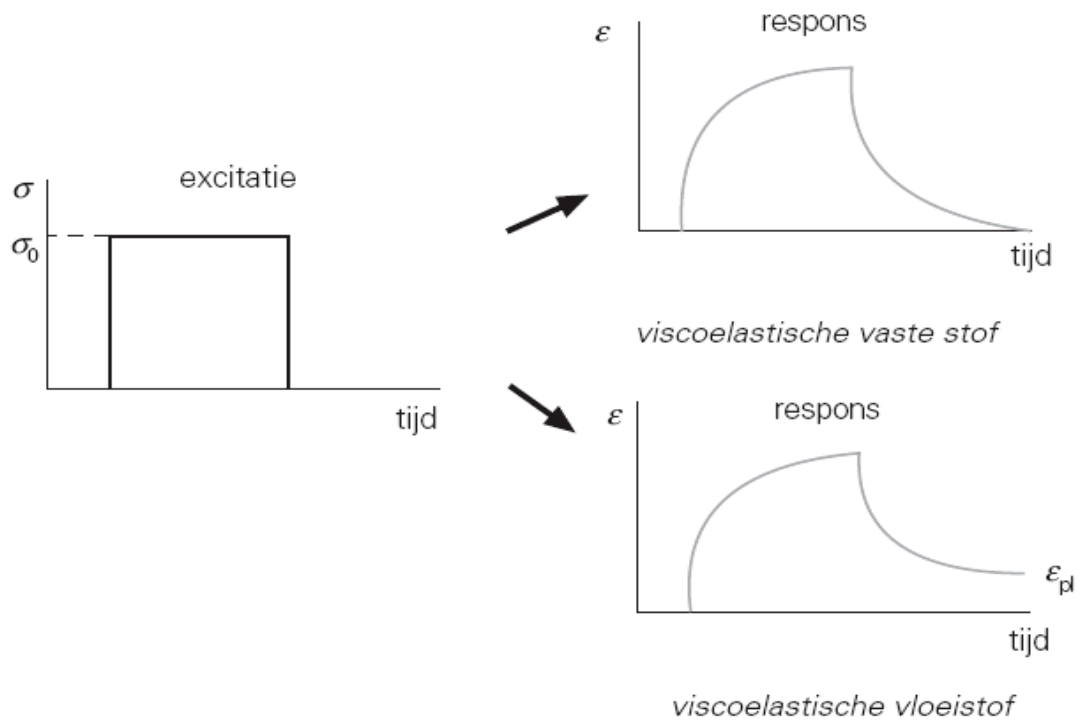
### 5.3 Illustratie van viscoelastisch gedrag [6]

Een elastisch materiaal dissipeert geen energie, terwijl een viskeus materiaal volledige energiedissipatie vertoont. Een viscoelastisch materiaal zal een gedeeltelijke energiedissipatie vertonen. Het materiaal kan dus gedeeltelijk energie opslaan zoals een elastisch stof, en de rest wordt gedissipeerd, zoals bij een vloeistof. Deze combinatie geeft aanleiding tot tijdafhankelijk gedrag zoals kruip en relaxatie van het beton.

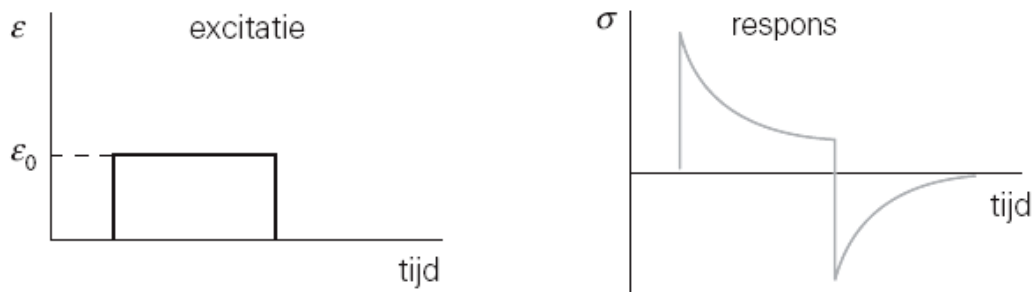
Karakteristiek van viscoelastisch materialen is dat de spannings-rekcurve afhankelijk wordt van de aangelegde van de reksnelheid.

Bij het aanbrengen van de spanning zal het materiaal initieel een elastische respons vertonen: de rek neemt instantaan toe. In tegenstelling tot een elastische stof zal het materiaal echter onder de invloed van de spanning in de tijd verder gaan deformeren, een

verschijnsel dat er ook wel “kruip” wordt genoemd.



*Figuur 5.2: Respons van een viscoelastische vaste stof en viscoelastische vloeistof op een statische spanningexcitatie [6]*



*Figuur 5.3: Respons van een viscoelastisch op een statische rekexcitatie [6]*

Bij het ontlasten zal er weer een initiële elastische respons optreden (instantane afname van de rek), waarvan de rek als functie van de tijd verder af zal nemen. In sommige gevallen zal de rek volledig terugkeren naar nul: er is dan sprake van een viscoelastische vaste stof. In andere gevallen zal er een blijvende deformatie resteren ( $\epsilon_{pl}$ ); er is dan

sprake van een viscoelastische vloeistof. De respons op een statische reekexcitatie is weergegeven in figuur 5.3. Bij het aanbrengen van de rek neemt de spanning ook instantaan toe: de initiële elastische respons. Met verloop van tijd neemt de spanning af: men noemt dit verschijnsel spanningsrelaxatie.

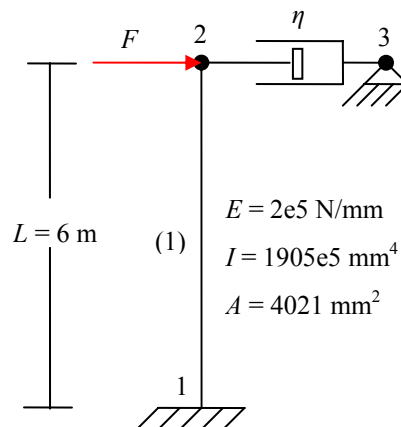
## 5.4 Viskeuselement

Hier wordt het toevoegen van een viskeuselement aan de hand van een voorbeeld beschreven (zie figuur 5.4). In het rekenprogramma wordt van de formule  $F = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$  in plaats van  $\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$  gebruik gemaakt.

In de eerste instantie wordt een  $n \times 4$  matrix voor viskeuselement gevormd. In de eerste kolom wordt het nummer van viskeuselement, in tweede kolom het nummer van beginknoop van het viskeuselement, in de derde kolom het nummer van eindknoop van het viskeuselement en in de vierde kolom de grootte van factor  $\eta$  geschreven.

In begintijd  $t = 0$  is er geen belasting op constructie dus  $F(t = 0) = 0$ . Maar in de loop van 1 uur wordt de constructie belast tot 10000 N dus  $F_b(t = 1 \text{ uur}) = 10000 \text{ N}$ . Daarna neemt de belasting  $F$  in elke uur met een waarde  $\Delta F_i = 100 \text{ N}$  toe. Het viskeuselement vertoont een tegenwerkende kracht ten opzichte van de belasting  $F$ . Deze viskeuskracht oefent op knoop 2 en 3 uit maar in de tegengestelde richting ten opzichte van elkaar. De waarde van deze kracht is:

$$F_{\text{viskeus}_i} = \eta \cdot \dot{\varepsilon} = \eta \cdot (\varepsilon(t = i) - \varepsilon(t = i - 1)) \text{ of } \eta \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})$$



Figuur 5.4: Schematische weergave van viskeuselement

Voor elke tijdstip berekent het programma de belasting  $F$  en de verplaatsing  $U$  van begin- en eindknoop van viskeuselement in twee stappen, zie figuur 5.5:

Stap1: Het programma berekent alleen de belastingen van het viskeuselement met de waarde van:

$$F_{i\_b} = F_b + \sum_{i=1}^i \Delta F_i$$

$$F_{i\_e} = \sum_{i=1}^i \Delta F_i$$

En daarna de verplaatsingen van beginknoop en eindknoop van het viskeuselement ten gevolge van deze kracht:

$$U_{b\_i} = K^{-1} \cdot F_{b\_i}$$

$$U_{e\_i} = K^{-1} \cdot F_{e\_i}$$

Voor de rek geldt:

$$\varepsilon_i = \frac{U_{b\_i} - U_{e\_i}}{L_{viskeus}}$$

Stap2: Het programma bewaart de  $\varepsilon_i$  als  $\varepsilon_{nieuw\_i}$ . Daarna berekent het programma  $F_{viskeus}$ :

$$F_{viskeus\_i} = \eta \cdot \varepsilon \cdot L_{viskeus} = \eta \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \cdot L_{viskeus} = \eta \cdot \left( \frac{U_{b\_i} - U_{e\_i}}{L_{viskeus}} - \left( \frac{U_{b\_i-1} - U_{e\_i-1}}{L_{viskeus}} \right) \right) \cdot L_{viskeus}$$

$$F_{viskeus\_i} = \eta \cdot (U_{b\_i} - U_{e\_i} - U_{b\_i-1} + U_{e\_i-1})$$

De totale kracht op de constructie en verplaatsing ten gevolge deze kracht in dit tijdstip zijn:

$$F_{totaal\_i} = F_b + \sum_{i=1}^i \Delta F_i - F_{viskeus\_i}$$

$$U_{totaal\_i} = K^{-1} \cdot F_{totaal\_i}$$

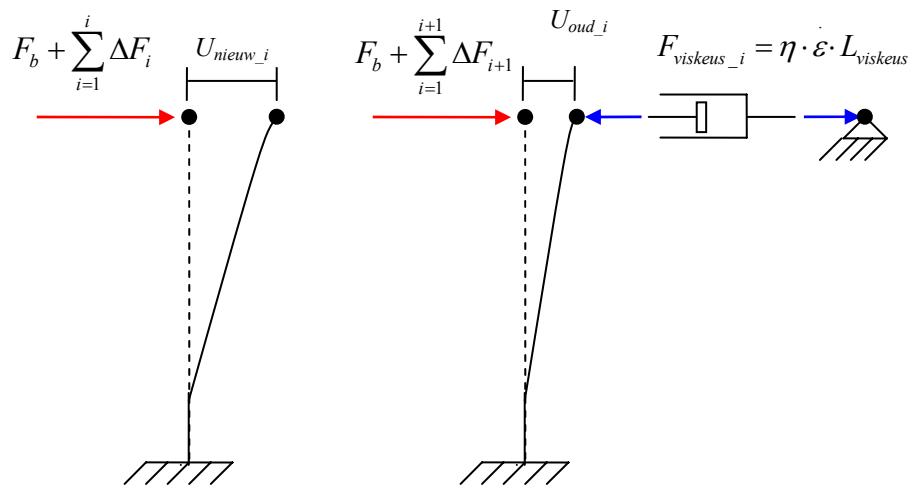
Het programma bewaart de waarde van  $U_{totaal}$  als  $U_{oud}$  voor de begin- en eindknoop van het viskeuselement. In dit geval  $\varepsilon_{oud}$  is:

$$\varepsilon_{oud} = \frac{(U_{b\_oud} - U_{e\_oud})}{L_{viskeus}}$$

Voor viskeuskracht is aangehouden:

$$F_{viskeus\_i} = \eta \cdot (\varepsilon_{nieuw\_i} - \varepsilon_{oud\_i-1}) \cdot L_{viskeus}$$

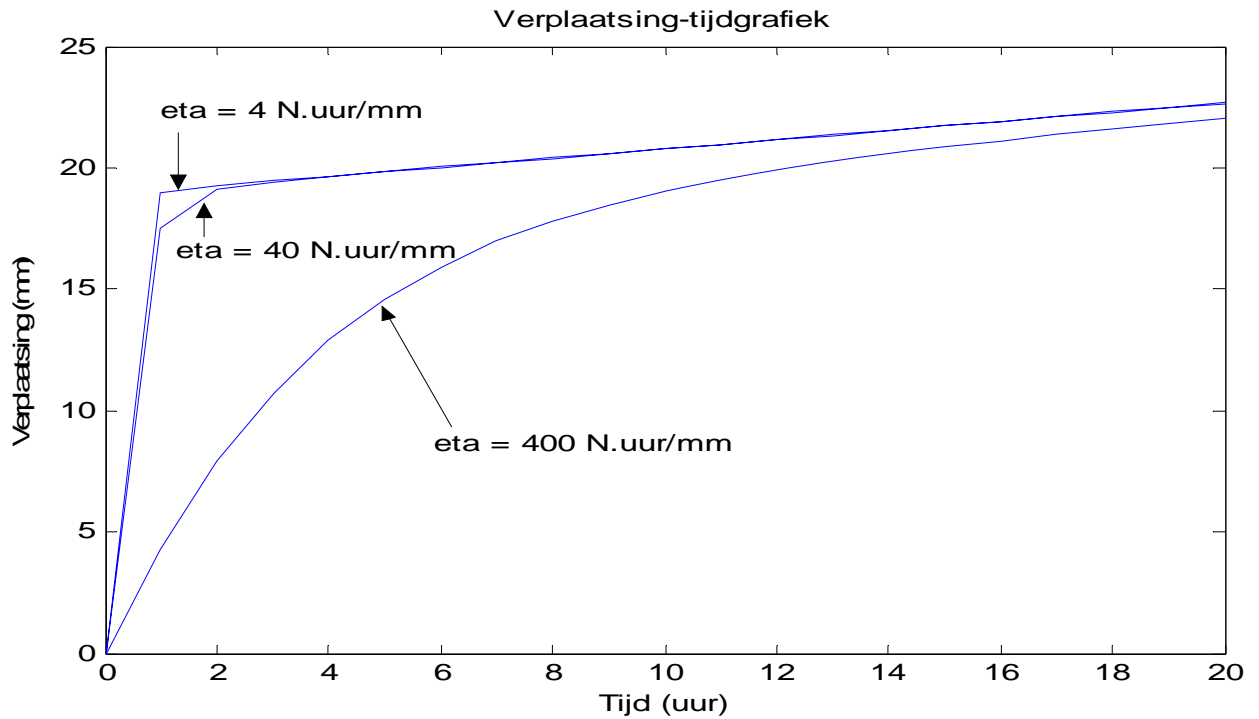
Dit proces wordt tot het eind van de levensduur van de constructie herhaald.



Figuur 5.5: Schematische weergave van viskeuselement

Het verplaatsing- tijdgrafiek voor deze constructie in de loop van 20 uur met verschillende waarde van  $\eta$  is weergegeven in figuur 5.6.





*Figuur 5.6: Verplaatsing- en tijdgrafiek*

## 5.5 Conclusie

Het is uit figuur 5.6 duidelijk dat als de viscositeit toeneemt de initiële verplaatsing afneemt. Dus er wordt geconcludeerd dat als het viskeuselement een hogere waarde van  $\eta$  heeft dan oefent dit viskeuselement een hogere tegenwerkende kracht op de constructie uit.

## 6 Teken van rekenresultaten

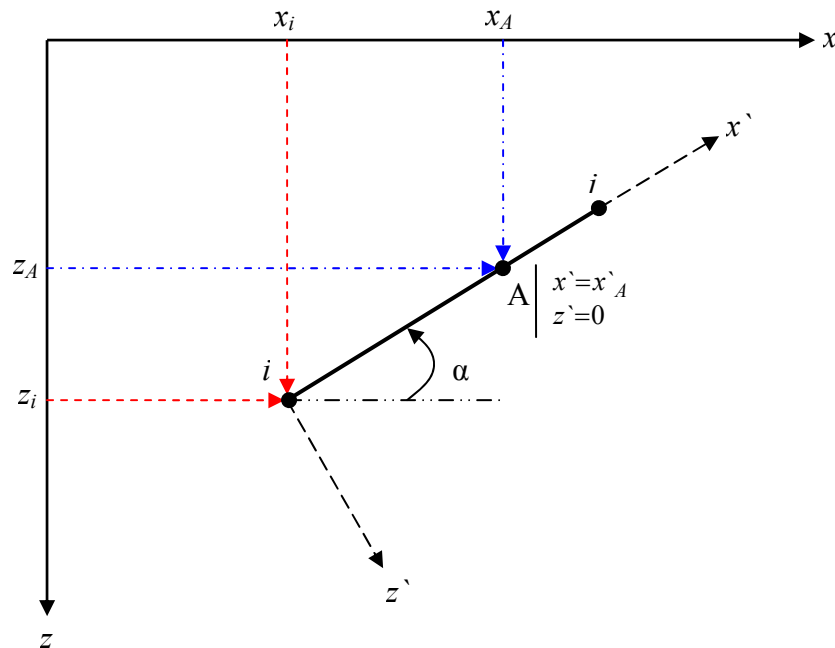
### 6.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt het tekenen van geometrie, momentlijnen, dwarskrachtlijnen en normaalkrachtlijnen van constructie uitgelegd. Tot nu toe is het programma in staat om geometrie, momentlijn, normaalkrachtlijn en dwarskrachtlijn per element te plotten. Het is nu de bedoeling dat het programma dit van constructies als één geheel kan plotten. In dit geval ontstaan mogelijkheden waardoor de resultaten sneller kunnen worden behandeld.

Verder worden de berekening en het tekenen van vervormingen van constructies behandeld. Ten slotte wordt deze implementaties met behulp van twee voorbeelden getoetst.

### 6.2 Tekening van de geometrie

Hier wordt een staaf in een willekeurige richting ten opzichte van het globale assenstelsel beschouwd, zie figuur 6.1.



Figuur 6.1: Staaf in een willekeurige richting in het globale assenstelsel

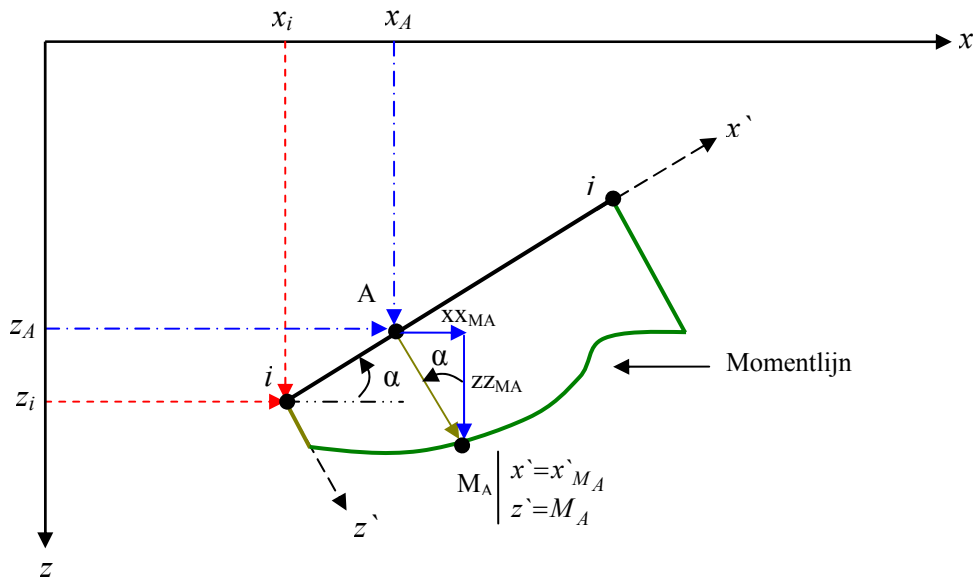
De begin- en eindknopen van de staaf worden respectievelijk  $i$  en  $j$  genoemd. De staaf heeft een hoek  $\alpha$  met de  $x$ -as. Zoals in de figuur 1.4 is weergegeven, is de coördinaten van het punt A,  $x' = x_A$  en  $z' = z_A$  in het lokale assenstelsel en  $x = x_A$  en  $z = z_A$  in het globale assenstelsel. Voor het programma zijn de coördinaten van de begin- en eindknopen per element in het globale assenstelsel bekend. Tevens wordt het lokale coördinaten van elke punt zoals punt A door het programma berekend. Dus er wordt het globale coördinaten van elke punt zoals punt A berekend met behulp van de formules 6.1.

$$\begin{aligned} x_A &= x_i + x'_A \times \cos(\alpha) \\ z_A &= z_i - x'_A \times \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Deze formules dienen te worden geïmplementeerd. Hier wordt een matrix voor gevormd waar de berekende coördinaten van alle punten in het globale systeem worden bewaard.

### 6.3 Tekening van de moment-, dwarskracht- en normaalkrachtlijnen

Hier wordt alleen het tekenen van de momentlijnen behandeld. Deze methode is tevens geldig ook voor de dwarskracht- en normaalkrachtlijnen. Er wordt een staaf met een lokale momentlijn beschouwd, zie figuur 6.2.



Figuur 6.2: Momentlijn in het globale assenstelsel

Zoals in de vorige paragraaf is uitgelegd zijn nu de coördinaten van het punt A in het

globale assenstelsel bekend. Tevens zijn de coördinaten van het punt  $M_A$  berekend in het locale assenstelsel. Dat betekent dat de  $(x'_{M_A}, z'_{M_A})$  worden berekend. De coördinaten van  $M_A$  kunnen met behulp van de formules 6.2 worden berekend in het globale assenstelsel. Dat betekent dat de  $(x_{M_A}, z_{M_A})$  worden berekend.

$$\begin{aligned}
 x_{M_A} &= x_A + xx_{M_A} \\
 z_{M_A} &= z_A + zz_{M_A} \\
 xx_{M_A} &= z'_{M_A} \sin(\alpha) \\
 zz_{M_A} &= z'_{M_A} \cos(\alpha)
 \end{aligned}
 \tag{6.2}$$

Deze formules dienen te worden geïmplementeerd. Hier wordt een matrix voor gevormd waar de berekende coördinaten van alle momentpunten in het globale systeem worden bewaard.

#### **6.4 Berekening en tekening van de vervorming**

Om de vervorming van de constructie te berekenen worden van de formules 6.3 gebruik gemaakt.

Voor de buigingen geldt:

$$\begin{aligned}
 EIw''''(x) &= 0 \\
 EIw'''(x) &= -Q \\
 EIw''(x) &= -M \\
 w'(x) &= -\varphi \\
 w(x) &= \text{Zaking, richting } z_1\text{-as}
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

Voor de extensie geldt:

$$\begin{aligned}
 EAU''(x) &= 0 \\
 EAU'(x) &= N \\
 U(x) &= \text{Extensie, richting } x_1\text{-as}
 \end{aligned}$$

Voor deze formules kunnen er de vergelijkingstelelens van de 6.4 worden gesteld.

Voor buiging geldt:

$$EIw''''(x) = 0$$

$$EIw'''(x) = C1$$

$$EIw''(x) = C1x + C2$$

$$EIw'(x) = \frac{1}{2}C1x^2 + C2x + C3$$

$$EIw(x) = \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4$$

Voor extensie geldt:

$$EAU''(x) = 0 \tag{6.4}$$

$$EAU'(x) = D1$$

$$U(x) = D1x + D2$$

Het programma berekent de vervorming van begin- en eindknopen met  $w = U_z$ ,  $U = U_x$ , en  $w' = \varphi_y$ , per staaf. Er dient te worden opgeteld dat het programma de vervormingen in het globale systeem berekent. Dan dienen er deze vervormingen in het lokale assenstelsel te worden berekend. De onderstaande randvoorwaarden zijn geldig voor de staven in buiging en in extensie, zie ook de figuur 6.3.

Voor buiging geldt:

$$w(0) = w_{ii}$$

$$w(L) = w_{jj}$$

$$w'(0) = \varphi_{ii} \tag{6.5}$$

$$w'(L) = \varphi_{jj}$$

Voor extensie geldt:

$$U(0) = U_{ii}$$

$$U(L) = U_{jj}$$

Uit substitutie van 6.5 met 6.4 wordt er de vervormingen per staaf berekend. Voor de buiging zijn aangehouden:

$$w(x) = (-\varphi_{jj} \times L - \varphi_{ii} \times L + 2w_{ii} - 2w_{jj}) \frac{x^3}{L^3} - (-\varphi_{jj} \times L - 2\varphi_{ii} \times L + 3w_{ii} - 3w_{jj}) \frac{x^2}{L^2} - \varphi_{ii}x + w_{ii}$$

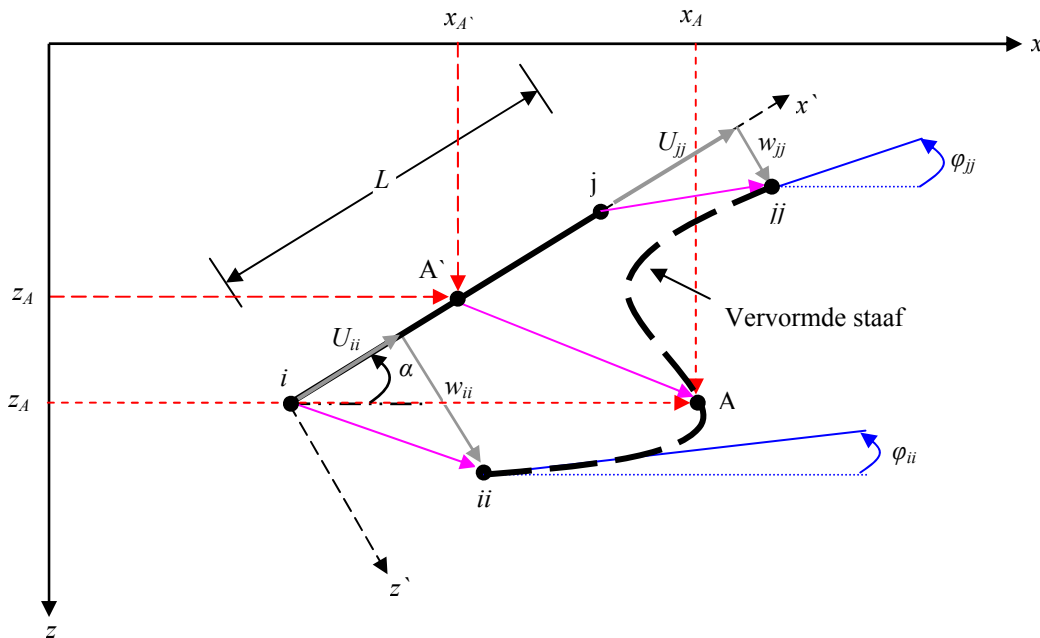
$$\varphi(x) = 3(\varphi_{jj} \times L + \varphi_{ii} \times L - 2w_{ii} + 2w_{jj}) \frac{x^2}{L^3} + (\varphi_{jj} \times L + 2\varphi_{ii} \times L - 3w_{ii} + 3w_{jj}) \frac{x}{L^2} + \varphi_{ii}x$$

Voor de extensie is aangehouden:

$$U(x) = \frac{1}{L}(-xu_{ii} + xu_{jj} + Lu_{ii})$$

Nu berekent het programma de vervorming van de constructie per element in het lokale assenstelsel. Vervolgens worden hier de nieuwe coördinaten van elke punt zoals A van de vervormde staaf in het globale systeem met behulp van formules 6.6 berekend, zie ook figuur 6.3.

$$\begin{aligned} x_A &= x_{A'} + U_A \cos(\alpha) + w_A \sin(\alpha) \\ z_A &= z_{A'} - U_A \sin(\alpha) + w_A \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (6.6)$$



Figuur 6.3: Coördinaten van de vervormde staaf in het globale assenstelsel

Dit proces is geldig voor elke punt van de vervormde constructie.

### **6.5 Toetsen**

Met behulp van twee voorbeelden wordt hier het programma getoets. Deze voorbeelden zijn in bijlage D te zien. De resultaten van het programma en van de MatrixFrame zijn precies dezelfde.

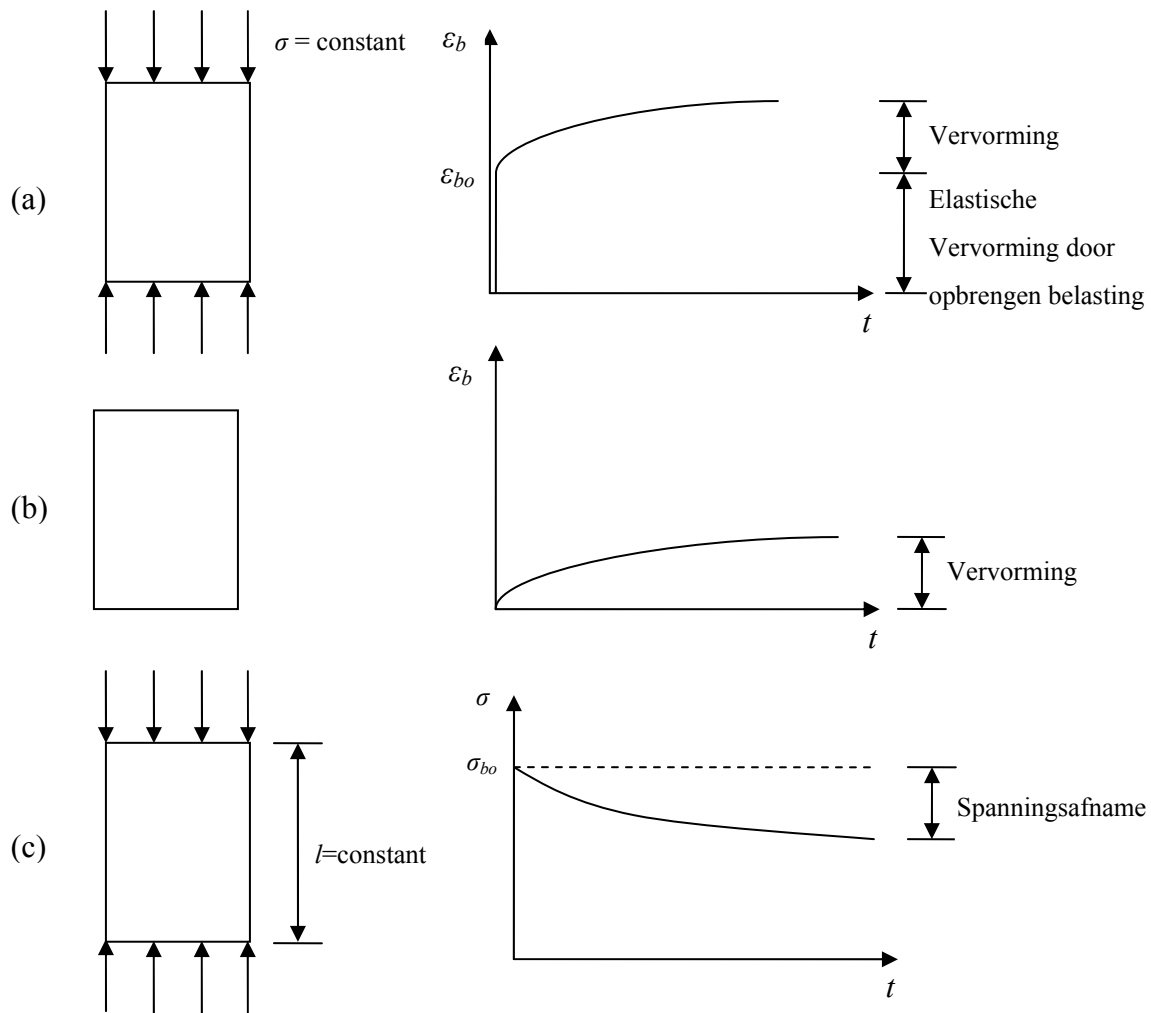
### **6.6 Conclusie**

Het rekenprogramma kan momentlijnen, dwarskrachtlijnen, normaalkrachtlijnen en vervorming van constructie correct berekenen en plotten. De resultaten uit het programma wordt met de resultaten uit de MatrixFrame vergeleken en beide programma's hebben precies dezelfde uitkomsten. Derhalve wordt geconcludeerd dat de resultaten van het programma betrouwbaar zijn.

## 7 kruip, krimp en relaxatie

### 7.1 Inleiding [7]

Wanneer men de duurzaamheid van een constructie voor lange tijd wilt kunnen waarborgen, mag het langduur-gedrag van het bouw materiaal beton niet buiten beschouwing blijven.



Figuur 7.1: Definities van (a) kruip, (b) krimp en (c) relaxatie [7]

In dit hoofdstuk worden de algemene grondbeginselen van krimp, kruip en relaxatie gedefinieerd. In dit hoofdstuk wordt tevens beschreven hoe deze tijdafhankelijke berekeningen worden geïmplementeerd.



Onder “kruip” verstaat men de toename van de vervorming in de tijd bij constant gehouden spanning (figuur 7.1a). “Krimp” is de zonder uitwendige belasting optredende verkorting van het beton (figuur 7.1b), dat wordt veroorzaakt door de uitdroging van het materiaal en de chemische krimp die optreedt in de verhardingsfase van het beton. “Relaxatie” is nauw verwant aan de kruip; bij relaxatie wordt de vervorming van het materiaal constant gehouden, en nemen de oorspronkelijk aanwezige spanningen in de loop van de tijd af (figuur 7.1c).

## **7.2 Algemene grondbeginselen**

### **7.2.1 Kruip [7]**

De kruip van beton wordt veroorzaakt door de vervorming van de gelstructuur, en de capillaire spanning van het chemisch niet-gebonden water. Verloop en uiteindelijke grootte van de kruip zijn afhankelijk van de volgende factoren:

- Het klimaat waarin de constructie zich bevindt; in het bijzonder spelen hier de relatieve vochtigheid en de temperatuur een rol.
- De ontwikkeling van hydratatiegraad, alsmede de hydratatiegraad bij belasten. Deze zijn afhankelijk van de ouderdom van het beton bij belasten, de toegepaste cementsoort, en de condities waaronder de verharding plaatsvindt.
- De sterkteklasse van het beton.
- De afmeting van de doorsnede.
- De duur van de belasting.

Onderzoek heeft aangetoond dat kruip uit twee componenten bestaat:

- Een omkeerbaar gedeelte, dat ook wel met het visco-elastische deel, het vertraagd elastische deel of de omkeerbare kruip wordt aangeduid.
- Een blijvend gedeelte, dat ook wel als plastische deel wordt aangeduid.

De ontwikkeling van deze componenten verloopt verschillend in tijd. Het omkeerbare gedeelte  $\epsilon_{bcr}$  ( $r$  = reversible) wordt nauwelijks door de ouderdom van het beton beïnvloed, en bereikt reeds na korte tijd zijn eigenwaarde. Het blijvende gedeelte  $\epsilon_{bcp}$  ( $p$  = permanent) is daarentegen sterk afhankelijk van de ouderdom van het beton, en de eindwaarde wordt pas na lange tijd bereikt. Ter vereenvoudiging van de berekeningen, en vanwege de grote spreiding in de optredende kruip, wordt meestal afgezien van een

gescheiden aanpak van beide delen:

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_{be}(t) + \varepsilon_{bcr}(t) + \varepsilon_{bcp}(t) = \varepsilon_{be} + \varepsilon_{bc}(t)$$

waarin:

$\varepsilon_{be}$  elastische vervorming van het beton

$\varepsilon_{bc}(t)$  totale kruipvervorming van het beton (visco-elastisch + plastisch)

$\varepsilon_b(t)$  totale vervorming van het beton (elastisch + kruip) als functie van de tijd

Het verband tussen de kruipvervorming en de elastische vervorming wordt aangegeven met kruipfunctie  $\varphi(t, t_c)$ , zie ook formule 7.5.

Hier geldt:

$$\varphi(t, t_c) = k_b \cdot k_h \cdot k_c \cdot k_t \cdot k_d \leq \varphi_{\max}$$

waarin:

$k_c$  de invloed van relatieve vochtigheid

$k_d$  de invloed van de ouderdom  $t_c$  op het tijdstip van belasten, alsmede van sterkteklasse van het cement

$k_b$  de invloed van de sterkteklasse van het beton

$k_h$  de invloed van de geometrie van doorsnede

$k_t$  de invloed van de belastingstijd  $t$

$t_c$  ouderdom van het beton bij belasten

$t$  standtijd van belasting

$\varphi_{\max}$  de maximale aan te houden rekenwaarde van de kruipcoëfficiënt

Deze factoren zullen hieronder worden toegelicht.

$k_c$  Bij een lage relatieve vochtigheid wordt het potentiaalverschil tussen het vochtgehalte in de constructie en haar omgeving groter, waardoor de constructie sneller zal uitdrogen. Nu zijn twee elkaar tegenwerkende effecten van belang: een sterke afname van het vochtgehalte in de constructie verhoogt de kruip, terwijl een constructie met een lager vochtgehalte juist minder kruit. In de praktijk overheerst het eerstgenoemde effect. Het verband tussen het relatieve vochtgehalte en de factor  $k_c$ , volgens artikel 6.1.5 van NEN 6770, is weergegeven in tabel 7.1 [8].

RV %	$k_c$
0 – 60 (droge lucht)	2,6
60 – 85 (buitenlucht)	1,9
85 – 100 (zeer vochtig)	1,4
100 (in water)	1,0

Tabel 7.1: Relatie tussen de relatieve vochtigheid en  $k_c$  [8]

$k_d$  De ouderdom  $t_c$  van het beton is mede bepalend voor de hydratatiegraad. Deze wordt verder nog beïnvloed door de sterkteklasse van het cement; bij een cement met een fijnere maling verloopt het hydratatieproces sneller. Beton met een vervorderde hydratatie, zal bij belasten minder kruipen. Het verband tussen de ouderdom  $t_c$  van het beton, en de factor  $k_d$ , volgens de NEN 6720 is voor twee typen cement weggegeven in tabel 7.2 [8].

$t_c$ dagen	$k_d$	
	sterkteklassen 32,5 en 32,5 R	sterkteklassen 42,5 en 42,5 R, 52,5 en 52,5 R
1	1,8	1,7
3	1,6	1,4
7	1,4	1,1
14	1,2	0,9
28	1,0	0,7
90	0,8	0,5
≥ 365	0,5	0,3

Tabel 7.2: Waarde van de factor  $k_d$  als functie van de ouderdom bij belasten en de sterkteklasse van het cement [8]

$k_b$  Bij de sterkteklasse spelen twee aspecten een rol. Ten eerste heeft beton met een hogere sterkte ook een grotere stijfheid dan beton met een lagere sterkte. Door de stijfheid zal het beton minder kruipen. Bovendien heeft beton met een hogere sterkte een lagere permeabiliteit, waardoor het uitdrogingsproces langzamer zal verlopen, wat gunstiger is voor het beperken van de kruipvervorming. Het verband tussen de sterkteklasse en  $k_b$ , volgens NEN 6720, is wegegeven in tabel 7.3[8].

$f'_{ck}$ N/mm <sup>2</sup>	$k_b$
15	1.4
25	1.2
35	1.0
45	0.9
55	0.8
65	0.7

Tabel 7.3: Invloed van de sterkteklasse op  $K_b$  [8]

$k_h$  De uitdroging wordt naast de relatieve vochtigheid en permeabiliteit, ook beïnvloed door de afstand die het vocht in de constructie moet afleggen. Hierdoor zal een relatief dikke constructie minder snel uitdrogen dan een dunne constructie. Het verband tussen de fictieve dikte  $h_m$  ( $h_m = 2 A_b / O_b$ ) en  $k_h$ , volgens NEN 6720, is weergegeven in tabel 7.4 [8].

$h_m$ mm	$k_h$
50	1,20
100	1,00
200	0,85
300	0,75
≥ 500	0,70

Tabel 7.4: Invloed van de fictieve dikte  $h_m$  op  $k_h$  [8]

$k_t$  De kruip is afhankelijk van de tijdsduur dat de belasting op de constructie wordt uitgeoefend; hoe langer de belasting wordt uitgeoefend, des te groter is kruipvervorming. Voor het verband tussen de belastingstijd  $t$ , en  $k_t$  volgens NEN 6720, geldt [8]:

(met  $h_m = 2 A_b / O_b$  en  $h_m$  in mm):

$$k_t = \frac{t}{t + 0,04 \cdot \sqrt{h_m^3}}$$

De kruipvervorming voor een op tijdstip  $\tau$  aangebrachte spanningsverandering  $\Delta\sigma_\tau$  is:

$$\Delta\varepsilon_{bc}(t) = \frac{\Delta\sigma_\tau}{E_b} \cdot \phi(t, \tau)$$

$\phi_{max}$  de maximaal aan te houden rekenwaarde van de kruipcoëfficiënt. Deze waarde volgens NEN 6720 is in tabel 7.5 weergegeven [8].

$f'_{ck}$ · N/mm <sup>2</sup>	RV < 60 % (in droge lucht)	60 % ≤ RV < 85 % (in buitenlucht)	85 % ≤ RV < 100 % (zeer vochtig)	RV = 100 % (in water)
15	4,2	3,1	2,3	1,7
25	3,6	2,7	2,0	1,4
35	3,2	2,4	1,8	1,2
45	2,8	2,1	1,5	1,1
55	2,4	1,8	1,3	0,9
65	2,2	1,6	1,2	0,8

Tabel 7.5: Maximaal aan te houden rekenwaarde van de kruipcoëfficiënt  $\phi_{max}$  [8]

## 7.2.2 Krimp [7]

De krimp is afhankelijk van de volgende factoren:

- De relatieve vochtigheid.
- De sterkteklasse van het beton.
- De afmetingen van de doorsnede.
- Het wapeningspercentage in de doorsnede.
- De ouderdom van het beton.

Volgens artikel 6.1.6 van NEN 6770 [8] volgt de krimpverkorting uit:

$$\varepsilon'_r = \varepsilon'_c \cdot k_b \cdot k_h \cdot k_p \cdot k_t \leq \varepsilon'_{max}$$

waarin:

$\varepsilon'_r$  de basiskrimp, de invloed van de relatieve vochtigheid

$k_b$  de invloed van de sterkteklasse van het beton

$k_h$  de invloed van de geometrie van de doorsnede

$k_p$  de invloed van het wapeningspercentage

$k_t$  de invloed van de ouderdom t van het beton

$\varepsilon'_{max}$  de maximaal aan te houden rekenwaarde van de krimpverkorting

Deze factoren zullen hieronder worden toegelicht.

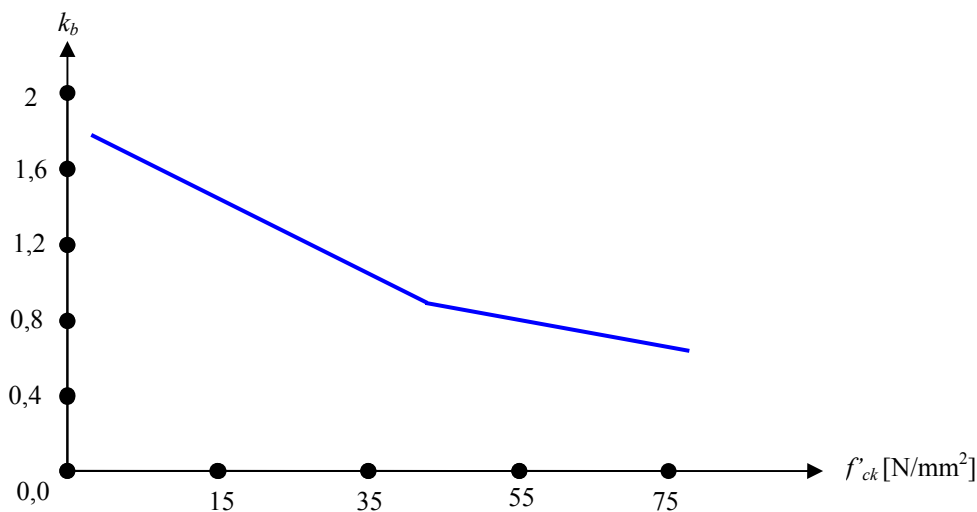
$\varepsilon'_c$  Bij een lage relatieve vochtigheid zal de constructie sneller uitdrogen, waardoor de krimp toeneemt. Het verband tussen het relatieve vochthalte en de factor  $\varepsilon'_c$ , volgens artikel 6.1.6 van NEN 6720, is weergegeven in tabel 7.6 [8].

RV %	$\varepsilon'_c$ %
0 – 60 (droge lucht)	0,4
60 – 85 (buitenlucht)	0,25
85 – 100 (zeer vochtig)	0,1
100 (in water)	0

Tabel 7.6: Relatie tussen de relatieve vochtigheid en  $\varepsilon'_c$  [8]

De waarde van de factor  $\varepsilon'_c$  wordt er direct in het programma ingetypt.

$k_b$  Bij de sterkteklasse spelen, evenals bij de kruip, twee aspecten een rol. Beton met een hogere sterkte heeft ten eerste een grotere stijfheid, en ten tweede een lagere permeabiliteit. Het verband tussen de sterkteklasse en de factor  $k_b$  is dan ook gelijk aan het voor de kruip weergegeven verband in figuur 7.2. Het programma berekent  $k_b$  zoals er in figuur 7.2 weergegeven is [8].



Figuur 7.2: Invloed van de sterkteklasse op  $k_b$  [8]

$k_h$  Evenals bij de kruip, speelt ook bij de krimp de geometrie van de doorsnede, via de fictieve dikte  $h_m$  ( $h_m = A_b/O_b$ ), een belangrijke rol. Het verband tussen  $h_m$  en  $k_h$  voor de krimp, volgens NEN 6720, is weergegeven in tabel 7.7 [8].

$h_m$ mm	$k_h$
50	1,20
100	1,05
200	0,80
300	0,65
400	0,55
$\geq 500$	0,50

Tabel 7.7: Invloed van de fictieve dikte  $h_m$  op  $k_h$  [8]

Het programma berekent  $k_h$  zoals er in figuur 7.3 weergegeven is.

$k_p$  Een doorsnede met veel wapening zal, door de grotere stijfheid, minder krimpen dan een doorsnede met minder wapening . Dit komt tot uiting in de factor:

$$k_p = \frac{1}{1 + 0,2 \cdot \varpi_{ot}}$$

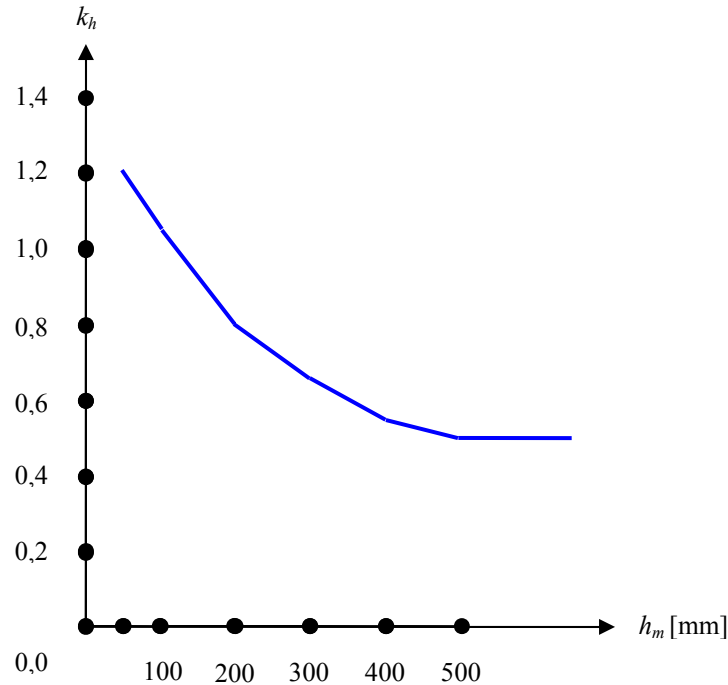
waarin  $\varpi_{ot}$  het minimaal aanwezige wapeningpercentage van de totale wapening ( $A_p + A_s$ ), betrokken op de totale doorsnede  $A_b$  is.

In het programma wordt er van deze formule voor de berekening van  $k_p$  gebruik gemaakt [8].

$k_t$  De krimp is, evenals de kruip afhankelijk van de ouderdom van de constructie. Het verband tussen de ouderdom  $t$  en  $k_t$  is gelijk aan dat van de kruip [8].

$$k_t = \frac{t}{t + 0,04 \cdot \sqrt{h_m^3}}$$

In het programma wordt er van deze formule voor de berekening van  $k_t$  gebruik gemaakt.  $k_t$  en  $\varepsilon'_r$  zijn functies van de tijd. Het programma berekent nieuwe  $k_t$  en  $\varepsilon'_r$  voor elke tijdstip.



Figuur 7.3: Invloed van de fictieve dikte  $h_m$  op  $k_h$

### 7.2.3 Relaxatie [7]

Relaxatie is in paragraaf 6.1 gedefinieerd als een afname van de spanning bij een constant gehouden vervorming. Men kan uitgaan van de in paragraaf 7.3 afgeleide betrekkingen om de, in de tijd optredende afname van de normaaldrukkraft te bepalen. Gaat men bijvoorbeeld van vergelijking 7.1 volgens Trost, dan kan men uit deze vergelijking een relaxatiefunctie afleiden .

Met  $\varepsilon_{b0} = \frac{\sigma_0}{E_b}$  en  $\phi = \phi(t, \tau_0)$  wordt vergelijking 7.1:

$$\varepsilon_b(t) - \varepsilon_{b0} = \frac{1}{E_b} \cdot [\sigma_0 \cdot \phi + \Delta\sigma(t) \cdot (1 + \rho \cdot \phi)] \cdot \varepsilon_{br}(t) \quad (7.1)$$

Er moet gelden  $\varepsilon_b(t) - \varepsilon_{b0} = 0$ , en daaruit volgt voor de spanningsverandering  $\Delta\sigma(t)$ :

$$\Delta\sigma(t) = -\frac{\sigma_0 \cdot \phi + \varepsilon_{br}(t) \cdot E_b}{1 + \rho \cdot \phi}$$

waaruit valt af te leiden:



$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\sigma(t) = \sigma_0 \cdot \left( 1 - \frac{\phi + \varepsilon_{br}(t) \cdot E_b / \sigma_0}{1 + \rho \cdot \phi} \right)$$

### 7.3 Implementatie van het kruip- en relaxatiegedrag

Er kan van viskeuze-elementen gebruik worden gemaakt om kruipgedrag en relaxatiegedrag van een constructie te behandelen. De modellering van viskeuze-elementen is al in het hoofdstuk 6 uitgelegd.

Er zijn tevens andere methoden om het kruipgedrag te modelleren. Hier wordt drie van deze methoden uitgelegd en een van deze methoden gekozen om het kruipgedrag te implementeren.

#### 7.3.1 Vereenvoudigde methoden voor de berekening van het krimp- en kruipgedrag van constructies [7]

In deze paragraaf zullen enige benaderingmethoden worden behandeld; achtereenvolgens zullen aan de orde komen:

- De effectieve-modulusmethode
- De methode Dischinger
- De methode Trost

- **De effectieve-modulusmethode**

De totale rek van het beton bestaat uit elastische vervorming  $\varepsilon_{be}$ , de kruipvervorming  $\varepsilon_{bc}(t)$ , en de krimpverkorting  $\varepsilon_{br}(t)$ :

$$\varepsilon_b(t) = \varepsilon_{be} + \varepsilon_{bc}(t) + \varepsilon_{br}(t)$$

$$\varepsilon_b(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\sigma_i}{E_b} + \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\sigma_i}{E_b} \cdot \phi(t, \tau_i) + \varepsilon_{br}(t) \tag{7.2}$$

$$\varepsilon_b(t) = \frac{1}{E_b} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \cdot [1 + \phi(t, \tau_i)] + \varepsilon_{br}(t)$$

Voor  $t \rightarrow \infty$  geldt:

$$\varepsilon_b(\infty) = \frac{1}{E_b} \Delta\sigma_i \cdot [1 + \phi(\infty, \tau_i)] + \varepsilon_{br}(\infty) \tag{7.3}$$

Door  $\varphi(\infty, \tau_i)$  te vervangen door  $\varphi(\infty, \tau_0) = \varphi(\infty)$  en met  $\sigma_\infty = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$ , gaat vergelijking (7.4) over in:

$$\varepsilon_b(\infty) = \frac{1}{E_b} \sigma_\infty \cdot (1 + \phi_\infty) + \varepsilon_{br}(\infty)$$

ofwel:

$$\varepsilon_b(\infty) = \frac{\sigma_\infty}{E'_b} \cdot \varepsilon_{br}(\infty) \quad (7.4)$$

met :

$$E'_b = \frac{E_b}{(1 + \phi_\infty)} \quad (7.5)$$

$E'_b$  noemt men ook wel de fictieve  $E$ -modulus van beton.

De berekening van de vervorming wordt zo veel eenvoudiger: men bepaald de fictieve  $E$ -modulus  $E'_b$  met behulp van vergelijking 7.5, en berekent hiermee de vervormingen op dezelfde manier als met  $E_b$ .

Opvallend aan vergelijking 7.4 is dat de kruipvervorming volledig teniet wordt gedaan bij ontlasten. Er wordt als het ware vanuit gegaan dat het beton zich gedraagt als een ideaal visco-elastisch materiaal, en dat de kruipvervorming volledig omkeerbaar is.

Er wordt verder gerekend met kruipfactor, behorend bij de ouderdom van het beton bij aangrijpen van de eerste belasting. Hierdoor wordt geen rekening gehouden met het feit dat het beton nog steeds ouder wordt (verder hydrateert), en dat dientengevolge de kruip voor belastingen die op een later tijdstip worden aangebracht zal afnemen. Hierdoor wordt de kruip met deze berekeningsmethode overschat.

- **De methode Dischinger**

Ook bij de methode Dischinger wordt uitgegaan van de eenheidskruipfunctie, behorende bij het tijdstip dat eerste belasting op de constructie wordt aangebracht  $\varphi(t, \tau_0)$ . De invloed van het verouderen van het beton kan desalniettemin in rekening worden gebracht door deze kruipfunctie, voor naderhand aangrijpende belastingen, te corrigeren voor de tijd

tussen  $\tau_0$  en  $\tau_i$  met  $\phi(\tau_i, \tau_0)$ .

De kruipfunctie voor een spanningtoename op tijdstip  $\tau_i$  wordt hierdoor:

$$\phi(t, \tau_i) = \phi(t, \tau_0) - \phi(t_i, \tau_0) \quad (7.6)$$

In figuur 7.4 wordt het door Dischinger veronderstelde verloop van de rek weergegeven. Het uitgangspunt is dat de lijn die de rekken weergeeft, na het aanbrengen van een spanningstoename  $\Delta\sigma_i$  vanaf het begin aanwezig zou zijn geweest.

Met deze eenheidskruipfunctie kan de ouderdomafhankelijkheid van de kruip echter niet waarheidsgetrouw worden benaderd. In tegenstelling tot de effectieve-modulusmethode, waarmee de kruip wordt overschat met toenemende ouderdom van het beton, wordt de kruip onderschat door de methode Dischinger.

In vergelijking met de effectieve-modulusmethode bestaan er ook verschillen ten aanzien van de vervorming bij ontlasten. Bij de methode Dischinger is de kruipvervorming onomkeerbaar, zoals kan worden afgeleid uit figuur 7.4 (zie figuur 7.5).

- **De methode Trost**

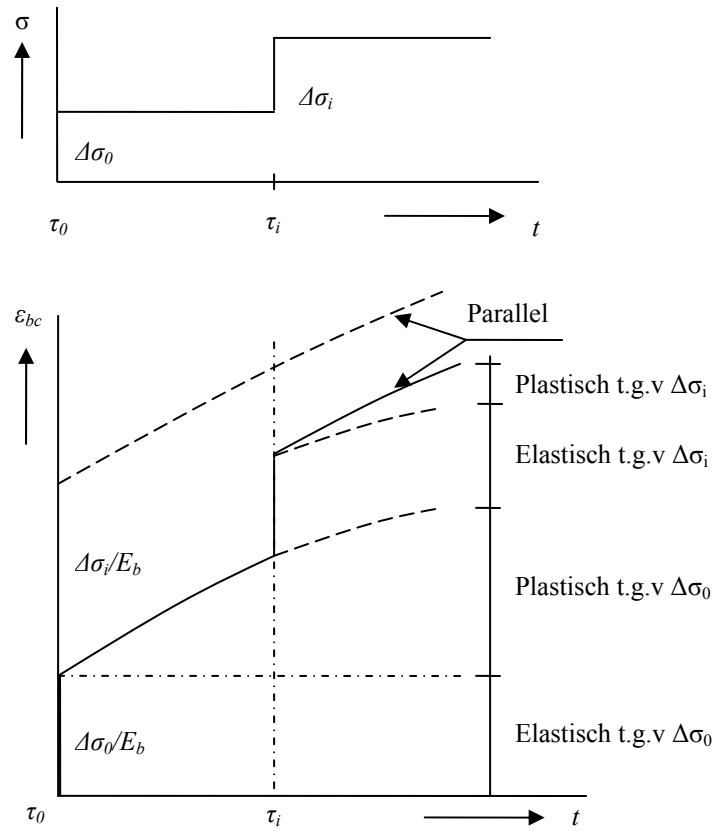
De methode Trost ondervangt de nadelen van de eerder behandelde methoden. Bovendien leidt zij tot een betrekkelijk eenvoudig berekeningsprincipe. Voor de kruipberekening is formule 7.7 geldig:

$$\varepsilon_{bc}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\Delta\sigma_i}{E_b} \cdot \phi(t, \tau_i) \quad (7.7)$$

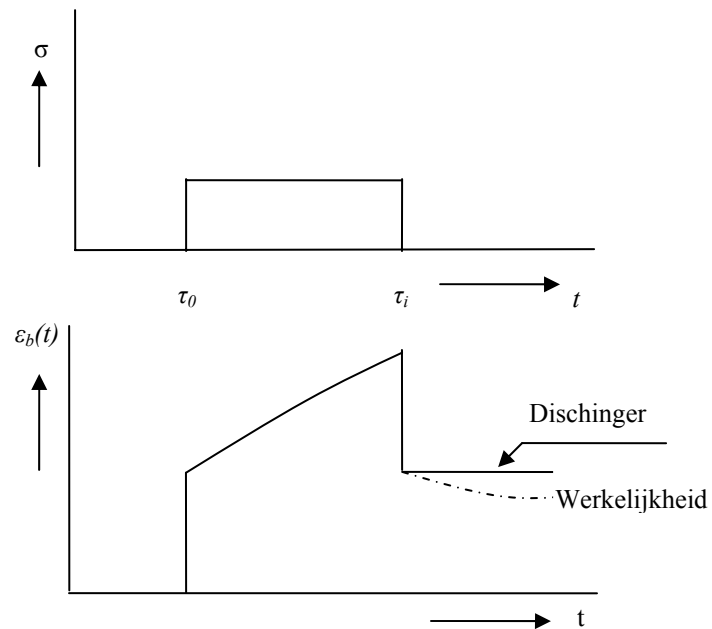
Bij veel constructies zal vanaf het begin ( $\tau_0$ ) één grote spanning  $\sigma_0$  aanwezig zijn, waarna een aantal relatief kleine spanningsveranderingen  $\Delta\sigma_i(\tau_i)$  volgen (figuur 7.6).

Vergelijking 7.7 kan daarom ook worden geschreven als:

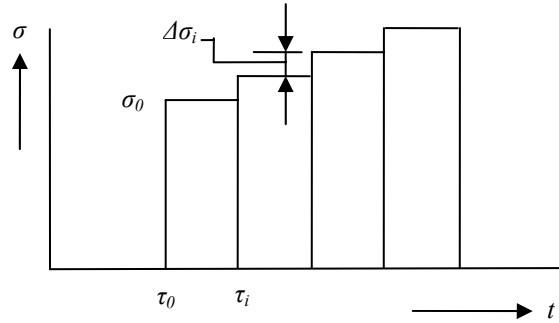
$$\varepsilon_b(t) = \frac{1}{E_b} \cdot [\sigma_0 \cdot \phi(t, \tau_0) + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \cdot \phi(t, \tau_i)]$$



Figuur 7.4: Kruipgedrag bij stapsgewijze spanningstoename volgens Dischinger



Figuur 7.5: Kruipgedrag bij ontlasten volgens Dischinger



Figuur 7.6: Schematische weergave van een veel voorkomend belastingverloop

Worden de elastische vervorming en de krimpverkorting hieraan toegevoegd, dan bedraagt de totale rek:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{1}{E_b} \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot [1 + \varphi(t, \tau_0)] + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i [1 + \varphi(t, \tau_i)] \right\} + \varepsilon_{br}(t) \quad (7.8)$$

Volgens figuur 7.6 geldt verder:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i$$

Hiermee gaat vergelijking 7.8 over in

$$\varepsilon_b(t) = \frac{1}{E_b} \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot [1 + \phi(t, \tau_0)] + (\sigma(t) - \sigma_0) + \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \cdot \phi(t, \tau_i) \right\} + \varepsilon_{br}(t) \quad (7.9)$$

Om een eenvoudige, in de praktijk goed toepasbare, vergelijking te krijgen, stelt Trost voor om vergelijking 7.9 te wijzigen in:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(t) &= \frac{1}{E_b} \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot [1 + \phi(t, \tau_0)] + (\sigma(t) - \sigma_0) \cdot [1 + \rho\phi(t, \tau_0)] \right\} + \varepsilon_{br}(t) \\ \varepsilon_b(t) &= \frac{1}{E_b} \cdot \left\{ \sigma_0 \cdot [1 + \phi(t, \tau_0)] + \Delta\sigma(t) \cdot [1 + \rho\phi(t, \tau_0)] \right\} + \varepsilon_{br}(t) \end{aligned} \quad (7.10)$$

waarin  $\Delta\sigma(t) = \sigma(t) - \sigma_0$ , en  $\rho$  de zogenaamde verouderingscoëfficiënt, is. Met behulp van de vergelijkingen 7.9 en 7.10 kan worden afgeleid:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \phi(t, \tau_i)}{(\sigma(t) - \sigma_0) \cdot \phi(t, \tau_0)} \quad (7.11)$$

Dit is een aanzienlijke verbetering, omdat is gebleken dat de waarde van  $\rho$  in de meeste praktijkgevallen tussen tamelijk nauwe grenzen ligt. In het algemeen blijkt  $\rho = 0,8$  een goede benadering te zijn voor alle normaal belaste betonconstructies met kruipfactoren  $1,5 < \phi(t, \tau_0) < 4$ .

Vergelijking 7.11 wordt nu nog eens nader beschouwd. Korter geschreven geldt:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_0}{E_b} \cdot (1 + \phi) + \frac{\Delta\sigma(t)}{E_b} \cdot (1 + \rho \cdot \phi) + \varepsilon_{br}(t)$$

ofwel:

$$\varepsilon_b(t) = \frac{\sigma_0}{E_b / (1 + \phi)} + \frac{\Delta\sigma(t)}{E_b / (1 + \rho \cdot \phi)} + \varepsilon_{br}(t) = \frac{\sigma_0}{E'_b} + \frac{\Delta\sigma(t)}{E''_b} + \varepsilon_{br}(t) \quad (7.12)$$

Men ziet hier dat de totale vervorming door elastisch verkorting en kruip kan worden berekend met:

- $E'_b = \frac{E}{(1 + \phi)}$  als fictieve elasticiteitsmodulus voor spanningen die vanaf  $\tau = \tau_0$  aanwezig zijn.
- $E''_b = \frac{E}{(1 + \rho \cdot \phi)}$  als fictieve elasticiteitsmodulus voor spanningen die zich gedurende het kruipproces ontwikkelen.

De methode Trost is keuriger dan de twee andere methoden. Daarom wordt deze methode voor het implementeren gekozen.

### 7.3.2 Implementatie van het kruipgedrag

In de eerste instantie wordt er de formule 7.13 geïmplementeerd.

$$\varepsilon_{bc}(t) = \frac{(\sigma_0 + \Delta\sigma(t))}{E_b} \quad (7.13)$$

In de tweede instantie wordt er de formule 7.14 geïmplementeerd.

$$\varepsilon_{bc}(t) = \frac{\sigma_0}{E_b} \cdot (1 + \phi) + \frac{\Delta\sigma(t)}{E_b} \cdot (1 + \rho \cdot \phi) \quad (7.14)$$

- **De eerste implementatie voor het kruipgedrag**

Hier wordt van de formule 7.13 gebruik gemaakt. Daarvoor wordt een matrix genaamd de kruipmatrix gevormd. Deze matrix bestaat uit elementnummer,  $k_d$ ,  $k_h$ ,  $k_b$ ,  $k_c$  en  $\varphi_{max}$ . Elementnummer bestaat uit alleen elementen die voor kruipberekening gewenst zijn. De vochtigheidscoëfficiënt  $k_c$ ,  $\varphi_{max}$  en de sterkteklasse  $k_b$  worden ingetypt. Het programma berekent de waarde van  $k_d$  en  $k_h$ . Hiervoor dient de omtrekgrootte van elke element, ouderdom en sterkteklasse te worden ingetypt. Deze coëfficiënten zijn in de loop van de tijd constant. Maar belastingtijdcoëfficiënt  $k_t$  wordt in de loop van de tijd veranderd. Het programma berekent de waarde van  $k_t$  op elke dag. Verder wordt de kruipfunctie  $\varphi$  door het programma op elk tijdstip berekend. Het programma vindt de elementen die voor kruip worden behandeld via kruipmatrix. En voor deze elementen worden elasticiteitsmodulus gereduceerd met de formule:

$$E_{nieuw} = \frac{E}{(1 + \varphi)} \quad (7.15)$$

Er wordt van de  $E_{nieuw}$  gebruik gemaakt voor de stijfheidsmatrixberekeningen en de  $D$  matrixberekeningen van de bijbehorende elementen.

- **De tweede implementatie voor het kruipgedrag**

Hier wordt van de formule 7.14 gebruik gemaakt. Het berekeningproces van de kruipfunctie  $\varphi$  van de tweede implementatie is hetzelfde als de eerste implementatie. Daarna berekent programma  $\Delta F = F_i - F_0$  in elk tijdstip. Nu kan het programma de tweede term van de linker kant van de formule 7.14 berekenen. Op deze manier wordt het kruiseffect op constructies met behulp van de methode Trost geïmplementeerd.

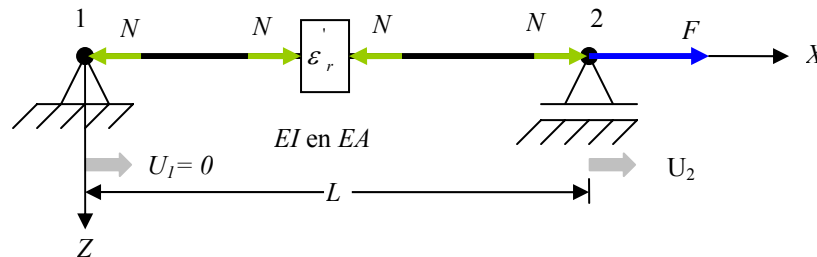
### 7.3.3 Toetsing

Met behulp van één voorbeeld wordt het programma getoetst, zie bijlage E. De resultaten

van toetsing zijn naar verwachting.

## 7.4 Implementatie van het krimpgedrag

Hier wordt het implementeren van krimpgedrag aan de hand van een voorbeeld beschreven (zie figuur 7.7).



Figuur 7.7: Krimpgedrag in een staafelement

Zoals er in figuur 7.7 is weergegeven ontstaat een normaalkracht  $N$  in de ligger ten gevolge van krimpverkorting  $\varepsilon_r$ . Deze normaalkracht veroorzaakt de trekkracht op de knopen 1 en 2 van de ligger. Het evenwicht, constitutieve en kinematische vergelijkingen van deze constructie is:

Evenwicht vergelijking:

$$N - F = 0 \tag{7.16}$$

Constitutieve vergelijking:

$$N = EA (\varepsilon + \varepsilon_r) \tag{7.17}$$

Kinematische vergelijking:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L} \tag{7.18}$$

Uit substitutie van 7.16 en 7.17 met 6.18 geldt:



$$F = -EA \times \left( \frac{U_2 - U_1}{L} + \varepsilon'_r \right) \quad (7.19)$$

$$F + EA \cdot \varepsilon'_r = -\frac{EA}{L} \times (U_2 - U_1)$$

$F$  = Belastingvector  $\vec{F}$

$EA$  = Stijfheidmatrix  $K$

$EA \varepsilon'_r$  = Krimpbelasting  $F_{krimp}$

$U_2 - U_1$  = Verplaatsingsvector  $\vec{U}$

Terugsubstitutie:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L}$$

$$N = EA(\varepsilon + \varepsilon'_r) = -F$$

Er dient dit proces te worden geïmplementeerd. Het programma kan  $\varepsilon'_r$  voor elke tijdstip berekenen. Verder wordt  $EA \varepsilon'_r$  (krimpkracht) als extra belasting bij  $F_{x1}$  en  $F_{x2}$  van belastingvector van deze ligger opgeteld. Er dient het teken van de krimpkracht voor elke knoop te worden opgelet. Voor de linker knoop dient een positief teken en voor de rechter een negatief teken van krimpkracht ten opzichte van het globale assenstelsel te zijn (zie figuur 7.7). Ten slotte dient  $\varepsilon'_r$  in de vervormingparameters  $e$  bij de eerste rij  $e_N$  te worden opgeteld. Zoals in hoofdstuk 2 is uitgelegd geldt voor de vervormingparameters  $e$  en de spanningsresultanten  $s$ :

$$s = De$$

### 7.4.1 Toetsing

Het programma wordt aan de hand van 3 getallenvoorbeelden nagekeken, zie bijlage F. Het eerste voorbeeld is een ligger met vrije vervorming. Het tweede voorbeeld is een ligger met “opgelegde vervorming” en het derde is een constructie met opgelegde vervorming. In het hoofdstuk 8 wordt term “opgelegde vervorming” uitgelegd. De resultaten van de toetsingen zijn naar verwachting.

### 7.5 Conclusie

Er wordt geconcludeerd dat er voor kruip- en relaxatieberekeningen van de Trost

methode gebruik dient te worden gemaakt. Want de methode Trost is keuriger dan de twee andere methoden. Met deze methode kan het kruipgedrag met een goede benadering behandeld worden. Maar voor krimpberendingen werd het programma ontwikkeld door het toevoegen van extra belasting en rek door krimpverkorting aan het programma. Het is in dit hoofdstuk al te zien dat krimpverkorting geen extra spanningen in constructies met vrije vervorming veroorzaakt.

Uit de resultaten van de toetsingen is geconcludeerd dat het programma het effect van de krimp- en kruipverkorting naar verwachting verwerkt.

## 8 Temperatuurinvloed

### 8.1 Inleiding

De verplaatsing van de brugeinden door veranderingen in temperatuur is een belangrijke factor in het ontwerp van een brug. Daarom is het belangrijk om een goed begrip te hebben van de temperatuurveranderingen die op de brug werken. De effectieve brugtemperatuur hangt af van de omgevingstemperatuur, het type constructie, de duur van weerconstructies en de windcirculatie.

De dagelijkse wisselingen van verplaatsingen op veel bruggen kunnen door elastische vervorming van het wegdek en de grond opgenomen, terwijl de grotere seizoen- en jaarwisselingen tot op zekere hoogte door kruip worden geabsorbeerd.

Voor temperatuurbelasting op brugdekken moeten volgens de Eurocode een verdeling in jaarlijkse wisselingen (uniforme temperatuurverdeling over de doorsnede) en dagelijkse wisselingen (lineair temperatuurverdeling over doorsnede) worden gemaakt.

Het begrip opgelegde vervorming en Opgelegde vervormingen- “Acties” worden respectievelijk in paragraaf 8.2 en paragraaf 8.3 toegelicht. In dit hoofdstuk worden er de algemene grondbeginselen van temperatuurbelastingen in paragraaf 8.4 gedefinieerd. De aan te houden temperaturen voor deze jaarlijkse en dagelijkse wisselingen worden respectievelijk in paragraaf 8.4.3 en 8.4.4 toegelicht. In dit hoofdstuk wordt tevens beschreven hoe deze temperatuurbelastingen worden in paragraaf 8.6 geïmplementeerd.

### 8.2 Begrip opgelegde vervorming [9]

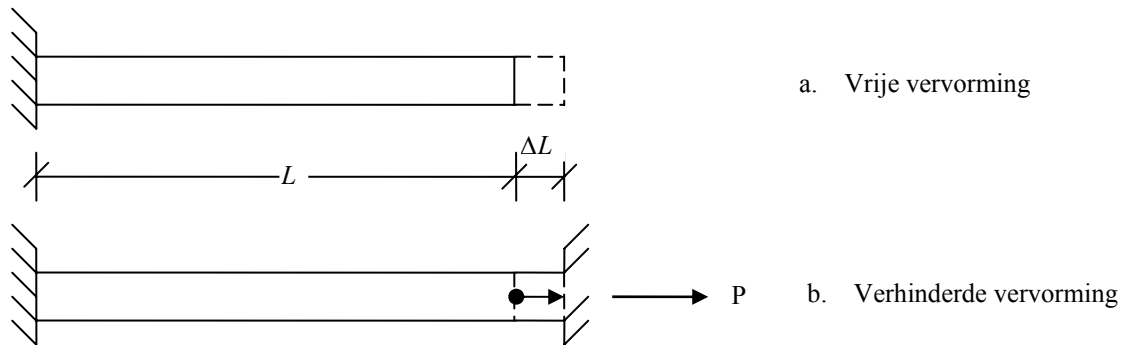
De term “opgelegde vervorming” geeft vaak aanleiding tot verwarring en onbegrip. Dat ligt niet in de laatste plaats aan de terminologie zelf. Wellicht zou de uitdrukking “verhinderde vervorming” doeltreffender zijn geweest. In figuur 8.1 is aangegeven wat hiermee wordt bedoeld. Figuur 8.1a toont een staaf, lengte  $L$ , die aan één einde is ingeklemd en verder vrij kan vervormen. Wordt de staaf onderworpen aan een temperatuurverlaging  $\Delta T$ , dan is de verkorting gelijk aan  $L(\Delta T) = \alpha_c \cdot \Delta T \cdot L$ , waarin  $\alpha_c$  de temperatuuruitzettingscoëfficiënt van het materiaal is en  $L$  de staaf lengte. Omdat de staaf vrij kan vervormen blijft de staaf spanningsloos. Figuur 8.1b toont een staaf waarvan beide uiteinde zodanig zijn ingeklemd dat de staaf niet kan verkorten. Bij een

temperatuurdaling zal de staaf niettemin korter willen worden, doch de randvoorwaarden laten dit niet toe. Hierdoor zal in de staaf een trekspanning ontstaan. Men spreekt in dit geval van een “opgelegde vervorming”. Dit is verwarrend, omdat er hellemaal geen sprake is van een vervorming in traditionele zin. De zaak wordt wat duidelijker als er de spanning in de staaf wordt berekend. Zou er de staaf aan één kant worden “losgesneden”, dan ontstaat de situatie van figuur 8.1a. De staaf ondergaat een verkorting  $\Delta L = \alpha_c \cdot \Delta T \cdot L$  en is daarbij spanningloos. Om de oorspronkelijke toestand te herstellen wordt er een trekkracht P aangebracht. Deze trekkracht geeft een verlenging die gelijk is  $P \cdot L / EA$ , waarin E de elasticiteitsmodulus van het staafmateriaal is en A de staafdoorsnede. Om de temperatuurverkorting  $\Delta L = \alpha_c \cdot \Delta T \cdot L$  volledig weg te werken moet de trekkracht P zo groot zijn dat geldt:

$$\frac{P \cdot L}{EA} = \alpha_c \cdot \Delta T \cdot L$$

Zodat:

$$P = \alpha_c \cdot \Delta T \cdot EA$$



*Figuur 8.1 a. Aan één kant ingeklemde staaf onder een temperatuurverkorting.  
b. Aan twee kanten ingeklemde staaf onder een temperatuurverkorting [9]*

Het is te zien dat er toch sprake is van een vervorming. Ook wordt duidelijk waarom deze vervorming met de term “opgelegd” wordt aangeduid: er wordt “opgelegde vervorming” dus aan de toestand van “vrije vervorming” gerelateerd. De strategie bij berekenen van spanningen en krachten in constructies door opgelegde vervorming zal dan ook steeds zijn constructie eerst vrij te laten vervormen en hem dan, door het aanbrengen van krachten of momenten, “terug te dwingen” tot de vervormingtoestand die bij de gegeven

randvoorwaarden hoort.

### **8.3 Opgelegde vervormingen- “Acties” [9]**

“Opgelegde vervormingen” kunnen o.a. worden veroorzaakt door temperatuurwisselingen en krimp van het beton. Vaak worden ook zettingen van de ondergrond als een opgelegde vervorming beschouwd. Bij langzaam optredende zettingen zou er ook gesproken kunnen worden van respons van het totale systeem “constructie + ondergrond”. Snel optredende zettingen zijn zonder meer als opgelegde vervorming te beschouwing.

Voor het rekenkundig vaststellen van de grootte van de in rekening te brengen opgelegde vervorming kan gebruik worden gemaakt van voorschriften, richtlijnen en rapporten.

Opgelegde vervorming en temperatuurinvloeden kunnen belangrijk zijn voor onder meer de duurzaamheid, de stabiliteit sterk nadelig beïnvloeden.

### **8.4 Temperatuurbelasting [9]**

#### **8.4.1 Oorzaken van temperatuurverschillen**

Het thermische ontwerp van een betonconstructie begint met een inventarisatie van alle mogelijke oorzaken voor temperatuurproblemen. Als belangrijkste oorzaken voor het optreden van temperatuurvariaties kunnen worden genoemd:

- Ontwikkeling van hydratatiewarmte in verhardend beton
- Klimaatinvloeden
  - Zonbestraling, nachtelijke uitstraling en seizoencycli (Figuur 8.4);
- Processen
  - Industriële processen (hoogovens, crackers);
  - Opslag van koude of warme producten;
  - Warmteontwikkeling als gevolg van radioactieve straling;
- Calamiteiten
  - Industriële branden (bijv. koolwaterstofbranden);
  - Cryogene belasting (“spil”);

De hier genoemde warmtebronnen, eventueel koudebronnen, resulteren in een temperatuurverdeling in de constructie. Voor het bepalen van de temperatuurverdeling zijn thermische randvoorwaarden en thermische eigenschappen van het materiaal van belang. Het effect van een wijziging in de temperatuurverdeling in de constructie, i.c. de

respons, bestaat uit vervormingen en/of spanningen. De grootte van de vervormingen en spanningen hangt af van de uitzettingscoëfficiënt en de stijfheid van het beton. De uitzettingscoëfficiënt kan per beton soort sterk verschillen.

#### **8.4.2 Voorschriften**

##### **o Temperatuurbelastingen als gevolg van klimaatinvloed**

In de Nederlandse voorschriften, en in de meeste buitenlandse voorschriften, worden slechts zeer globale waarden gegeven voor de aan te houden temperatuurbelastingen. Volgens de TGB-algemeen (NEN 6702) [10] moet ten minste worden gerekend met temperaturen door dagschommelingen volgens tabel 8.1. In de tabelwaarden is rekening gehouden met het effect van zonbestraling. Het blijkt, dat zonbestraling een grote invloed heeft op de maximaal optredende temperaturen. Belastingen ten gevolge van klimatologische temperatuurwisselingen worden vaak opgevat als statische “belasting”. Ook volgens art. 8.8.1 van NEN 6702 [10] moet een belasting ten gevolge van temperatuurverschillen worden beschouwd als een statische of quasi-statische belasting, afhankelijk van de aard van de temperatuurverschillen. In werkelijkheid vertonen temperatuureffecten vrijwel altijd een niet-statisch karakter. Ze genereren spanningen, die gemakkelijk van teken kunnen wisselen en bijgevolg een aanzienlijke vergroting van opgewekte effecten kan opleveren (bijvoorbeeld een extra toename van de scheurwijdte).

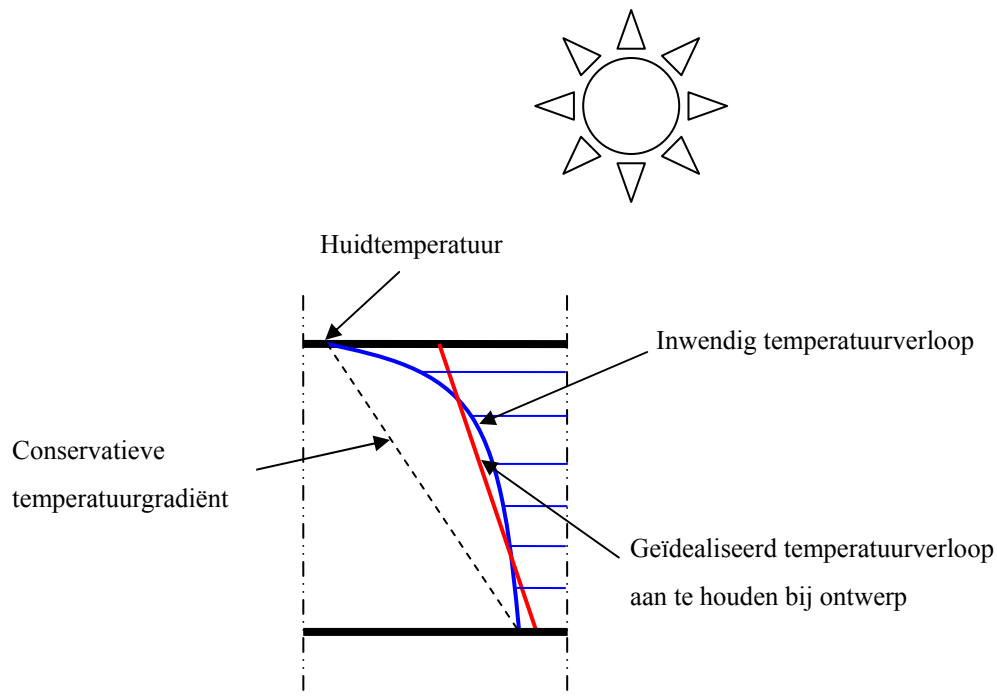
In STUVO- rapport nummer 48 wordt geadviseerd om voor brugconstructie te rekenen met een daling, respectievelijk stijging, van de karakteristieke luchttemperatuur van 31°C en 20°C. De karakteristieke constructietemperatuur kan vervolgens worden bepaald door vermenigvuldiging van de karakteristieke luchttemperatuur met een factor  $\beta$ . De factor  $\beta$  is een functie van onder meer de dikte van de constructie. Een Noors rapport beveelt aan om voor een temperatuurbelasting aan te houden hetzij de gemiddelde dagtemperatuur, hetzij het extreme uurgemiddelde. Tussen deze waarde zou een verschil kunnen bestaan van maximaal 5 à 10°C. Elders worden oppervlaktetemperaturen ten gevolge van zonbestraling genoemd variërend van 50°C tot 70°C.

Een norm die veelvuldig voor het ontwerpen van een brug wordt toegepast is Voorschrift van het Ontwerpen van Stalen Bruggen - Basiseisen en eenvoudige rekenregels - VOSB 1995. Een brug die is gebouwd volgens deze norm heeft ten minste een veiligheid en bruikbaarheid als volgens 5.3 van NEN 6700:1991 voor die bouwconstructie vereist is [5]. Er zijn ook andere normen die voor het ontwerp van een brug toegepast worden zoals:

- Voorschriften beton - Bruggen (VBB 1995) - Constructieve eisen en rekenmethoden;
- Voorschriften voor het ontwerpen van beweegbare bruggen (VOBB);

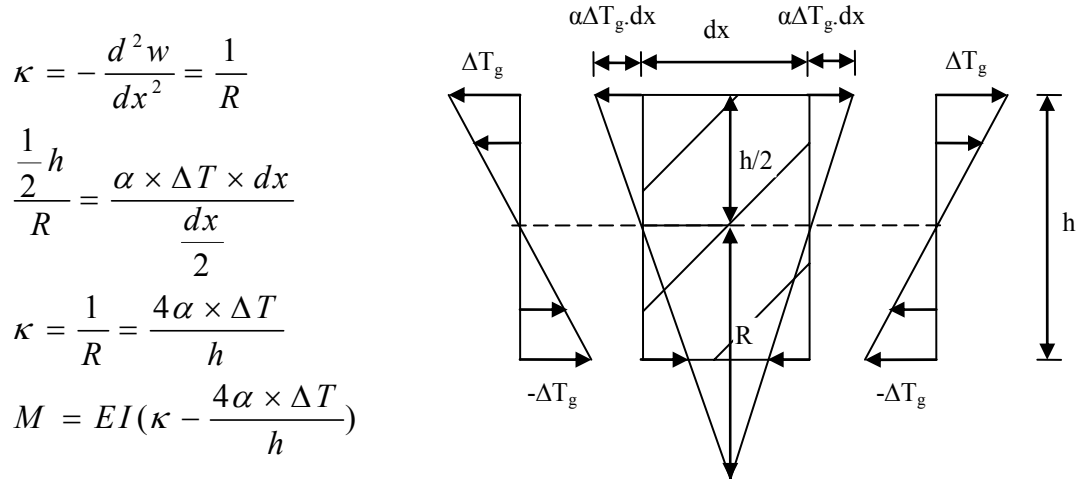
Behalve deze normen kan elke bedrijf tevens eigen projectspecificaties hebben die samen met deze normen worden toegepast.

Voor de berekeningen ten gevolge van temperatuurinvloed dient te worden opgemerkt dat ook een temperatuurgradiënt van toepassing is. Temperatuurgradiënt betekent inwendig temperatuurverloop over de doorsnede. Er is ook huidtemperatuur. Huidtemperatuur wordt veroorzaakt door zonnitstralingen. Er is een verschil tussen temperatuurgradiënt en huidtemperatuur. Het verschil tussen temperatuurgradiënt en huidtemperatuur is in figuur 8.2 weergegeven.



*Figuur 8.2: Temperatuurverdeling in een betonnen ligger*

Een temperatuurgradiënt veroorzaakt wel of geen buigend moment. Dit is afhankelijk van de oplegcondities van de ligger. Hierbij wordt aangenomen dat het vorskspannen beton niet zal scheuren en elasticiteitsmodulus constant is. Het moment ten gevolge van deze buiging wordt berekend als volgt, zie ook figuur 8.3.



*Figuur 8.3: Buiging op ligger ten gevolge van temperatuurgradiënt*

Tabel 8.2 geeft ten slotte een overzicht van temperatuurbelastingen, zoals die in verschillende landen worden aangehouden. Een gedetailleerde analyse van het effect van straling kan behoorlijk ingewikkeld zijn. Figuur 8.4 geeft een indicatie van factoren die een rol spelen bij een geavanceerde beschouwing van de invloed van straling op de temperaturen in een kokerliggerbrug.

○ **“Procestemperaturen”**

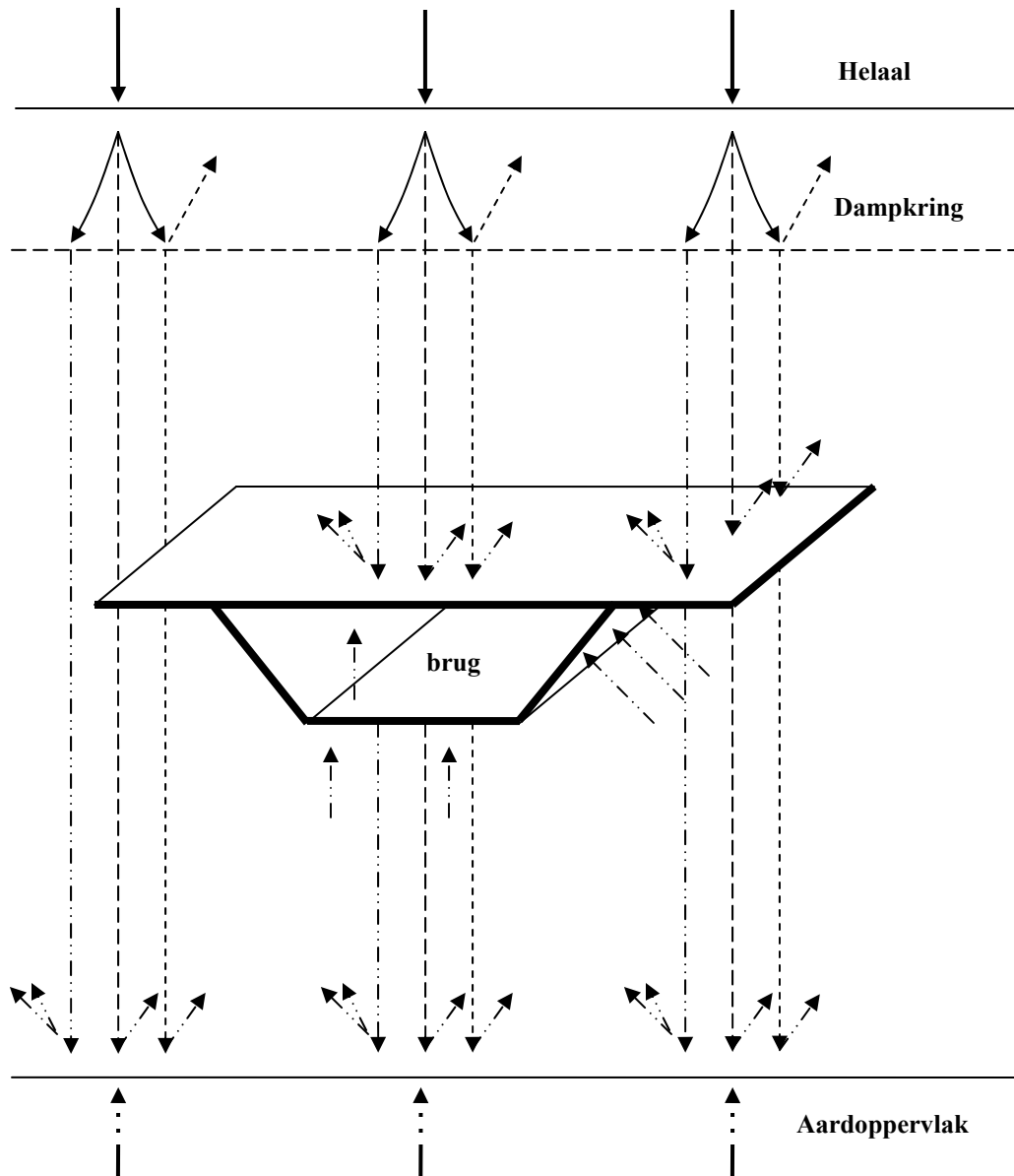
Onder procestemperaturen worden temperaturen verstaan die voorkomen bijeen scala aan industriële activiteiten. Dit kan zijn bij de handeling van stoffen: transport, opslag of bewerking ervan. Bekende voorbeelden zijn de opslagtanks voor warmte en cryogene vloeistof, opslagsilo's voor cement en vliegias, slibgistingstank, transportvoorzieningen en (interim) opslag van afvalwaterstoffen. In voorkomende gevallen zal de constructeur nauwkeurig op de hoogte gebracht moeten worden van de te beschouwen thermische belastingsscenario's.

○ **“Brandbelasting”**

Industriële branden, bijvoorbeeld koolwaterstofbranden, laten zich niet beschrijven met de standaardbrandkromme. Verschillende instituten hebben rekenmodellen ontwikkeld voor het bepalen van de brandkarakteristieken van koolwaterstofbranden. In deze modellen wordt rekening gehouden met onder meer de aard van de brandende stof, de plasdiameter, de windsnelheid en de mate van roetvorming. In voorkomende gevallen dient men zich tot expert te wenden.



De brandbelasting wordt bijvoorbeeld voor de berekeningen van een tunnelconstructie in beschouwing genomen. De brandbelasting hoeft niet bij de berekeningen van de trestle brug in beschouwing te worden genomen.



*Figuur 8.4: Voorbeeld van straling op aardoppervlak en constructieonderdelen [9]*

Situatie	Temperatuur [°C]	
	Momentsaan	Extreem
Zomer - buiten (geen directe zonbestraling)	17	30
Directe zonbestraling		
- zeer lichte kleur	17	50
- lichte kleur	17	60
- donkere kleur	17	75
Zomer - binnen	17	25
Winter - buiten	4	-25
Winter - binnen	17	20
Constructie in de grond	10	10

Tabel 8.1: Temperatuurbelastingen volgens TGB, NEN 6702 [9]

Land	Temperatuurbelasting				
	$\Delta T_{gem}$ [°C]	Temperatuur- stijging [°C]	Temperatuur- daling [°C]	Temperatuur- verschil [°C]	Uitzettings- coëfficiënt $\alpha_c$ [m/m.°C]
Italië		10	30		$12 \cdot 10^{-6}$
Zwitserland		15	25		$10 \cdot 10^{-6}$
België	10	15	15		$10 \cdot 10^{-6}$
Spanje				5	
Engeland				8	$12 \cdot 10^{-6}$
VS: gematigde zon	10	17 20 20	22 25 20		$10 \cdot 10^{-6}$
VS: koude zon					
Duitsland					

Tabel 8.2: Temperatuurbelasting in omringende landen en USA [9]

### ○ **Uniforme temperatuurverdeling**

De uniforme temperatuurcomponent (veroorzaakt verlenging en verkorting van het brugdek) is afhankelijk van de minimale en maximale effectieve brugtemperatuur die de brug over een voorschreven periode ondervindt. Deze effectieve brugtemperaturen kunnen uit isothermen van minimale en maximale schaduwtemperaturen worden verkregen. De minimale en maximale temperaturen voor de jaarlijkse wisselingen zijn volgens de VBB1995 [12] en VOSB1995 [13].

- Beton [12, p15]. Voor gemiddelde begintemperatuur over de dikte van het brugdek moet  $+10^{\circ}\text{C}$  worden aangehouden. Daarnaast dient te worden gerekend met een minimale en maximale jaarlijkse temperatuur van respectievelijk  $-15^{\circ}\text{C}$  en  $+35^{\circ}\text{C}$  over de hoogte van de brug. Tijdens de montage moet goed rekening worden gehouden met de temperatuur van dat moment. Verder wordt aangegeven dat de jaarlijkse temperatuurwisselingen geen invloed heeft op de temperatuurgradiënt en de eigentemperatuur.
- Staal [13, p18]. Volgens artikel A.6.1 [13] moet voor de uiterste grenzen, waartussen de brugtemperatuur kan variëren (jaarlijkse wisselingen),  $-25^{\circ}\text{C}$  en  $+45^{\circ}\text{C}$  worden aangehouden. Het ontwerp moet worden opgezet voor een temperatuur van  $+10^{\circ}\text{C}$ ; tijdens montage moet met de dan heersende temperatuur rekening worden gehouden.

### ○ **Lineaire temperatuurverdeling**

Voor een eenvoudige berekening mogen in de Eurocode de effecten van een lineaire temperatuurverdeling over doorsnede (veroorzaakt kromming van het brugdek) worden geschematiseerd door equivalente positieve en negatieve temperatuurverschillen, zoals aangegeven in tabel 8.3. De daarin aangegeven groepen zijn als volgt gedefinieerd:

1. stalen brugdek op stalen kokerliggers;
2. betonnen brugdek op stalen kokerliggers;
3. betonnen brug;

De waarde in tabel (uit de Eurocode) zijn gebaseerd op een toplaag van 50 mm en komen nagenoeg met de in de VBB1995 [12] en VOSB1995 [13] gehanteerde waarden ( $\Delta T_{M,pos} = 15^{\circ}\text{C}$ ,  $\Delta T_{M,neg} = -6,5^{\circ}\text{C}$ ) overeen. Voor andere laagdiktes dienen de waarden met een factor  $\chi$  te worden gecorrigeerd. Hiervoor wordt naar de Eurocode 1 verwezen [1, p17]. Een nauwkeurige berekening van de temperatuurbelasting door dagelijkse wisselingen kan met behulp van Bijlage B van voorgenoemde Eurocode worden uitgevoerd.

Groepen van bovenbouwconstructies		Verkeerbruggen	
		Positief Temperatuurverschil $\Delta T_{M,pos}$	Negatief Temperatuurverschil $\Delta T_{M,neg}$
		Groep 1	18
Groep 2	15	-18	
Groep 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• kokerligger</li> <li>• T_ligger</li> <li>• Massieve platen</li> </ul>	10	-5
		15	-8
		15	-8

Tabel 8.3: Karakteristieke lineaire temperatuurverschillen voor verschillende brugtypen [9]

o **Combinatie uniforme en lineaire temperatuurverdeling**

Volgens de Eurocode kan bij een combinatie van de uniforme ( $T_N$ ) en lineaire temperatuurverdeling ( $T_M$ ) de volgende vergelijking worden gebruikt [1, p16].

$$\Delta T_M + \omega_N \Delta T_N \quad \text{of} \quad \omega_M \Delta T_M + \Delta T_N$$

waarbij het meest ongunstige effect relevant is en waar:

$$\omega_N = 0,35;$$

$$\omega_M = 0,75.$$

o **Globale berekening temperatuurverlenging en –verkorting**

Aan de hand van de Nederlandse normen VBB1995 [12] (betonnen bruggen) en VOSB1995 [13] (staal en staalbeton bruggen) is een globale berekening van de verlengingen en verkorting van een brugdek in beton en staalbeton uitgevoerd. Naast de jaarlijkse uniforme temperatuurverdeling bestaat de lineaire temperatuurverdeling door de dagelijkse wisselingen uit een optelling van een uniforme temperatuurverdeling, een lineaire temperatuurverdeling en eigentemperatuur. Deze uniforme verdeling door dagelijkse wisselingen geeft dus ook een verkorting of verlenging van het brugdek. Voor de berekening is uitgegaan van een begintemperatuur van 10°C. De uitkomsten zijn

gebaseerd op een asfaltlaag met een dikte van 50 mm. Verder werden de gegevens uit tabel 8.4 gehanteerd. Daarbij dient te worden opgemerkt dat de lineaire uitzettingcoëfficiënt voor beton, afhankelijk van de toeslagmaterialen, ook kan  $1,2 \cdot 10^{-5}$  bedragen. In dat geval zal een 20 % grotere temperatuurbeweging optreden.

Materiaal		Dagelijkse wisselingen		Jaarlijkse wisselingen	
Soort	Lineaire uitzettingcoëfficiënt [ $^{\circ}\text{C}^{-1}$ ]	$\Delta T_{min}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\Delta T_{max}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\Delta T_{min}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	$\Delta T_{max}$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]
Beton	$1,0 \cdot 10^{-5}$	-6,5	+15	-25	+25
Staalbeton	$1,2 \cdot 10^{-5}$	-6,5	+15	-30	+30

Tabel 8.4: Gehanteerde gegevens temperatuurbelasting (VBV1995 / VBB1995) [9]

Voor het jaarlijkse minimum en maximum temperatuur voor een brugdek in staalbeton worden in de VOSB1995 [13] gen richtlijnen gegeven. Daarom wordt een temperatuur tussen de richtlijnen voor beton ( $\pm 25^{\circ}\text{C}$ ) en staal ( $\pm 35^{\circ}\text{C}$ ) gehanteerd. Voor de dagelijkse wisselingen is eenzelfde temperatuurverdeling als het brugdek in beton toegepast. Dit is voor een globale berekening voldoende.

### 8.5 Temperatuurvervorming in verhard beton [9]

Temperatuurveranderingen van een materiaal gaan gepaard met volume- en/of vormveranderingen. De rekverandering  $\Delta\varepsilon$  ten gevolge van een temperatuurverandering  $\Delta T$  volgt uit:

$$\Delta\varepsilon = \alpha_c \cdot \Delta T \quad (8.1)$$

waarin  $\alpha_c$  de uitzettingscoëfficiënt van het beton is. Deze uitzettingscoëfficiënt wordt bepaald door de uitzettingscoëfficiënt van componenten waaruit het beton is opgebouwd. Aangezien in normaal beton het toeslagmateriaal het grootste volume inneemt, is de uitzettingscoëfficiënt van deze component van dominant belang. Richtwaarden voor de uitzettingscoëfficiënt van verhard beton kunnen worden ontleend aan tabel 8.5.

Behalve het toeslagmateriaal speelt ook de cementsteenmatrix een belangrijke rol. Vooral in de verhardingsfase verandert de structuur van cementsteen. Voor veel praktische toepassingen voldoende nauwkeurig is als wordt gerekend met een constante waarde van

uitzettingscoëfficiënt. Deze waarde moet dan wel betrekking hebben op de gebruikte betonsoort, dat wil zeggen met verdiscontering van de uitzettingscoëfficiënt van het toegepaste toeslagmateriaal.

Door koeling kan het verloop van temperatuurontwikkeling in verhardend beton naar wens gestuurd. Hierbij wordt gebruik gemaakt van koelingbuizen in het beton of in de bekisting. Met thermokoppels op de wapening wordt het effect van de koeling geregistreerd en bijgestuurd.

Soort toeslagmateriaal	Silicagehalte [gew.%]	$\alpha \cdot 10^{-6}$ [K <sup>-1</sup> ]			
		Toeslag ( $\alpha_{agg}$ )		Beton ( $\alpha_c$ )	
		bereik	gemiddeld	bereik	gemiddeld
Kwartsiet	94	7,0-13,2	10,3	11,7-14,6	12,1
Kwarts	94	-	-	9,0-13,2	-
Zandsteen	84	4,3-12,1	9,3	9,2-13,2	11,4
Graniet	66	1,8-11,9	6,8	8,1-10,3	9,6
Dolomiet	50	4,5-8,5	6,8	-	9,6
Basalt	51	4,0-9,7	6,4	7,9-10,4	9,3
Kalksteen	0	1,8-11,7	5,5	4,3-10,3	8,6
Moraine grind	5-95	-	-	9,0-13,5	-
Vliegias	-	5,1-7,5	-	-	-

Tabel 8.5: Lineaire uitzettingscoëfficiënt van gesteenten ( $\alpha_{agg}$ ) en beton ( $\alpha_c$ ) bij kamertemperatuur [9]

## 8.6 Implementeren van temperatuurinvloed

Er wordt van formule 8.2 gebruik gemaakt om jaarlijkse en dagelijkse temperatuurinvloed in het programma te implementeren:

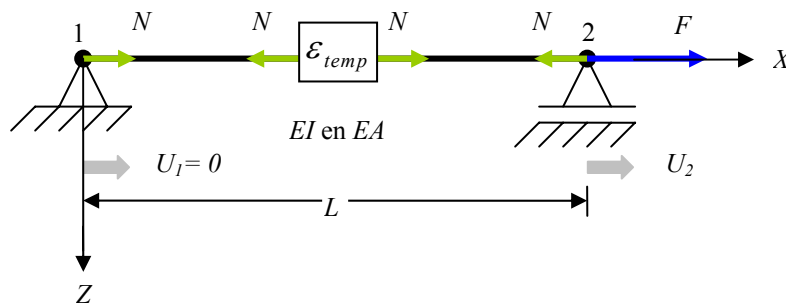
$$\Delta T = \sin\left(2\pi \cdot \frac{uur}{24}\right) \times \Delta T_{dag\ max} + \sin\left(2\pi \cdot \frac{dag}{365}\right) \times \Delta T_{jaar\ max} \quad (8.2)$$

Om  $\Delta T$  in elke uur in het programma te berekenen is het alleen nodig dat er de maximum dagelijkse temperatuurwisselingen  $\Delta T_{dag\ max}$  en de maximum jaarlijkse temperatuurwisselingen  $\Delta T_{jaar\ max}$  wordt ingetypt. Er dient tevens uitzettingcoëfficiënt  $\alpha_c$  in het programma te worden ingetypt voor de verdere berekening van de

temperatuurvervormingen. De rekverandering  $\Delta\varepsilon$  ten gevolge van een temperatuurverandering  $\Delta T$  per uur wordt berekend door de formule 8.1 in het programma (zie figuur 8.6, 8.7 en 8.8). In deze figuren is het te zien dat de rekverandering  $\Delta\varepsilon$  een positieve of negatieve waarde kan hebben.

De formule hiervoor gegeven waarmee een tijdafhankelijk verband is beschreven kent een vorm die uitbreidbaar is om elk temperatuurverloop te verdisconteren. De formule heeft dan ook de strekking van een Fourier reeks.

Hier wordt het implementeren van temperatuurinvloed aan de hand van een voorbeeld beschreven (zie figuur 8.5). Temperatuurinvloed kan verlenging (zomerseizoen) of verkorting (winterseizoen) in een constructie veroorzaken. Hier wordt een verlenging ten gevolge van temperatuurinvloed behandeld. Zoals er in figuur 8.5 is weergegeven ontstaat een normaalkracht  $N$  in de ligger ten gevolge van verlenging  $\varepsilon_{temp}$ . Deze normaalkracht veroorzaakt de drukkracht op de knopen 1 en 2 van de ligger. Het evenwicht, constitutieve en kinematische vergelijkingen van deze constructie is:



Figuur 8.5: Temperatuurinvloed op een staafelement

Evenwicht vergelijking:

$$-N + F = 0 \quad (8.3)$$

Constitutieve vergelijking:

$$N = EA (\varepsilon - \varepsilon_{temp}) \quad (8.4)$$

Kinematische vergelijking:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (8.5)$$

Uit substitutie van 8.5 en 8.4 met 8.3 geldt:

$$F = EA \times \left( \frac{U_2 - U_1}{L} - \varepsilon_{temp} \right) \quad (8.6)$$

$$F + EA \cdot \varepsilon_{temp} = \frac{EA}{L} \times (U_2 - U_1)$$

$F$  = Belastingvector  $\bar{F}$

$EA$  = Stijfheidmatrix  $K$

$EA\varepsilon_{temp}$  = Temperatuurbelasting  $F_{temp}$

$U_2 - U_1$  = Verplaatsingsvector  $\bar{U}$

Terugsubstitutie:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{U_2 - U_1}{L}$$

$$N = EA (\varepsilon - \varepsilon_{temp}) = F$$

Er dient dit proces te worden geïmplementeerd. Het programma kan  $\varepsilon_{temp}$  voor elke tijdstip berekenen. Verder wordt  $EA \cdot \varepsilon_{temp}$  (temperatuurbelasting) bij  $F_{x1}$  en  $F_{x2}$  van belastingvector van deze ligger opgeteld. Er dient het teken van de temperatuurinvloed voor elke knoop te worden opgelet. Voor de linker knoop dient een positief teken en voor de rechter een negatief teken van temperatuurbelasting ten opzichte van het globale assenstelsel te zijn (zie figuur 8.5). Ten slotte dient  $(-\varepsilon_{temp})$  in de vervormingparameters  $e$  bij de eerste rij  $e_N$  te worden opgeteld. Zoals in hoofdstuk 2 is uitgelegd geldt voor de vervormingparameters  $e$  en de spanningsresultanten  $s$ :

$$s = De$$

## 8.7 Toetsing

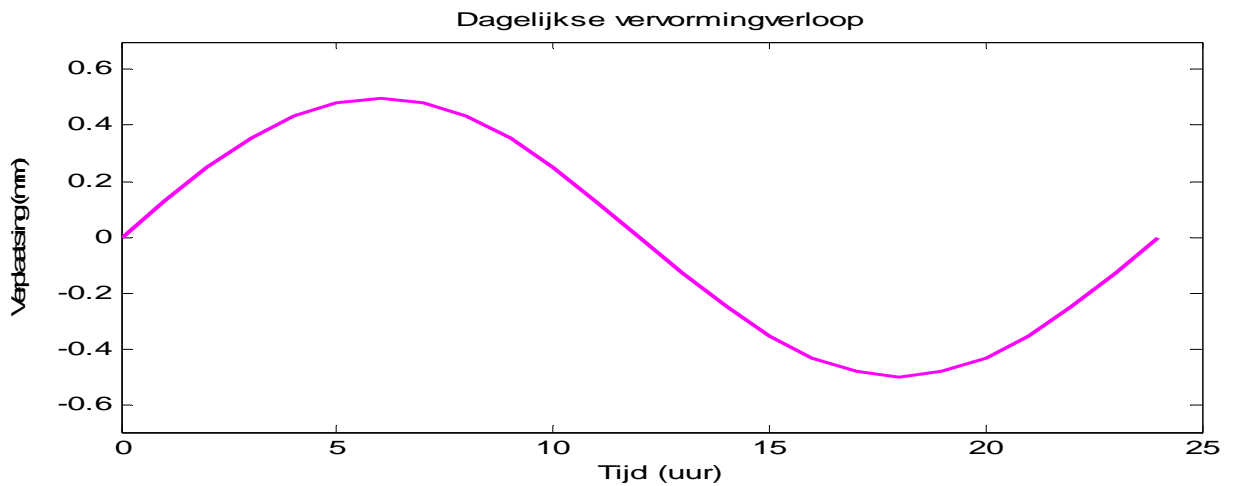
Het programma wordt aan de hand van 3 getallenvoorbeelden nagekeken. Het eerste



voorbeeld is een ligger met een vrije vervorming. Het tweede voorbeeld is een ligger met een “opgelegde vervorming” en het derde is een constructie met een opgelegde vervorming.

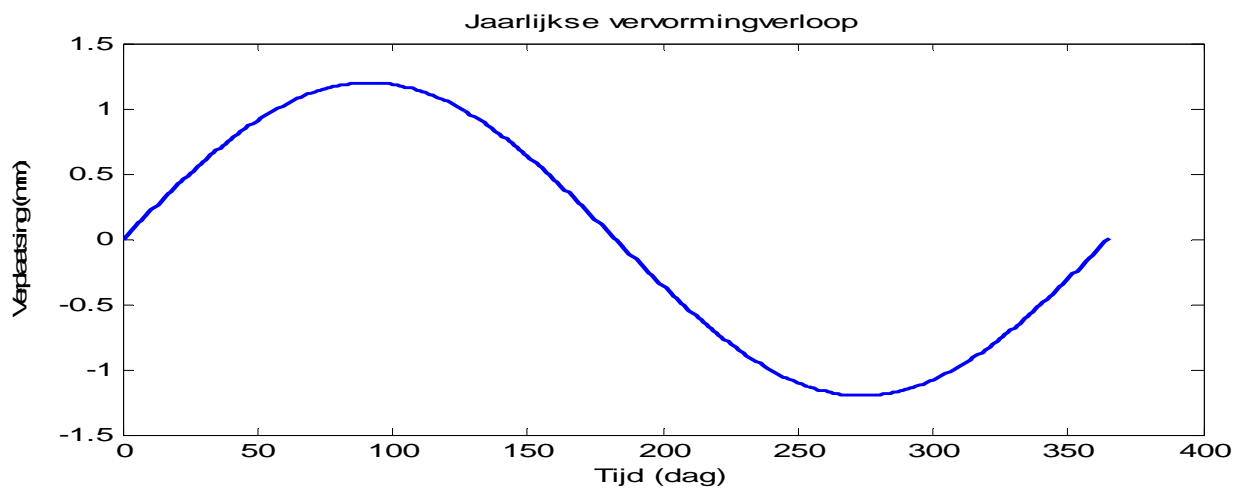
Voor het vervormingverloop van alle 3 voorbeelden geldt:

1. Het vervormingverloop ten gevolge van dagelijkse temperatuurwisseling:



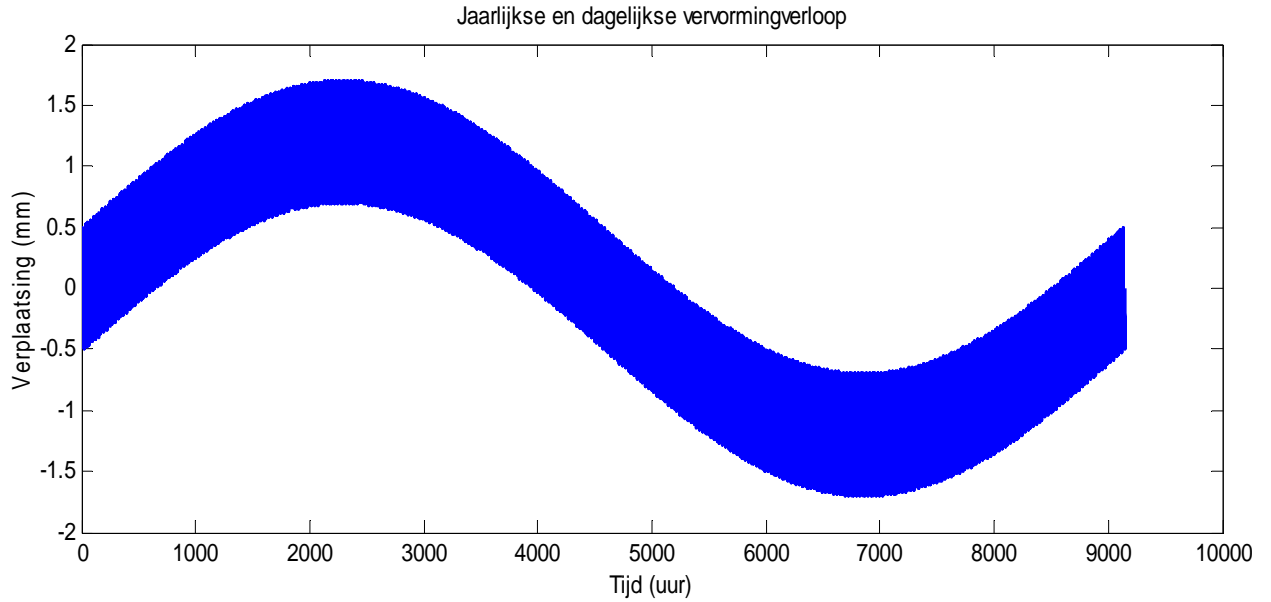
*Figuur 8.6: Vervormingverloop t.g.v. dagelijkse temperatuurwisseling voor 1 dag*

2. Het vervormingverloop ten gevolge van jaarlijkse temperatuurwisseling:

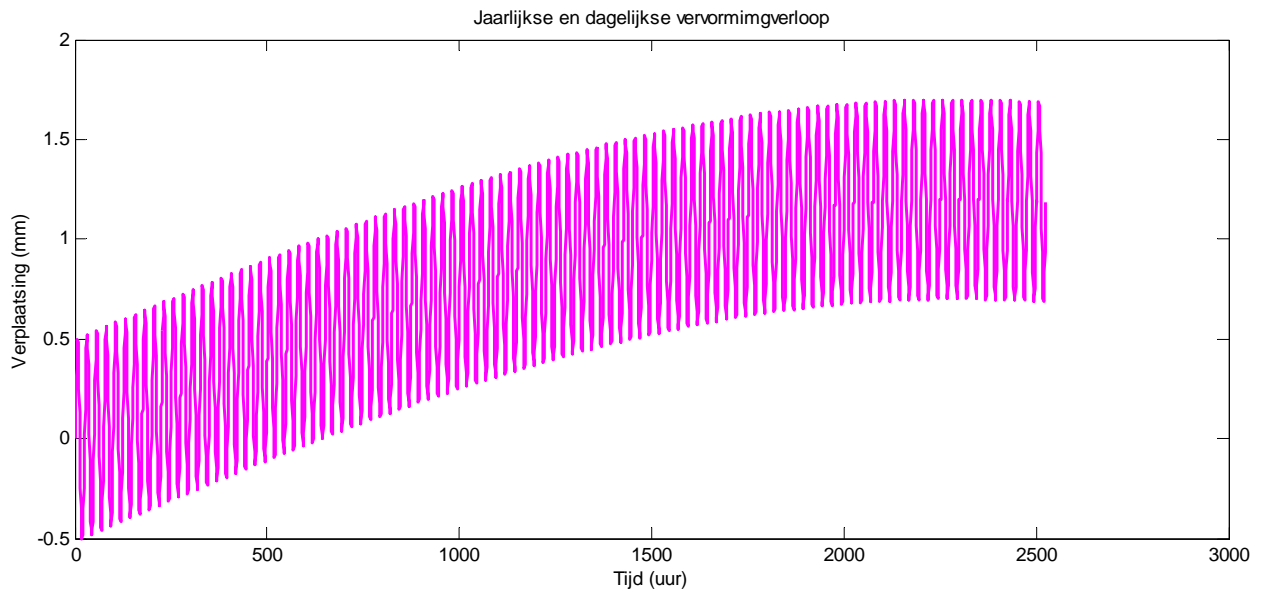


*Figuur 8.7: Vervormingverloop t.g.v. jaarlijkse temperatuurwisseling voor 1 jaar*

3. Vervormingverloop ten gevolge van de combinatie van dagelijkse en jaarlijkse temperatuurwisselingen voor 1 jaar:



*Figuur 8.8: Vervormingverloop t.g.v. combinatie van dagelijkse en jaarlijkse temperatuurwisselingen*



*Figuur 8.9: Vervormingverloop t.g.v. combinatie van dagelijkse en jaarlijkse temperatuurwisselingen*

In figuur 8.9 is het vervormingverloop voor 100 dagen weergegeven. Alle drie voorbeelden zijn in de bijlage G te zien. De resultaten van deze voorbeelden zijn naar verwachting.

## **8.8 Conclusie**

Voor berekeningen van temperatuurinvloed werd het programma ontwikkeld door het toevoegen van extra belasting en rek door temperatuurinvloed aan het programma. Het is in dit hoofdstuk al te zien dat temperatuurinvloed geen extra spanningen in constructies met vrije vervorming veroorzaakt. Temperatuurinvloeden veroorzaken soms verlenging (in zomerseizoen) en soms verkorting (winterseizoen) in de constructies. Uit de resultaten van de toetsen is geconcludeerd dat het programma het effect van de temperatuurinvloed naar verwachting verwerkt.

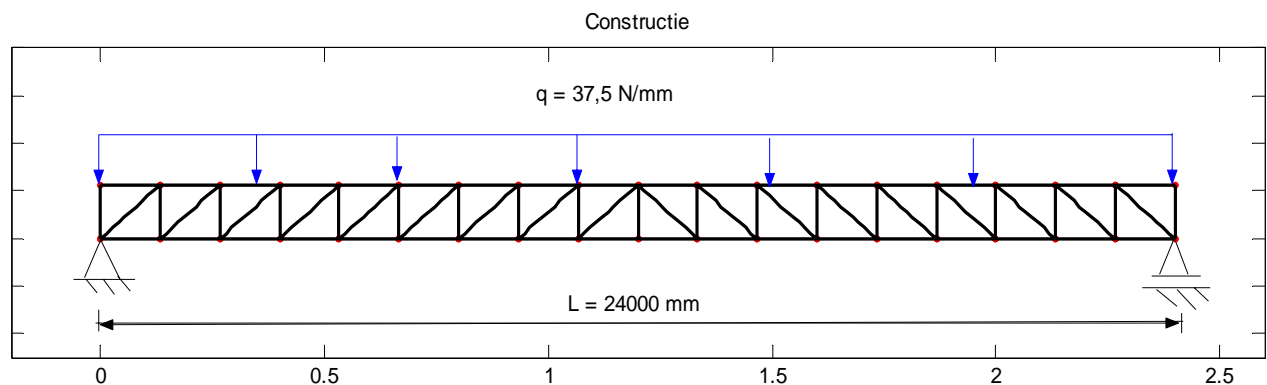
## 9 Controle van de modellering

### 9.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de modellering van de voorspanliggers en de gewapende betonnen druklaag gecontroleerd. In de praktijk wordt vaak van een dergelijk vakwerkmodel gebruik gemaakt. Hier is sprake van een vakwerkanalogie. Maar dit model is niet geschikt om in het programma in te voeren vanwege het grote aantal elementen. Daarom wordt ook een raamwerkmodel gemaakt met veel minder elementen en wordt de krachtwerving van deze twee modellen met elkaar vergeleken. Als de krachtwerving in beide gevallen dezelfde is dan wordt verder van het raamwerkmodel in deze studie gebruik gemaakt. De resultaten van dit hoofdstuk zijn tevens met behulp van het Dr. Frame programma en met behulp van de handmatige berekening gecontroleerd, zie ook bijlage J, paragraaf J.4 en J.5.

### 9.2 Eerste model

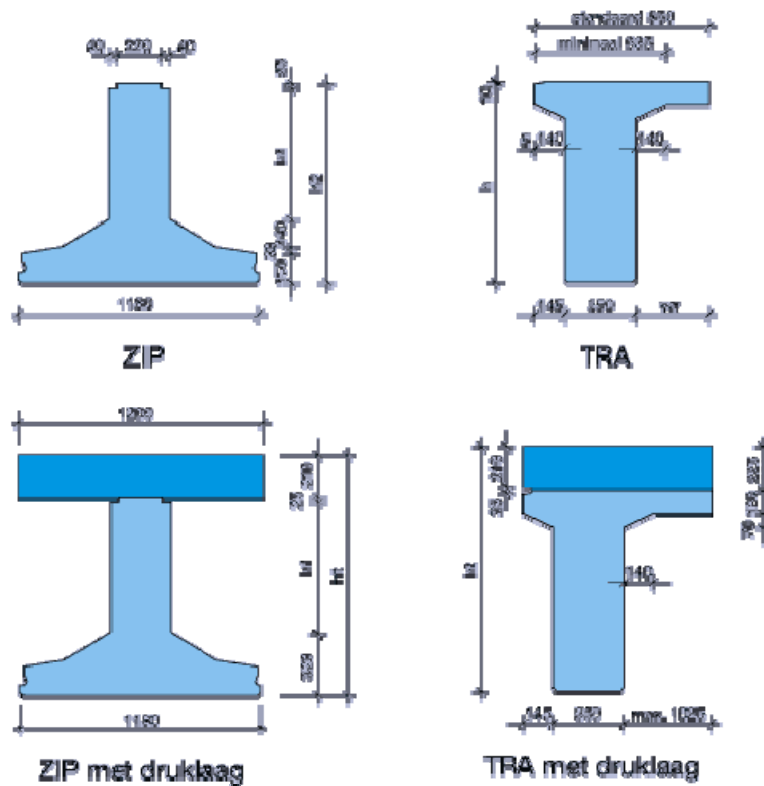
Er wordt een overspanning van 24 m opgedeeld in suboverspanningen van 1.3333 m beschouwd. De opleggingen zijn een scharnier- en een roloplegging. De belastingen tengevolge van eigen gewicht van constructie en verkeer is al in bijlage H berekend. De waarde van de gelijkmatige belasting is  $q = 37.5 \text{ N/mm}$ , zie ook figuur 9.1.



*Figuur 9.1: Geometrie en belasting op de constructie*

De bovenligger is gewapende betonnen ligger en onderligger is voorspanligger. Tevens zijn de grootheden van de voorspanligger en druklaag in bijlage H berekend, zie bijlage H. De diagonale elementen zijn betonelementen en verticale elementen functioneren als

beugels in de liggers. De grootheden van de voorspanligger en druklaag zijn in figuur 9.2 weergegeven.



Figuur 9.2: Afmetingen ZIP-balk

- $p_{zip} = 16,2 \text{ kN/m}$
- $p_{zip} = 15,43 \text{ kN/m}$
- $h_t = 1825 \text{ mm}$
- $h_l = 1270 \text{ mm}$
- $h_2 = 1616 \text{ mm}$
- $I_b = 172,3 \times 10^9 \text{ mm}^4$
- $Z_b = 596 \text{ mm}$
- $A_b = 661,45 \times 10^3 \text{ mm}^2$
- $W_b = I_b / Z_b = 288,67 \times 10^6 \text{ mm}^3$
- $W'_b = I_b / (h_2 - Z_b) = 170,07 \times 10^6 \text{ mm}^3$
- $I_{b+d} = 368,6 \times 10^9 \text{ mm}^4$
- $Z_{b+d} = 853 \text{ mm}$
- $W_{b+d} = 432,08 \times 10^6 \text{ mm}^3$

- $W'_{b+d} = I_{b+d} / (h_2 - Z_{b+d}) = 486,98 \times 10^6 \text{ mm}^3$
- $W''_{b+d} = I_{b+d} / (h_t - Z_{b+d}) = 473,43 \times 10^6 \text{ mm}^3$

Dus de grootheden van de voorspanligger zijn als volgt:

$$E_b = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_b = 172,3 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$A_b = 661,45 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$L_b = 1333,333 \text{ mm}$$

Voor de druklaag geldt:

$$E_d = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_d = \frac{1200 \times 210^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_d = 1200 \times 210 \text{ mm}^2$$

$$L_d = 1333,333 \text{ mm}$$

De verticale afstand tussen twee liggers zijn de afstand tussen de neutrale lijnen van de voorspanligger en het dek. Dus:

$$L_v = \frac{210}{2} + (1615 - 590) = 1130 \text{ mm}$$

De effectieve breedte van de verticale en diagonale elementen zijn breedte van het lijf van voorspanligger dan:

$$b_v = b_{dia} = 220 + 40 + 40 = 300 \text{ mm}$$

De effectieve hoogte van verticale stalen elementen is het hart op hart afstand tussen achtereenvolgende kleine suboverspanningen van het vakwerk dan het is:

$$h_v = 1333,333 \text{ mm}$$

De effectieve hoogte van de diagonale betonnen elementen is aangehouden:

$$h_{dia} = h_v \cdot \cos(\alpha) = 1333,333 \frac{1130}{1333,333} = 942 \text{ mm}$$

Dus de grootheden van de verticale elementen zijn als volgt:

$$E_v = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_v = \frac{300 \times 1333,333^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_v = 300 \times 1333,333 \text{ mm}^2$$

$$L_v = 1130 \text{ mm}$$

Tevens zijn de grootheden van de diagonale elementen als volgt:

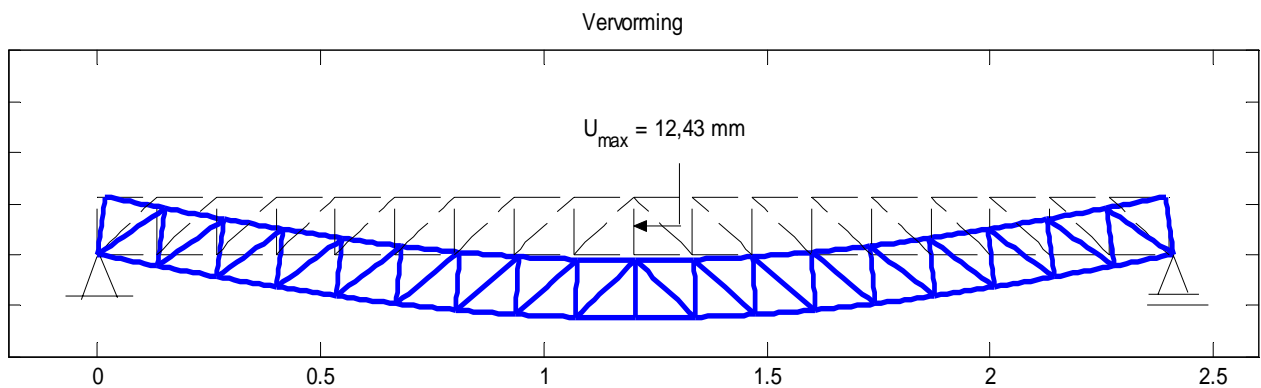
$$E_{dia} = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_{dia} = \frac{300 \times 942^3}{12} \text{ mm}^4$$

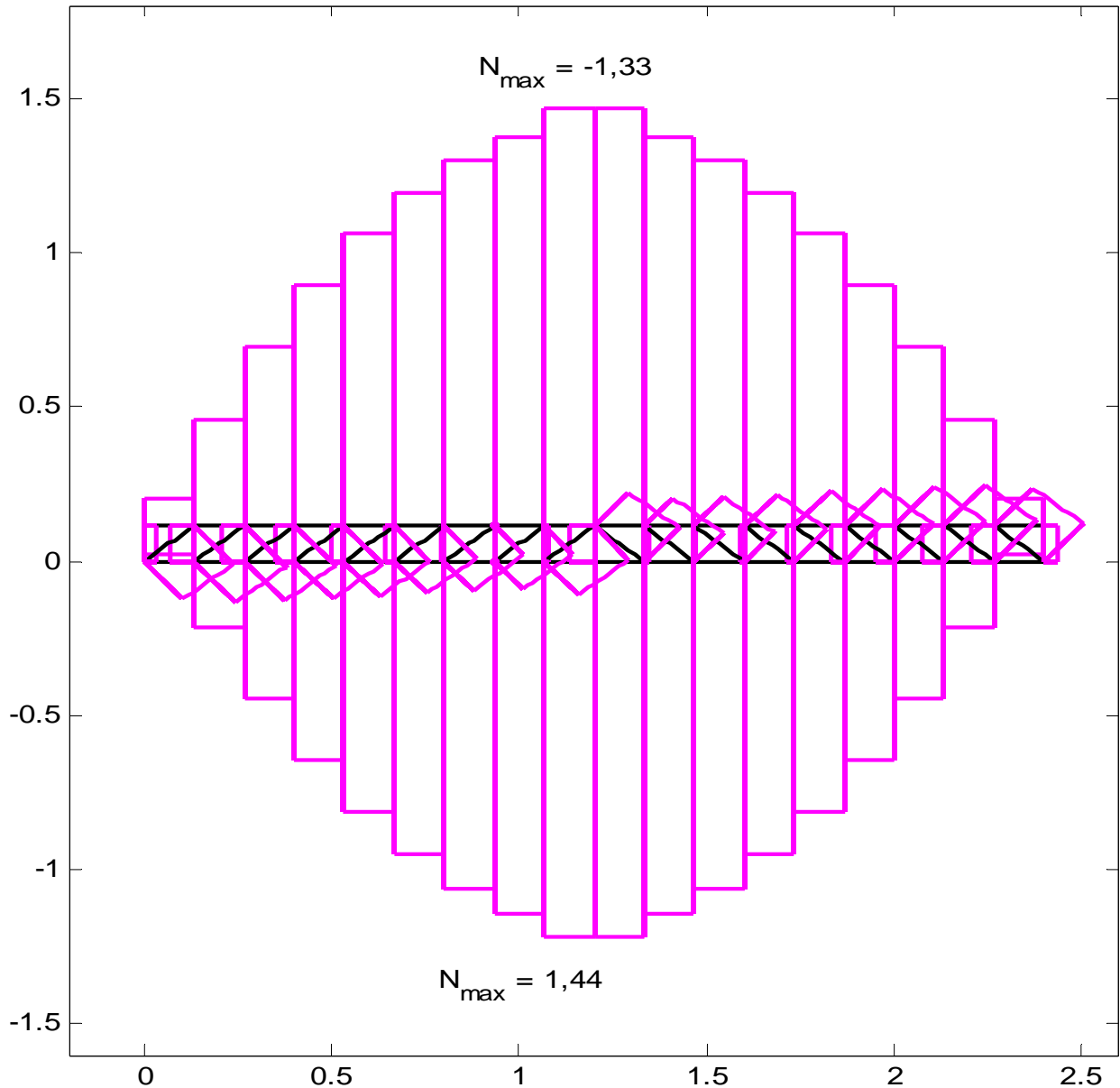
$$A_{dia} = 300 \times 942 \text{ mm}^2$$

$$L_{dia} = \sqrt{1130^2 + 1333,333^2} = 1748 \text{ mm}$$

Deze gegevens wordt in het programma in getypt. Het verloop van de vervorming en normaalkrachtlijnen uit het programma zijn in de figuur 9.3 en 9.4 weergegeven.



*Figuur 9.3: Vervorming*

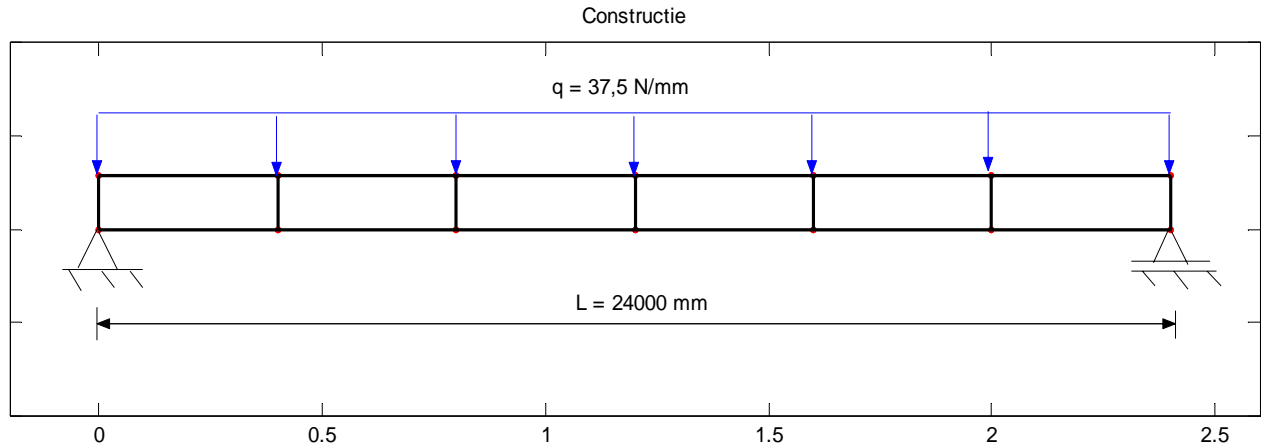


*Figuur 9.4: Normaalkrachtlijnen( $\times 10^6$  N)*

### **9.3 Tweede model**

Er wordt een overspanning van 24 m opgedeeld in suboverspanningen van 4 m beschouwd. De opleggingen zijn een scharnier- en een roloplegging. De waarde van de gelijkmatige belasting is  $q = 37,5$  N.mm, zie ook figuur 9.5.





*Figuur 9.5: Geometrie en belasting op de constructie*

De bovenligger is gewapende betonnen ligger en onderligger is voorspanligger. Tevens zijn de grootheden van de voorspanligger en druklaag in hoofdstuk 9 berekend, zie bijlage H. Hier is geen sprake van de diagonale elementen. Verticale elementen functioneren als betonnen elementen. De grootheden van de voorspanligger en druklaag zijn in figuur 9.2 weergegeven.

Dus de grootheden van de voorspanligger zijn als volgt:

$$E_b = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_b = 172,3 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$A_b = 661,45 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$L_b = 4000 \text{ mm}$$

Voor de druklaag is aangehouden:

$$E_d = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_d = \frac{1200 \times 210^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_d = 1200 \times 210 \text{ mm}^2$$

$$L_d = 4000 \text{ mm}$$

Dus de grootheden van de verticale elementen zijn als volgt:

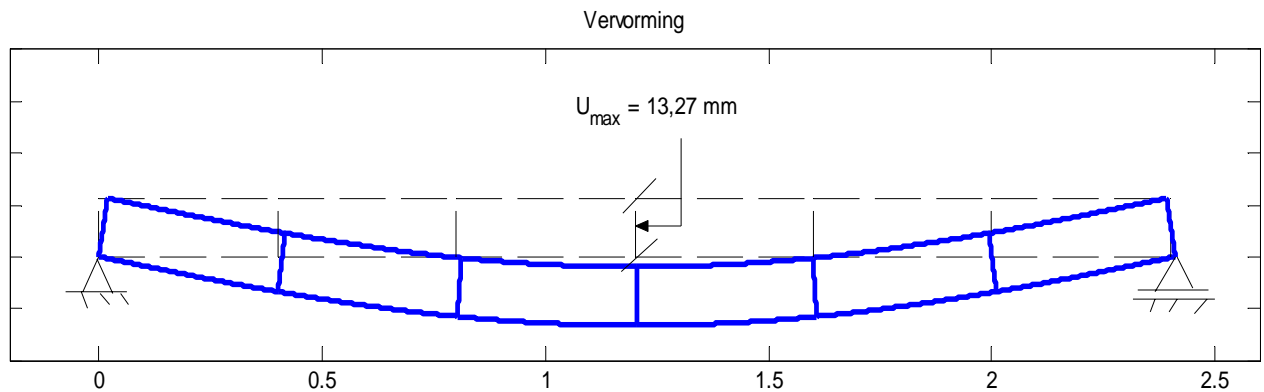
$$E_v = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_v = \frac{300 \times 4000^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_v = 300 \times 4000 \text{ mm}^2$$

$$L_v = 1130 \text{ mm}$$

Deze gegevens wordt in het programma in getypt. Het verloop van de vervorming en normaalkrachtlijnen uit het programma zijn in de figuur 9.6 en 9.7 weergegeven.



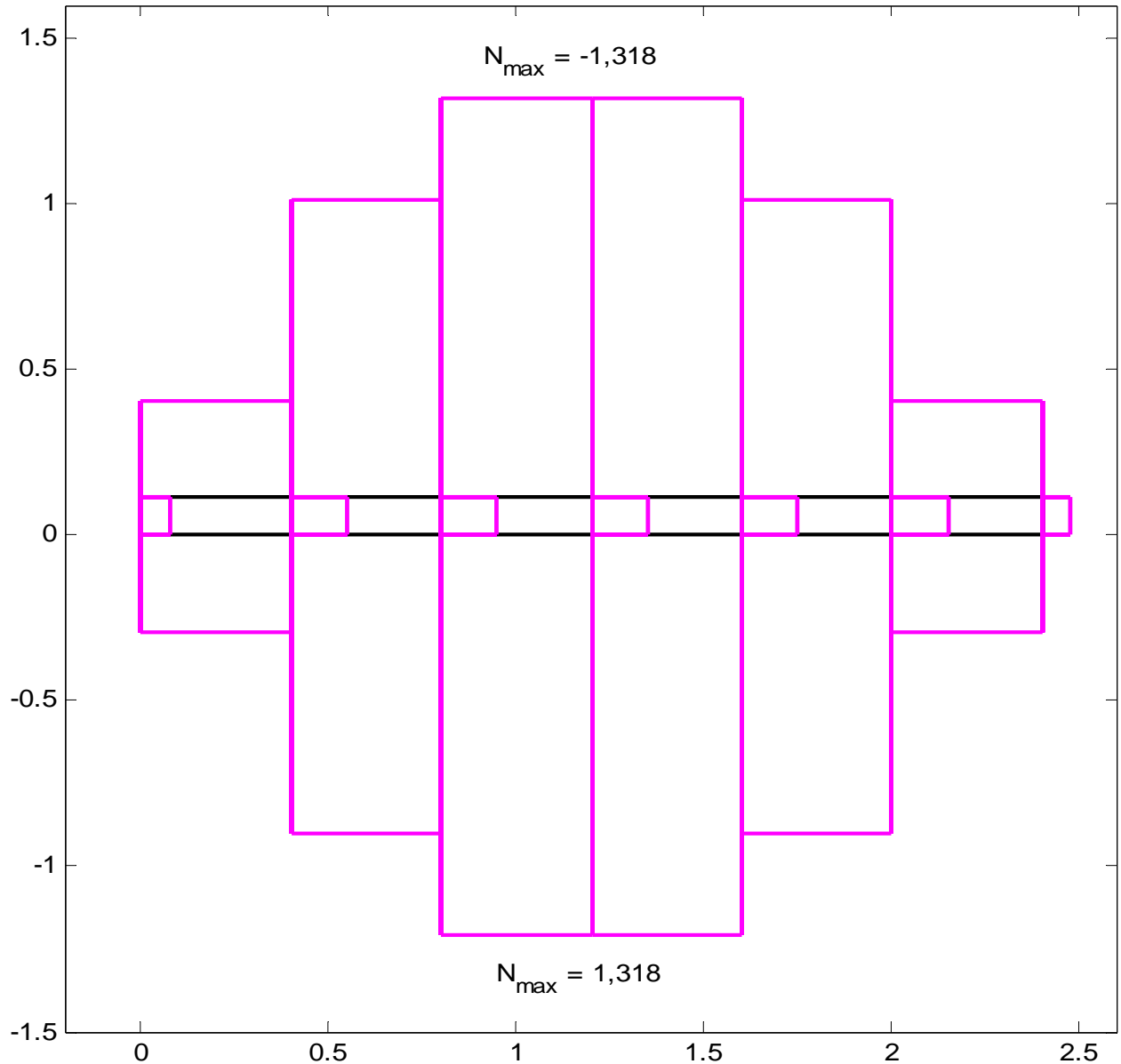
*Figuur 9.6: Vervorming*

Voor het vergelijken van krachtwerking van deze twee modellen dient de normaalkracht verloop te worden bestudeerd. Voor het bestuderen van het kruipgedrag zijn elementen in drukkracht relatief belangrijke elementen. Dus dient de maximale normaalkracht van bovenliggers van beide modellen met elkaar te worden vergeleken:

$$F = \frac{(1,33 - 1,318) \times 10^6}{1,33 \times 10^6} \times 100 = 0,9\%$$

Het verschil tussen beide gevallen is minder dan 1 procent. Het verschil van de maximale doorbuiging tussen beide model is tevens minder 0,9 mm.

Deze resultaten zijn tevens met behulp van het Dr. Frame programma en met behulp van een handmatige berekening gecontroleerd, zie ook bijlage J, paragraaf J.4 en J.5.



*Figuur 9.7: Normaalkrachtlijnen ( $\times 10^6 N$ )*

## **9.4 Conclusie**

Twee modellen en de krachtwerkingen van beide modellen zijn met elkaar vergeleken. Een model is met de vakwerkanalogie gemaakt en de ander als een raamwerk. De krachtverwerking van beide gevallen zijn ongeveer dezelfde. Omdat het raamwerkmodel veel makelijker in het programma ingevoerd kan worden en minder rekestijd nodig heeft wordt hier verder in deze studie gebruik van gemaakt.

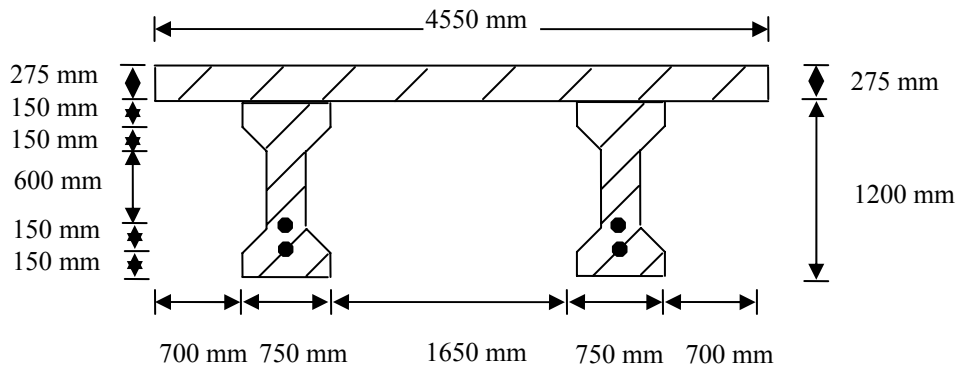
## 10 Modelling van een trestle brug

### 10.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt van afmetingen van de bovenbouw van een bestaande trestle brug genaamd Port Dickson gebruik gebouwd om een trestle brug te modelleren. Deze brug is in Maleisië. De afmetingen zijn beschreven in [14]. De waarden van de onderbouwafmetingen en grondsoorten zijn dezelfde als in toetsmodel 2, zie bijlage H en I. Hier wordt het tijdafhankelijke gedrag van het model in de lange termijn behandeld. Parameters zoals voorspanverlies, schuifspanningontwikkeling tussen ligger en druklaag, horizontale en tevens verticale verplaatsing van de brug worden in de loop van de levensduur van de brug behandeld. Door de symmetrie van de brug is alleen helft van het hoofddeel behandeld.

Dit model bestaat uit:

- Drie overspanningen met twee prefab (nagerekt) uitgevoerde I-voorspanliggers en in situ gewapend betondek (druklaag), zie figuur 10.1.



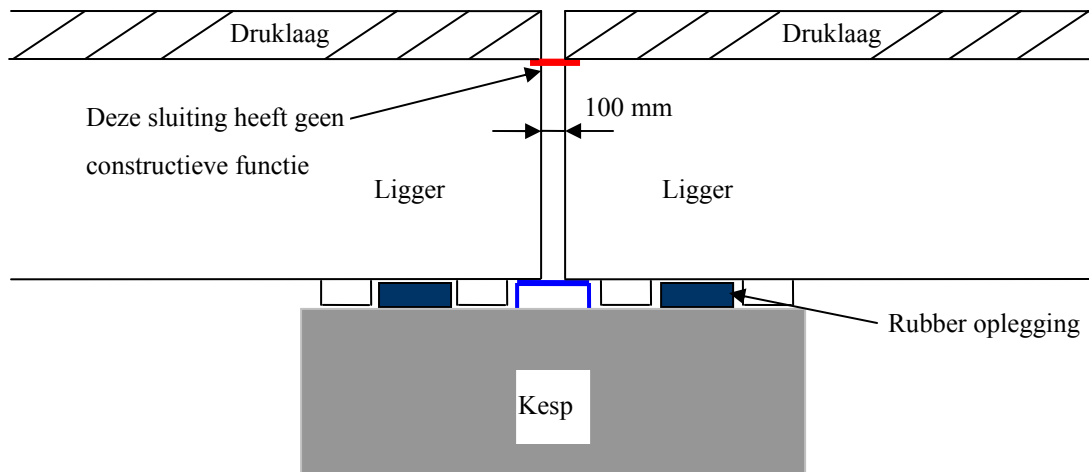
Figuur 10.1: Doorsnede van de dubbel I-voorspanligger

- Drie rijen palen die alleen de verticale belastingen kunnen opnemen. Elke rij bestaat uit twee palen. Deze palen zijn van stalen buizen. De buizen zijn van  $762 \times 12,5$  mm.
- Een oplegging in het midden van elk hoofddeel die verticale en de horizontale belastingen kan opnemen. Deze oplegging wordt toegepast voor de stabiliteit van het hoofddeel. Hiervoor zijn ook twee stalen buizen gebruikt. De lengte van de overspanningen zijn 21 m.
- Gewapend betonnen kespen
- Monoliet verbinding tussen overspanningen

- Monoliet verbinding tussen onderbouw en bovenbouw
- Voegloos dek uitgevoerd voor elk hoofddeel
- Ontwerplevensduur van brug is 20 jaar.

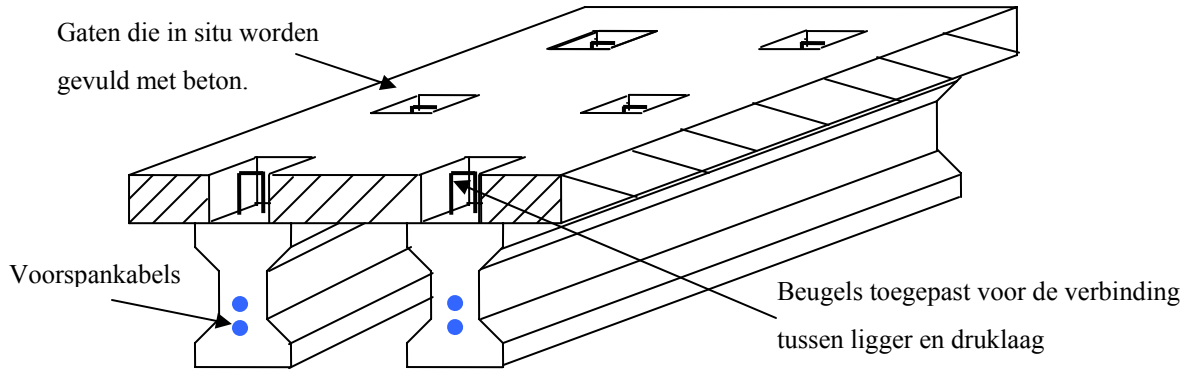
In het mechanicamodel bevinden zich twee parallel horizontale componenten en een gekromde component. Elke component bestaat uit zes gelijkwaardige elementen. De bovenste component representeert een in het werk gestort betonnen dek. De tweede horizontale component is een prefab voorspanligger. De gekromde component representeert een voorspankabel. Het verloop van de voorspankabels is parametrisch geïmplementeerd.

Het detail van de verbinding toegepast bij Port Dickson- brug is in figuur 10.2 weergegeven.



*Figuur 10.2: Het schema van de verbindingen volgens Port Dickson concept*

In deze case wordt hier van afgeweken. De liggers worden doorverbonden met wapening en aangestort. Voor de bovenbouw van de Port Dickson- brug zijn prefab dekelementen toegepast (figuur 10.3). In het prefab dek zijn twee rijen gaten opgenomen. Tevens zijn uitstekende beugels in de prefab liggers aangebracht. Wanneer de prefab dekelementen zijn geplaatst komen deze beugels precies in de gaten van het prefab dek. Vervolgens worden de gaten in situ met het beton gevuld. Met behulp van dit systeem wordt de schuifvervorming tussen het dek en ligger tot zoveel mogelijk verhinderd.



Figuur 10.3: *Verbinding tussen de liggers en druklaag*

In deze case wordt van deze bouwmethode afgeweken:  
De druklaag wordt in situ gestort.




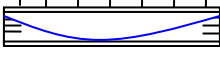
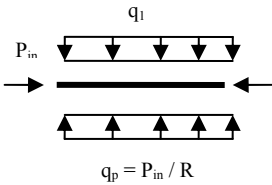

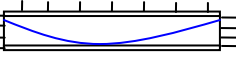
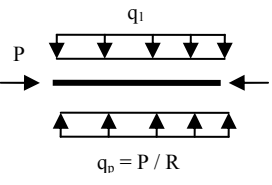

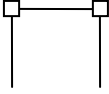
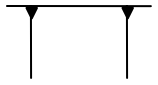
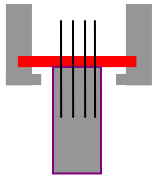
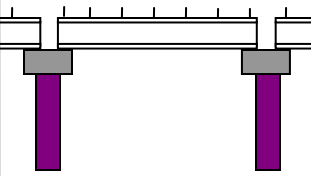
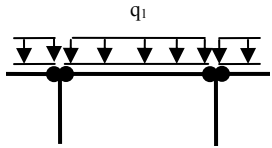
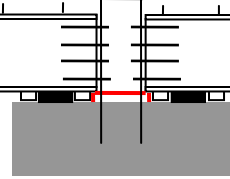
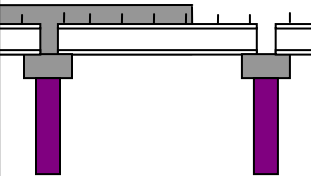
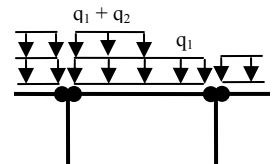
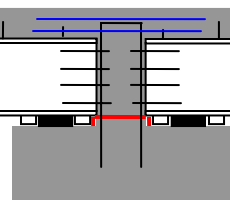
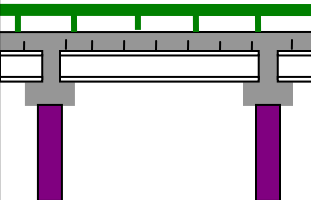
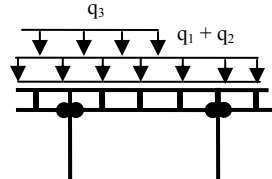
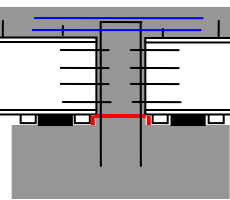
In dit hoofdstuk wordt eerst de bouwfase van het model beschreven en daarna wordt het tijdafhankelijke gedrag van deze brug in de gebruiksfase behandeld. Hier wordt tevens de temperatuurinvloed op de stalenkabels in rekening gebracht.

## 10.2 Tijdschema en Bouwfase

Het tijdschema van bovenbouw per ligger en bouwfase van het model zijn in figuur 10.4 en 10.5 weergegeven. Het tijdschema is voor een ligger getekend. Voor het tijdschema van het hele bouwproces dient productiesnelheid en plaatsingsnelheid te worden beschouwd. Omdat deze anders zijn. De drie eerste activiteiten zijn onderdeel van het productieproces en de rest zijn onderdeel van het plaatsingproces, zie figuur 10.4.

Activiteiten	t in dagen (indicatief, per ligger)									
	7	14	21	28	35	42	49	56		
1. Ligger (storten, verharden)	█									
2. Initiële voorspankracht		█								
3. Volledige voorspankracht			█							
4. Plaatsing van liggers				█						
5. Uitvoering druklaag				█						
6. Resterende activiteiten									█	

Figuur 10.4: *Het tijdschema van bouwfase voor bovenbouw*

Fase / omschrijving	Schets constructie	Statisch schema	Detail
1. Prefab liggers storten, (in de fabriek) aanbrenging van schroefhulzen			
2. Initiële voorgerekte voorspanning, controle op trekspanning, $q_1 = \text{E.g. van ligger}$ $P_m = \text{Initiële voorspanning}$			
3. Volledige voorspanning, aanbrenging van stekeinden, controle op trekspanning, $P = \text{Voorspankracht}$			
4. Heien palen			
5. Plaatsen van de liggers op kespen			
6. Uitvoering van de druklagen op liggers, $q_1 = \text{E.g. van ligger}$ $q_2 = \text{E.g. van dek}$			
7. Resterende activiteiten, $q_3 = \text{E.g. van installaties}$			

*Figuur 10.5: Bouwfase*

### 10.3 Hoofddeel van de trestle brug

Het model bestaat uit drie overspanningen van 21 meter en vier palen van 44 meter. Aan elke paal zijn tien veerelementen verbonden als model van de grondlagen. De veerafstand is drie meter wat voldoende nauwkeurig blijkt te zijn, zie bijlage H. Tussen elke overspanning staan twee parallel horizontale componenten en één gekromde component zoals in het paragraaf 10.1 is uitgelegd. De verticale afstand tussen deze componenten zijn de hart op hart afstand tussen de zwaartepunten van de prefab voorspanligger, voorspankabels en druklaag.

Er worden op de liggers de belasting  $q$  ten gevolge van de verkeerbelasting, het eigengewicht van liggers en het gewicht van de slijtlaag aangebracht. De  $q$  belasting is een permanente belasting. Er worden op de palen de belasting  $q_g$  ten gevolge van de golfbelasting aangebracht. De waarde van de verdeelde belasting  $q$  is in het eerder genoemde rapport beschreven [14]. Voor de golfbelasting  $q_g$  is er een gelijkmatige belasting verondersteld met de waarde 50 kN/m, zoals in figuur 10.6 is weergegeven.

$$q = 74,51 \text{ kN/m}$$

$$q_g = 50 \text{ kN/m}$$

De grootheden van de voorspanligger zijn als volgt:

Sterkteklasse = B45

$$E_b = 33500 \text{ N/mm}^2$$

$$I_b = 125,75 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$A_b = 412,5 \times 10^3 \text{ mm}^2$$

$$L_b = 21000 \text{ mm}$$

Voor de druklaag is aangehouden:

Sterkteklasse = B45

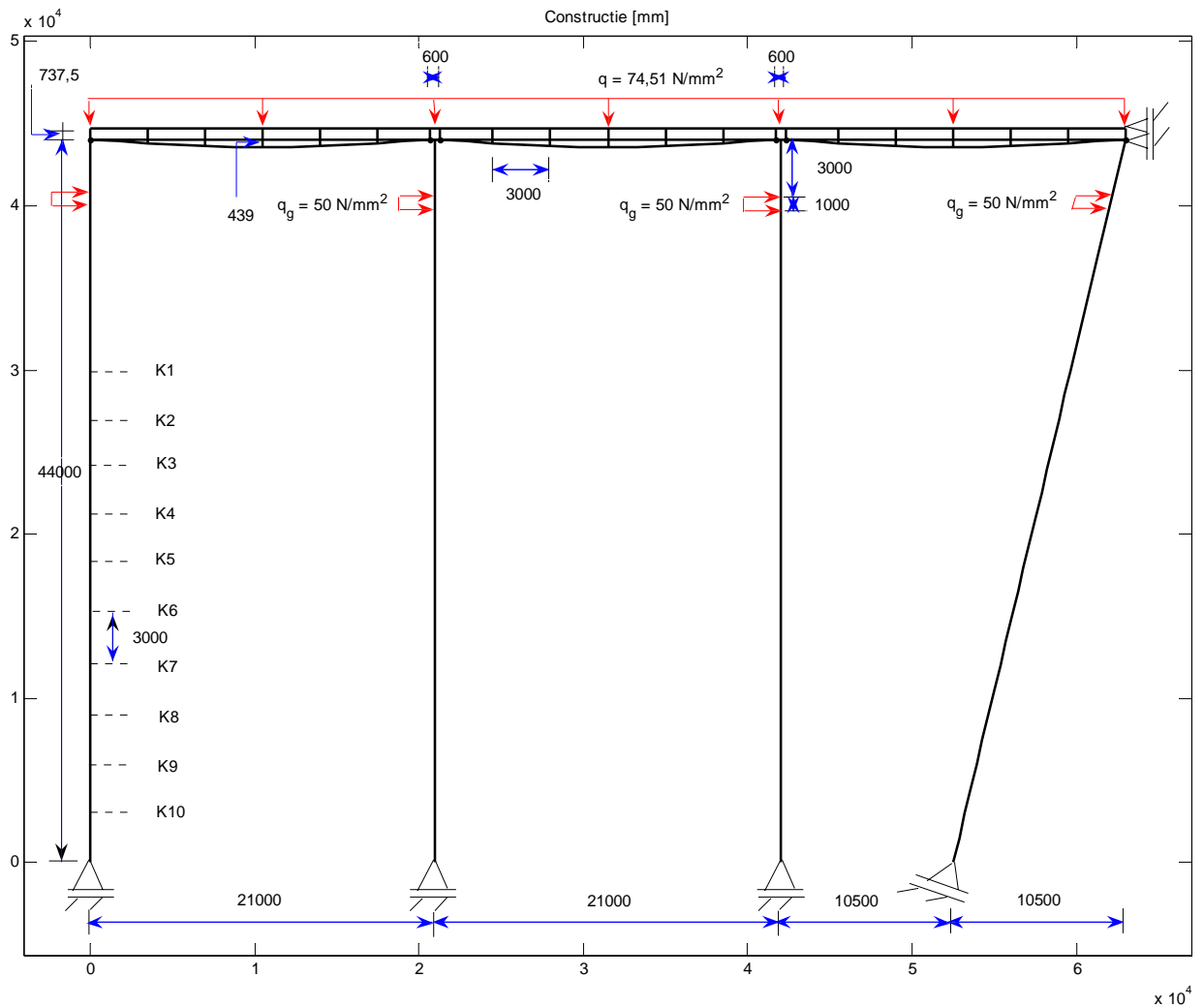
$$E_d = 33500 \text{ N/mm}^2$$

$$I_d = \frac{4550 \times 275^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_d = 4550 \times 275 \text{ mm}^2$$

$$L_d = 21000 \text{ mm}$$





*Figuur 10.6: Model van bestaande brug, lengte [mm]*

Om de afstand tussen voorspanelement en voorspanligger te berekenen dient het zwaartepunt van beide componenten met het verloop van de kabels berekend te worden. In elke voorspanligger is van twee kabels type VSL-kabel met 11 strengen van 13 mm gebruik gemaakt. Twee liggers bestaan in de hele doorsnede. Dus de grootheden van de kabels in de hele doorsnede zijn als volgt:

$$E_s = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

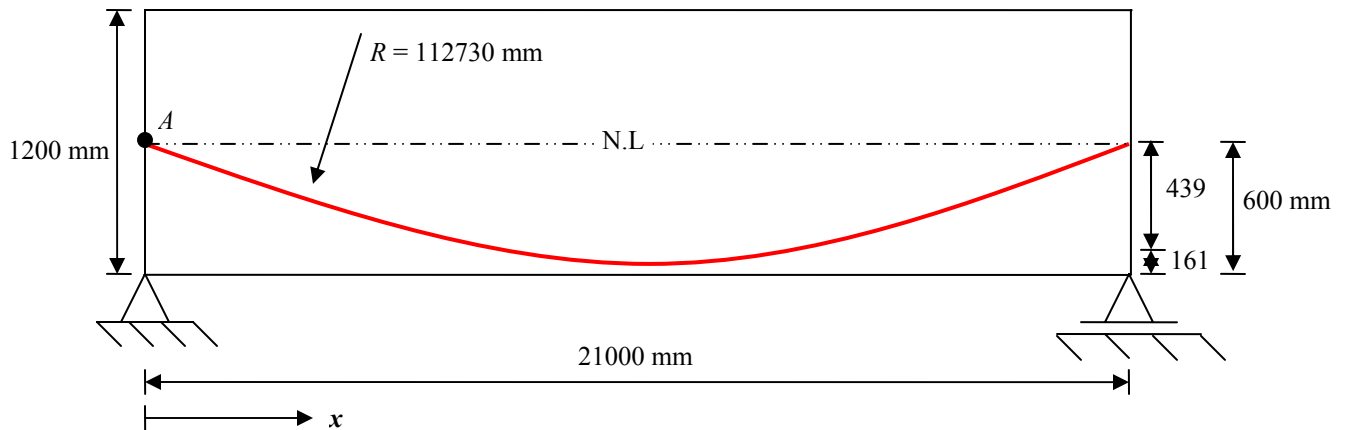
$$I_s = 61686 \text{ mm}^4$$

$$A_s = 2 \times 2 \times 11 \times 99 \text{ mm}^2$$

$$R = 112730 \text{ mm}$$

Het verloop van de kabels is met behulp van de formule 10.1 geïmplementeerd. Het programma heeft alleen de waarde van  $R$  en de coördinaat van het beginpunt  $A$  en de afstand  $x$  nodig als invoerparameters, zie figuur 10.7.

$$(x-x_1)^2+(z-z_1)^2 = R \quad (12.1)$$



*Figuur 10.7: Het verloop van de kabels in de voorspanliggers*

De verticale afstand tussen de voorspanligger en druklaag zijn de afstand tussen de neutrale lijnen van de voorspanligger en de druklaag. Dus:

$$L_{v1} = \frac{275}{2} + 600 = 737,5 \text{ mm}$$

De verticale afstand tussen de voorspanligger en het voorspanelement zijn de afstand tussen de neutrale lijnen van de voorspanligger en het voorspanelement. Deze afstanden variëren de lengte van de ligger, zie figuur 10.7. Het programma berekent deze afstanden automatisch.

Voor de grootheden van de verticale elementen tussen de voorspanligger en voorspanelementen zijn aangehouden:

$$E_{vv} = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_{vd} = \frac{300 \times 3500^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_{vv} = 300 \times 3500 \text{ mm}^2$$

$L_{vv}$  = Functie van  $x$

Voor de grootheden van de verticale elementen tussen de voorspanligger en druklaag zijn aangehouden:

$$E_{vd} = 31000 \text{ N/mm}^2$$

$$I_{vd} = \frac{300 \times 3500^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_{vd} = 300 \times 3500 \text{ mm}^2$$

$$L_{vd} = 737,5 \text{ mm}$$

De verbinding tussen de drie parallel horizontale componenten en palen wordt in figuur 10.8 weergegeven.

De wapening voor het negatieve moment in de bovenkant van de druklaag wordt hier door element 1 gemodelleerd, zie figuur 10.8. Voor het element 1 geldt:

$$E_{1s} = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$I_1 = 13 \times \frac{1}{4} \pi \times 12^4 \text{ mm}^4$$

$$A_1 = 13 \times \frac{1}{4} \pi \times 12^2 \text{ mm}^2$$

$$L_1 = 600 \text{ mm}$$

Het element 2 representeert de kesp boven de palen, zie figuur 10.9. De afmetingen van de kesp in dit model is anders dan die van de bestaande brug. Over de kesp van de bestaande brug lopen een aantal leidingen. Daarom diende de breedte van de kesp groter dan voorgestelde breedte van dit model te zijn. Voor dit element geldt:

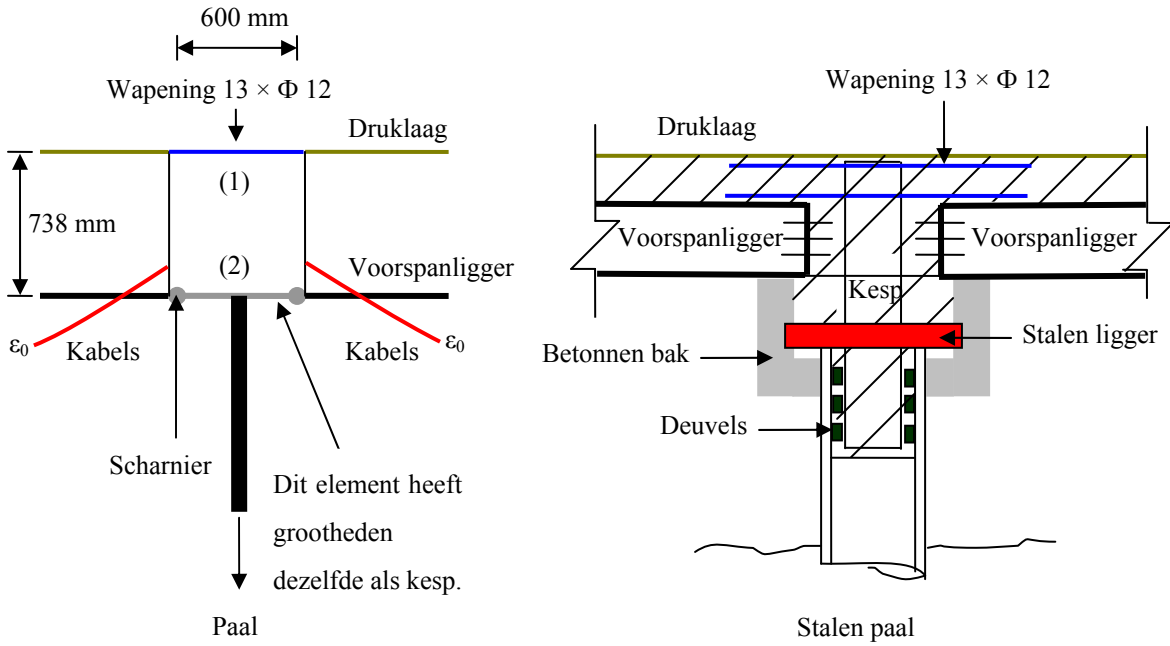
Sterkteklasse = B35

$$E_2 = 3,1 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

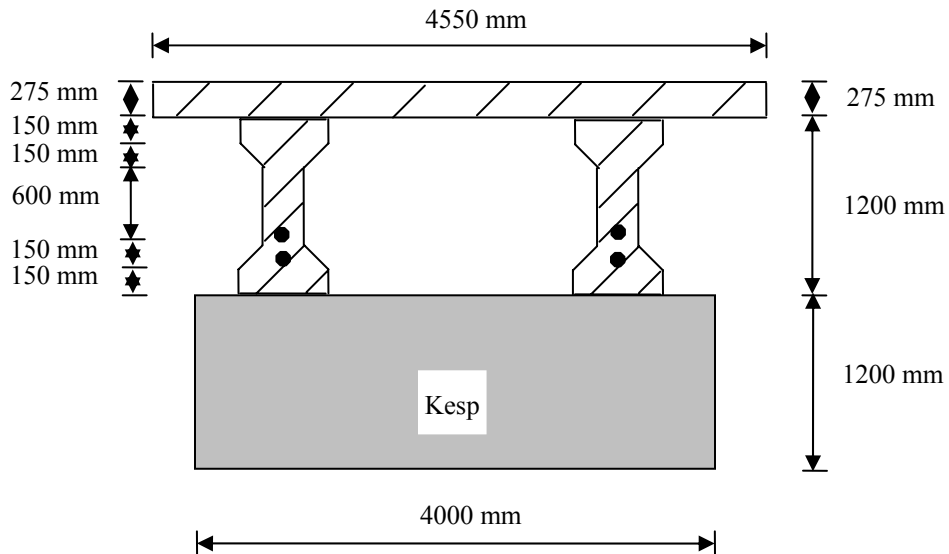
$$I_2 = \frac{4000 \times 1200^3}{12} \text{ mm}^4$$

$$A_2 = 4000 \times 1200 \text{ mm}^2$$

$$L_2 = 600 \text{ mm}$$



Figuur 10.8: Detail van de verbindingselementen



Figuur 10.9: Kesp

Om de veerstijfheden te berekenen zijn van de onderstaande formules gebruik gemaakt [15]:

$$E_{soil} = 150000 \frac{(2,17 - e)^2}{(1 + e)} \left( \frac{p'}{p_{atm}} \right)^{0,5} \left( \frac{0,0001}{\gamma} \right)^{0,4} \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

$$\delta = \frac{\Delta T \times \alpha \times L}{2} \text{ [m]}$$

$$\gamma = \frac{2\delta}{2H}$$

$$K_{horizontaal} = \frac{4 \cdot E_s / \pi}{(L / H)^{0,6}} \text{ [kN/m/m}^2\text{]}$$

$n_h$  = Eenheidsbeddingconstante [kN/m<sup>3</sup>]

$$K_{horizontaal} = n_h \cdot y / d_{paal} \text{ en } K_{veer} = K_{horizontaal} \cdot Oppervlak_{veer}$$

Voor de slappe grondlagen gelden:

$$K1 = 4500 \text{ kN/m}$$

$$K2 = 12375 \text{ kN/m}$$

$$K3 = 20250 \text{ kN/m}$$

$$K4 = 25875 \text{ kN/m}$$

$$K5 = 31500 \text{ kN/m}$$

$$K6 = 37625 \text{ kN/m}$$

$$K7 = 43750 \text{ kN/m}$$

$$K8 = 48875 \text{ kN/m}$$

$$K9 = 54000 \text{ kN/m}$$

$$K10 = 59125 \text{ kN/m}$$

Voor de stalen palen worden hier voor de palen van diameter 762 mm en dikte 12,5 mm gekozen. De grootheden van deze palen zijn dus als volgt:

$$E_{ps} = 2,1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$I_p = 2 \times \frac{1}{4} \pi \times (762^4 - (762 - 12,5)^4) \text{ mm}^4$$

$$A_p = 2 \times \frac{1}{4} \pi \times (762^2 - (762 - 12,5)^2) \text{ mm}^2$$

$$L_p = 44000 \text{ mm}$$

Om temperatuurinvloeden op de voorspanliggers, druklaag en ook stalenkabels te berekenen zijn van de onderstaande gegevens gebruik gemaakt:

$$\alpha = 10 \times 10^{-6}$$

$$\text{Dagelijkse } \Delta T_{\max} = 5^\circ \text{ c}$$

$$\text{Jaarlijkse } \Delta T_{\max} = 12^\circ \text{ c}$$

$$\Delta T = \sin\left(2\pi \cdot \frac{\text{uur}}{24}\right) \times \Delta T_{\text{dag max}} + \sin\left(2\pi \cdot \frac{\text{dag}}{365}\right) \times \Delta T_{\text{jaar max}}$$

Om krimpinvloed op de voorspanliggers te berekenen zijn van de onderstaande gegevens gebruik gemaakt:

Sterkteklasse = B45

$$\varepsilon'_r = \varepsilon'_c \cdot k_b \cdot k_h \cdot k_p \cdot k_t \leq \varepsilon'_{\max}$$

$$\varepsilon'_c = 0,0001 \text{ zeer vochtig}$$

$$k_b = 0,9$$

$$\varepsilon'_{\max} = 0,00009$$

$$\text{Wapeningpercentage} = 0,22\%$$

$$O_b = 6800 \text{ mm}$$

Om krimpinvloed op de druklaag te berekenen zijn van de onderstaande gegevens gebruik gemaakt:

Sterkteklasse = B45

$$\varepsilon'_r = \varepsilon'_c \cdot k_b \cdot k_h \cdot k_p \cdot k_t \leq \varepsilon'_{\max}$$

$$\varepsilon'_c = 0,0001 \text{ zeer vochtig}$$

$$k_b = 0,9$$

$$\varepsilon'_{\max} = 0,00009$$

$$\text{Wapeningpercentage} = 0,18\%$$

$$O_b = 9650 \text{ mm}$$

Om kruipinvloed op de voorspanliggers te berekenen zijn van de onderstaande gegevens gebruik gemaakt:

Sterkteklasse = B45

$$\phi(t, t_c) = k_c \times k_b \times k_h \times k_d \times k_t \leq \phi_{\max}$$

$$k_c = 1,4 \text{ zeer vochtig}$$

$$k_b = 0,9$$

$$\phi_{\max} = 1,5$$

$$t_c = 28 \text{ dagen}$$

$$O_b = 6800 \text{ mm}$$

Om kruipinvloed op de druklaag te berekenen gelden zijn van de onderstaande gegevens gebruik gemaakt:

Sterkteklasse = B45

$$\phi(t, t_c) = k_c \cdot k_b \cdot k_h \cdot k_d \cdot k_t \leq \phi_{\max}$$

$$k_c = 1,4 \text{ zeer vochtig}$$

$$k_b = 0,9$$

$$\phi_{\max} = 1,5$$

$$t_c = 58 \text{ dagen}$$

$$O_b = 9650 \text{ mm}$$

Om de aanvangsvoorspankracht in het model in beschouwing te nemen wordt hier van een constant initiële rek in de voorspanelementen gebruik gemaakt. Deze rek wordt als een soort krimp in het programma beschouwd. Dus het proces van de implementatie van deze initiële rek is hetzelfde als de krimpimplementatie. Deze initiële rek blijft constant in de loop van de tijd. De aanvangsvoorspankracht is in het rapport met de waarde  $P_0 = 2960 \text{ kN}$  per ligger gevonden. De waarde van de initiële rek is:

$$f_p = \frac{P_0}{A_p}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{f_p}{E_{st}}$$

$$f_p = 1358 \text{ N/mm}^2$$

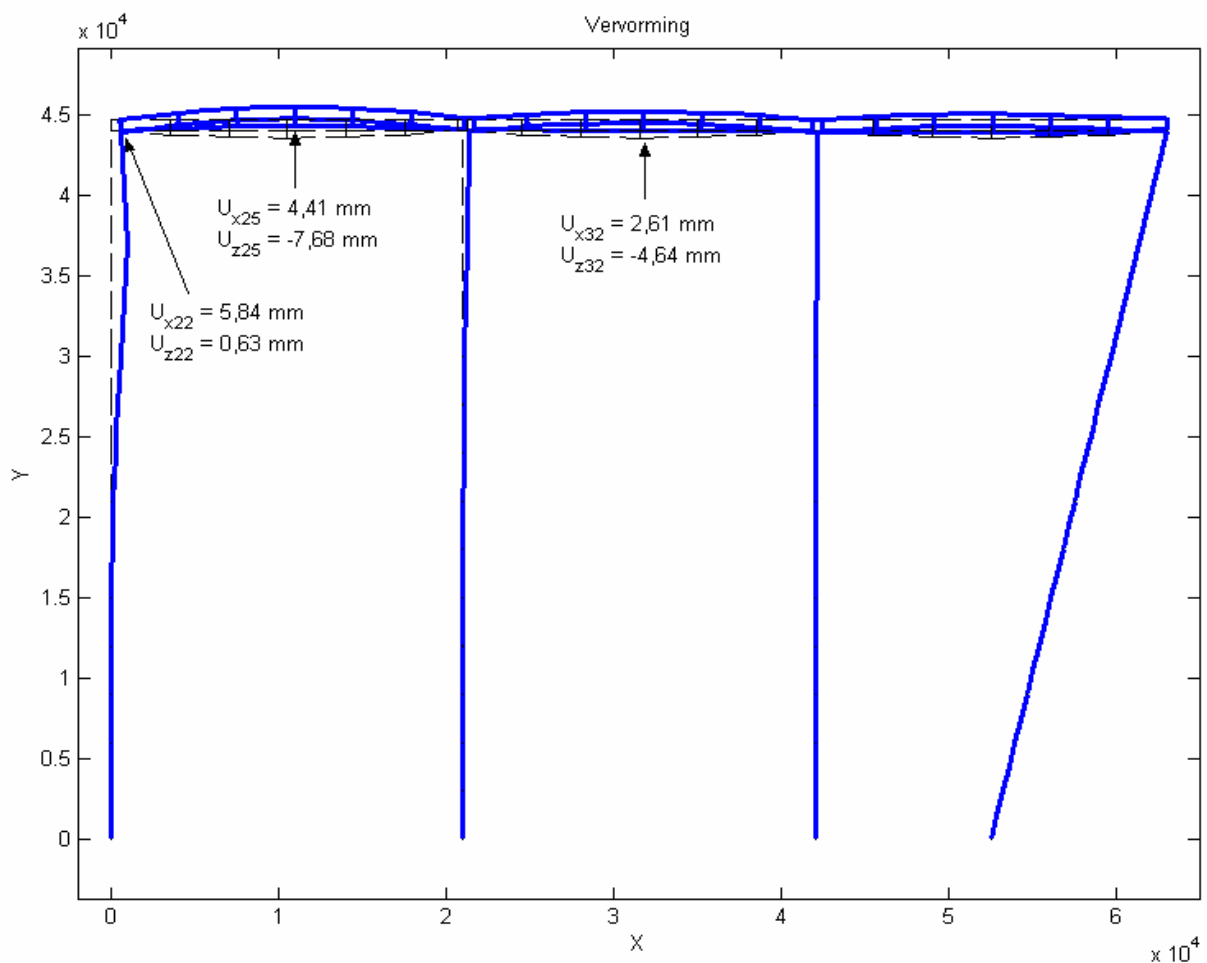
$$E_{st} = 2,1 \times 10^5$$

Op drie verschillende tijdstippen de normaalkrachtlijnen en vervorming van de

constructie berekend. Eerste is het eind van de eerste dag na de uitvoering van de constructie (eerste dag van gebruikfase). Het tweede tijdstip is aan het eind van het tweede jaar. En de derde is aan het eind van de levensduur van de brug dus aan het eind van het twintigste jaar. Een aantal punten van de constructie zijn gekozen om het verplaatsingsverloop in de loop van de tijd nader te bekijken.

### 10.4 Vervorming tengevolge van de voorspankracht

Hier wordt de vervorming van de constructie ten gevolge van alleen voorspankracht in figuur 10.10 weergegeven. De vervorming van de constructie is in de zevende bouwphase berekend, zie figuur 10.5. Dus hier is sprake van alleen eigengewicht van de liggers en druklaag. Zo kan het implementeren van de initiële rek ten gevolge van de voorspankracht worden getoetst. Er is te zien dat de vervormingen van de constructie ten gevolge van de voorspankracht naar verwachting is.

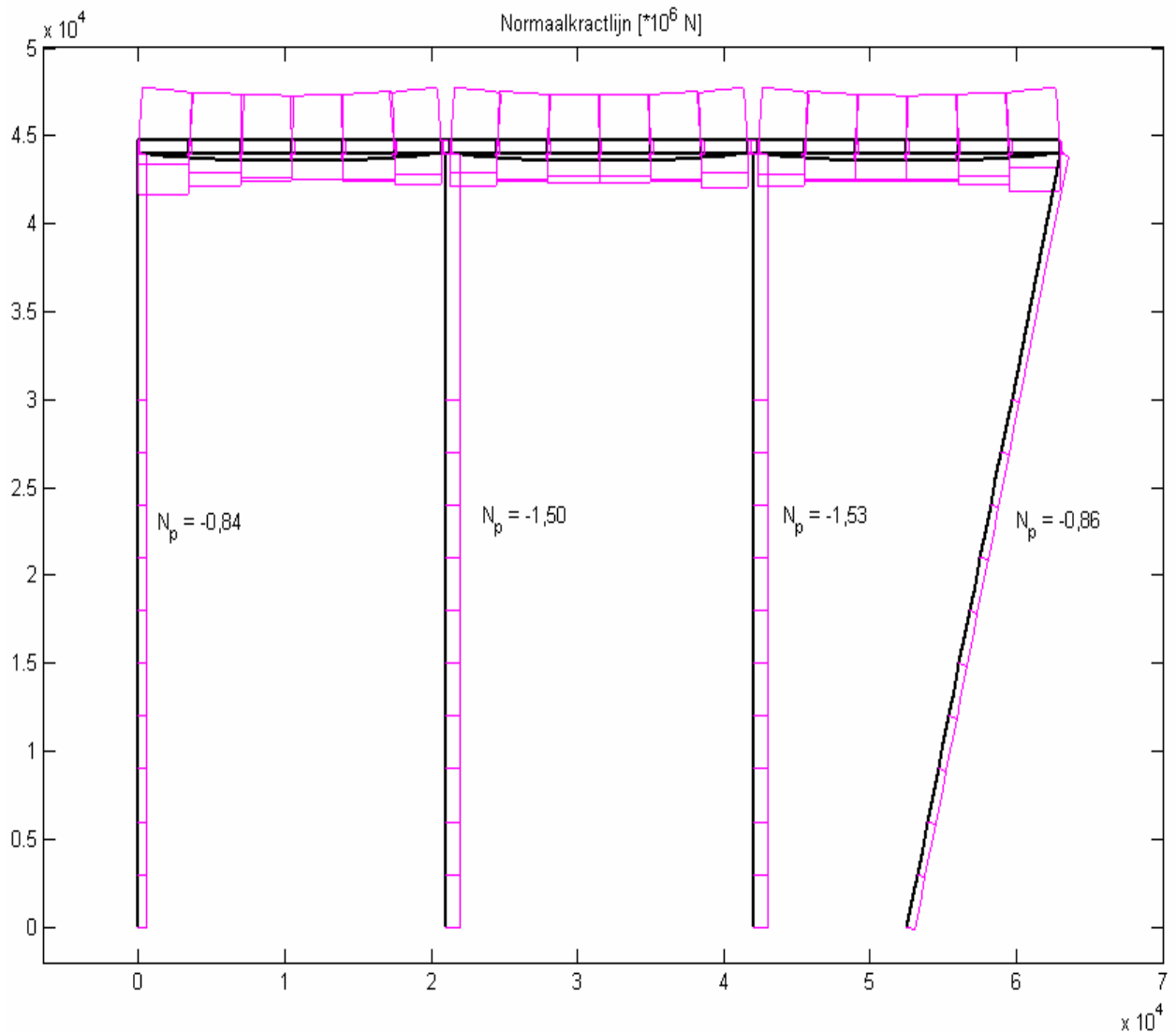


Figuur 10.10: Vervorming tengevolge van voorspankracht en eigengewicht van constructie

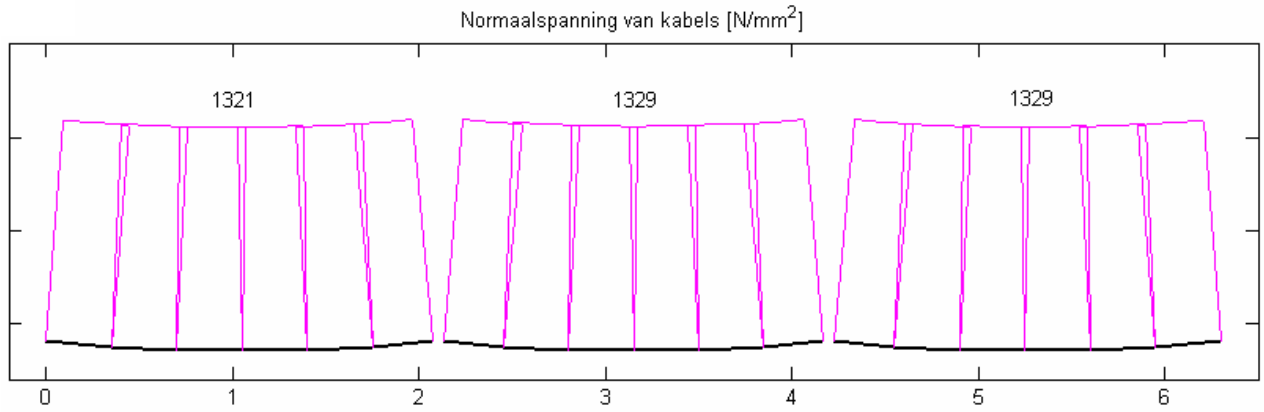


## 10.5 Resultaten na de eerste dag van de gebruikfase

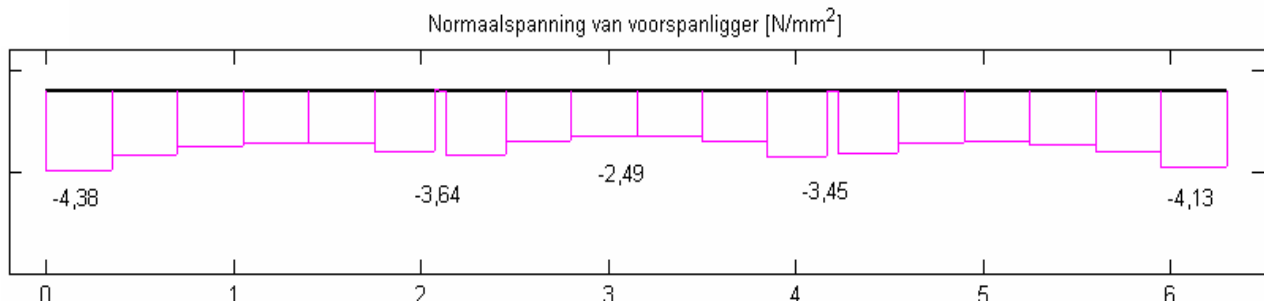
Op deze dag zijn alle verticale en horizontale belasting op de constructie aangebracht en de verbindingen zijn tevens uitgevoerd. Hier worden de normaalkrachtlijnen van de gehele constructie, de voorspanelementen, de voorspanliggers en de druklaag getekend. Tevens wordt hier de vervorming van de constructie na één dag geplot, zie figuur 10.11 tot en met 10.15.



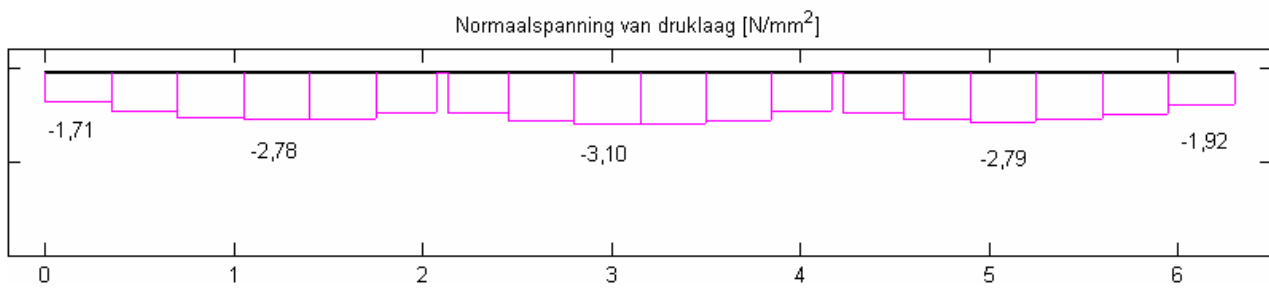
Figuur 10.11: Normaalkrachtlijnen van de constructie na de eerste dag van gebruikfase



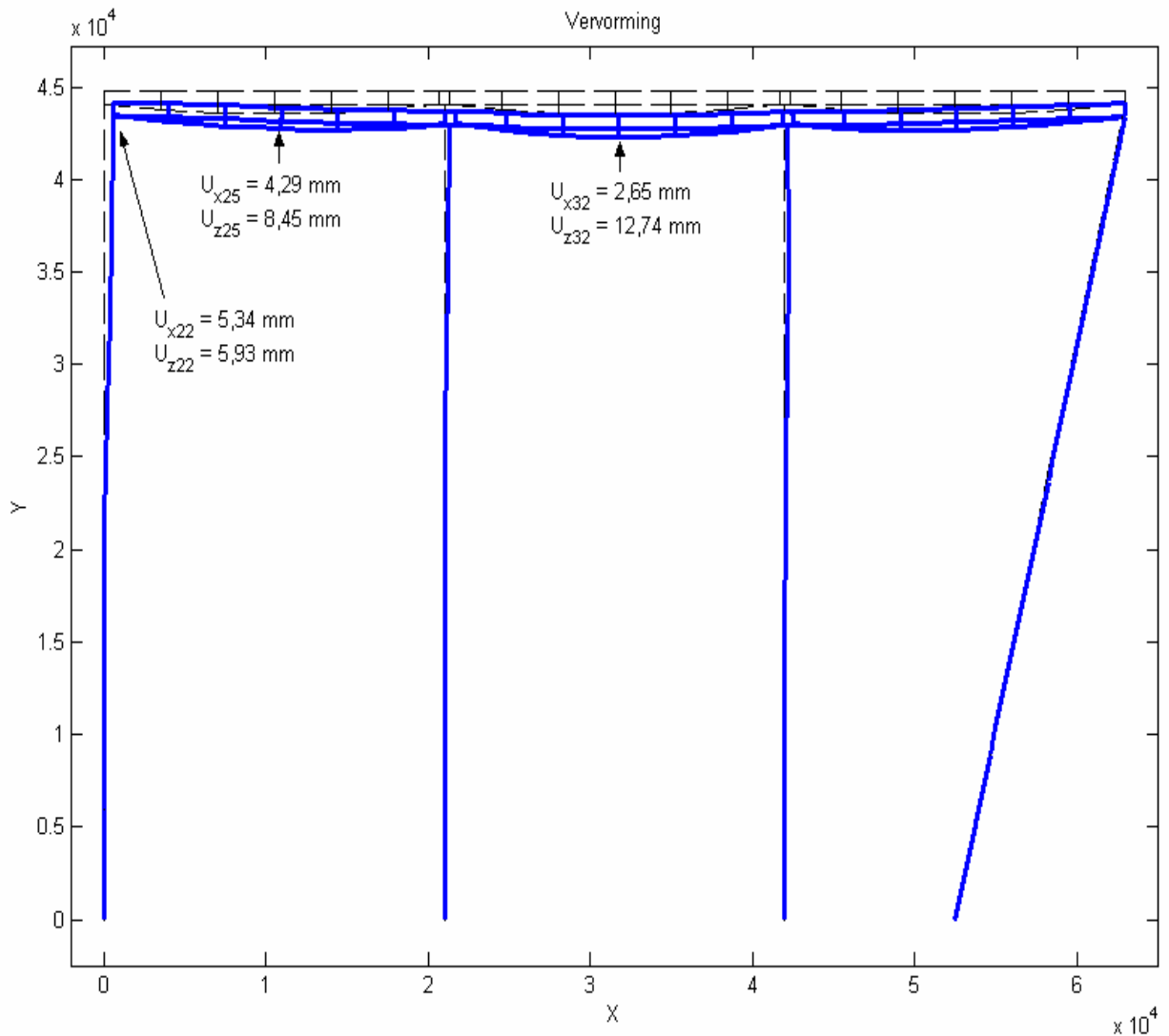
*Figuur 10.12: Normaalspanning van de kabels na de dag van gebruikfase*



*Figuur 10.13: Normaalspanning van de voorspanliggers na dag van gebruikfase*



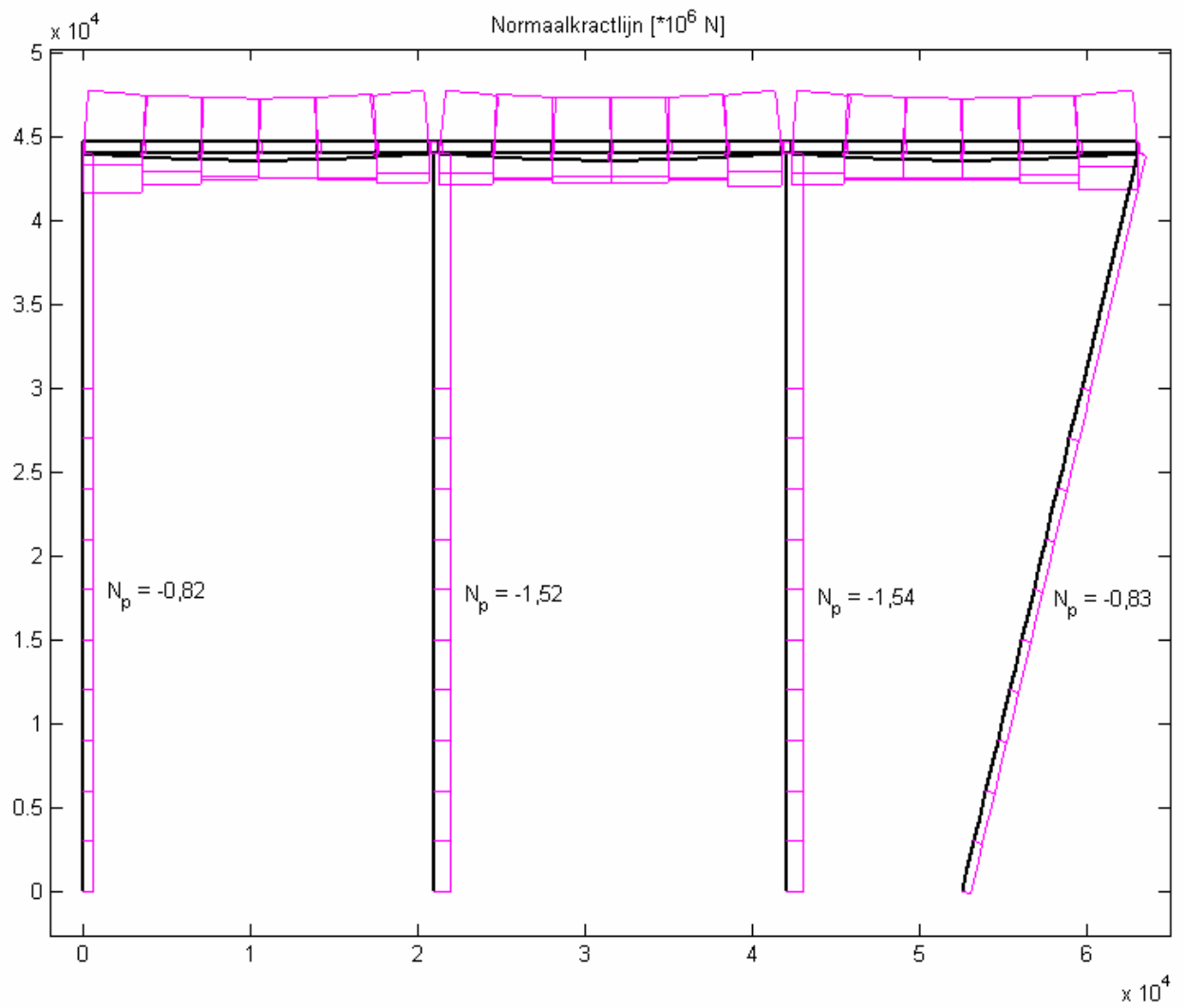
*Figuur 10.14: Normaalspanning van de druklaag dag van gebruikfase*



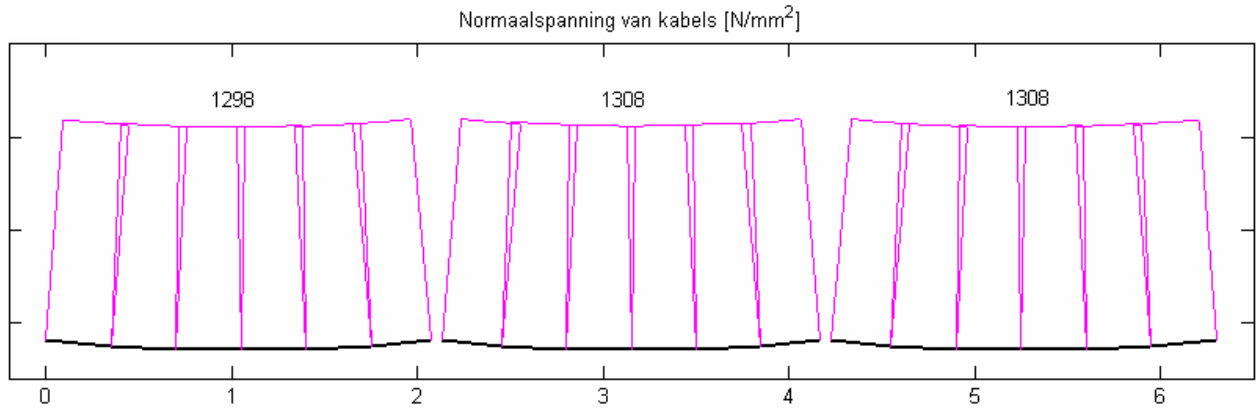
*Figuur 10.15: Vervorming van de constructie dag van gebruikfase*

## **10.6 Resultaten na het tweede jaar**

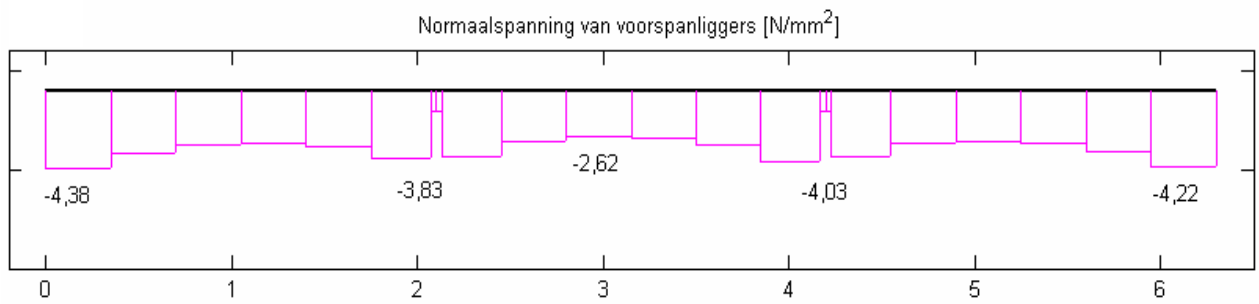
Hier worden de normaalkrachtlijnen van de voorspanelementen, de gehele constructie, de voorspanliggers en de druklaag getekend na tweede jaar berekend, zie figuur 10.16 tot en met 10.19. Tevens wordt hier de vervorming van de constructie en het verplaatsing- en tijddiagram van een aantal punten van de constructie geplot, zie figuur 10.19 tot en met 10.23. De plaatsen van deze punten zijn in figuur 10.20 weergegeven.



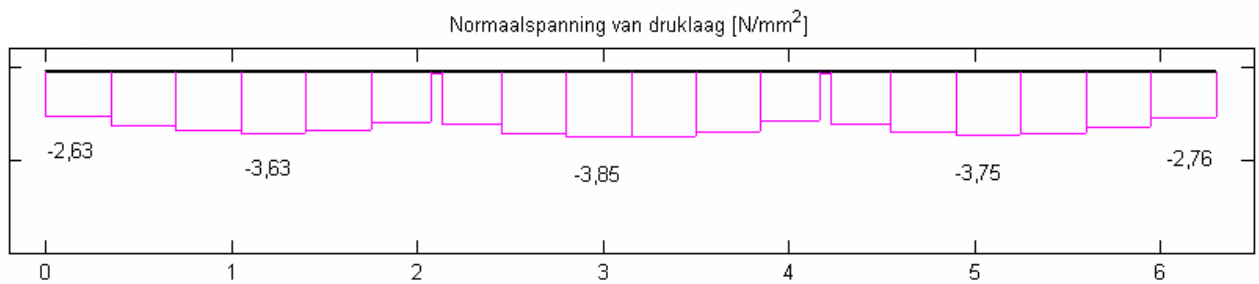
*Figuur 10.16: Normaalkrachtlijnen van de constructie na het tweede jaar*



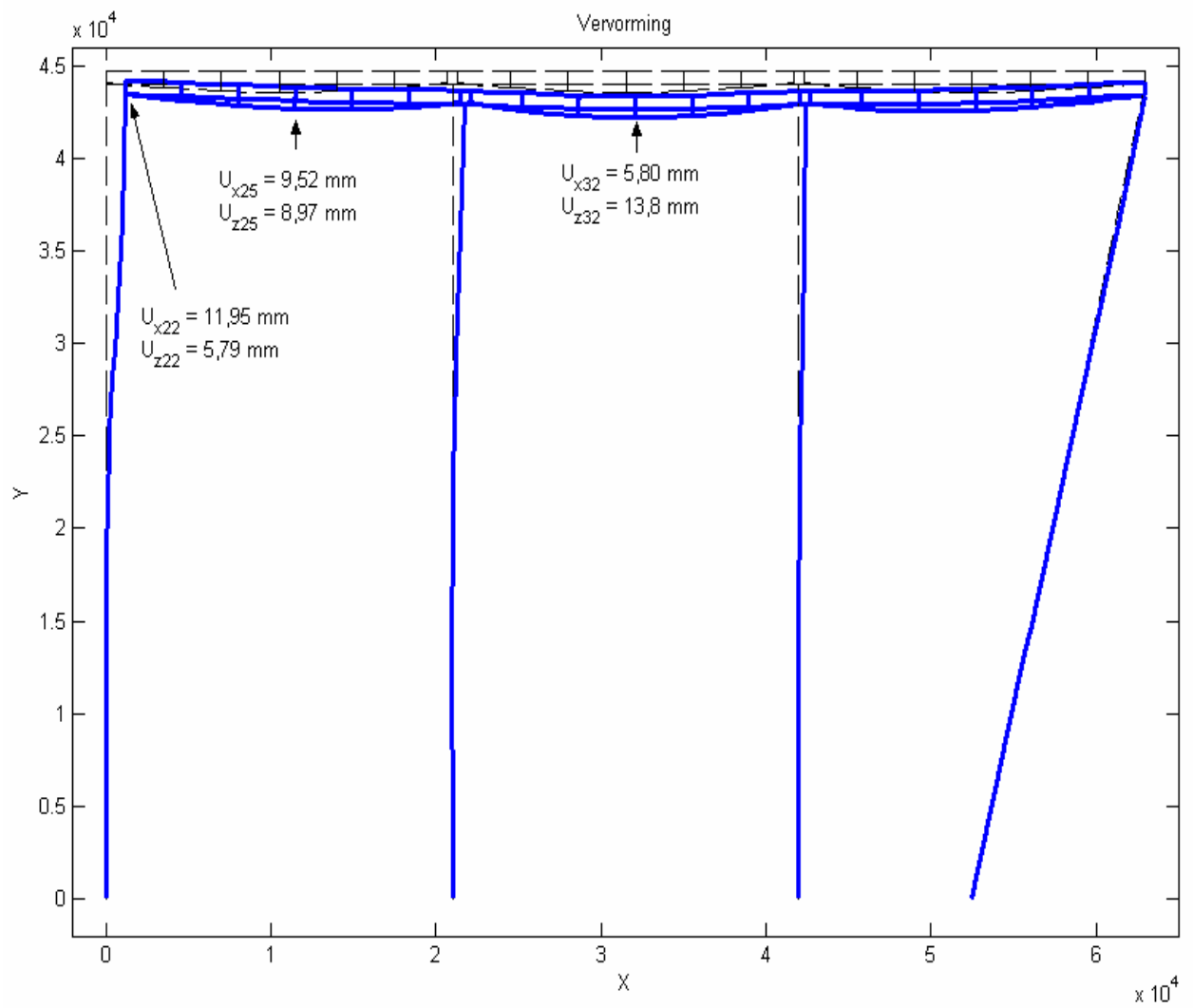
*Figuur 10.17: Normaalspanning van kabels na het tweede jaar*



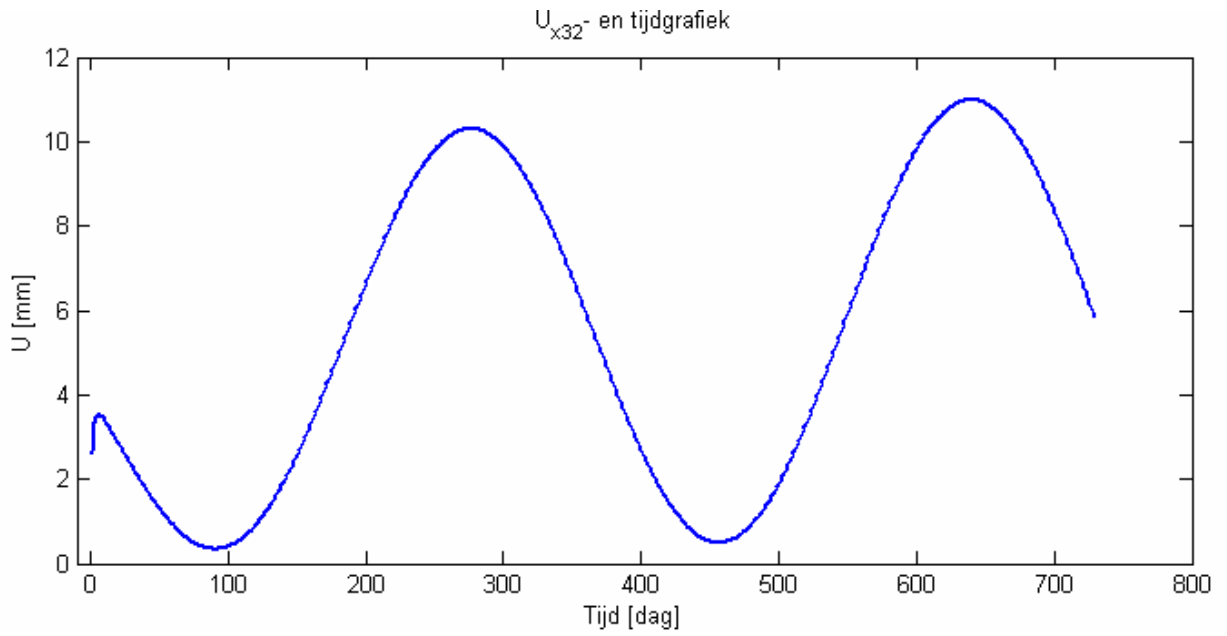
*Figuur 10.18: Normaalspanning van de voorspanliggers na het tweede jaar*



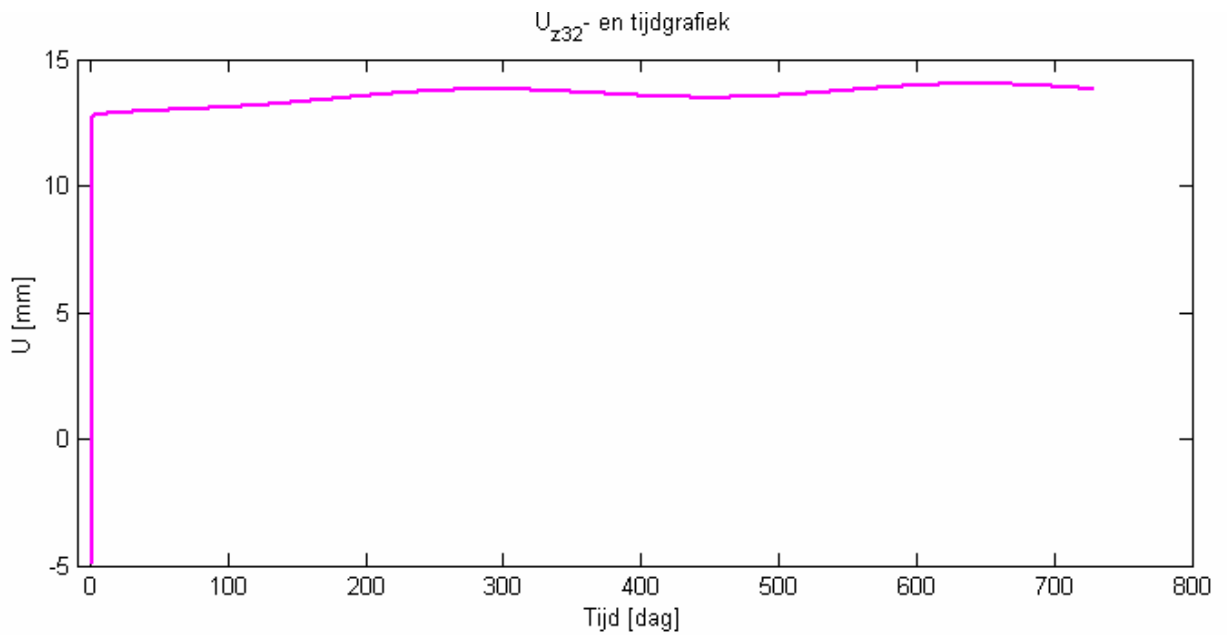
*Figuur 10.19: Normaalspanning van de druklaag na het tweede jaar*



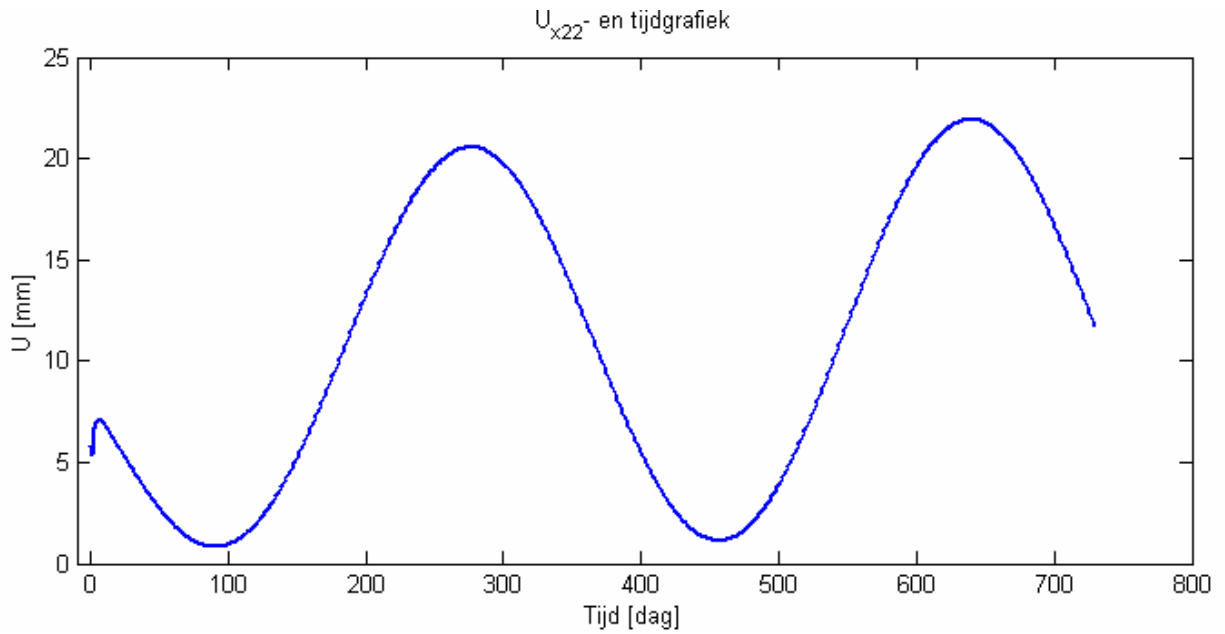
*Figuur 10.20: Vervorming van de constructie na het tweede jaar*



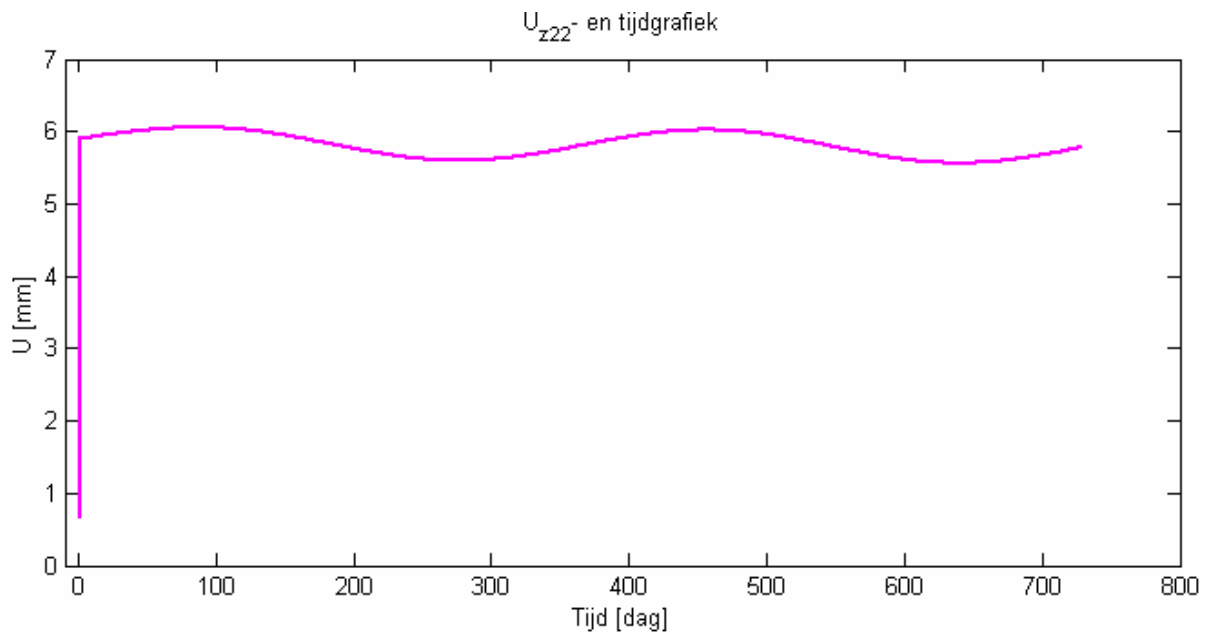
*Figuur 10.21: Verplaatsing (x)- en tijddiagram van het middelpunt in het midden van de overspanning*



*Figuur 10.22: Verplaatsing (z)- en tijddiagram van het middelpunt in het midden van de overspanning*



*Figuur 10.23: Verplaatsing (x)- en tijddiagram van het kruispunt van de linker overspanning en paal*



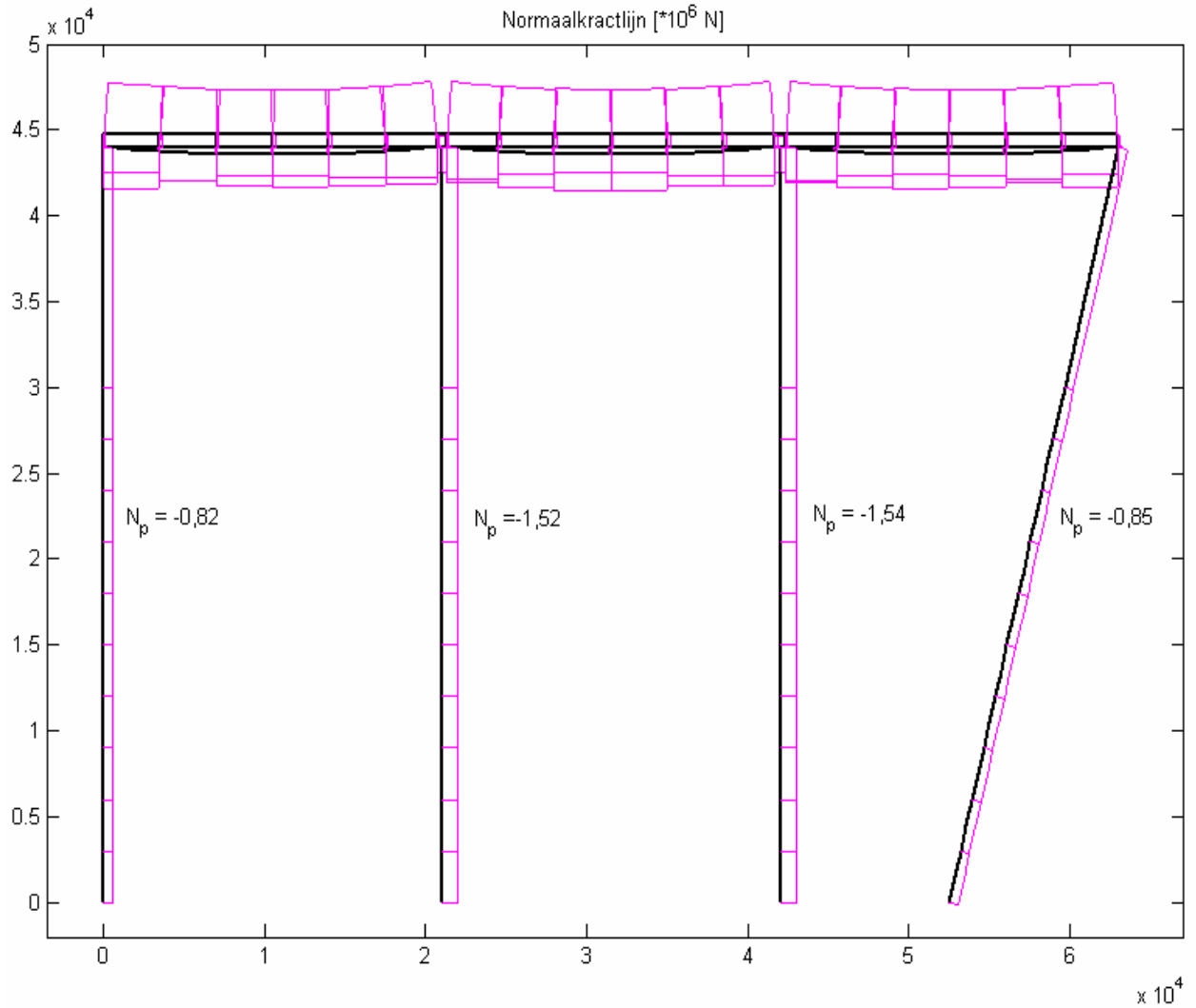
*Figuur 10.24: Verplaatsing (z)- en tijddiagram van het kruispunt van de linker overspanning en paal*

### **10.7 Resultaten na het twintigste jaar**

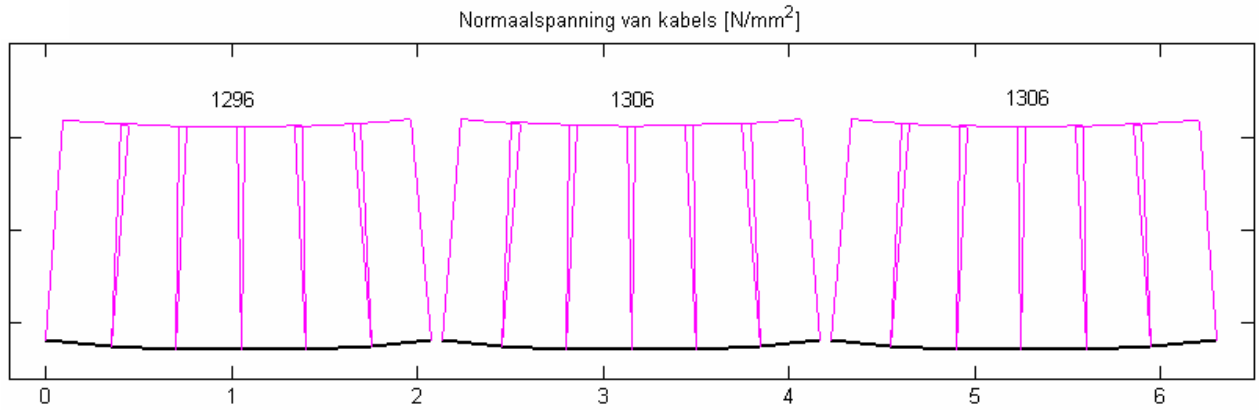
Hier wordt de normaalkrachtlijnen van de voorspanelementen, de gehele constructie, de



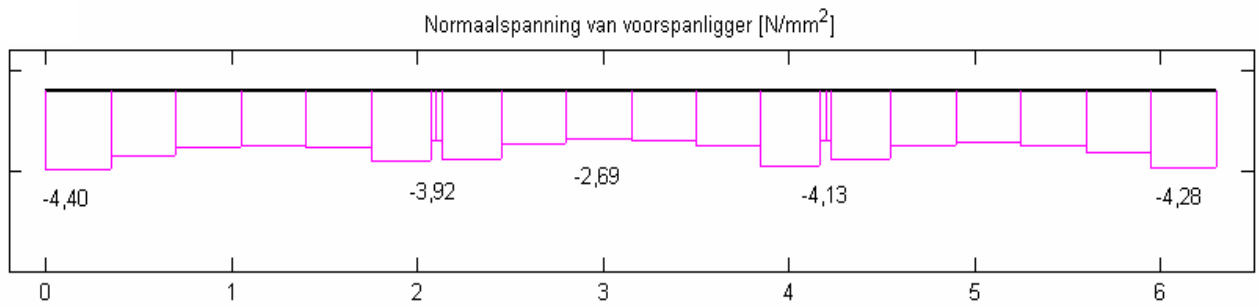
voorspanliggers en de druklaag getekend na twintig jaar berekend, zie figuur 10.25 tot en met 10.29. Tevens wordt hier de vervorming van de constructie en het verplaatsing- en tijddiagram van een aantal punten van de constructie geplot, zie figuur 10.29 tot en met 10.33. De plaatsen van deze punten zijn in figuur 10.29 weergegeven.



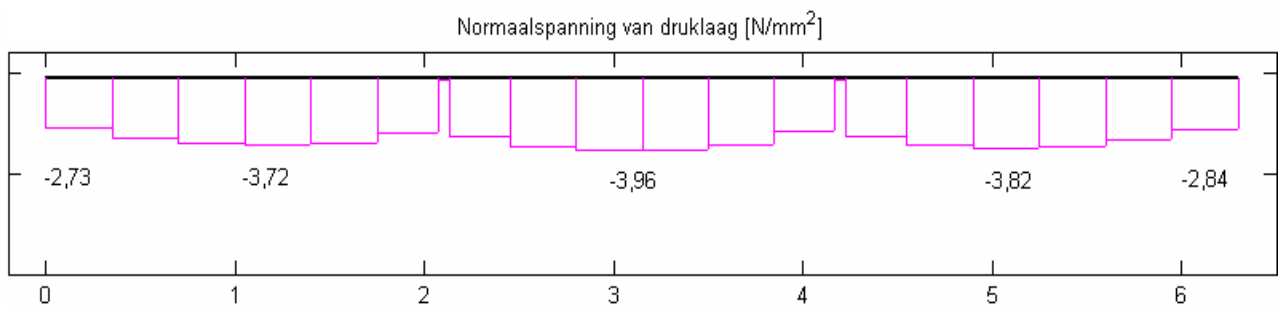
*Figuur 10.25: Normaalkrachtlijnen van de constructie na het twintigste jaar*



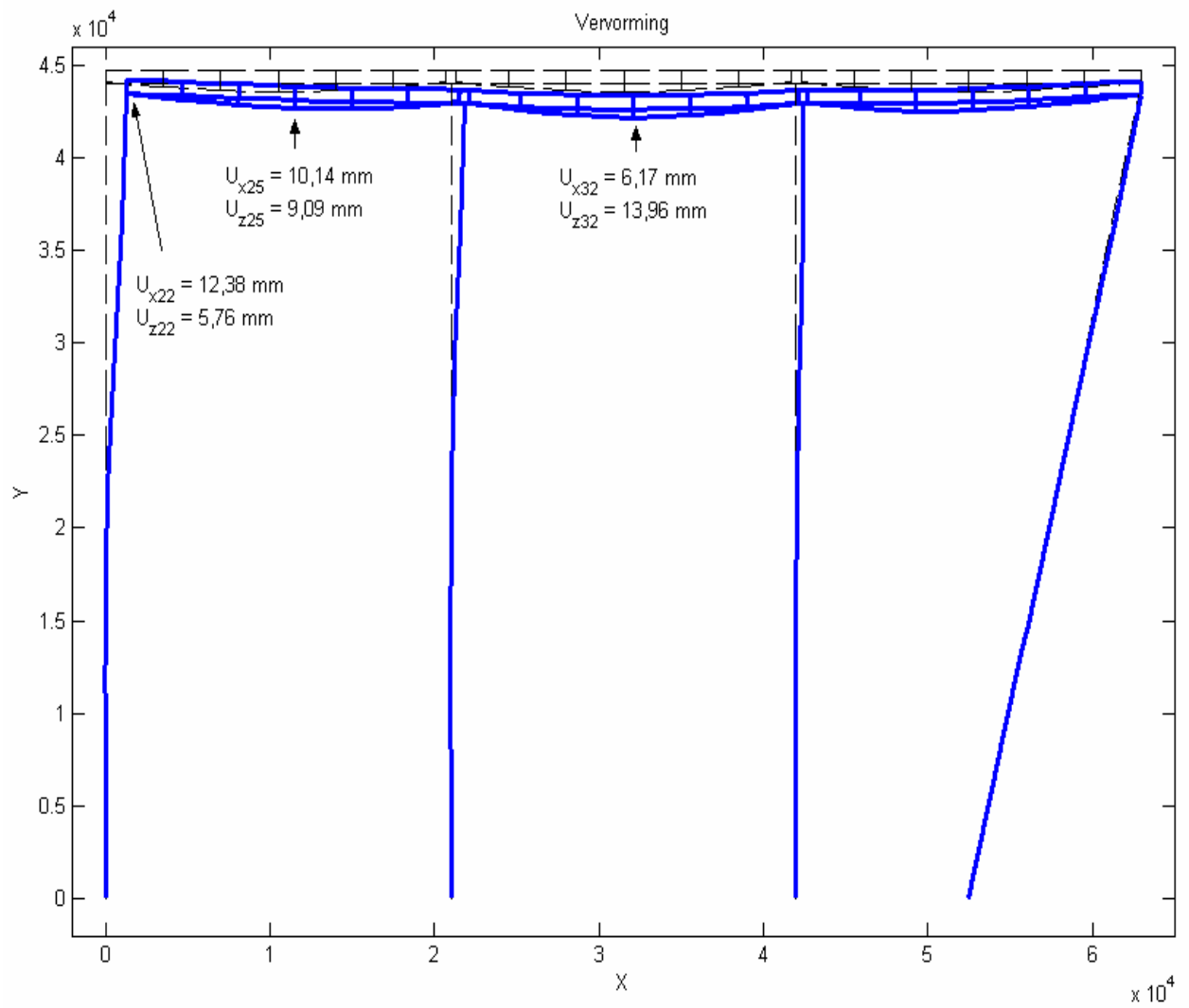
*Figuur 10.26: Normaalspanning van de kabels na het twintigste jaar*



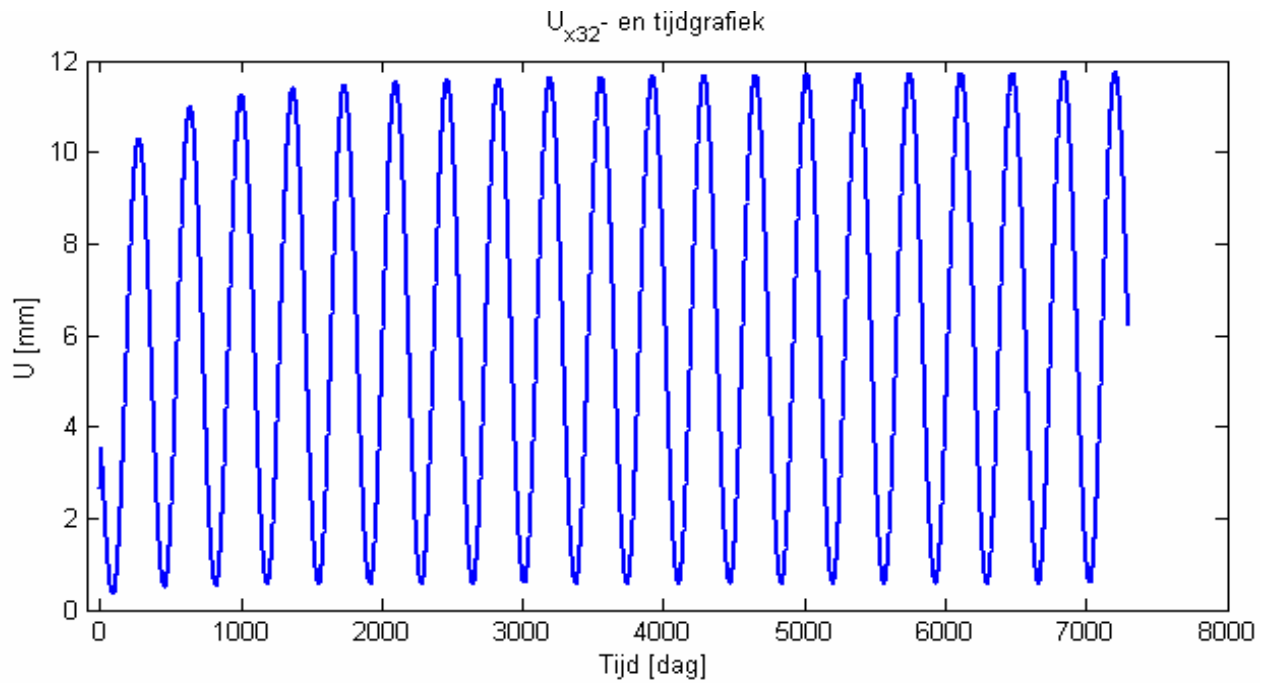
*Figuur 10.27: Normaalspanning van de voorspanliggers na het twintigste jaar*



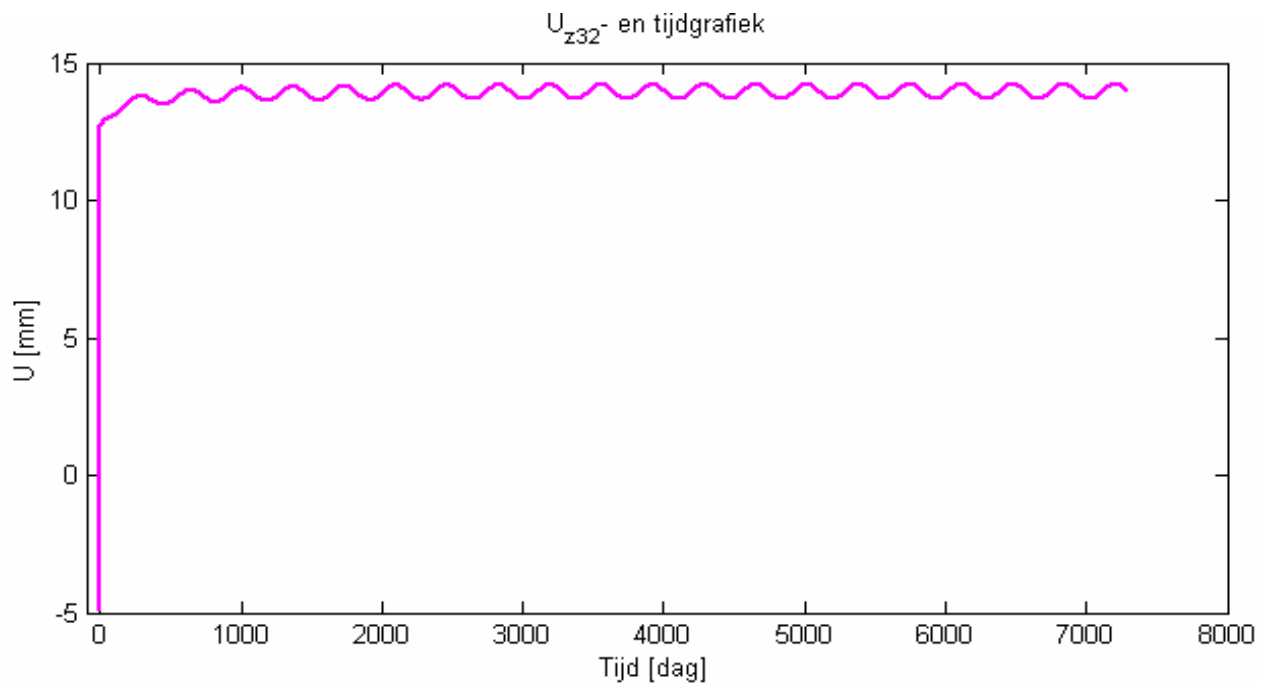
*Figuur 10.28: Normaalspanning van de druklaag na het twintigste jaar*



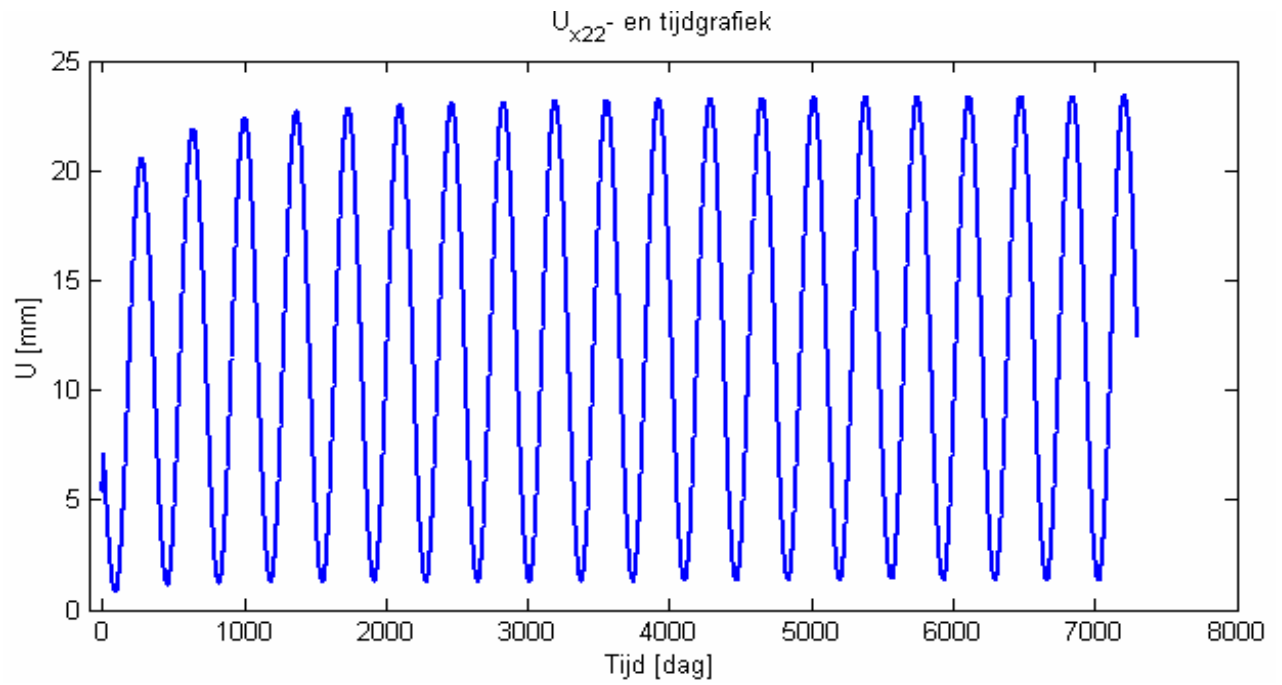
Figuur 10.29: Vervorming van de constructie het twintigste jaar



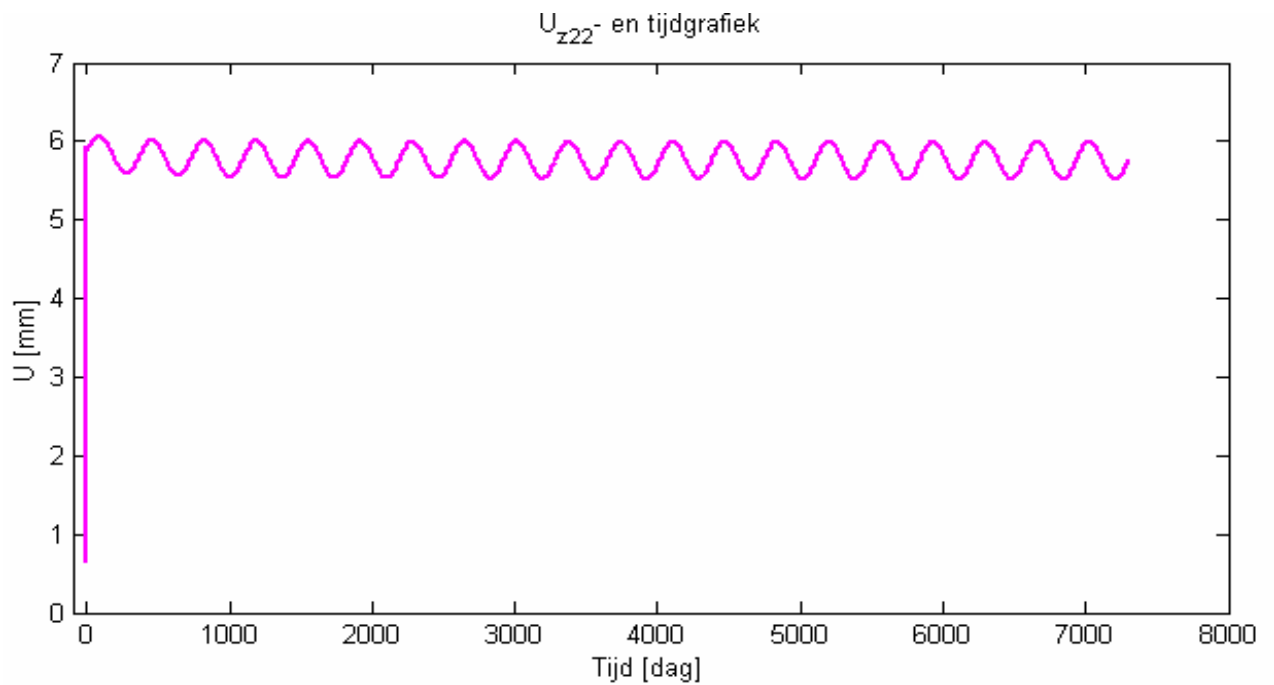
*Figuur 10.30: Verplaatsing (x)- en tijddiagram van het middelpunt in het midden van de overspanning*



*Figuur 10.31: Verplaatsing (z)- en tijddiagram van het middelpunt in het midden van de overspanning*



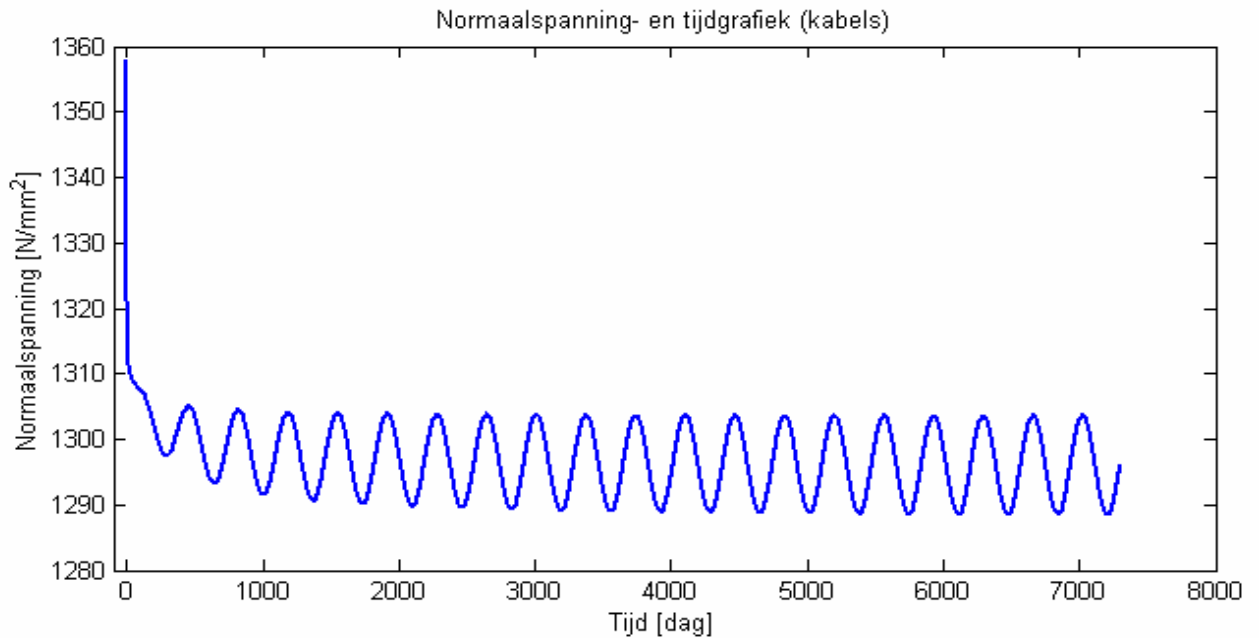
Figuur 10.32: Verplaatsing (x)- en tijddiagram van het kruispunt van de linker overspanning en paal



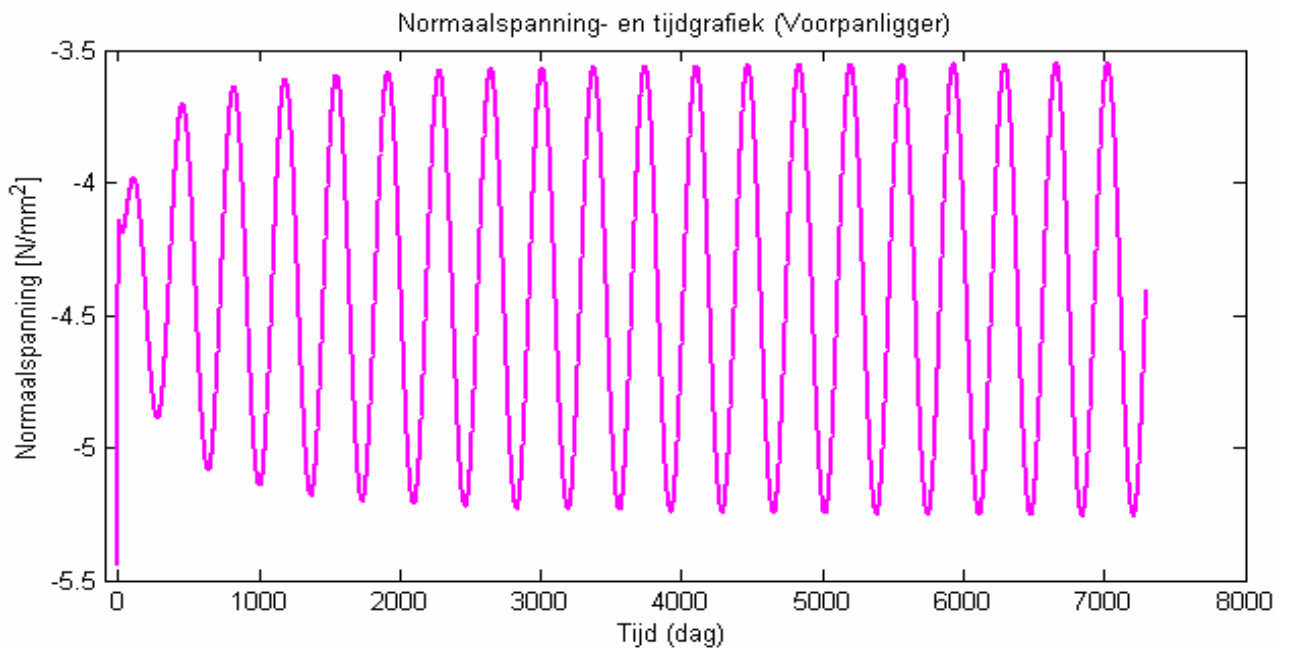
Figuur 10.33: Verplaatsing (z)- en tijddiagram van het kruispunt van de linker overspanning en paal

## 10.8 Voorspanverlies in de loop van de tijd

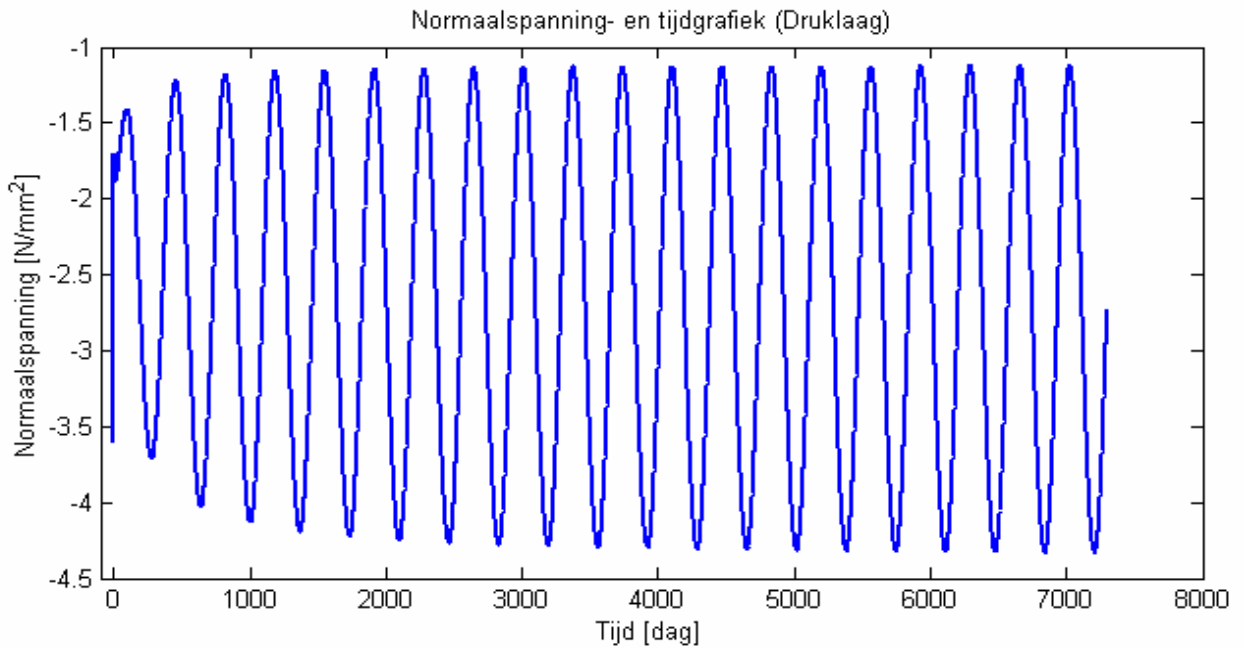
In figuur 10.34, 10.35 en 10.36 zijn de normaalspanning- en tijdgrafieken van de kabels, voorspanliggers en druklaag weergegeven.



*Figuur 10.34: Normaalkracht- en tijdgrafiek van de kabel*



*Figuur 10.35: Normaalkracht- en tijdgrafiek van de voorspanligger*



Figuur 10.36: Normaalkracht- en tijdgrafiek van de druklaag

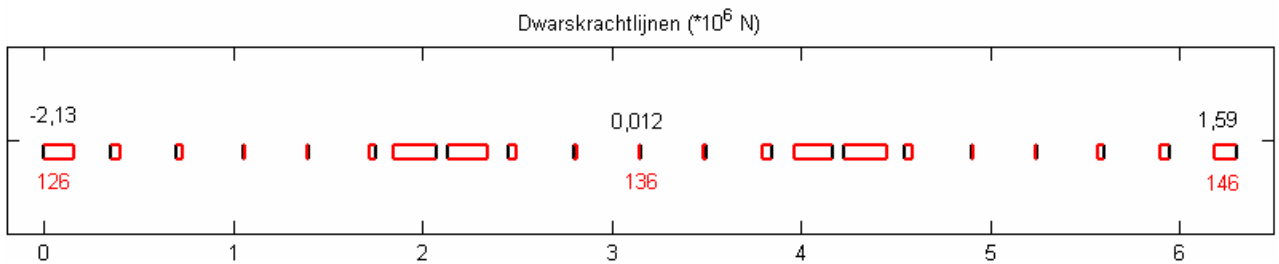
In figuur 10.34 is te zien dat het voorspanverlies van de kabels is:

$$\text{Voorspanverlies} = \frac{\text{aanvangsvoorspanning} - \text{voorspanning}^{20\text{stejaar}}}{\text{aanvangsvoorspanning}} \times 100\%$$

$$\text{Voorspanverlies} = \frac{1358 - 1296}{1358} \times 100\% = 4,6\%$$

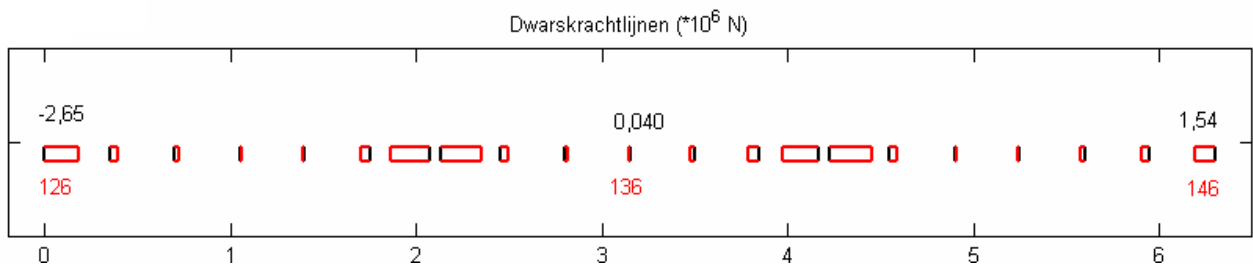
### **10.9 Interactie tussen druklaag en voorspanliggers**

Voor de berekening van de schuifspanning tussen de druklaag en de voorspanliggers dient de dwarskrachten van de verbindingselementen tussen de druklaag en de voorspanliggers te worden berekend. Dus de dwarskrachten van deze elementen representeren de schuifkrachten tussen de druklaag en de voorspanliggers. In figuur 10.37 zijn de dwarskrachten van deze elementen na de eerste dag weergegeven.



*Figuur 10.37: Dwarskrachtlijnen van de verbindingselementen tussen de druklaag en de voorspanliggers, na de eerste dag*

In figuur 10.38 zijn de dwarskrachten van deze elementen na het twintigste jaar weergegeven.

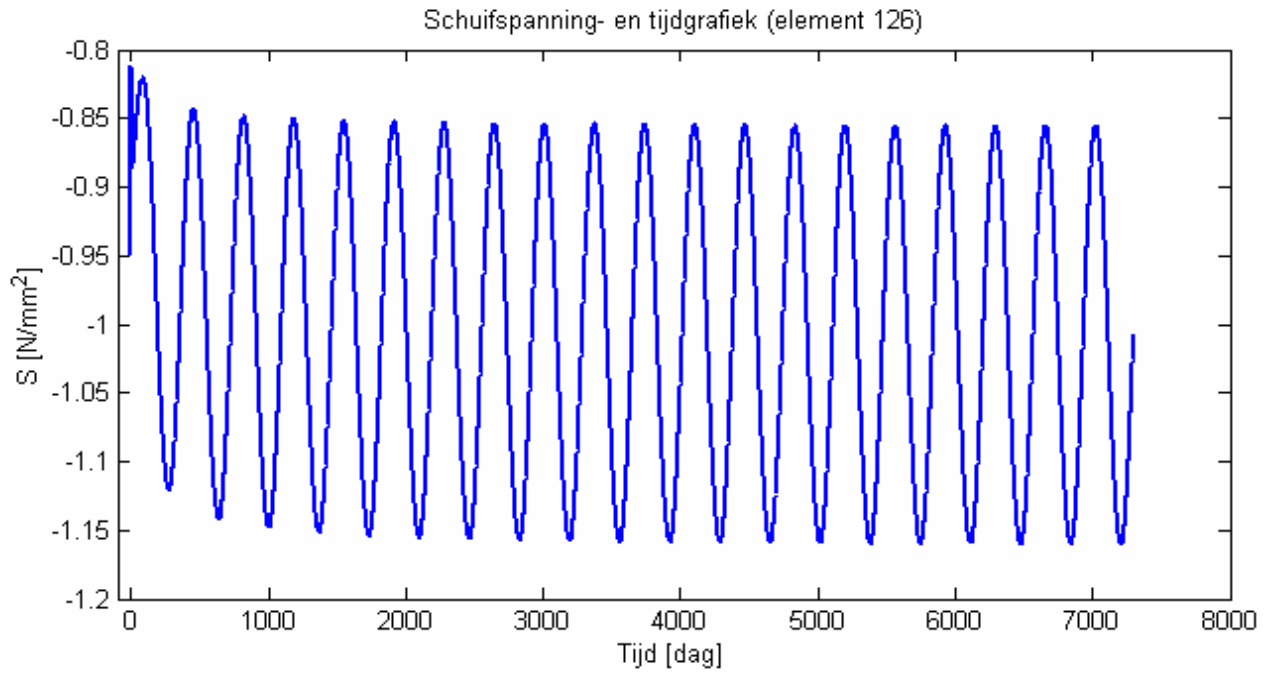


*Figuur 10.38: Dwarskrachtlijnen van de verbindingselementen tussen de druklaag en de voorspanliggers, na het twintigste jaar*

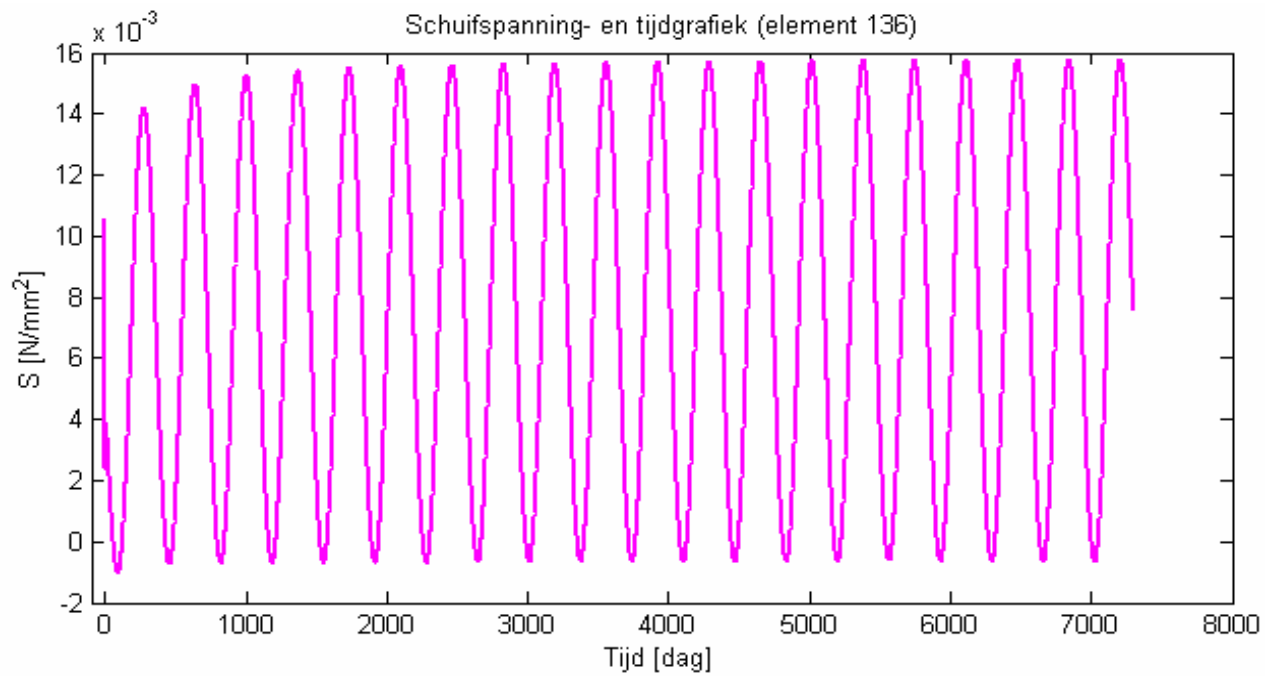
Hier is te zien dat de dwarskracht van het rechtse element (element 126) 17% groter wordt. De dwarskracht van het linkse element (element 146) wordt 3% kleiner. De dwarskracht is gedeeld door het oppervlak van een horizontale snede met als lengte de hart op hart afstand van de verbindingselementen.

In figuur 10.39, 10.40 en 10.41 zijn de schuifspanning- en tijdgrafiek van het element 126, element 136 en element 146 weergegeven in de loop van het twintig jaar.

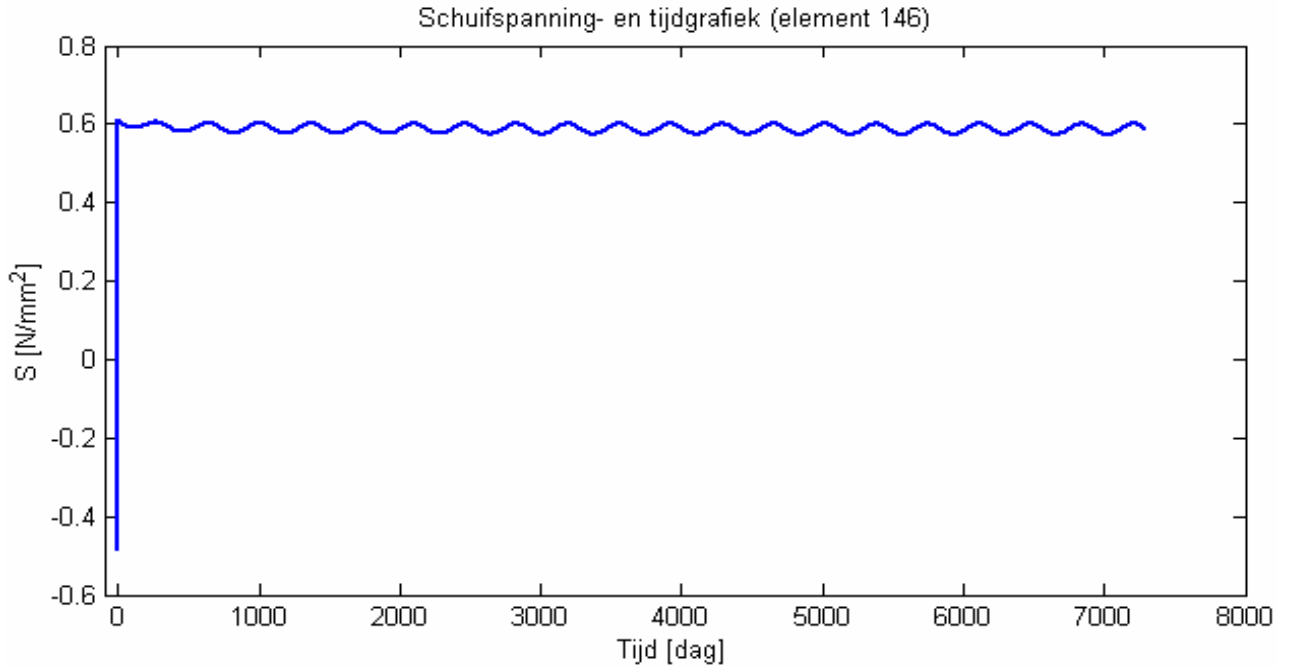




*Figuur 10.39: Schuifspanning- en tijdverloop, element 126*



*Figuur 10.40: Schuifspanning- en tijdverloop, element 136*



*Figuur 10.41: Schuifspanning- en tijdverloop, element 146*

Voor de elementen 126 en 146 gelden:

$$L = \frac{3500}{2} \text{ mm}$$

$$B = 750 \times 2 = 1500 \text{ mm}$$

$$A = L \times B$$

Voor het element 136 geldt:

$$L = 3500 \text{ mm}$$

$$B = 750 \times 2 = 1500 \text{ mm}$$

$$A = L \times B$$

De maximale waarde van de schuifspanning is  $\tau = 1 \text{ N/mm}^2$ . Zoals verwacht is de schuifspanning groot bij het einde van de liggers. Echter, de waarde is kleiner dan de rekenwaarde van de schuifspanning. Dus er bestaat geen gevaar voor losscheuren van de druklaag.

# 11 Parameterstudie

## 11.1 Inleiding

In dit hoofdstuk worden de parameters die invloed zouden kunnen hebben op het tijdafhankelijke gedrag van de brug gekozen en gevarieerd. De gekozen parameters voor deze parameterstudie zijn de aanvangsvoorspankracht, de uitvoeringswijze van de liggers (voorspanliggers met nagerekt gekromde kabels of voorspanliggers met recht voorgerekte voorspanelementen), de betonsoort van de liggers en druklaag, doorsnede van de ligger, druklaag en palen, de verticale en horizontale belastingen, klimaat en tenslotte locatie. Alle afmetingen en eigenschappen van dit model zijn dezelfde als model van hoofdstuk 10.

## 11.2 Aanvangsvoorspankracht

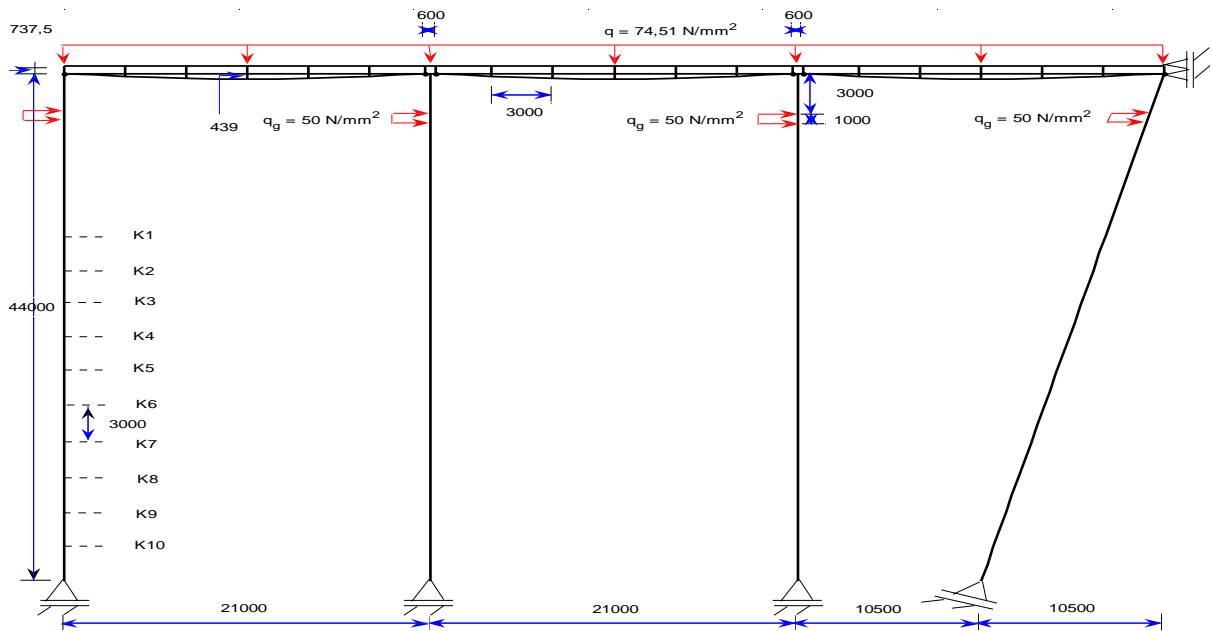
Hier wordt de verandering van het voorspanverlies, de drukspanning van de liggers en druklaag, de schuifspanning tussen de liggers en druklaag, de maximale horizontale en verticale verplaatsingen ten gevolge van de toenemende voorspankracht bestudeerd. Deze behandeling wordt voor de liggers met nagerekte en respectievelijk voorgerekte voorspanelementen uitgevoerd.

### 11.2.1 Nagerekte voorspanliggers met gekromde kabels

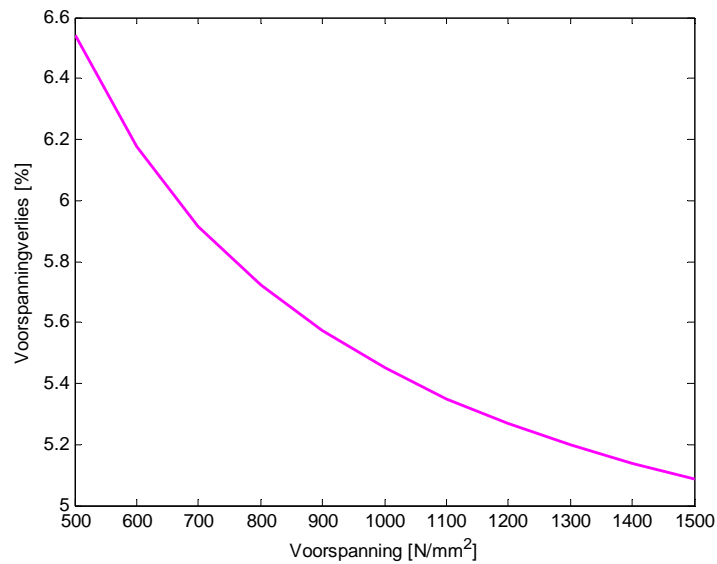
In figuur 11.1 is het model als geheel te zien. Hier wordt de aanvangsvoorspanning in de kabels van 500 N/mm<sup>2</sup> naar 1500 N/mm<sup>2</sup> met de stapgrootte van 100 N/mm<sup>2</sup> vergroot.

In figuur 11.2 is het verloop van het voorspankrachtsverlies als functie van de aanvangsvoorspanning te zien. De gebruikte formule voor de verticale as in figuur 11.2 is:

$$\frac{\text{Spanningverlies}_{1^{\text{de}} \text{ jaar}} - \text{Spanningverlies}_{20^{\text{ste}} \text{ jaar}}}{\text{Spanningverlies}_{1^{\text{de}} \text{ jaar}}} \times 100\%$$



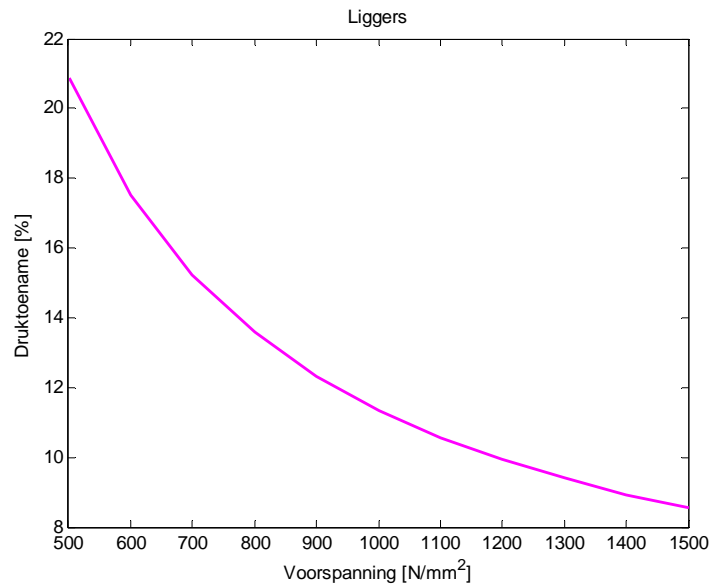
Figuur 11.1: Model met nagerekte voorspanliggers



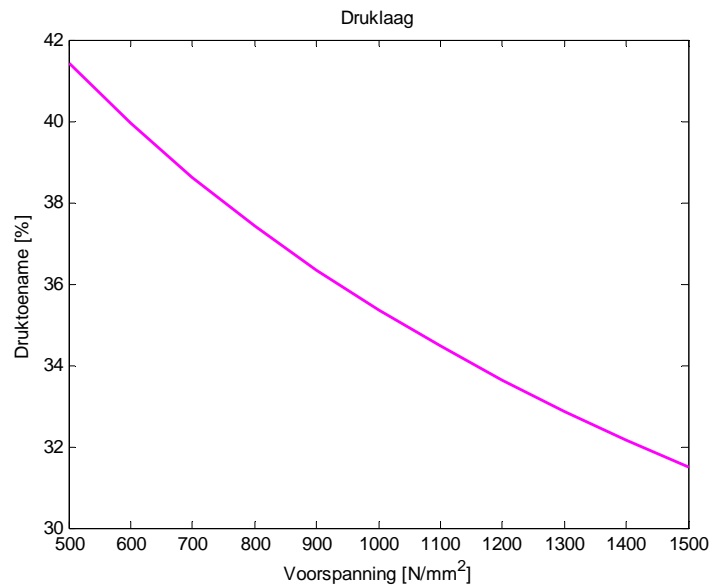
Figuur 11.2: Voorspanningverlies als functie van de voorspanning in de kabels

De gebruikte formule voor de verticale as in figuur 11.3 en 11.4 is:

$$\frac{\text{Drukspanning}_{20^{\text{e}} \text{ jaar}} - \text{Drukspanning}_{1^{\text{de}} \text{ dag}}}{\text{Drukspanning}_{20^{\text{e}} \text{ jaar}}} \times 100\%$$

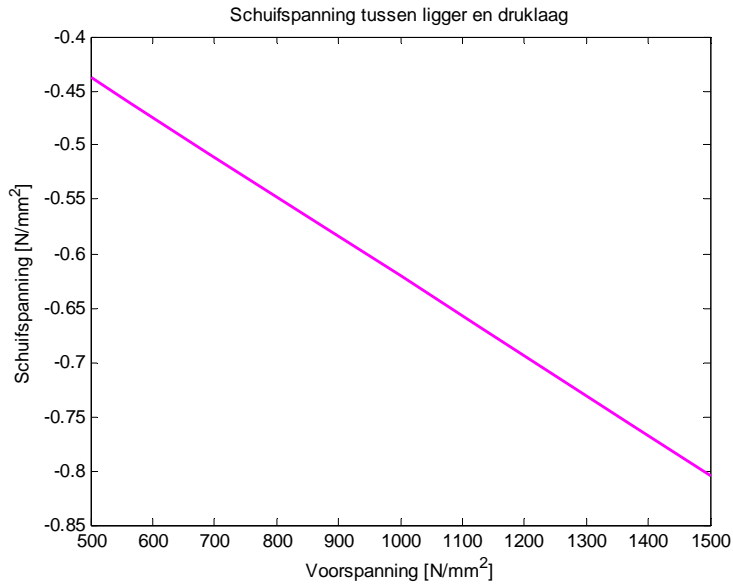


*Figuur 11.3: Druktoename (ligger) als functie van de voorspanning*



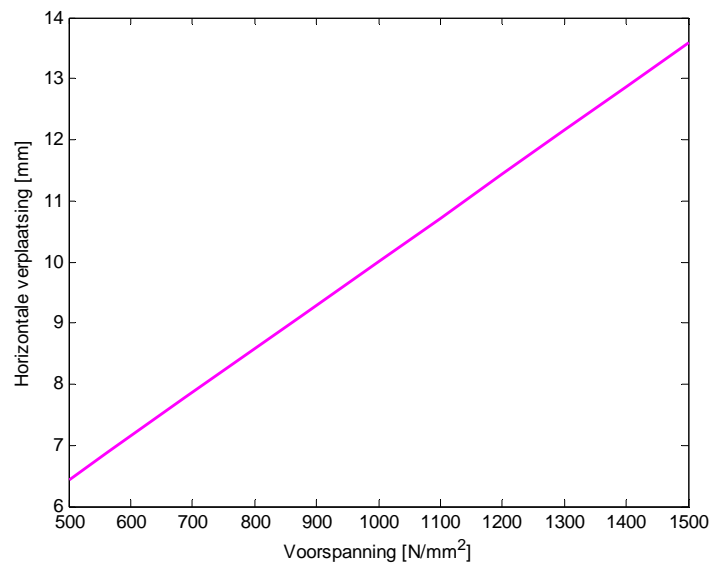
*Figuur 11.5: Druktoename (druklaag) als functie van de voorspanning*

In figuur 11.6 wordt het verloop van de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



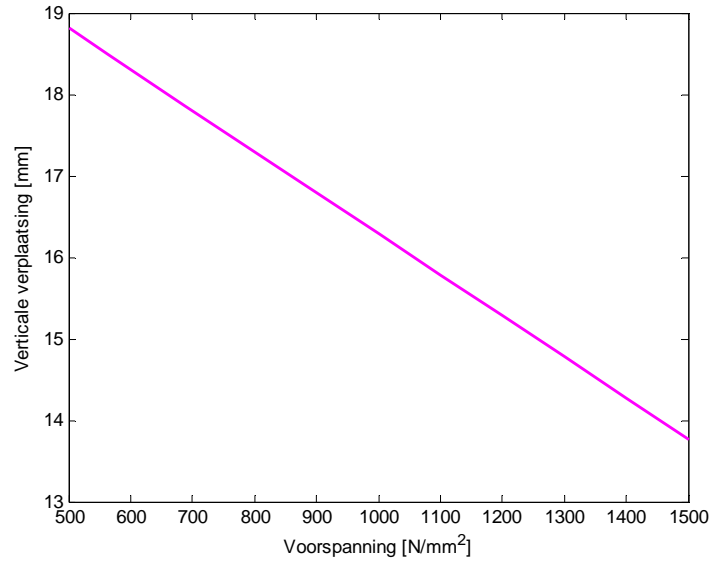
*Figuur 11.6: Schuifspanning als functie van de voorspanning*

In figuur 11.7 wordt het verloop van de maximaal optredende horizontale verplaatsing van het model na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



*Figuur 11.7: Horizontale verplaatsing als functie van de voorspanning*

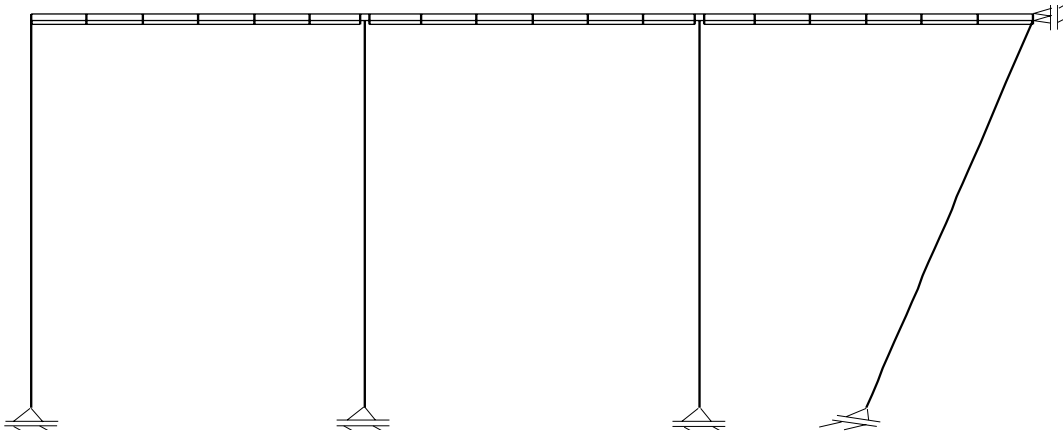
In figuur 11.8 wordt het verloop van de maximaal optredende verticale verplaatsing van het model na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



*Figuur 11.8: Verticale verplaatsing als functie van de voorspanning*

### 11.2.2 Voorgerekte voorspanliggers met rechte kabels

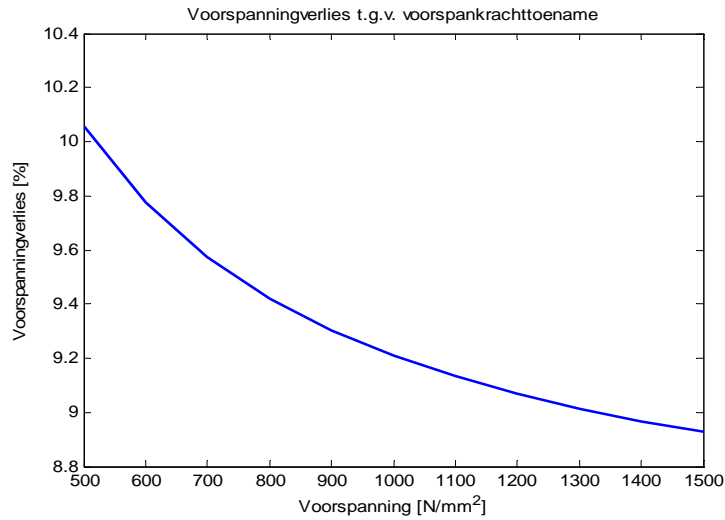
In figuur 11.9 is het model als geheel te zien. Hier wordt de aanvangsvoorspanning van 500 N/mm<sup>2</sup> naar 1500 N/mm<sup>2</sup> met de stapgrootte van 100 N/mm<sup>2</sup> vergroot.



*Figuur 11.9: Model met voorgerekte voorspanliggers*

In figuur 11.10 is het verloop van het voorspankrachtsverlies ten gevolge van de toenemende aanvangsvoorspanning te zien. De gebruikte formule voor de verticale as in figuur 11.10 is:

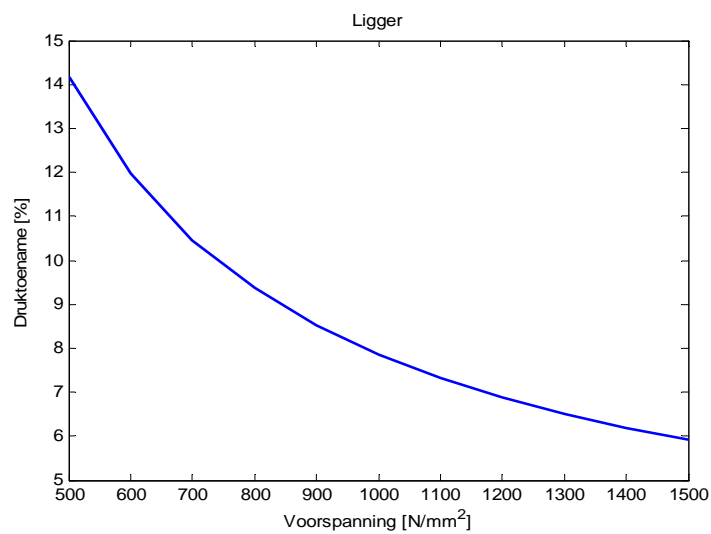
$$\frac{\text{Spanningverlies}_{1^{\text{de}} \text{ jaar}} - \text{Spanningverlies}_{20^{\text{ste}} \text{ jaar}}}{\text{Spanningverlies}_{1^{\text{de}} \text{ jaar}}} \times 100\%$$



Figuur 11.10: Voorspanningverlies als functie van de voorspanning in de kabels

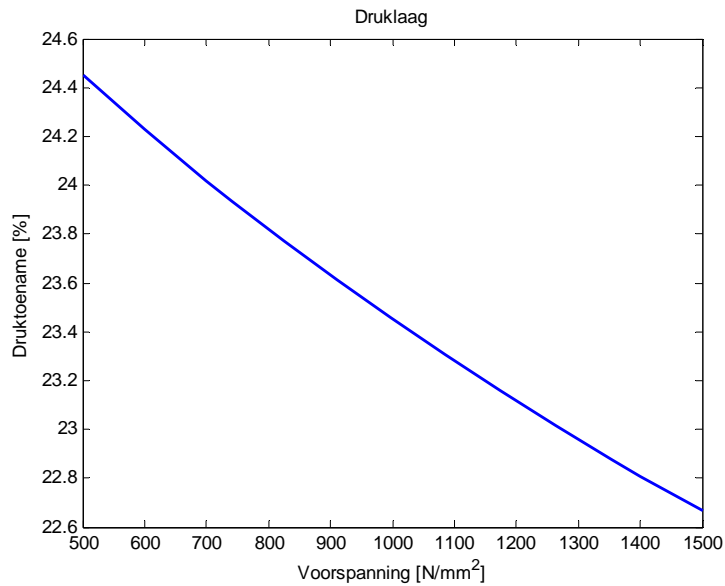
De gebruikte formule voor de verticale as in figuur 11.11 en 11.12 is:

$$\frac{\text{Drukspanning}_{20^{\text{de}} \text{ jaar}} - \text{Drukspanning}_{1^{\text{de}} \text{ dag}}}{\text{Drukspanning}_{20^{\text{de}} \text{ jaar}}} \times 100\%$$



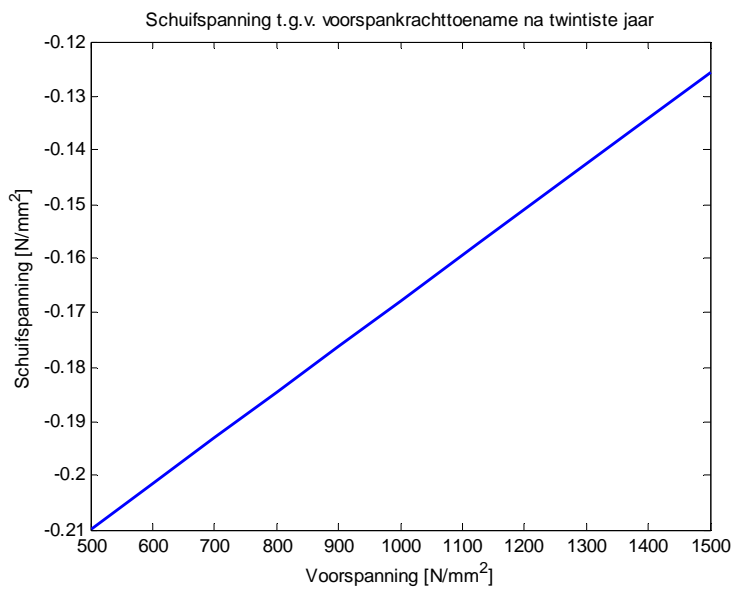
Figuur 11.11: Druktoename (ligger) als functie van de voorspanning





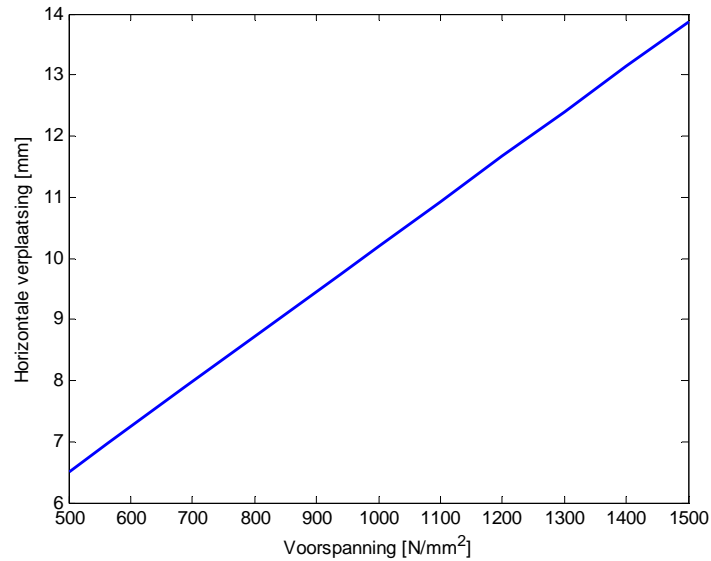
*Figuur 11.12: Druktoename (druklaag) als functie van de voorspanning*

In figuur 11.13 wordt het verloop van de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



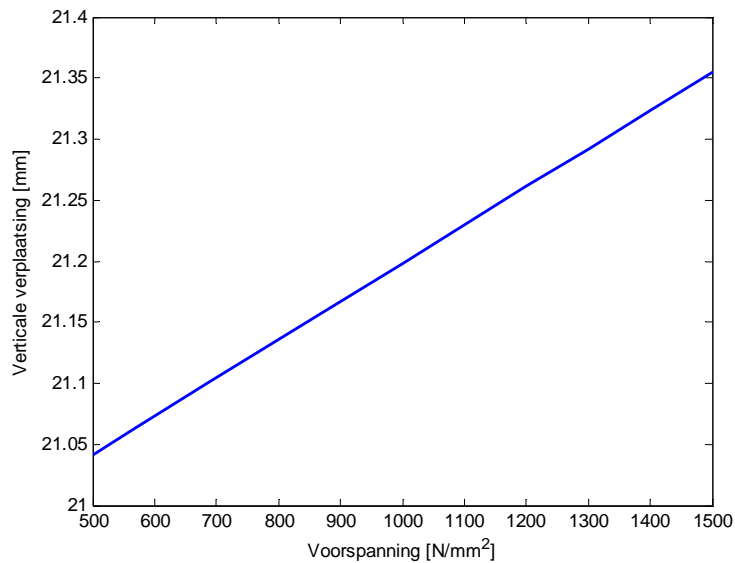
*Figuur 11.13: Schuifspanning als functie van de voorspanning*

In figuur 11.14 wordt het verloop van de maximaal optredende horizontale verplaatsing van het model na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



*Figuur 11.14: Horizontale verplaatsing als functie van de voorspanning*

In figuur 11.15 wordt het verloop van de maximaal optredende verticale verplaatsing van het model na twintigste jaar als functie van de aanvangsvoorspanning weergegeven.



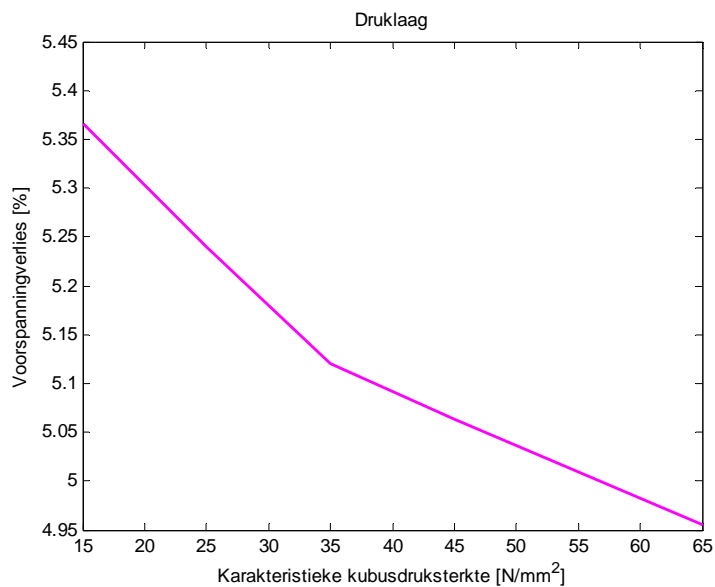
*Figuur 11.15: Verticale verplaatsing als functie van de voorspanning*

### 11.3 Betonsoort

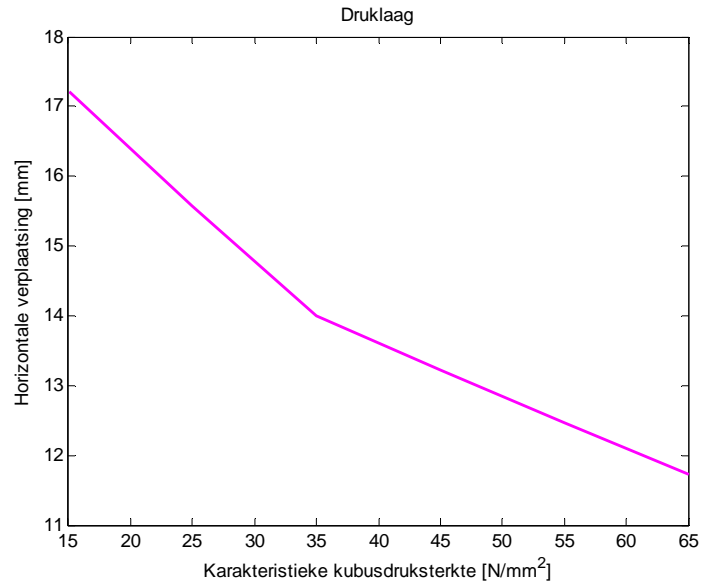
Hier wordt de betonsoort van de ligger en druklaag gevarieerd. Daarna wordt het effect van deze variatie op het tijdafhankelijke gedrag van het model behandeld. Alle afmetingen en eigenschappen zijn dezelfde als hoofdstuk 10. Dus hier is een sprake van een nagerekt gekromde voorspanligger. De ligger en druklaag in het model hebben dezelfde betonsoort B45. In de eerste instantie blijft de waarde van karakteristieke kubusdruksterkte van de liggers constant en wordt karakteristieke kubusdruksterkte van druklaag gevarieerd. In de tweede instantie wordt het proces andersom berekend.

#### 11.3.1 Druklaag

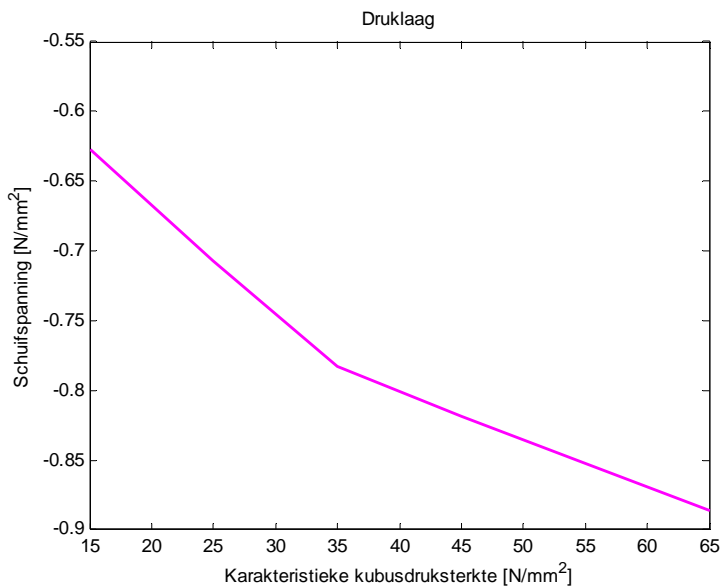
De karakteristieke kubusdruksterkte van de druklaag wordt vergroot van  $15 \text{ N/mm}^2$  naar  $65 \text{ N/mm}^2$  met een stapgrootte van  $10 \text{ N/mm}^2$ . De betonsoort van de liggers is B45 en blijft constant. De aanvangsvoorspanning blijft constant met een waarde van  $1500 \text{ N/mm}^2$ . Hier wordt het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag tengevolge van de toenemende karakteristieke kubusdruksterkte na twintigste jaar in de figuur 11.16, 11.17 en 11.18 weergegeven.



*Figuur 11.16: Voorspanverlies als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte*



*Figuur 11.17: Horizontale verplaatsing als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte*

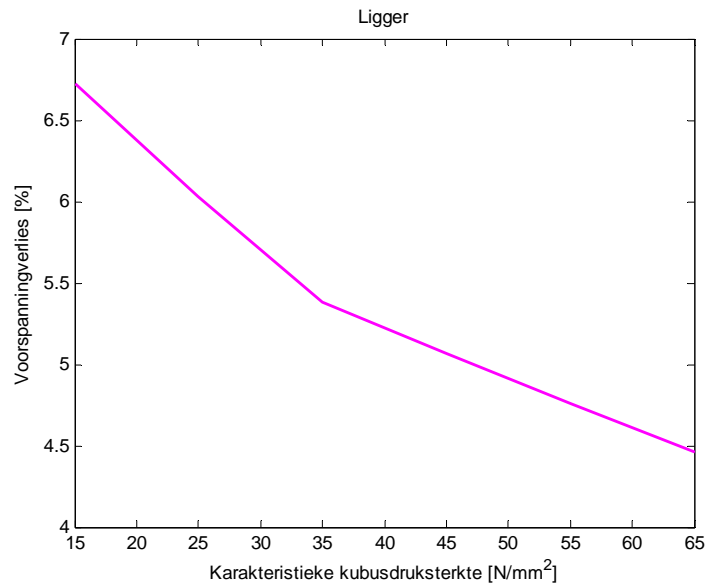


*Figuur 11.18: Schuifspanning als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte*

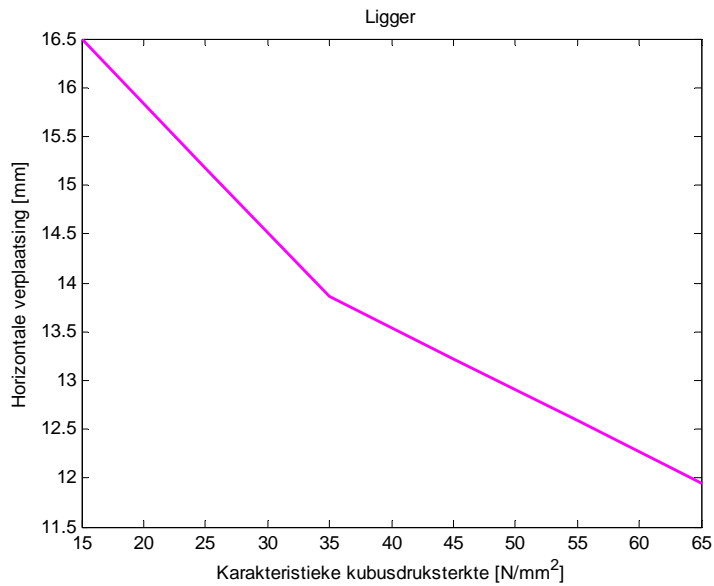
### 11.3.2 Ligger

Hier wordt de karakteristieke kubusdruksterkte van de liggers van  $15 \text{ N/mm}^2$  naar  $65 \text{ N/mm}^2$  vergroot met stapgrootte van  $10 \text{ N/mm}^2$ . De karakteristieke kubusdruksterkte van de druklaag blijft constant met de waarde  $45 \text{ N/mm}^2$ . De aanvangsvoorspanning blijft constant met een waarde van  $1500 \text{ N/mm}^2$ . Hier wordt het verloop van het

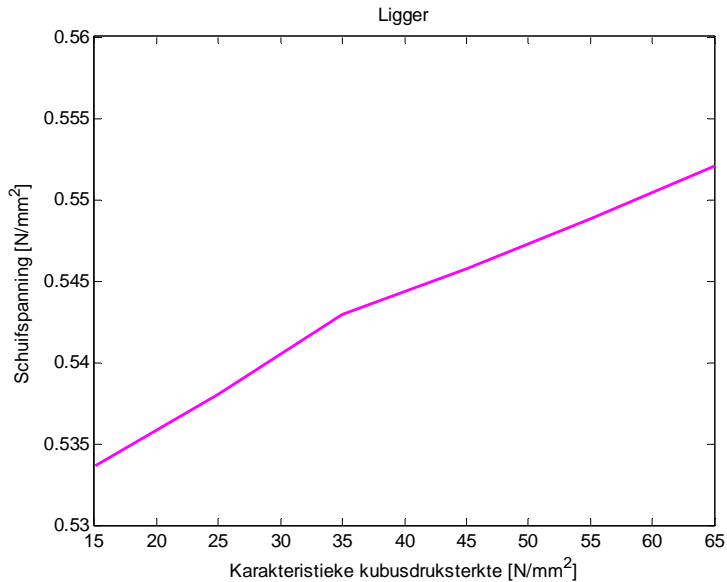
voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte na twintigste jaar in de figuur 11.19, 11.20 en 11.21 weergegeven.



*Figuur 11.19: Voorspanverlies als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte*



*Figuur 11.20: Horizontale verplaatsing als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte*



Figuur 11.21: Schuifspanning als functie van de karakteristieke kubusdruksterkte

## 11.4 Doorsnede

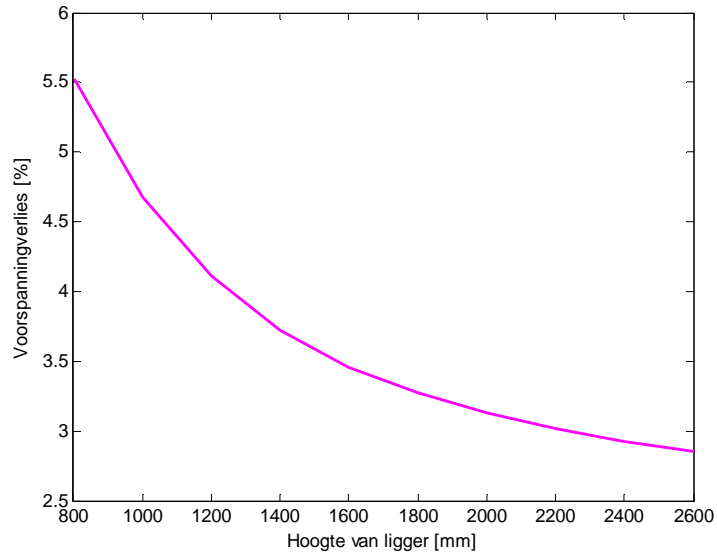
In deze paragraaf worden de doorsnede van de liggers, dek en palen gevarieerd. Vervolgens wordt het tijdafhankelijke gedrag van de brug ten gevolge van deze variaties behandeld. Alle afmetingen en eigenschappen van de brug zijn in deze paragraaf dezelfde als hoofdstuk 10. De aanvangsvoorspanning is 1500 N/mm<sup>2</sup>.

### 11.4.1 Ligger

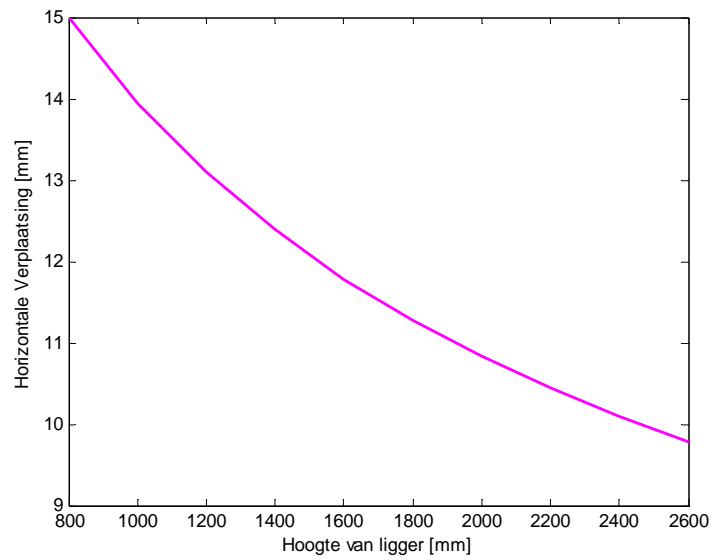
In de eerste instantie wordt de liggerhoogte gevarieerd en in tweede instantie wordt de liggerbreedte gevarieerd.

#### 1. Liggerhoogte

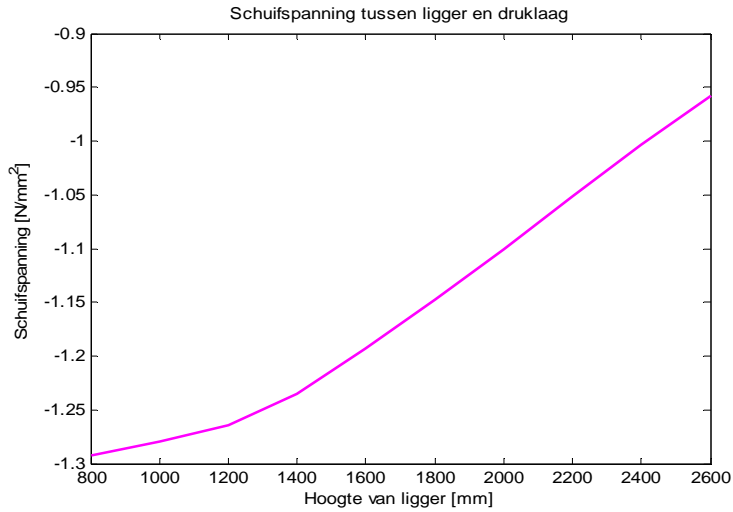
Bij de variatie van de liggerhoogte dienen de hoogte van de constructie als geheel, het eigengewicht van de ligger, liggergrootheden, afstand tussen de liggers, kabels en druklaag tevens te worden gevarieerd. Tevens wordt de omtrek van de ligger veranderd. De omtrek van de ligger heeft invloed op  $k_h$  als gevolg hiervan op het krimp- en kruipgedrag. In de figuur 11.22 tot en met 11.24 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende schuifspanning en de maximaal optredende horizontale verplaatsing in de loop van twintig jaar als functie van de liggerhoogte te zien.



*Figuur 11.22: Voorspanningverlies als functie van de liggerhoogte*



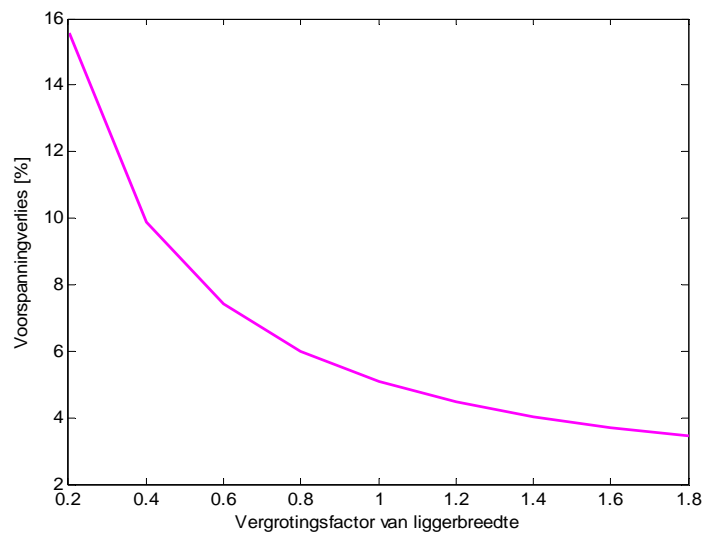
*Figuur 11.23: Horizontale verplaatsing als functie van de liggerhoogte*



Figuur 11.24: Schuifspanning als functie van de liggerhoogte

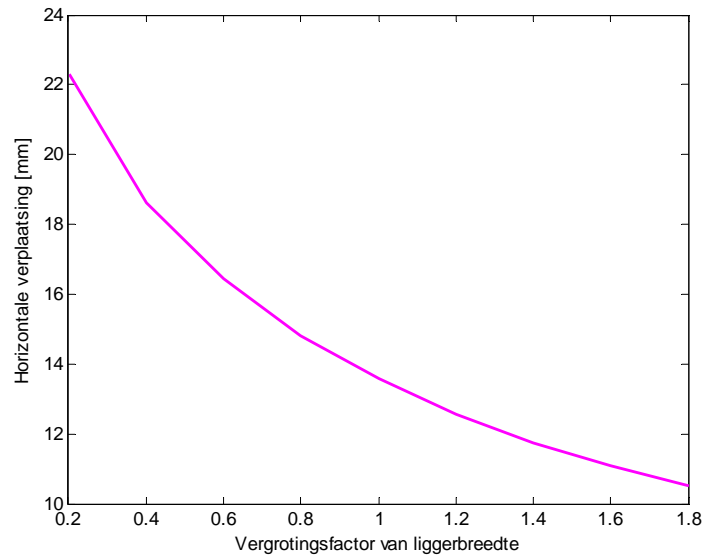
## 2. Liggerbreedte

Bij de variatie van de liggerbreedte dienen het eigengewicht van de ligger, liggergrootheden en de schuifspanningoppervlakte te worden gevarieerd. Tevens wordt de omtrek van de ligger veranderd. De omtrek van de ligger heeft invloed op  $k_h$  als gevolg hiervan op het krimp- en kruipgedrag. In de figuur 11.25 tot en met 11.27 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende schuifspanning en de maximaal optredende horizontale verplaatsing in de loop van twintig jaar als functie van de liggerbreedte te zien.

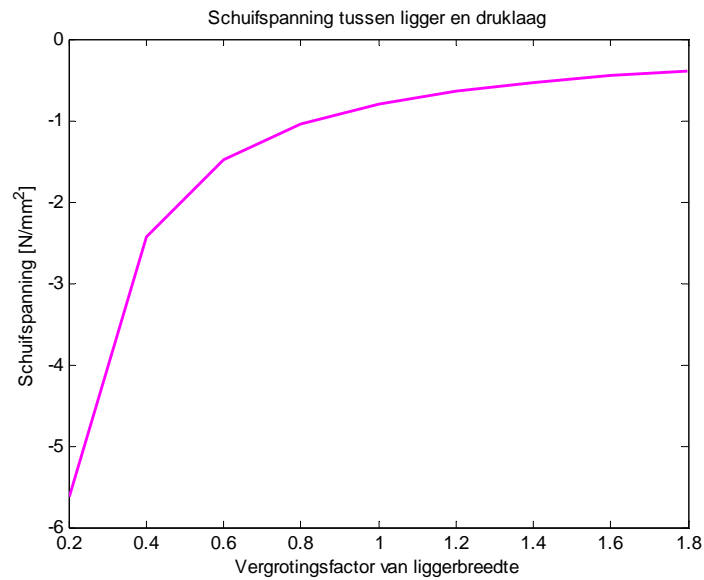


Figuur 11.25: Voorspanningverlies als functie van de liggerbreedte





Figuur 11.26: Horizontale verplaatsing als functie van de liggerbreedte



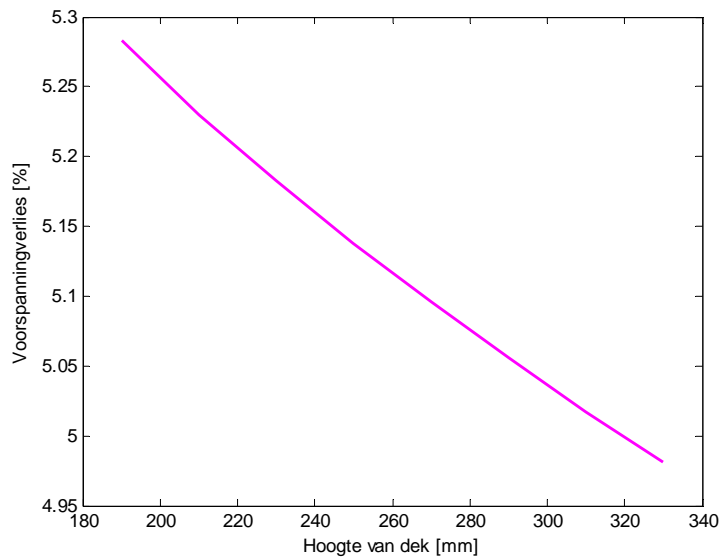
Figuur 11.27: Schuifspanning als functie van de liggerbreedte

### 11.4.2 Druklaag

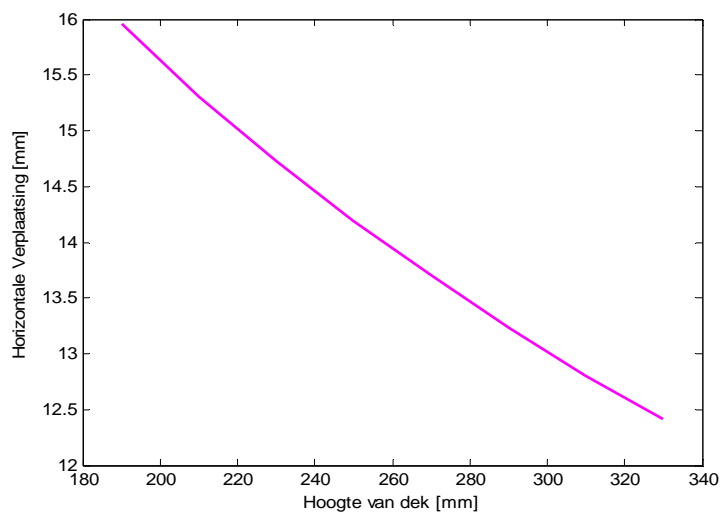
In de eerste instantie wordt de druklaaghoogte gevarieerd en in tweede instantie wordt de druklaagbreedte gevarieerd.

#### 1. Druklaaghoogte

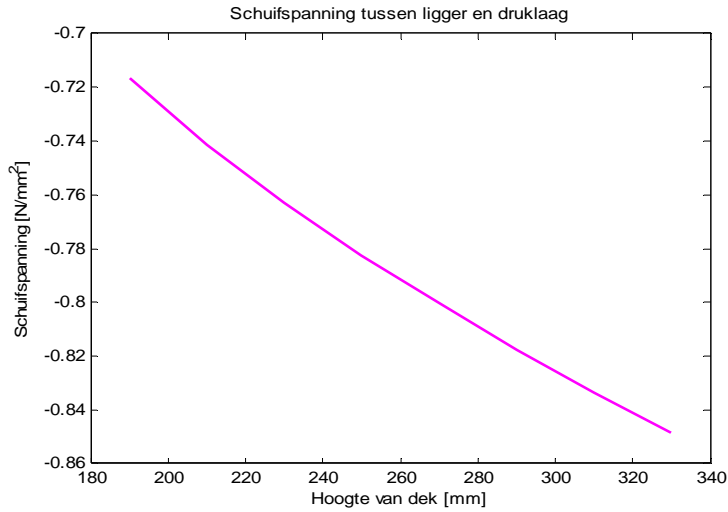
Bij de variatie van de druklaaghoogte dienen de hoogte van de constructie als geheel, het eigengewicht van de druklaag, druklaaggrootheden, afstand tussen de liggers en druklaag tevens te worden gevarieerd. Tevens wordt de omtrek van de druklaag veranderd. De omtrek van de ligger heeft invloed op  $k_h$  als gevolg hiervan op het krimp- en krimpgedrag. In de figuur 11.28 tot en met 11.30 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende schuifspanning en de maximaal optredende horizontale verplaatsing in de loop van twintig jaar als functie van de druklaaghoogte zien.



*Figuur 11.28: Voorspanningverlies als functie van de druklaaghoogte*



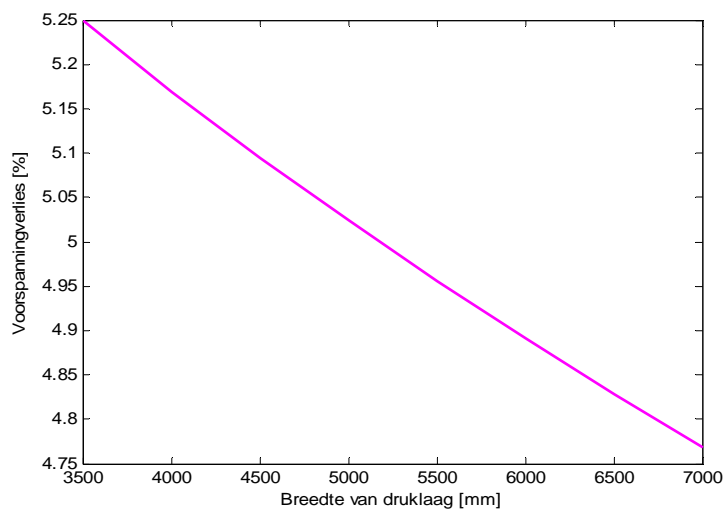
*Figuur 11.29: Horizontale verplaatsing als functie van de druklaaghoogte*



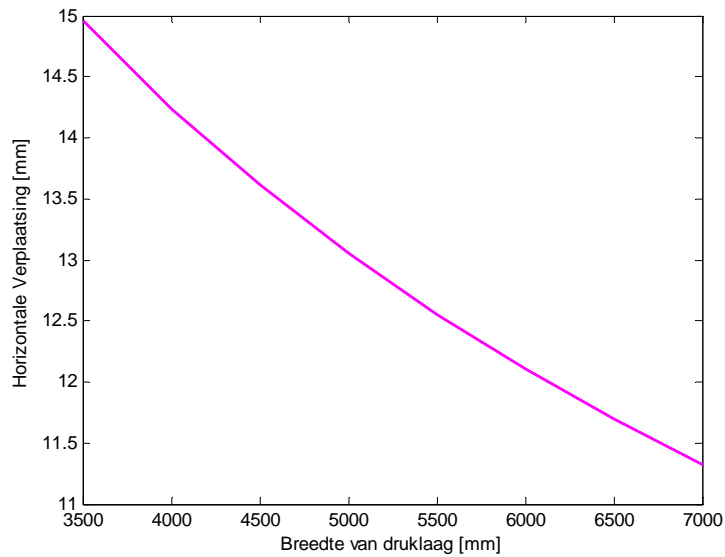
Figuur 11.30: Schuifspanning als functie van de druklaaghoogte

## 2. Druklaagbreedte

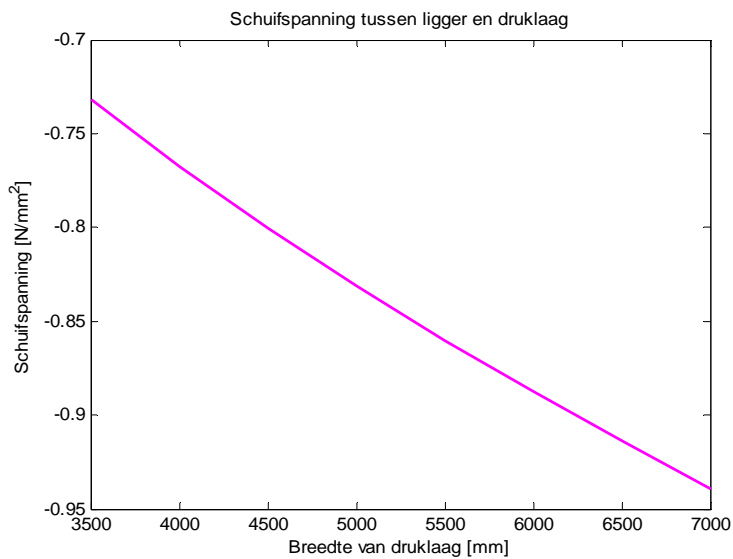
Bij de variatie van de breedte van de druklaag dienen het eigengewicht van de druklaag en de grootheden van de druklaag te worden gevarieerd. Tevens wordt de omtrek van de druklaag veranderd. De omtrek van de ligger heeft invloed op  $k_h$  als gevolg hiervan op het krimp- en kruipgedrag. In de figuur 11.31 tot en met 11.33 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende schuifspanning en de maximaal optredende horizontale verplaatsing in de loop van twintig jaar als functie van de druklaagbreedte te zien.



Figuur 11.31: Voorspanningverlies als functie van de druklaagbreedte



*Figuur 11.32: Horizontale verplaatsing als functie van de druklaagbreedte*

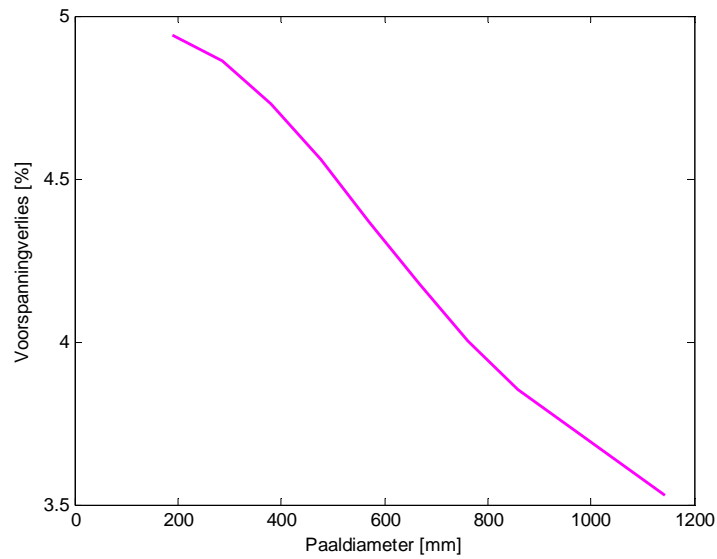


*Figuur 11.33: Schuifspanning als functie van de druklaagbreedte*

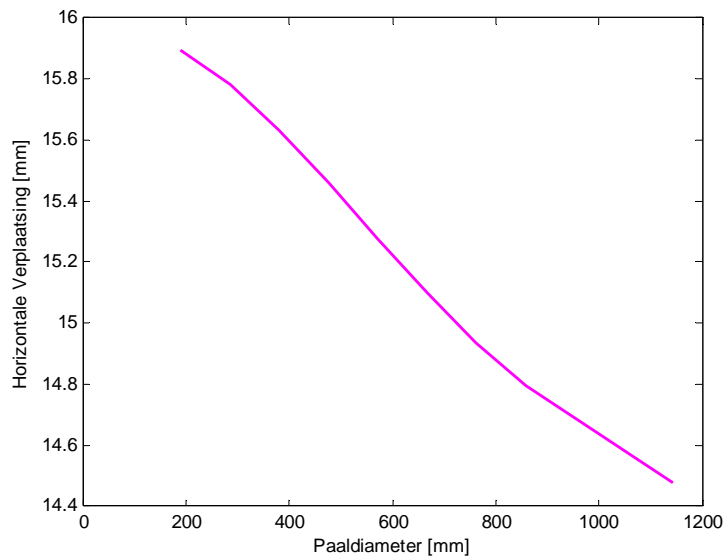
### 11.4.3 paaldiameter

Hier wordt de paaldiameter gevarieerd. Tengevolge van de diametervariatie van de paal wordt het tijdafhankelijke gedrag van de brug in de loop van twintig jaar behandeld. In de figuur 11.34 tot en met 11.36 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal

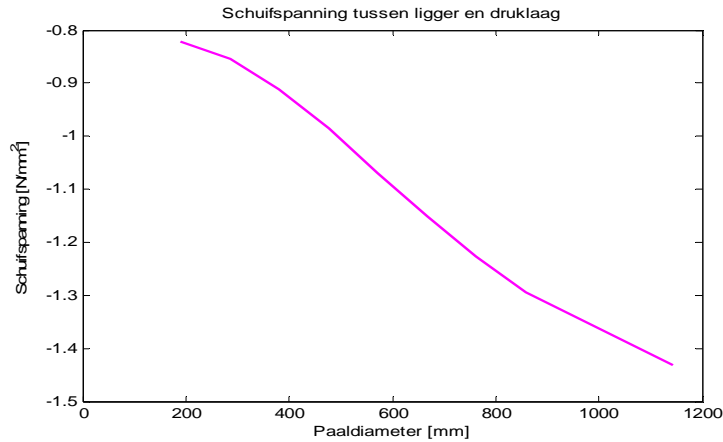
optredende schuifspanning en de maximaal optredende horizontale verplaatsing in de loop van twintig jaar als functie van de paaldiameter te zien.



*Figuur 11.34: Voorspanningverlies als functie van de paaldiameter*



*Figuur 11.35: Horizontale verplaatsing als functie van de paaldiameter*



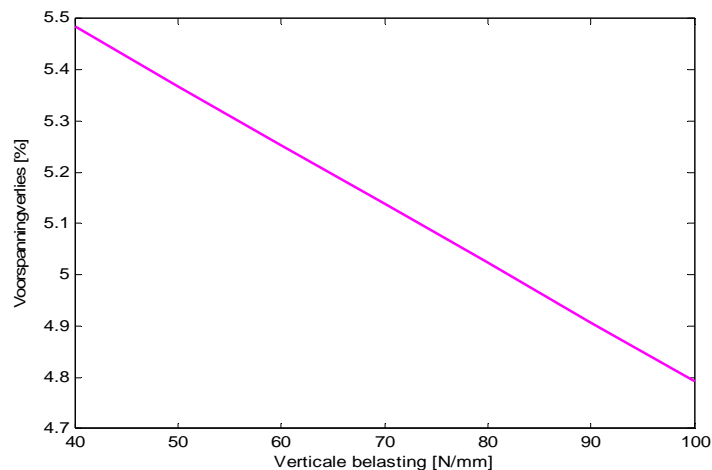
Figuur 11.36: Schuifspanning als functie van de paaldiameter

## 11.5 Belastingen

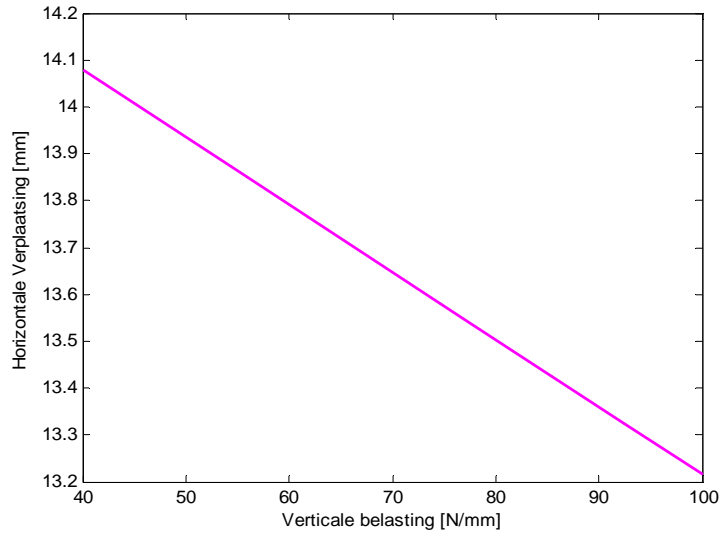
Hier wordt de verticale en horizontale belasting tengevolge van de golfbelasting gevarieerd. Alle eigenschappen en afmetingen zijn als hoofdstuk 10. De aanvangsvoorspanning is  $1500 \text{ N/mm}^2$ .

### 11.5.1 Verticale belastingen

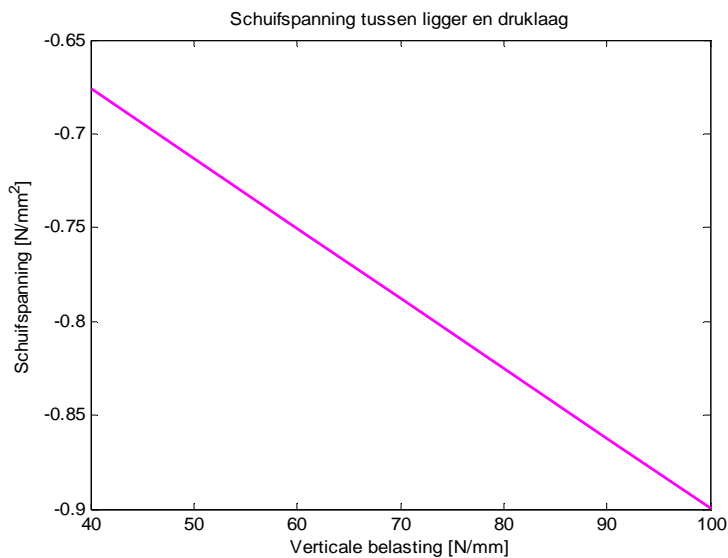
Hier wordt de verticale belasting tengevolge van het eigengewicht van de brug, verkeerbelasting en slijtlaag gevarieerd. In figuur 11.37 tot en met 11.39 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van verticale belasting na twintigste jaar weergegeven.



Figuur 11.37: Voorspanningverlies als functie van de verticale belasting



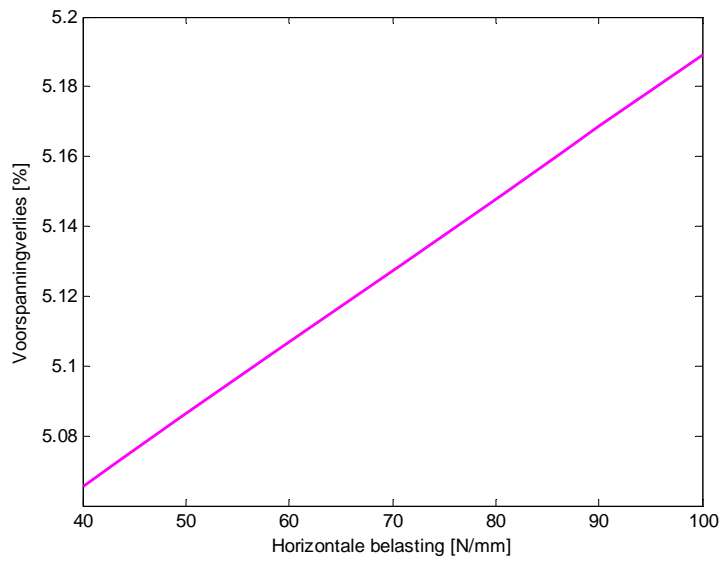
*Figuur 11.38: Horizontale verplaatsing als functie van de verticale belasting*



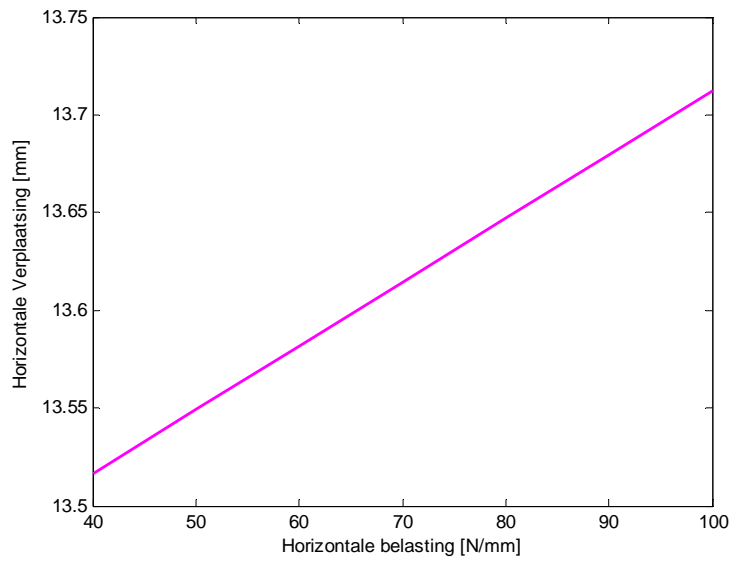
*Figuur 11.39: Schuifspanning als functie van de verticale belasting*

### 11.5.2 Horizontale belastingen

Hier wordt de en horizontale belasting tengevolge van de golfbelasting gevarieerd. In figuur 11.40 tot en met 11.42 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van horizontale belasting na twintigste jaar weergegeven.

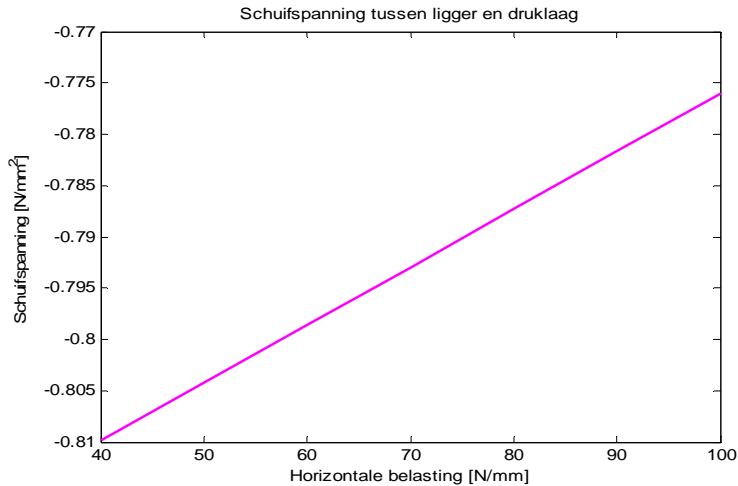


*Figuur 12.40: Voorspanningverlies als functie van de horizontale belasting*



*Figuur 11.41: Horizontale verplaatsing als functie van de horizontale belasting*

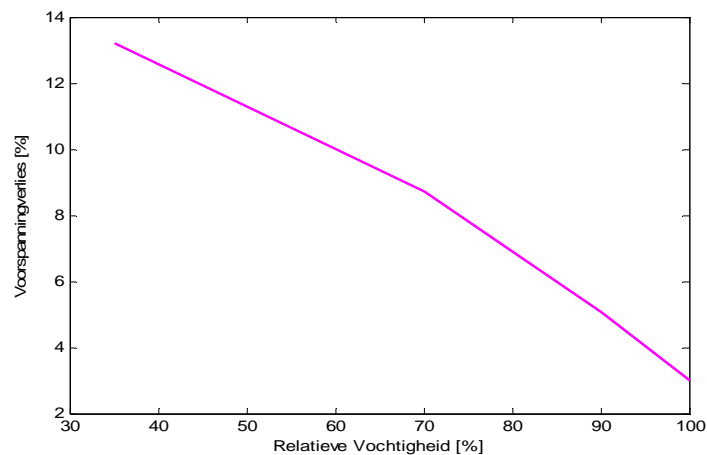




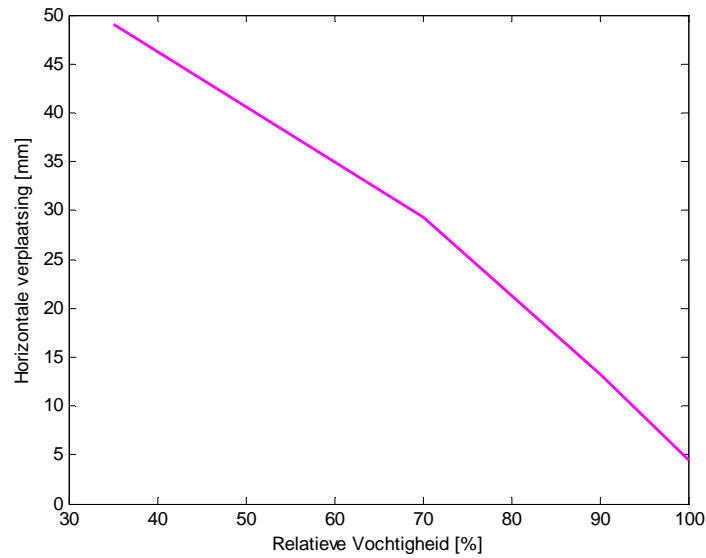
Figuur 11.42: Schuifspanning als functie van de horizontale belasting

## 11.6 Klimaat

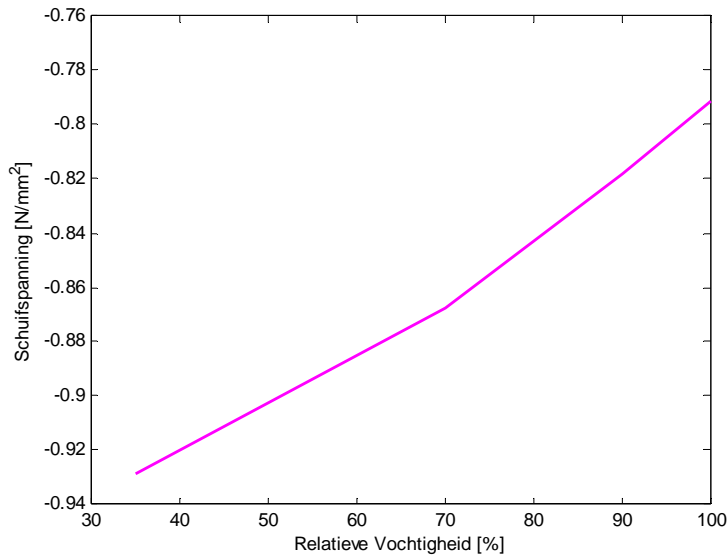
Het beton vertoont verschillende tijdafhankelijk gedrag in de verschillende weeromstandigheden. De relatieve vochtigheid beïnvloedt het krimp- en kruipgedrag van het beton en uiteindelijk van de constructie. In deze paragraaf wordt het tijdafhankelijke gedrag van de trestle brug met verschillende vochtgehalten behandeld. Alle afmetingen, eigenschappen, materiaalsoorten en belastingen zijn dezelfde als hoofdstuk 10. De aanvangsvoorspanning is  $1500 \text{ N/mm}^2$ . In figuur 11.43 tot en met 11.45 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van het vochtgehalte na twintigste jaar weergegeven.



Figuur 11.43: Voorspanningverlies als functie van het vochtgehalte



*Figuur 11.44: Horizontale verplaatsing als functie van het vochtgehalte*



*Figuur 11.45: Schuifspanning als functie van het vochtgehalte*

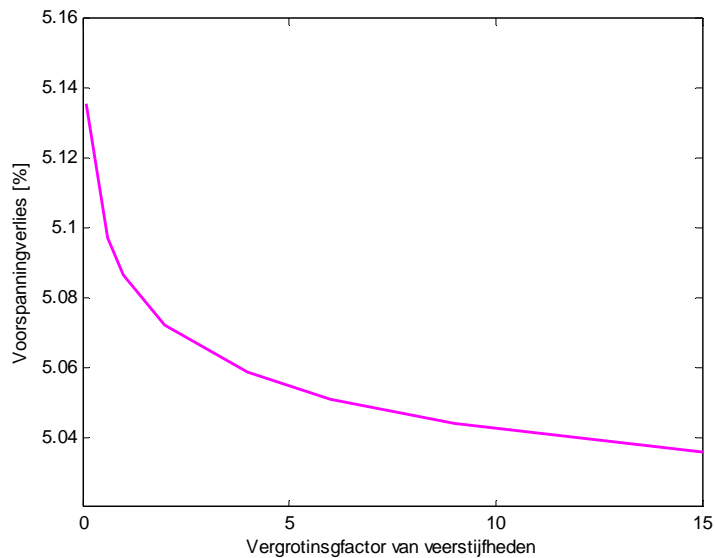
### **11.7 Locatie**

Een andere locatie kan verschillende grondsoorten hebben en in de zee kan verandering in het zeeniveau ontstaan. Zoals in hoofdstuk 1 is uitgelegd worden trestle bruggen meestal op de zee gebouwd. Daarom kan het zeeniveau een belangrijke rol bij het

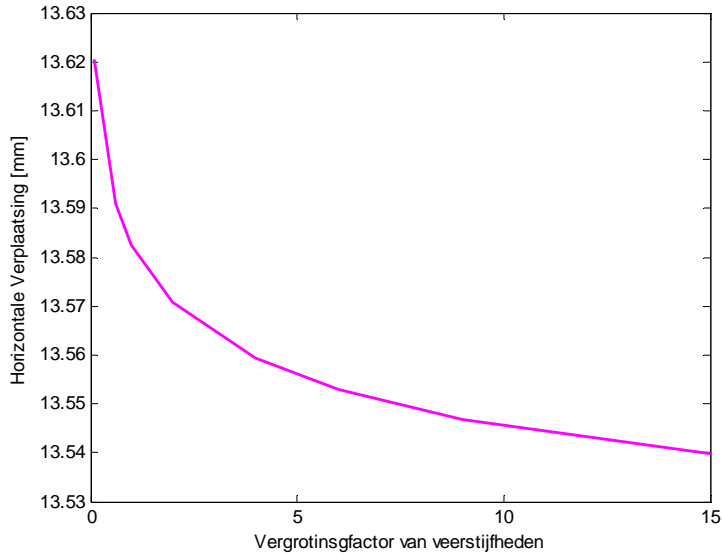
ontwerp van de trestle brug spelen. De grondsoorten hebben tevens bij elke brugontwerp een belangrijke rol. In deze paragraaf worden deze twee parameters behandeld. Hier wordt van het model van hoofdstuk 10 gebruik gemaakt met de aanvangvoorspanning van  $1500 \text{ N/mm}^2$ .

### 11.7.1 Grondsoort

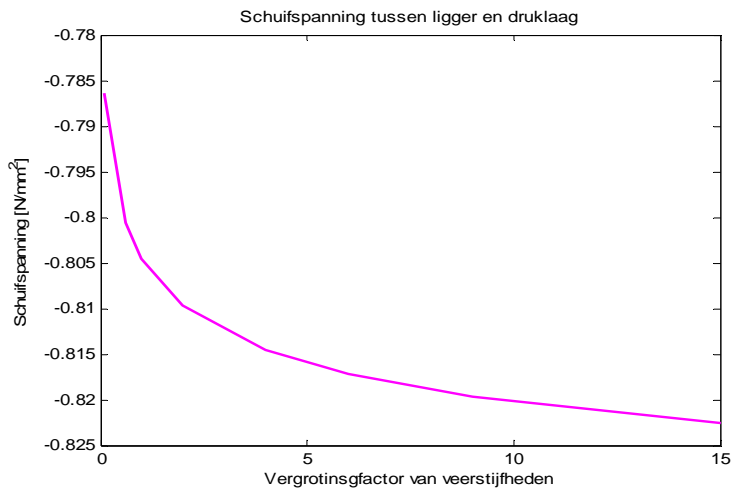
Slappe grond vertoont ander gedrag dan gemiddeld stijve grond of stijve grond in verband met de verandering van krachtverwerking tussen palen en grondlagen. Daardoor kan het tijdafhankelijke gedrag van de brug worden beïnvloed. In het model zijn van veren gebruik gemaakt voor grondlagen. Hier wordt de veerstijfheden gevarieerd. Zo kan het tijdafhankelijke gedrag van het model met verschillende grondsoorten bestudeerd worden. In figuur 11.46 tot en met 11.48 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van de veerstijfheden na twintigste jaar weergegeven.



*Figuur 11.46: Voorspanningverlies als functie van de veerstijfheid*



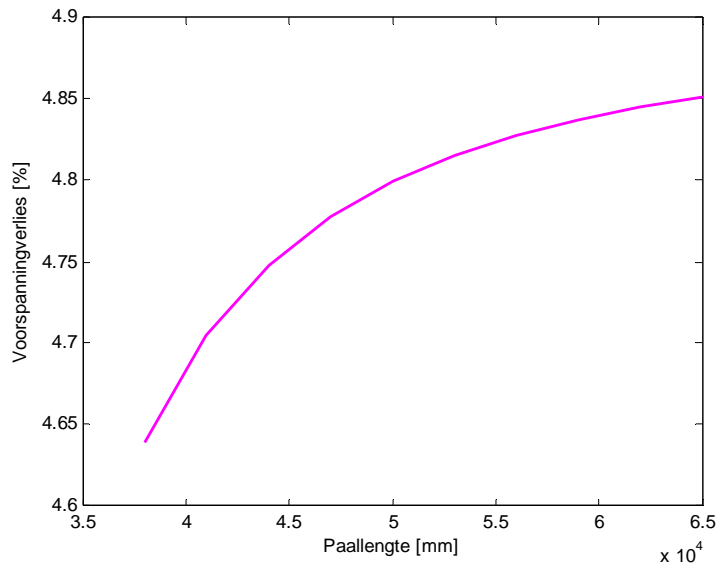
Figuur 11.47: Horizontale verplaatsing als functie van de veerstijfheid



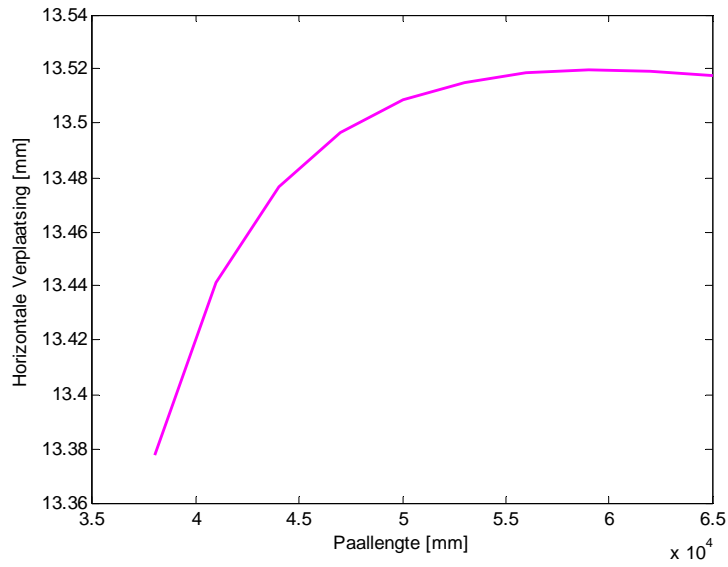
Figuur 11.48: Schuifspanning als functie van de veerstijfheid

### 11.7.2 Zeeniveau

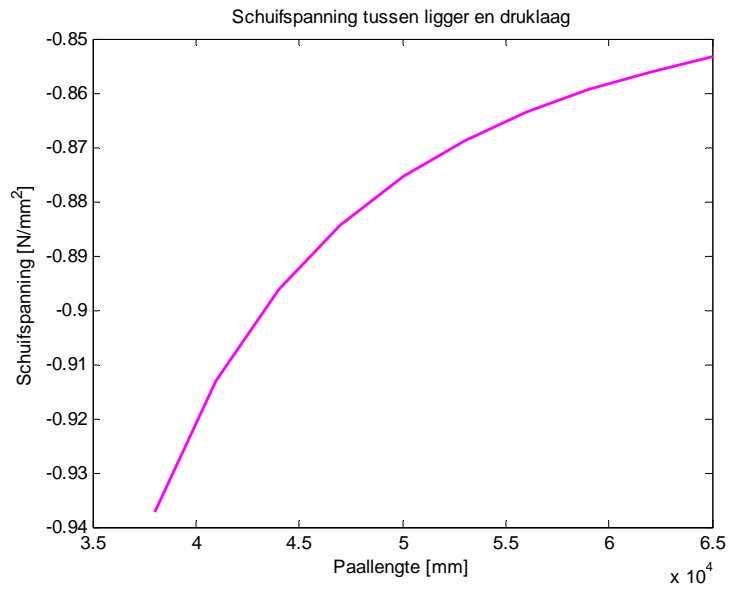
Tengevolge van de variatie in het zeeniveau dient de paallengte te worden gevarieerd. Hier wordt alleen de paallengte tussen het brugdek en de grond gevarieerd. Dus de paallengte in de grondlagen blijft constant. Zo kan het tijdafhankelijke gedrag van het model in verschillende grondsoorten bestudeerd worden. In figuur 11.49 tot en met 11.51 zijn het verloop van het voorspanverlies, de maximaal optredende horizontale verplaatsing van de constructie, de maximaal optredende schuifspanning tussen de liggers en druklaag als functie van de veerstijfheden na twintigste jaar weergegeven.



*Figuur 11.49: Voorspanningverlies als functie van de paallengte*



*Figuur 11.50: Horizontale verplaatsing als functie van de paallengte*



*Figuur 11.51: Schuifspanning als functie van de paallengte*

## 12 Conclusies en aanbevelingen

### 12.1 Conclusies

1. Rekenprogramma's voor raamwerkconstructies kunnen worden uitgebreid met tijdsafhankelijk gedrag door bouwproces, krimp, kruip, relaxatie en temperatuurveranderingen.
2. De berekening kan worden uitgevoerd in tijdstappen van een dag. De hiermee bereikte nauwkeurigheid is voldoende. De simulatie van de gehele economische levensduur kost ongeveer vijftien minuten wat een praktische toepassing niet belemmerd.
3. Viskeuze elementen geven stabiele rekenresultaten als binnen een tijdstap met een predictor en corrector wordt gerekend (In de uiteindelijke casestudie is van deze elementen geen gebruik gemaakt omdat kruip op een andere manier is geïmplementeerd).
4. Voor de beschouwde treslste brug is het voorspanverlies ongeveer 5% gedurende de economische levensduur van twintig jaar. Het meeste voorspanverlies treedt op in de eerste twee jaar (4,8%).
5. De grootste doorbuiging van de liggers neemt 9% toe. De brug verkort 13 mm gedurende de levensduur.
6. De jaarlijkse temperatuurveranderingen tussen zomer en winter hebben een belangrijke invloed op de verplaatsingen en met name voegbreedten.
7. Uit resultaten van de parameterstudie is te zien dat de schuifspanning tussen brugdek en ligger kleiner is dan de rekenwaarde voor de toelaatbare schuifspanning. Dus er bestaat geen gevaar voor losscheuren van de druklaag.
8. Voor het onderzochte concept is gevonden dat met name de uitvoeringsmethode van de voorspanelementen in de liggers, de relatieve lucht vochtigheid, de betonsoort en de afmetingen van de ligger een belangrijke invloed hebben op het voorspanverlies.

9. Voor het onderzochte concept is gevonden dat met name de aanvangsvoorspanning, betonsoort en afmetingen van de ligger en tevens van de druklaag een belangrijke rol spelen bij de horizontale verkorting van de brug.

## **12.2 Aanbevelingen**

1. Voor de implementatie van het krimpgedrag is in dit programma gebruik gemaakt van artikel 6.1.6 van NEN 6770. Deze beschrijft alleen de uitdrogingskrimp. Door de kleine dikte van het dek, gebruikte betonsoort en locatie van de brug is deze formulering voor deze casestudie voldoende. Om het programma te gebruiken voor andere constructies kan het nodig zijn om de bovengenoemde formulering uit te breiden. Voor een constructie met een dik dek, hoge betonklasse, droog beton, geplaatst in een droog klimaat en ook beton met lage cementfactor is het aan te bevelen dat de plastische, chemische, thermische, verhouding en autogene krimpeffecten worden beschouwd.
2. Het programma is voor raamwerkconstructies gebouwd. Tevens kunnen plaalementen aan het programma toegevoegd worden.
3. Totale lengte van een brugdeel kan geoptimaliseerd worden met het oog op dilatatie en bouwkosten.
4. Uitvoeringsmethode en het tijdschema spelen een belangrijke rol bij de bouwkosten. Derhalve kan het ontwikkelde programma gebruik worden om de uitvoeringsmethode te optimaliseren.
5. Uitvoeringsmethode, de afmetingen en betonklasse van de liggers spelen een belangrijke rol bij het bepalen van de aanvangsvoorspanning. Het ontwerp van de voorspanliggers kan geoptimaliseerd worden met het oog op deze parameters en de bouwkosten.
6. De aanvangsvoorspanning, de betonsoort en de afmetingen van de liggers, alsmede de betonsoort en de afmetingen van de druklaag spelen belangrijke rol bij de horizontale verkorting van de brug. De detaillering van de dilatatievoegen kan worden geoptimaliseerd met het oog op deze parameters en de bouwkosten.



## Referenties

- [1] Foto omslag: The Chesapeake Bay Bridge, foto door Scott M. Kozel [1]. Website CBBT - Go to Sea on Your Bike online (juni 1999)  
[http://www.roadstothefuture.com/CBBT\\_Photos\\_1198.html](http://www.roadstothefuture.com/CBBT_Photos_1198.html)
- [2] Website SOROS ASSOCIATES engineers & contractors (2006)  
<http://www.sorosassociates.com/projects/sepetiba.htm>
- [3] Website Maintaining and Preserving Terminals online (2003)  
<http://www.esdot.wa.gov/ferries/pdf/progressreport/terminals.pdf>
- [4] Website Prefabricated Bridge Elements and Systems All Projects online (1999)  
<http://www.fhwa.dot.gov/bridge/prefab/all.htm>
- [5] Prof. dr. ir. J. Blaawendraad, “**Eindige-ElementenMethode voor Staafconstructie**”. Publisher Krips bv, Den Haag.
- [6] Prof. dr. ir. A.K. van der Vegt, Dr. ir. L.E. Govaert, “*Polymeren*”, VSSD, Vijfde druk, Delft, 2003
- [7] Prof. dr. ir. J.C. Walraven, ir. J.C. Galjaard, 1997. “**Voorgespannen Beton**”, ENCI Media, 's-Hertogenbosch
- [8] Prof. dr. ir. J.C. Walraven, Dr. ir. van Breugel, Dr. ir. van der Veen 1999. “**Betonconstructies onder Temperatuur- en Krimpvervorming**”.
- [9] Nederlands Normalisatie-instituut, NEN 6702, **Technische grondslagen van bouwconstructies (TGB 1990), algemene basiseisen**, NNI, 1<sup>e</sup> druk, Delft, 1991.
- [10] Nederlands Normalisatie-instituut, NEN 6720 TBG 1990, **Voorschriften beton (VBC 1995), constructieve eisen en rekenmethode**, NNI, 2<sup>e</sup> druk, Delft, september 1995.
- [11] Nederlands Normalisatie-instituut, NVN-ENV 1991-2, **ontwerpgrondslagen en**

- belastingen op constructies. Deel 2.5: thermische belastingen**, NNI, Delft, juli 1995.
- [12] Nederlands Normalisatie-instituut, NEN 6723, **Voorschriften betonnen bruggen (VBB 1995), constructieve eisen en rekenmethode**, NNI, 1<sup>e</sup> druk, Delft, 1995.
- [13] Nederlands Normalisatie-instituut, NEN 6723, **Het ontwerpen van stalen bruggen, basiseisen en eenvoudige rekenregels (VOSB 1995)**, NNI, 1<sup>e</sup> druk, Delft, 1995.
- [14] Ir. Groenewegen, **“Calculation of Port Dickson Bridge”**. Het rapport houdt de berekeningen van de bovenbouw van Port Dickson brug in, Delta Marine Consultante bedrijf, Gouda.
- [15] Dicleli M., **“Integral Abutment- Backfill Behavior on sand Soil- Pushover Analysis Approach”**, Journal of Bridge Engineering May/June 2005

# **BIJLAGEN**

**BIJLAGE A:** MAPLE PROGRAMMA

**BIJLAGE B:** MATLAB PROGRAMMA

**BIJLAGE C:** TOETSING VAN HET REKENPROGRAMMA

**BIJLAGE D:** TOETSING VAN HET PLOTTEN VAN REKENRESULTATEN

**BIJLAGE E:** TOETSING VAN HET KRUIPEFFECT

**BIJLAGE F:** TOETSING VAN HET KRIMPEFFECT

**BIJLAGE G:** TOETSING VAN HET TEMPRATUUREFFECT

**BIJLAGE H:** Eerste toetsmodel

**BIJLAGE I:** Tweede toetsmodel

**BIJLAGE J:** Toetsen van het model