STABILITEIT VAN IN HET WERK VERVORMDE GLASPANELEN VOOR DUBBELGEKROMDE GEVELS

AFSTUDEERPROJECT VAN HEIN VAN LAAR

Technische Universiteit Delft

Faculteit Civiele Techniek
Sectie Constructiemechanica
Juni 2004

STABILITEIT VAN IN HET WERK VERVORMDE GLASPANELEN VOOR DUBBELGEKROMDE GEVELS

Technische Universiteit Delft - Faculteit Civiele Techniek - Sectie Constructiemechanica

Student : H.A. van Laar
Studienr. : 1067982

Juni 2004

Commissie:

- prof. ir. A.C.W.M. Vrouwenvelder (voorzitter), TU Delft, Faculteit Civiele Techniek
- prof. ir. F. van Herwijnen, TU Eindhoven, Faculteit Bouwkunde
- ir. J.W. Welleman, TU Delft, Faculteit Civiele Techniek
- ir. P.A. de Vries, TU Delft, Faculteit Civiele Techniek, Tentech Delft
- dr. ir. P.C.J. Hoogenboom (begeleider), TU Delft, Faculteit Civiele Techniek

Afstudeercoördinator:

- ir. L.J.M. Houben, TU Delft, Faculteit Civiele Techniek

Bron foto omslag: Octatube Space Structures b.v. Delft

Voorwoord

Op mijn zoektocht naar een interessant afstudeeronderwerp trof ik het affiche voor deze opdracht. In eerste instantie was ik wat verbaasd. Glas is immers geen gangbaar constructiemateriaal in de civiele techniek. Uit nieuwsgierigheid ben ik gaan praten met Pierre Hoogenboom, begeleider van het project, en kwam erachter dat het onderzoeken het koud vervormen van glas een enorme uitdaging was, met name op het mechanicavlak. Na een gesprek met de enthousiaste Dries Staaks, die bezig was met een soortgelijk onderzoek aan de TU Eindhoven, was ik er zeker van dat ik deze opdracht ging doen. In het relatief onbekende vervormingsgedrag van koud vervormde glaspanelen met een willekeurige vorm vond ik de uitdaging en originaliteit die ik zocht in een afstudeerwerk.

Uit Staaks onderzoek blijkt dat bepaalde vierpuntsopgelegde plaatvormen, waarvan één oplegging geleidelijk uit het vlak wordt verplaatst vorminstabiel worden bij een bepaalde gedwongen verplaatsing. Deze vorminstabiliteit vormt de leidraad van dit onderzoek.
Het onderzoek bestaat uit twee delen. Het eerste gedeelte bestaat uit een analytische beschrijving van een in het werk vervormde vierpuntsopgelegde vierkante plaat om inzicht te krijgen in de mechanica voor dit probleem. Het tweede gedeelte bestaat uit eindige-elementenberekeningen met het computerprogramma ANSYS van vele plaatvormen met als doel wetmatigheden op te sporen die van belang zijn voor de vorminstabiliteit. Tevens is er een ANSYS-berekening gemaakt met windbelasting op een koud vervormde plaat. Windbelasting is niet zozeer een instabiliteitsprobleem, maar na het vele wetenschappelijk onderzoek vond ik het interessant om een praktische toepassing te bekijken.

Tenslotte wil ik iedereen bedanken die mij geholpen heeft tijdens mijn onderzoek, in het bijzonder Pierre Hoogenboom.

Hein van laar
Juni 2004

Inhoudsopgave

1 Inleiding

1.1 Probleemstelling

In moderne architectuur worden veelvuldig gekromde vlakken toegepast (figuur 1). Een vaak gebruikte naam hiervoor is *fluid designs*. Ook in andere vakgebieden komen fluid designs voor, zoals bij het ontwerpen van vliegtuigen en schepen. In de bouw is vaak geen functionele, technische of ergonomische noodzaak voor de gekromde vormen. Echter, uit architectonisch oogpunt zijn de fluid designs zeer aantrekkelijk vanwege de enorme uitbreiding van ontwerpmogelijk-heden. Fluid designs worden gemaakt door een nieuwe generatie architecten die snel om kan gaan met de nieuwe drie-dimensionale ontwerpsoftware.

Figuur 1: Fluid design ontwerp (EEA architects) van het Stadhuis van Alphen a/d Rijn (Bron: Octatube)

Bij gekromde gebouwen gaat veel aandacht naar de gevelbekleding, deze is immers de blikvanger van het gebouw. Een vaak toegepast gevelmateriaal is glas. Om een dubbel gekromd gebouw een esthetische meerwaarde te geven, is het wenselijk gekromd glas toe te passen.

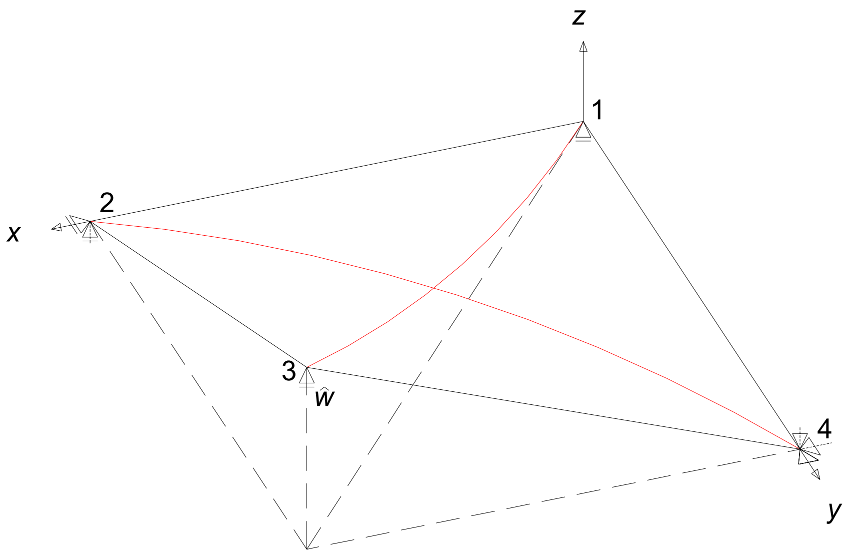
Gekromd glas kan worden geproduceerd door de temperatuur op te voeren tot 600 ^{0}C. De glasplaat is dan roodgloeiend en zakt door zijn eigengewicht in een gereedstaande mal. Deze methode is niet geschikt voor grootschalig toepassing in de bouw omdat het tijdrovend is en een grote investering vergt in mallen.

Constructief toegepast glas moet bovendien in de meeste gevallen gelamineerd worden en thermisch voorgespannen vanwege de hoge optredende gebruikspanningen. De combinatie met thermische vervorming is nog zelden toegepast maar wel mogelijk. Twee glaslagen worden dan als duo thermisch vervormd en na afkoeling individueel chemisch gehard. Vervolgens worden ze gelamineerd met een vloeibare en transparante acrylaat of polyethaanhars. De productie vereist veel transporten aangezien het vervormen en het chemisch harden op slechts enkele plaatsen in Europa kan worden uitgevoerd.

Een economisch zeer aantrekkelijk alternatief om gekromd glas toe te passen, is in het werk koud vervormen. Het glas wordt daarbij op de gebruikelijke wijze vlak vervaardigd en op de bouwplaats vervormd tot de gewenste vorm. Er is echter nog weinig bekend op het gebied van koud vervormen van glas. Wat zijn de wetmatigheden van het koud vervormen? Tot hoever kunnen we glaspanelen in het werk vervormen [1]?

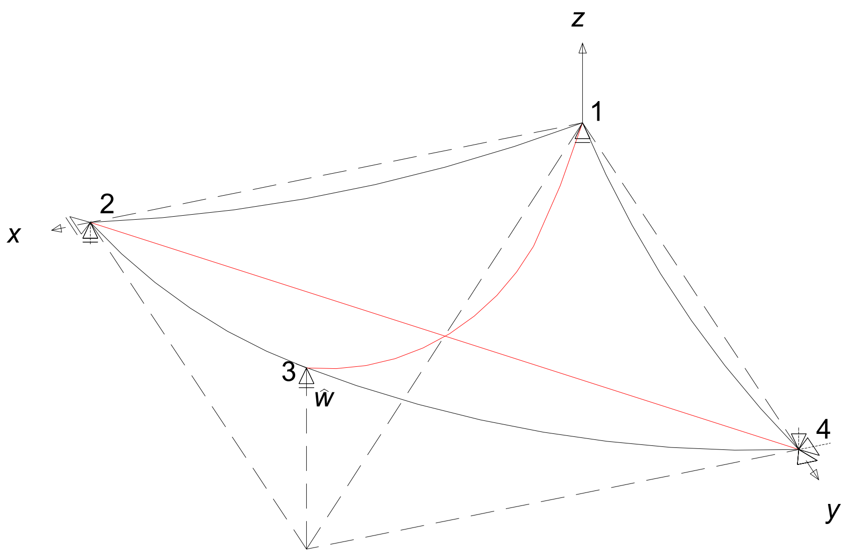
Dubbelgekromde glaspanelen moeten de ontworpen geometrie van een gebouw zo goed mogelijk volgen. Het is echter niet mogelijk met koud vervormen elke denkbare vorm te verkrijgen. De mogelijke vormen worden bepaald door de opgelegde randvoorwaarden (translatie- en rotatiebeperkingen aan de randen). Tevens dienen de spanningen die hierdoor ontstaan in de plaat opgenomen te kunnen worden.

In zijn afstudeeronderzoek ontdekte Dries Staaks (bouwkundig student aan de Technische Universiteit Eindhoven) dat een rechthoekige op vier punten opgelegde plaat, waarvan één oplegging geleidelijk uit het vlak wordt gebracht, een overgang bezit tussen een initieel vervormingspatroon en een uiteindelijk vervormingspatroon [2] (zie Appendix A: resultaten Staaks).



Figuur 2: eerste vervormingspatroon:

- *Gekromde diagonalen*
- *Rechte zijden*



Figuur 3: tweede vervormingspatroon:

- *één gekromde diagonaal, één nagenoeg rechte diagonaal*
- *gekromde zijden*

- **Het eerste vervormingspatroon** (figuur 2)
  Het eerste vervormingspatroon wordt gekenmerkt door een dubbelgekromd vervormingsbeeld. De ene diagonaal is hol, de ander bol, terwijl de randen van de plaat recht blijven. Wiskundig kan dit vervormingsbeeld omschreven worden door een hyparvlak.

- **Het tweede vervormingspatroon** (figuur 3)
  Er is een hoekverplaatsing waarbij het eerste type overgaat in het tweede vervormingspatroon. Deze laatste vormt bij benadering een enkelgekromd vlak, waarbij één diagonaal bijna recht is en de andere sterk gebogen. De randen van de plaat blijven nu niet meer recht. Tijdens verder opvoeren van de vervorming blijft de plaat in het tweede type vervorming, waarbij de rechte diagonaal steeds rechter wordt en de andere diagonaal steeds sterker gebogen wordt. Dit type vervorming is geen bezwijkvorm, maar een verandering van vervormingspatroon.

Een verklaring voor dit fenomeen is dat de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ door 2^e orde effect een membraanspanningen in de plaat veroorzaakt. Aan de randen ontstaan trekzones en in het midden van de plaat ontstaat een drukzone. Schematisch gezien ontstaat er druk in de diagonalen en trek in de randen. Door de even sterke maar tegengestelde kromming van de diagonalen heerst er een evenwicht tussen de diagonalen. Theoretisch zou de overgang van het eerste naar het tweede vervormingspatroon door het evenwicht tussen beide diagonalen niet plaats kunnen vinden. Echter door een kleine initiële verstoring, die altijd aanwezig is (bijv. het eigen gewicht), is er nooit een zuiver evenwicht tussen de diagonalen zodat op een bepaald moment één van de beide diagonalen knikt om de andere diagonaal.

Als een glasplaat zich in het tweede vervormingspatroon verkeert, ziet de rechte diagonaal eruit als een vouw, wat esthetisch vaak niet gewenst is in het gevelbeeld. De dubbele kromming van het eerste vervormingspatroon volgt vaak veel beter de geometrie van het gebouw.

1.2 Doelstelling

Doelstellingen van dit onderzoek zijn een zo nauwkeurig mogelijke analytische beschrijving te maken van het koud vervormen van een vierkante glasplaat en het bepalen van wetmatigheden voor het koude vervormingsgedrag van vierhoekige (niet vierkante) plaatvormen.

Met behulp van het eindige-elementenprogramma ANSYS zijn het gedrag van verschillende vierhoekige platen berekend. Hierbij is gekeken naar de invloed van het eigen gewicht, de initiële vorm van de plaat, windbelasting en eventuele initiële verstoringen op het vervormingsgedrag van de platen.

Verder is getracht een vertaalslag te maken tussen de resultaten van ANSYS en de analytische beschrijving om zo het inzicht in het gedrag van de plaat te vergroten.

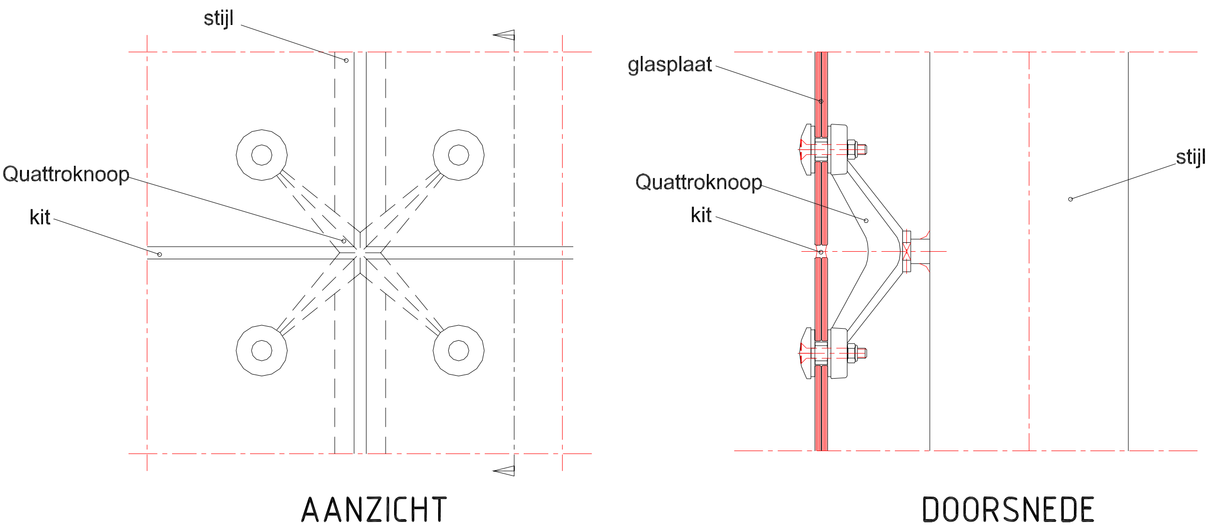
1.3 Uitgangspunten

Om de schematisering in beginsel toegankelijk te maken voor een mechanische analyse is uitgegaan van vierpuntsopgelegde platen (als in figuur 2 en 3). De plaat heeft een aantal voorgeschreven verplaatsingen (tabel 1). Door b.v. hoek 3 een gedwongen verplaatsing in de *z*-richting te geven krijgt de plaat de dubbelgekromde vorm.

Hoekpunt	Translatiebeperking
1	*z*
2	*x, y, z*
3	*z*
4	*x, z*

Tabel 1

In de praktijk komt deze schematisering het meest overeen met opleggingen uitgevoerd als Quattroknopen (figuur 4). Eén Quattroknoop ondersteunt vier hoeken van verschillende glasplaten en kan op verschillende manieren worden uitgevoerd zodat naar wens rotatie- en translatiebeperkingen in de *x*-, *y*- of *z*-richting opgelegd kunnen worden. Verder zijn deze opleggingen uitermate geschikt voor het koud vervormen van de glasplaat doordat ze zodanig geproduceerd kunnen worden dat ze in *x*-, *y*- of *z*-richting verstelbaar zijn. De gevel wordt waterdicht gemaakt door het aanbrengen van kit tussen de voegen.



Figuur 4: voorbeeld van een Quattroknoop (Bron: Octatube)

In hoofdstuk 4 (Windbelasting) wordt verder ingegaan op de manier van opleggen van de plaat.
Het onderwerp van dit onderzoek is het vervormingsgedrag van koud vervormde glasplaten en spanningen zullen daarom niet beschouwd worden.
De spanningen in de plaat zullen maatgevend zijn ter plaatse van de opleggingen. Het bepalen van deze spanningen vereist eindige-elementenberekeningen die voorbij gaan aan het doel van dit onderzoek.

Bij de berekeningen wordt er uitgegaan van enkel glas met elastisch homogeen isotropische materiaaleigenschappen [2]:

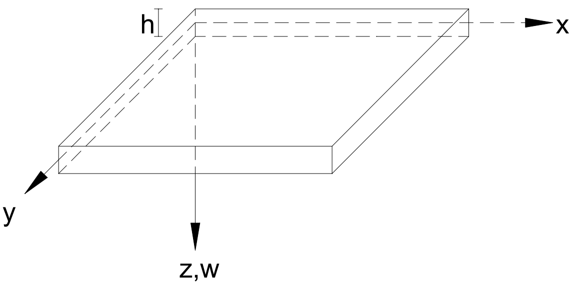
- elasticiteitsmodulus E = 72000 N/mm^2, glas vertoont een nagenoeg ideaal elastisch gedrag tot aan het moment dat plotselinge breuk optreedt.
- dwarscontractiecoëfficiënt v = 0,23

2 Analytische beschrijving van het probleem

2.1 Differentiaalvergelijkingen

2.1.1 Vergelijking zonder 2e orde effecten

De meest eenvoudige differentiaalvergelijking van een op buiging en wringing belaste homogene isotrope dunne plaat beschrijft het 1e orde gedrag van een plaat. Bij de afleiding hiervan is gebruik gemaakt van een viertal veronderstellingen:



Figuur 5

1. Stekel blijft stekel;
   een rechte lijn, loodrecht op de neutrale lijn van de onbelaste plaat, blijft ook in de vervormde toestand een rechte lijn.

2. Geen membraankrachten ($w << h$);
   omdat de doorbuiging erg klein zijn de normaalkrachten in het middenvlak verwaarloosbaar.

3. Zakking w onafhankelijk van z;
   deze voorwaarde stalt dat de zakking van de plaat gekarakteriseerd kan worden door de zakking van het middenvlak (z = 0). Dwarscontractie ten gevolge van spanningen in x- en y-richting wordt verwaarloosd.

4. Geen spanningen σ_{zz};
   de spanningen in de z-richting ten gevolge van dwarscontractie worden verwaarloosd.

5. Geen dwarskrachtvervorming;
   de dwarskrachtvervormingen worden verwaarloosbaar klein verondersteld als gevolg van de hoge afschuifstijfheid.

De vergelijking die ontstaat, ziet er als volgt uit [3]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad (1)$$

Hierin zijn:

- w de verplaatsing loodrecht uit het middenvlak van de plaat (z-richting);

- D de zogenaamde plaatstijfheid waarvoor geldt: $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$

  E is de elasticiteitmodulus en ν de dwarscontractiecoëfficiënt van de plaat;

- p de gelijkmatig verdeelde loodrechte belasting op de plaat per eenheid van oppervlak (positief als werkend in z-richting);

Voor de beschrijving van het koud vervormen van glasplaten is deze vergelijking te simplistisch. De verplaatsingen w zijn dan meestal een aantal malen groter dan de dikte h van de plaat zodat 2e orde effecten (zoals normaalkrachten in het middenvlak) een belangrijke rol gaan spelen. De differentiaalvergelijking zal dientengevolge uitgebreid moeten worden.

2.1.2 Vergelijking met inachtneming van normaalkrachten in het middenvlak

Als de normaalkrachten die ontstaan door het uitbuigen van de plaat niet worden verwaarloosd wordt vergelijking (1) uitgebreid tot de volgende vergelijking [4]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p + n_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X\frac{\partial w}{\partial x} - Y\frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

Hierin zijn:

- n_{xx}, n_{yy} en n_{xy} de normaalkrachten in het middenvlak van de plaat per eenheid van lengte;
- X en Y de twee componenten van de lichaamskrachten of van de tangentiële krachten in het middenvlak van de plaat per eenheid van oppervlak.

De afleiding van (2) is beschreven in Appendix B.
Ook deze vergelijking is nog niet volledig. De extra rekken van het middenvlak als gevolg van extensie zijn hierbij verwaarloosbaar verondersteld. Echter bij grotere uitbuigingen van de plaat kunnen deze rekken een substantieel aandeel hebben in het spanningsveld van de plaat.

2.1.3 Vergelijking met inachtneming van normaalkrachten in het middenvlek en rekken van de plaat als gevolg van extensie

In de afleiding van (2) zijn de rekken van het middenvlak van de plaat als gevolg van extensie verwaarloosd. Als hier wel rekening mee wordt gehouden kan het volgende stelsel vergelijkingen worden afgeleid [4]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D}\left(\frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \qquad (4)$$

$$n_{xx} = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad n_{yy} = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad n_{xy} = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad (5)$$

Hierin is:

- h de dikte van de plaat;
- F een spanningsfunctie afhankelijk van x en y.

Vergelijking (3) en (4) bepalen samen met de randvoorwaarden de twee functies F en w.
De afleiding van dit gekoppelde stelsel vergelijkingen is beschreven in Appendix C.

2.2 Randvoorwaarden

Voor de analytische beschrijving van het in het werk vervormen van een glasplaat wordt uitgegaan van een vierpuntsopgelegde vierkante plaat (afmetingen *a* x *a*) met het middenvlak in het *xy*-vlak als afgebeeld in figuur 6 (eerste vervormingspatroon). De belasting loodrecht op de plaat wordt niet aanwezig verondersteld ($p = 0$). Alle randen zijn vrije randen.
Om de plaat de dubbelgekromde vorm te geven krijgt één hoek een opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ in *z*-richting (uit het *xy*-vlak), terwijl de andere hoeken in het *xy*-vlak blijven

Het eerste type vervorming kan wiskundig beschreven worden door een hyparvlak:

$$w = Cxy \tag{6}$$

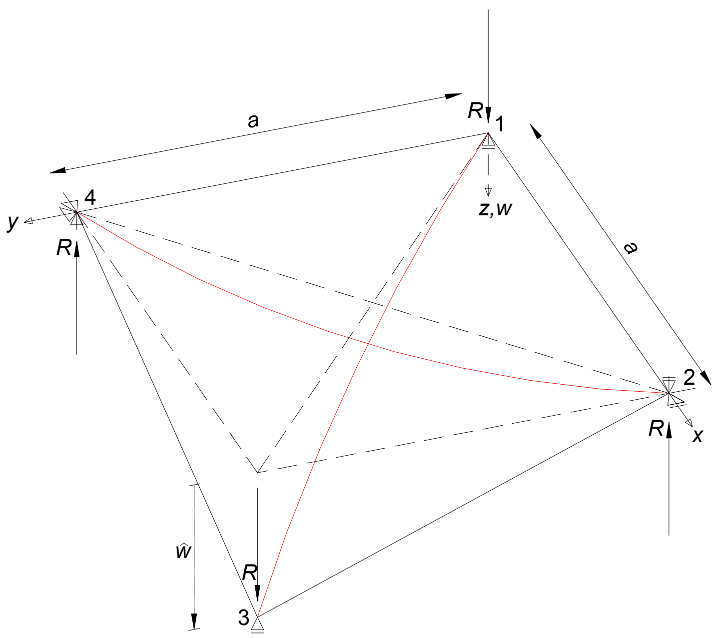
Hierin is $C = \hat{w}/a^2$ met $\hat{w}$ als opgelegde verplaatsing uit het xy-vlak van hoek 3 ($x = a$, $y = a$)

Voor de momenten in de plaat geldt:

$$\begin{aligned} m_{xx} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ m_{yy} &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\ m_{xy} &= -(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{7}$$

De partiele afgeleide zijn:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C$$



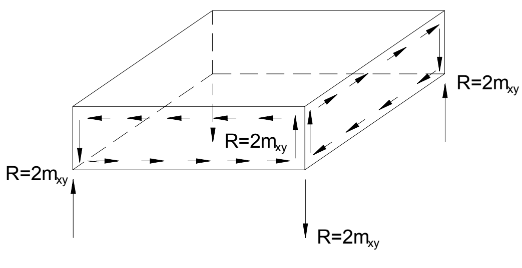
Figuur 6

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} m_{xx} &= 0 \\ m_{yy} &= 0 \\ m_{xy} &= -(1-\nu)DC = constant \end{aligned} \tag{8}$$

De afgeleide van de momenten geeft de dwarskrachten. De dwarskrachten hebben dan de volgende vorm:

$$\begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$



Figuur 7

In de plaat heerst enkel een constant wringend moment. Ten gevolge van de wringende momenten ontstaan in de hoeken van de plaat geconcentreerde oplegreactie van $2m_{xy}$ (figuur 7) [3].
Verder geldt dat op de randen de normaalkrachten in het middenvlak (n_{xx} op de randen met een normaal in de x-richting of n_{yy} op de randen met een normaal in de *y*-richting) en de normaal schuifkrachten n_{xy} in het middenvlak nul zijn.

Samengevat gelden de volgende randvoorwaarden:

- Op de randen x = 0 en x = a:

$$
\begin{aligned}
& m_{xx} = 0 \\
& v_x = 0 \\
& n_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \\
& n_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}
\tag{10}
$$

- Op de randen y = 0 en y = a:

$$
\begin{aligned}
& m_{yy} = 0 \\
& v_y = 0 \\
& n_{yy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \\
& n_{xy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

- In de hoekpunten:

Hoek1 $x = 0$ en $y = 0$
$w = 0$

Hoek 2 $x = a$ en $y = 0$
$w = 0$

Hoek 3 $x = a$ en $y = a$
$w = \hat{w}$ (12)

Hoek 4 $x = 0$ en $y = a$
$w = 0$

2.3 Bepalen van de kniklast

2.3.1 Inleiding

Tijdens de overgang van het eerste naar het tweede vervormingspatroon (bij het uit het vlak dwingen van één hoek van een vierkante vierpuntsopgelegde plaat) vind er een omslagpunt plaats dat kan worden beschouwd als een soort knikpunt. Door drukopbouw in de plaat knikt de plaat als het ware uit.

Er wordt verondersteld dat de oplossing van het gekoppelde stelsel voor een vierkante plaat bestaat uit twee bijdragen:

$$w = w_1 + w_k \tag{13}$$

Waarin:

- $w_1 = C\,x\,y$ (vergelijking van een hyparvlak);
- w_k een extra doorbuiging afhankelijk van x en y is als gevolg van knik. De extra doorbuiging w_k wordt oneindig klein verondersteld.

Nu gaan (3) en (4) over in:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = EC^2 + E\left[\left(\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}\right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} = \frac{h}{D}\left(\frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}C - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}\right) \tag{15}$$

In (14) zijn de afgeleiden van w_k verwaarloosbaar klein in verhouding tot de afgeleiden van w_1 zodat deze overgaat in:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = EC^2 \tag{16}$$

F is nu alleen afhankelijk van het eerste type vervorming w_1 en kan met behulp van de differentiemethode[1] bepaald worden. Dit is een numerieke methode die besproken wordt in paragraaf 2.3.2 en 2.3.3.

Vergelijking (15) is te interpreteren als een normale plaatvergelijking (2) met een extra loodrechte belasting van $-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}C$.

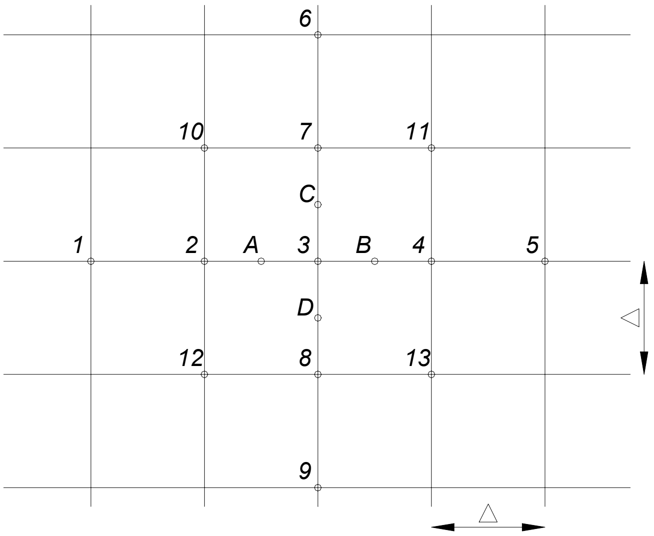
Zelfs als de loodrechte belasting p op de plaat niet aanwezig wordt beschouwd zorgt deze extra term dat de plaat vanaf het begin al gaat uitbuigen. Hieruit kan geconcludeerd worden dat er geen sprake is zuivere knik! Er kan wel een kniklast (benadering) uitgerekend worden als deze term wordt verwaarloosd. In paragraaf 2.3.3 wordt hier nader op ingegaan.

[1] Een analytische oplossing is wellicht mogelijk maar gaat voorbij het doel van dit onderzoek.

2.3.2 Oplossing met de differentiemethode van de spanningsfunctie F

Een methode die ter beschikking staat om de differentiaalvergelijking (16) op te lossen is de differentiemethode. Hierbij wordt de plaat niet behandeld als een continuüm maar blijft de berekening beperkt tot een aantal geschikt gekozen plaatpunten, waarvan de spanningsfuncties *F* als onbekenden worden ingevoerd. Wordt dit voor *n* plaatpunten gedaan, dan is het oplossen van de differentiaalvergelijking (16) herleid tot het oplossen van *n* onafhankelijke lineaire vergelijkingen met *n* onbekenden [5].

Er wordt een differentienet over de plaat aangebracht dat bestaat uit een vierkant stramien van rechte lijnen (figuur 8).



Figuur 8

Het snijpunt van twee netlijnen heet *netpunt*. Het enkelvoudige plaatdeel dat door vier lijnen is ingesloten wordt *veld* genoemd. De differentievergelijking voor een netpunt kan rechtstreeks worden afgeleid uit de differentiaalvergelijking (16) door de differentiaaloperaties om te zetten in differentiebewerkingen.

De partiële afgeleiden van *F* in de *x*-richting kunnen als volgt worden omgezet:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_2 = \frac{\dfrac{F_3 - F_2}{\Delta} - \dfrac{F_2 - F_1}{\Delta}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^2}\left(F_1 - 2F_2 + F_3\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_3 = \frac{1}{\Delta^2}\left(F_2 - 2F_3 + F_4\right) \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right|_A = \frac{\dfrac{1}{\Delta^2}\left(F_2 - 2F_3 + F_4\right) - \dfrac{1}{\Delta^2}\left(F_1 - 2F_2 + F_3\right)}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^3}\left(-F_1 + 3F_2 - 3F_3 + F_4\right)$$

$$\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right|_B = \frac{1}{\Delta^3}\left(-F_2 + 3F_3 - 3F_4 + F_5\right)$$

$$\left.\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}\right|_3 = \frac{\left.\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right|_B - \left.\dfrac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right|_A}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^4}\left(F_1 - 4F_2 + 6F_3 - 4F_4 + F_5\right) \tag{18}$$

De omzetting van de partiële afgeleiden van *F* in de *y*-richting verloopt analoog aan de omzetting in de *x*- richting:

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_3 = \frac{1}{\Delta^2}\left(F_7 - 2F_3 + F_8\right) \tag{19}$$

$$\left.\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right|_3 = \frac{1}{\Delta^4}\left(F_6 - 4F_7 + 6F_3 - 4F_8 + F_9\right) \tag{20}$$

De partiële afgeleiden in de *x*- en de *y*-richting van *F* worden:

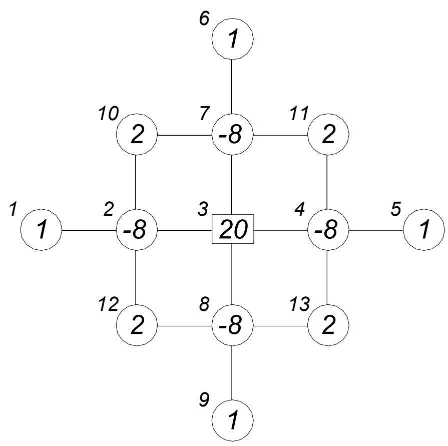
$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_7 &= \frac{1}{\Delta^2}\left(F_{10} - 2F_7 + F_{11}\right)\\
\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_8 &= \frac{1}{\Delta^2}\left(F_{12} - 2F_8 + F_{13}\right)\\
\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right|_C &= \frac{\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_3 - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_7}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^3}\left(F_2 - 2F_3 + F_4 + 2F_7 - F_{10} - F_{11}\right)\\
\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right|_D &= \frac{\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_8 - \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_3}{\Delta} = \frac{1}{\Delta^3}\left(-F_2 + 2F_3 - F_4 - 2F_8 + F_{12} + F_{13}\right)\\
\left.\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}\right|_3 &= \frac{\left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right|_D - \left.\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y}\right|_C}{\Delta}\\
&= \frac{1}{\Delta^4}\left(-2F_2 + 4F_3 - 2F_4 - 2F_7 - 2F_8 + F_{10} + F_{11} + F_{12} + F_{13}\right)
\end{aligned} \tag{21}$$

De afgeleide differentiaalvergelijking (16) wordt dan:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = EC^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\Delta^4}\left(F_1 - 8F_2 + 20F_3 - 8F_4 + F_5 + F_6 - 8F_7 - 8F_8 + F_9 + 2F_{10} + 2F_{11} + 2F_{12} + 2F_{13}\right) = EC^2 \tag{22}$$

Het linkerlid van (22) kan als molecuul afgebeeld worden als in figuur 9.



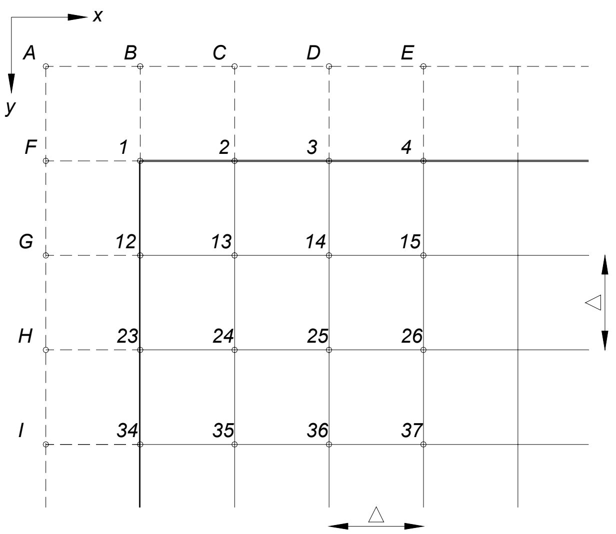
Figuur 9

Voor de waarde van F_3 kan hieruit afgeleid worden:

$$F_3 = \frac{1}{20}\left(EC^2\Delta^4 - F_1 + 8F_2 + 8F_4 - F_5 - F_6 + 8F_7 + 8F_8 - F_9 - 2F_{10} - 2F_{11} - 2F_{12} - 2F_{13}\right) \tag{23}$$

Deze vergelijking geldt voor alle netpunten die op minstens twee maaswijdten afstand van de rand liggen.

Voor punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand en voor punten op de rand geldt deze vergelijking niet meer omdat deze punten de invloed van de rand ondergaan. Met behulp van de randvoorwaarden moet voor deze punten een andere vergelijking of waarde worden bepaald.



Figuur 10

Beschouwd wordt nu een plaat met een differentienet van 10x10 als in figuur 10.
De afmetingen van de plaat zijn 1000x1000 mm met een dikte van h = 5 mm (zie figuur 11).
Voor een netpunt dat minstens één maaswijdte afstand van de rand ligt (bijvoorbeeld netpunt 25) kunnen de spanningen als functie van de F-waarden van omliggende netpunten geschreven worden:

$$n_{xx;25} = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{h}{\Delta^2}\left(F_{14} - 2F_{25} + F_{36}\right)$$

$$n_{yy;25} = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{h}{\Delta^2}\left(F_{24} - 2F_{25} + F_{26}\right) \tag{24}$$

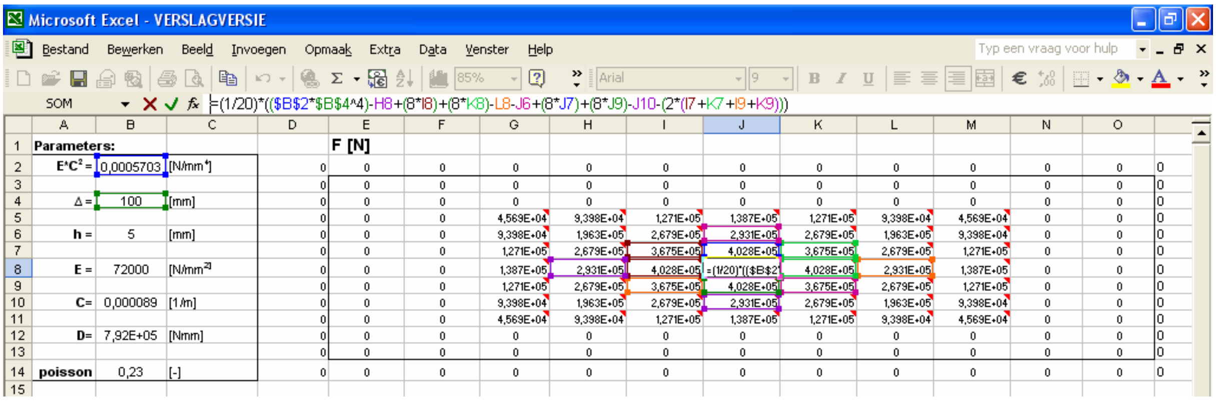
$$n_{xy;25} = h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = h\left(\frac{\frac{F_{37} - F_{35}}{2\Delta} - \frac{F_{15} - F_{13}}{2\Delta}}{2\Delta}\right) = \frac{h}{4\Delta^2}\left(F_{13} - F_{15} - F_{35} + F_{37}\right)$$

Voor de netpunten op de rand moeten er netpunten gedefinieerd worden die één maaswijdte buiten de plaat liggen. Deze 'fictieve' netpunten moeten geëlimineerd worden door ze met behulp van de randvoorwaarden om te zetten in functies afhankelijk van de *F*-waarden van de punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand en van punten op de rand:

$$n_{xx;1} = \frac{h}{\Delta^2}\left(F_B - 2F_1 + F_{12}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_B = 2F_1 - F_{12}$$

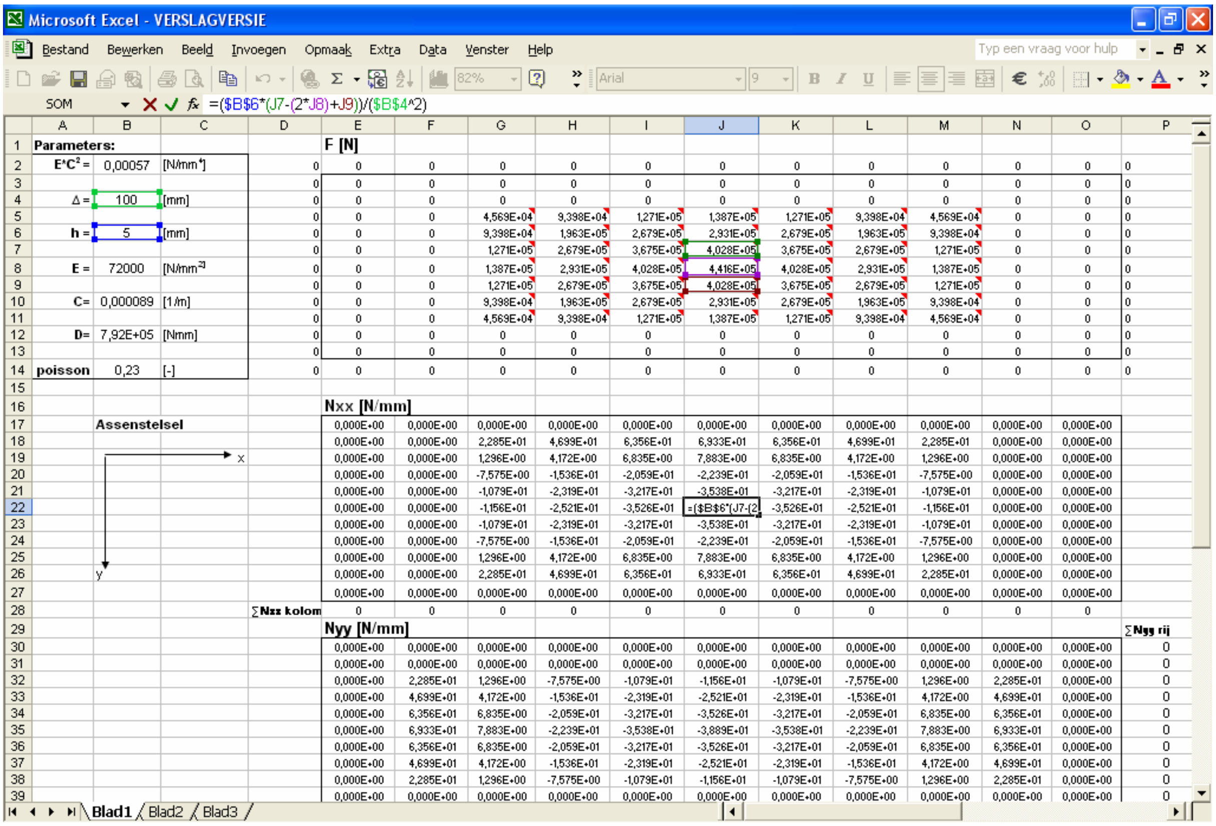
$$n_{yy;1} = \frac{h}{\Delta^2}\left(F_F - 2F_1 + F_2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_F = 2F_1 - F_2 \quad \text{Etc.}$$

Er blijkt echter dat alleen aan alle randvoorwaarden wordt voldaan als alle *F*-waarden van de punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand en van punten op de rand nul zijn en dus ook de waarden van de ‘fictieve’ netpunten nul zijn.
De *F*-waarden van de netpunten die op minstens twee maaswijdten afstand van de rand liggen worden bepaald met vergelijking (23) aangepast voor elk netpunt en vervolgens ingevoerd in Excel. Er ontstaat zo een kringverwijzing tussen de netpunten die met Excel iteratief opgelost kan worden (figuur 11).



Figuur 11: Invoer in Excel voor bepaling F-waarden per netpunt

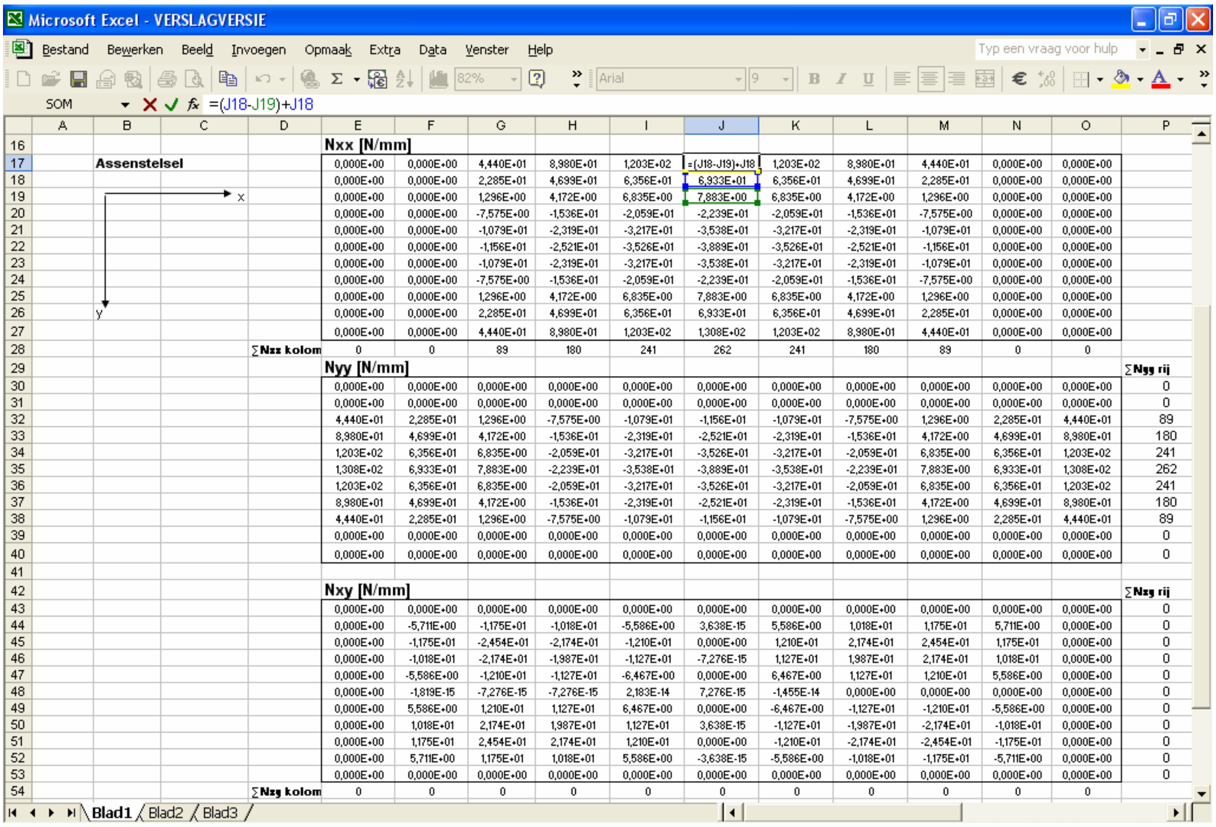
De spanningen n_{xx}, n_{yy} en n_{xy} kunnen uit de berekende *F*-waarden bepaald worden door de omgezette vergelijkingen (24), aangepast voor elk netpunt, te berekenen (figuur 12).



Figuur 12: Berekening van n_{xx} en n_{yy} in Excel (n_{xy} is niet weergegeven)

In figuur 12 is te zien dat de normaalspanningen n_{xx} in alle doorsneden met een normaal in de *x*-richting in evenwicht met elkaar zijn (zie ∑Nxx kolom). Ook in de doorsneden met een normaal in de *y*-richting zijn de resulterende normaalspanningen n_{yy} nul (zie ∑Nyy rij). De spanningen n_{xy} zijn eveneens in alle doorsneden met een normaal in *x*- of *y*-richting met elkaar in evenwicht.

Volgens de berekening zijn op alle randen de spanningen n_{xx} en n_{yy} nul. In werkelijkheid is dit niet het geval. Op randen met een normaal in de *y*-richting moeten de spanningen n_{xx} een waarde hebben. Dit geldt ook voor de spanningen n_{yy} op randen met een normaal in *x*-richting. Om dit te bereiken worden op die randen de spanningen bepaald door extrapolatie uit de twee voorafgaande waarden (zie figuur 13). Een nadeel van deze bewerking is dat aan het evenwicht in de doorsneden niet meer gewaarborgd wordt. We verwachten dat de fout kleiner wordt als het net wordt verfijnd.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
16					Nxx [N/mm]											
17		Assenstelsel			0,000E+00	0,000E+00	4,440E+01	8,980E+01	1,203E+02	=(J18-J19)+J18	1,203E+02	8,980E+01	4,440E+01	0,000E+00	0,000E+00	
18					0,000E+00	0,000E+00	2,285E+01	4,699E+01	6,356E+01	6,933E+01	6,356E+01	4,699E+01	2,285E+01	0,000E+00	0,000E+00	
19			x		0,000E+00	0,000E+00	1,296E+00	4,172E+00	6,835E+00	7,883E+00	6,835E+00	4,172E+00	1,296E+00	0,000E+00	0,000E+00	
20					0,000E+00	0,000E+00	-7,575E+00	-1,536E+01	-2,059E+01	-2,239E+01	-2,059E+01	-1,536E+01	-7,575E+00	0,000E+00	0,000E+00	
21					0,000E+00	0,000E+00	-1,079E+01	-2,319E+01	-3,217E+01	-3,538E+01	-3,217E+01	-2,319E+01	-1,079E+01	0,000E+00	0,000E+00	
22					0,000E+00	0,000E+00	-1,156E+01	-2,521E+01	-3,526E+01	-3,889E+01	-3,526E+01	-2,521E+01	-1,156E+01	0,000E+00	0,000E+00	
23					0,000E+00	0,000E+00	-1,079E+01	-2,319E+01	-3,217E+01	-3,538E+01	-3,217E+01	-2,319E+01	-1,079E+01	0,000E+00	0,000E+00	
24					0,000E+00	0,000E+00	-7,575E+00	-1,536E+01	-2,059E+01	-2,239E+01	-2,059E+01	-1,536E+01	-7,575E+00	0,000E+00	0,000E+00	
25					0,000E+00	0,000E+00	1,296E+00	4,172E+00	6,835E+00	7,883E+00	6,835E+00	4,172E+00	1,296E+00	0,000E+00	0,000E+00	
26		y			0,000E+00	0,000E+00	2,285E+01	4,699E+01	6,356E+01	6,933E+01	6,356E+01	4,699E+01	2,285E+01	0,000E+00	0,000E+00	
27					0,000E+00	0,000E+00	4,440E+01	8,980E+01	1,203E+02	1,308E+02	1,203E+02	8,980E+01	4,440E+01	0,000E+00	0,000E+00	
28				∑Nxx kolom	0	0	89	180	241	262	241	180	89	0	0	
29					Nyy [N/mm]											∑Nyy rij
30					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
31					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
32					4,440E+01	2,285E+01	1,296E+00	-7,575E+00	-1,079E+01	-1,156E+01	-1,079E+01	-7,575E+00	1,296E+00	2,285E+01	4,440E+01	89
33					8,980E+01	4,699E+01	4,172E+00	-1,536E+01	-2,319E+01	-2,521E+01	-2,319E+01	-1,536E+01	4,172E+00	4,699E+01	8,980E+01	180
34					1,203E+02	6,356E+01	6,835E+00	-2,059E+01	-3,217E+01	-3,526E+01	-3,217E+01	-2,059E+01	6,835E+00	6,356E+01	1,203E+02	241
35					1,308E+02	6,933E+01	7,883E+00	-2,239E+01	-3,538E+01	-3,889E+01	-3,538E+01	-2,239E+01	7,883E+00	6,933E+01	1,308E+02	262
36					1,203E+02	6,356E+01	6,835E+00	-2,059E+01	-3,217E+01	-3,526E+01	-3,217E+01	-2,059E+01	6,835E+00	6,356E+01	1,203E+02	241
37					8,980E+01	4,699E+01	4,172E+00	-1,536E+01	-2,319E+01	-2,521E+01	-2,319E+01	-1,536E+01	4,172E+00	4,699E+01	8,980E+01	180
38					4,440E+01	2,285E+01	1,296E+00	-7,575E+00	-1,079E+01	-1,156E+01	-1,079E+01	-7,575E+00	1,296E+00	2,285E+01	4,440E+01	89
39					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
40					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
41																
42					Nxy [N/mm]											∑Nxy rij
43					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
44					0,000E+00	-5,711E+00	-1,175E+01	-1,018E+01	-5,586E+00	3,638E-15	5,586E+00	1,018E+01	1,175E+01	5,711E+00	0,000E+00	0
45					0,000E+00	-1,175E+01	-2,454E+01	-2,174E+01	-1,210E+01	0,000E+00	1,210E+01	2,174E+01	2,454E+01	1,175E+01	0,000E+00	0
46					0,000E+00	-1,018E+01	-2,174E+01	-1,987E+01	-1,127E+01	-7,276E-15	1,127E+01	1,987E+01	2,174E+01	1,018E+01	0,000E+00	0
47					0,000E+00	-5,586E+00	-1,210E+01	-1,127E+01	-6,467E+00	0,000E+00	6,467E+00	1,127E+01	1,210E+01	5,586E+00	0,000E+00	0
48					0,000E+00	-1,819E-15	-7,276E-15	-7,276E-15	2,183E-14	7,276E-15	-1,455E-14	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
49					0,000E+00	5,586E+00	1,210E+01	1,127E+01	6,467E+00	0,000E+00	-6,467E+00	-1,127E+01	-1,210E+01	-5,586E+00	0,000E+00	0
50					0,000E+00	1,018E+01	2,174E+01	1,987E+01	1,127E+01	3,638E-15	-1,127E+01	-1,987E+01	-2,174E+01	-1,018E+01	0,000E+00	0
51					0,000E+00	1,175E+01	2,454E+01	2,174E+01	1,210E+01	0,000E+00	-1,210E+01	-2,174E+01	-2,454E+01	-1,175E+01	0,000E+00	0
52					0,000E+00	5,711E+00	1,175E+01	1,018E+01	5,586E+00	-3,638E-15	-5,586E+00	-1,018E+01	-1,175E+01	-5,711E+00	0,000E+00	0
53					0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0
54				∑Nxy kolom	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Figuur 13: n_{xx}, n_{yy} (na extrapolatie op randen) en n_{xy}

In Appendix D zijn de resultaten van de spanningen in grafieken afgebeeld.

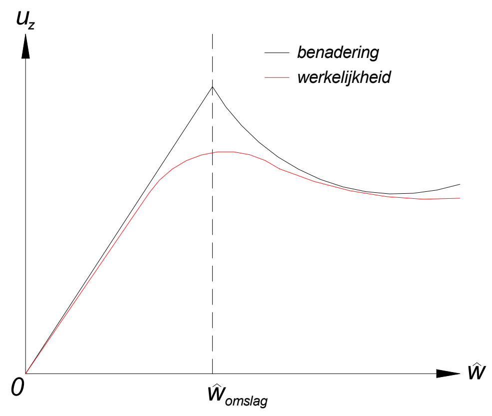
2.3.3 Bepalen kniklast

Als de loodrechte belasting p als niet aanwezig wordt beschouwd kan vergelijking (15) herschreven worden tot:

$$\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(n_{xx}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + n_{yy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} + \underbrace{2n_{xy}C}_{extra\ \ term} \right) \qquad (25)$$

Hierin is $C = \hat{w}/a^2$, zie paragraaf 2.2

Deze vergelijking kan beschouwd worden als vergelijking (2) (voor het buigen van platen onder de gecombineerde werking van laterale belastingen en krachten in het middenvlak van de plaat), zonder de loodrechte verdeelde belasting p en lichaamskrachten X en Y, maar met een extra term. De term is dan een loodrechte belasting op de plaat die direct aanwezig is na aanbrengen van de gedwongen verplaatsing $\hat{w}$ en die lineair afhankelijk is van de schuifspanning n_{xy} in het middenvlak. Hierdoor zal er geen zuiver knikmoment plaatsvinden. Door de extra term te verwaarlozen wordt het omslagpunt benaderd als zijnde een zuiver knikmoment (figuur 14).



Figuur 14

Om de vergelijking te kunnen berekenen met de differentiemethode wordt in ieder netpunt de differentiaalvergelijking vervangen door een lineaire vergelijking in de verplaatsingen w_k van dat punt en van een aantal omliggende punten. Als hetzelfde differentienet wordt gebruikt als bij de berekeningen van de spanningen in het middenvlak zijn de spanningen per netpunt bekend.

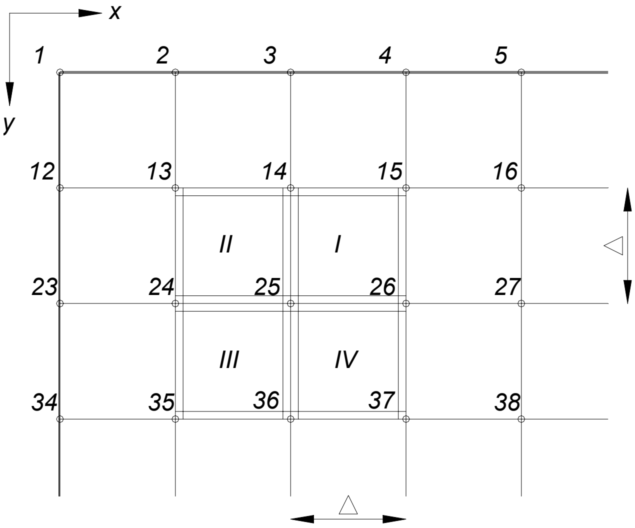
Voor netpunten die minstens twee maaswijdten van de rand liggen, kan het linkerlid van de vergelijking op dezelfde manier omgezet worden als in paragraaf 2.3.2, met behulp van het molecuul uit figuur 9 volgt voor punt 25 (figuur 10):

$$\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_k}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_k}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(n_{xx}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + n_{yy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y} \right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{w_{k;3} + 2w_{k;13} - 8w_{k;14} + 2w_{k;15} + w_{k;23} - 8w_{k;24} + 20w_{k;25} - 8w_{k;26} + w_{k;27} + 2w_{k;35} -}{\Delta^4}$$

$$\frac{8w_{k;36} + 2w_{k;37} + w_{k;47}}{\Delta^4} = \frac{n_{xx;25}\dfrac{\left(w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}\right)}{\Delta^2} + n_{yy;25}\dfrac{\left(w_{k;14} - 2w_{k;25} + w_{k;36}\right)}{\Delta^2}}{D} \qquad (26)$$

$$\frac{+2n_{xy;25}\dfrac{\left(w_{k;13} - w_{k;35} + w_{k;37} - w_{k;15}\right)}{\Delta^2}}{D}$$



Figuur 15

Voor netpunten op één maaswijdte afstand van de rand en voor netpunten op de rand is differentievergelijking (26) niet bruikbaar, omdat zij de invloed van de rand ondergaan. Voor deze punten moeten andere vergelijkingen afgeleid worden [5]. De wijze waarop dit gedaan kan worden wordt nu besproken.

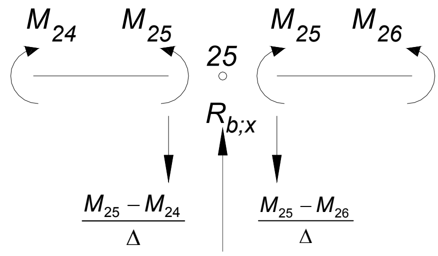
Eerst zal de gebruikte methodiek besproken worden door deze toe te passen op een vlakke plaat. Hiertoe wordt gebruik gemaakt van een analogiemodel waarvan de werking overeenkomt met de volgens de differentierekening geschematiseerde plaat (figuur 15) onder verwaarlozing van de dwarscontractie.

De belasting die geconcentreerd wordt gedacht in een aantal op regelmatige afstanden gelegen plaatpunten wordt zowel door buiging als door wringing overgebracht. In het model wordt daartoe de plaat vervangen door een aantal buigstijve maar wringslappe balken die samenvallen met de lijnen van het differentienet. De buigstijfheid van deze balken bedraagt ΔD. Het aandeel van de wringing wordt in het model geleverd door in de hoekpunten van het gevormde balkrooster platen met buigstijfheid D scharnierend op te hangen. De belasting op punt 25 bedraagt $\left(n_{xx}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}+n_{yy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}+2n_{xy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}\right)\Delta^2$. Deze belasting moet evenwicht maken met de som van de dwarskrachten overgebracht door de balken (R_b) en door de in punt 25 afgegeven reacties van de wringpanelen (R_w) zodat:

$$\left(n_{xx}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}+n_{yy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2}+2n_{xy}\frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}\right)\Delta^2 = R_b + R_w \tag{27}$$

In de x-richting kan voor R_b afgeleid worden (figuur 16):

$$R_{b;x} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_{24} + 2M_{25} - M_{26}\right) \tag{28}$$



Figuur 16

Analoog geldt in de y-richting:

$$R_{b;y} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_{14} + 2M_{25} - M_{36}\right) \tag{29}$$

Door $R_{b;x}$ en $R_{b;y}$ te sommeren volgt:

$$R_b = R_{b;x} + R_{b;y} = \frac{1}{\Delta}\left(-M_{14;y} - M_{24;x} + 2M_{25;x} + 2M_{25;y} - M_{26;x} - M_{36;y}\right) \tag{30}$$

Vervolgens worden de momenten uitgedrukt in de verplaatsingen van de netpunten (onder verwaarlozing van de dwarscontractie!).

Het moment in x-richting is:

$$M_{25;x} = -\Delta D\left[\frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2}\right]_{25} = -\Delta D\left(\frac{w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}}{\Delta^2}\right) = -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}\right) \tag{31}$$

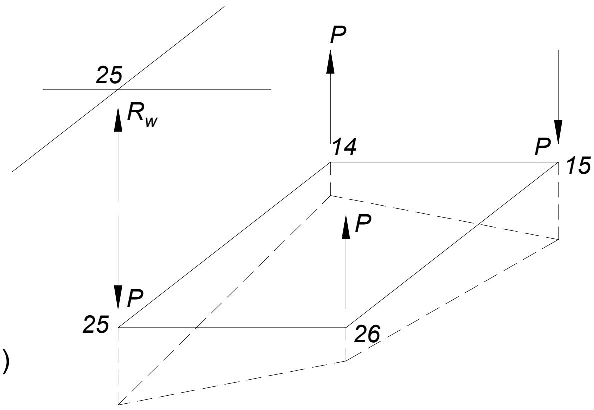
De in (30) voorkomende momenten zijn dan achtereenvolgens:

$$
\begin{aligned}
M_{14;y} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;3} - 2w_{k;14} + w_{\cdot;25}\right) \\
M_{24;x} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;23} - 2w_{k;24} + w_{k;25}\right) \\
M_{25;x} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}\right) \\
M_{25;y} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;14} - 2w_{k;25} + w_{k;36}\right) \\
M_{26\,x} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;25} - 2w_{k;26} + w_{k;27}\right) \\
M_{36;y} &= -\frac{D}{\Delta}\left(w_{k;25} - 2w_{k;36} + w_{k;47}\right)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Substitutie van (32) in (30) levert:

$$R_b = \frac{D}{\Delta^2}\left(w_{k;3} - 4w_{k;14} + w_{k;23} - 4w_{k;24} + 12w_{k;25} - 4w_{k;26} + w_{k;27} - 4w_{k;36} + w_{k;47}\right) \tag{33}$$

Vervolgens dienen de in de netpunten afgeven reacties van de wringpanelen (R_w) berekend te worden (figuur 17). De scharnierverbindingen brengen verticale krachten P over, die op grond van evenwicht niet anders verdeeld kunnen zijn zoals in figuur 17 is aangegeven. Het paneel is dus onderworpen aan een constante verwringing κ_{xy} over het oppervlak[2].



Figuur 17

Voor veld I geldt:

$$\left[\kappa_{xy}\right]_I = \frac{1}{\Delta^2}\left(-w_{k;25} + w_{k;26} - w_{k;15} + w_{k;14}\right) \tag{34}$$

Het wringend moment in dit paneel bedraagt dan:

$$\left[m_{xy}\right]_I = -\frac{D}{\Delta^2}\left(-w_{k;25} + w_{k;26} - w_{k;15} + w_{k;14}\right) \tag{35}$$

De wringende momenten op de randen van een paneel kunnen vervangen worden gedacht door statisch equivalente krachten $P = 2m_{xy}$ in de hoeken van het paneel zodat:

$$P_i = 2\left[m_{xy}\right]_I = 2\frac{D}{\Delta^2}\left(w_{k;25} - w_{k;26} + w_{k;15} - w_{k;14}\right) \tag{36}$$

Op analoge wijze kunnen P_{II}, P_{III} en P_{IV} worden afgeleid.
De index I duidt het betreffende wringpaneel aan (figuur 15). In punt 25 wordt totaal aan reactie afgegeven:

$$
\begin{aligned}
R_w &= P_I - P_{II} + P_{III} - P_{IV} \\
&= \frac{D}{\Delta^2}\left(2w_{k;13} - 4w_{k;14} + 2w_{k;15} - 4w_{k;24} + 8w_{k;25} - 4w_{k;26} + 2w_{k;35} - 4w_{k;36} + 2w_{k;37}\right)
\end{aligned}
\tag{37}
$$

[2] Ook wel belastinggeval van NADAI genoemd.

(33) en (37) ingevuld in (27) geeft de differentievergelijking voor punt 25:

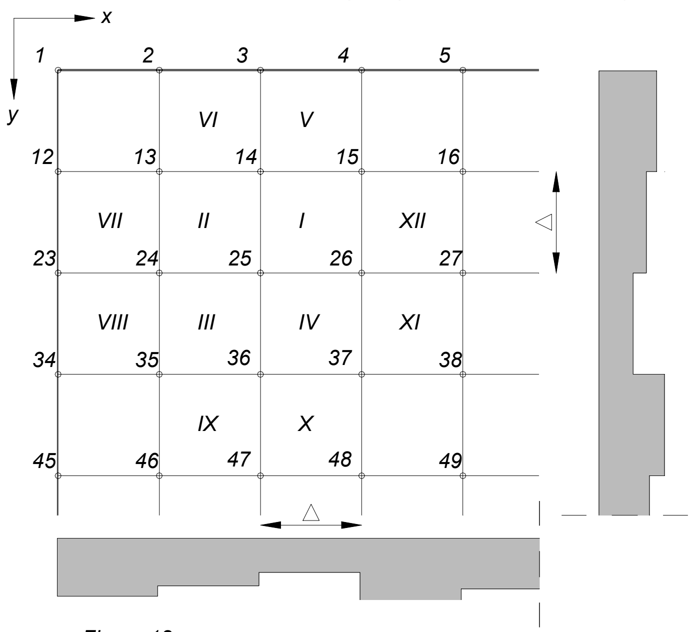
$$\frac{w_{k;3}+2w_{k;13}-8w_{k;14}+2w_{k;15}+w_{k;23}-8w_{k;24}+20w_{k;25}-8w_{k;26}+w_{k;27}+2w_{k;35}-}{\Delta^4}$$

$$\frac{8w_{k;36}+2w_{k;37}+w_{k;47}}{\Delta^4}=\frac{n_{xx;25}\dfrac{\left(w_{k;24}-2w_{k;25}+w_{k;26}\right)}{\Delta^2}+n_{yy;25}\dfrac{\left(w_{k;14}-2w_{k;25}+w_{k;36}\right)}{\Delta^2}}{D} \tag{38}$$

$$+\frac{2n_{xy;25}\dfrac{\left(w_{k;13}-w_{k;35}+w_{k;37}-w_{k;15}\right)}{\Delta^2}}{D}$$

Zoals eerder besproken moet voor de punten gelegen op één maaswijdte afstand van de rand van de plaat en voor de randpunten zelf, de differentievergelijking afhankelijk van de randvoorwaarde worden gemodificeerd. Bij het opstellen van de differentie vergelijking voor deze punten liggen één of meer van de omringende punten welke moeten worden beschouwd buiten de plaat. Dit probleem kan worden opgelost door aan deze *buitenpunten* een oordeelkundige verplaatsing te geven in overeenstemming met de ter plaatse geldende randvoorwaarden. Omdat het aantal onbekende buitenpunten gelijk is aan het aantal randvoorwaarden is de in te voeren verplaatsingen van deze punten eenduidig bepaald. Voor een ingeklemde rand bijvoorbeeld zijn de verplaatsingen, toegekend aan de buitenpunten op één maaswijdte afstand van de rand gelijk aan de verplaatsingen van de punten op gelijke afstand binnen de rand. Voor gecompliceerder randvoorwaarden als vrije randen en hoeken is het uitdrukken van de verplaatsingen van de buitenpunten in die van de binnenpunten nogal bewerkelijk.

Een methode om deze bewerkelijke handelingen te vermijden is door gebruik te maken van een differentievergelijking voor platen met sprongsgewijs veranderende stijfheid. Deze vergelijking geeft namelijk rechtstreeks, dus zonder gebruik te maken van buitenpunten, een differentievergelijking voor punten op de rand en de punten gelegen op één maaswijdte afstand hiervan.

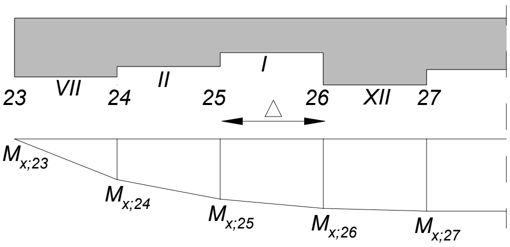


Figuur 18

In figuur 18 is een gedeelte van een plaat weergeven met een 10x10 differentienet, waarvan de dikte sprongsgewijs verandert. Ter plaatse van de differentielijnen kan de dikte van de plaat sprongsgewijs overgaan in een andere. In het meeste algemene geval verschillen alle velden onderling van dikte. In de figuur zijn er velden aangeduid met een Romeins cijfer. De stijfheid van een veld wordt *D* genoemd

met het betreffende cijfer als index. Bij de afleiding van de differentievergelijking zal de invloed van de dwarscontractie buiten beschouwing gelaten worden. Verder wordt er gebruik gemaakt van het hiervoor beschreven analogiemodel.
Met de vlakke plaat is er echter dit verschil dat zowel de buigstijve balken als de wringpanelen allen een verschillende stijfheid bezitten. De balken van het model kunnen, omdat ze wringslap worden verondersteld, worden bedacht te bestaan uit twee vrij naast elkaar liggende balken met elk een stijfheid van ½Δ maal de plaatstijfheid van de aangrenzende plaatdelen.
Ter plaatse van de netpunten worden de in elkaars verlengde liggende balken buigstijf aan elkaar verbonden. Op deze wijze ontstaan knooppunten van vier elkaar loodrecht kruisende balken, die los van elkaar liggen, maar dezelfde verplaatsing ondergaan.

Omdat de dikte van de plaat binnen een differentievlak niet varieert is de stijfheid van ieder wringpaneel constant. Als het evenwicht van punt 25 wordt beschouwd dan gelden hiervoor dezelfde vergelijkingen als afgeleid voor de vlakke plaat (vergelijking (27) en (30)), omdat de evenwichtsvergelijkingen niet worden beïnvloed door diktevariaties.



Figuur 19

De volgende stap is nu het uitdrukken van de momenten uit (30) in de verplaatsingen van de plaat. Beschouwd wordt de buiging in de *x* richting van de balk liggend op de netlijn 23-24-25-26-27 aan de zijde van de velden VII-II-I-XII en met een sprongsgewijs variërende stijfheid van ½Δ maal de waarde van *D* voor die van de genoemde velden.

Omdat ter plaatse van de netpunten de balkdelen met verschillende stijfheden buigstijf met elkaar zijn verbonden heerst links en rechts hetzelfde moment, de kromming verandert er dan sprongsgewijs.

Links van punt 25:

$$M_{x;25} = -\tfrac{1}{2}\Delta D_{II}\kappa_{II} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_{II} = -\frac{M_{x;25}}{\tfrac{1}{2}\Delta}\frac{1}{D_{II}} \tag{39}$$

Rechts van punt 25:

$$M_{x;25} = -\tfrac{1}{2}\Delta D_{I}\kappa_{I} \quad \Leftrightarrow \quad \kappa_{I} = -\frac{M_{x;25}}{\tfrac{1}{2}\Delta}\frac{1}{D_{I}} \tag{40}$$

Het verband tussen het moment en de verplaatsing wordt nu berekend met de benadering dat κ_I en κ_{II} over de aansluitende balkdelen 24-25 , respectievelijk 25-26 een constante waarde hebben.

Voor de kromming in punt 25 wordt de gemiddelde kromming van de balkdelen 24-25 en 25-26 genomen:

$$\kappa_{25} = \frac{1}{2}\left(\kappa_I + \kappa_{Ii}\right) = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{25} = \frac{1}{\Delta^2}\left(w_{24} - 2w_{25} + w_{26}\right) \tag{41}$$

Uitgedrukt in het moment in punt 25 door substitutie van (39)en (40)in (41):

$$-M_{x;25}\left(\frac{1}{D_I} + \frac{1}{D_{II}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(w_{24} - 2w_{25} + w_{26}\right) \tag{42}$$

Hieruit volgt:

$$M_{x;25} = -\frac{D_I D_{II}}{D_I + D_{II}}\frac{\left(w_{24} - 2w_{25} + w_{26}\right)}{\Delta} \tag{43}$$

Op dezelfde manier kan ook het moment in punt 25 van de balk aan de zijde van de velden VIII-III-IV-XI worden bepaald. De som van beide momenten in punt 25 van de twee balken bedraagt:

$$M_{x;25} = -\left[\frac{D_I D_{II}}{D_I + D_{II}} + \frac{D_{III} D_{IV}}{D_{III} + D_{IV}}\right]\frac{\left(w_{24} - 2w_{25} + w_{26}\right)}{\Delta} \tag{44}$$

De vorm tussen rechte haken zal in vervolg *vervangingsstijfheid* worden genoemd. Ter vereenvoudiging van de schrijfwijze van de formules wordt de volgende notatie ingevoerd:

$$f_{24} = \frac{D_{VII} D_{II}}{D_{VII} + D_{II}} + \frac{D_{VIII} D_{III}}{D_{VIII} + D_{III}} \qquad g_{14} = \frac{D_{II} D_{VI}}{D_{II} + D_{VI}} + \frac{D_I D_V}{D_I + D_V}$$

$$f_{25} = \frac{D_{II} D_I}{D_{II} + D_I} + \frac{D_{III} D_{IV}}{D_{III} + D_{IV}} \qquad g_{25} = \frac{D_{III} D_{II}}{D_{III} + D_{II}} + \frac{D_{IV} D_I}{D_{IV} + D_I}$$

$$f_{26} = \frac{D_I D_{XII}}{D_I + D_{XII}} + \frac{D_{IV} D_{XI}}{D_{IV} + D_{XI}} \qquad g_{36} = \frac{D_{IX} D_{III}}{D_{IX} + D_{III}} + \frac{D_X D_{IV}}{D_X + D_{IV}}$$

Dan zijn de in (30) voorkomende momenten achtereenvolgens:

$$\begin{aligned}
M_{14;y} &= -\frac{g_{14}}{\Delta}\left(w_{k;3} - 2w_{k;14} + w_{\cdot;25}\right)\\
M_{24;x} &= -\frac{f_{24}}{\Delta}\left(w_{k;23} - 2w_{k;24} + w_{k;25}\right)\\
M_{25;x} &= -\frac{f_{25}}{\Delta}\left(w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}\right)\\
M_{25;y} &= -\frac{g_{25}}{\Delta}\left(w_{k;14} - 2w_{k;25} + w_{k;36}\right)\\
M_{26x} &= -\frac{f_{26}}{\Delta}\left(w_{k;25} - 2w_{k;26} + w_{k;27}\right)\\
M_{36;y} &= -\frac{g_{36}}{\Delta}\left(w_{k;25} - 2w_{k;36} + w_{k;47}\right)
\end{aligned} \tag{45}$$

(45) gesubstitueerd in (30) geeft:

$$\begin{aligned}
R_b = {} & \frac{g_{14}\left(w_{k;3} - 2w_{k;14} + w_{\cdot;25}\right) + f_{24}\left(w_{k;23} - 2w_{k;24} + w_{k;25}\right) - 2f_{25}\left(w_{k;24} - 2w_{k;25} + w_{k;26}\right)}{\Delta^2}\\
& - \frac{g_{25}\left(w_{k;14} - 2w_{k;25} + w_{k;36}\right) + f_{26}\left(w_{k;25} - 2w_{k;26} + w_{k;27}\right) + g_{36}\left(w_{k;25} - 2w_{k;36} + w_{k;47}\right)}{\Delta^2}
\end{aligned} \tag{46}$$

Bepaling van de in de netpunten afgegeven reacties van de wringpanelen gebeurt op dezelfde manier als bij platen van constante dikte. Elk wringpaneel levert een reactie P gelijk aan tweemaal de stijfheid vermenigvuldigd met de verwringing van het betreffende paneel (vergelijking (36)).
In punt 25 wordt totaal aan reactie afgegeven:

$$\begin{aligned}
R_w = {} & 2D_I\frac{w_{25} - w_{26} + w_{15} - w_{14}}{\Delta^2} + 2D_{II}\frac{w_{25} - w_{14} + w_{13} - w_{24}}{\Delta^2}\\
& + 2D_{III}\frac{w_{25} - w_{24} + w_{35} - w_{36}}{\Delta^2} + 2D_{IV}\frac{w_{25} - w_{36} + w_{37} - w_{26}}{\Delta^2}
\end{aligned} \tag{47}$$

Substitutie van (46) en (47) in (27) geeft de differentievergelijking voor punt 25:

$$\frac{g_{14}\left(w_{k;3}-2w_{k;14}+w_{';25}\right)+f_{24}\left(w_{k;23}-2w_{k;24}+w_{k;25}\right)-2f_{25}\left(w_{k;24}-2w_{k;25}+w_{k;26}\right)}{\Delta^4}$$

$$-\frac{g_{25}\left(w_{k;14}-2w_{k;25}+w_{k;36}\right)+f_{26}\left(w_{k;25}-2w_{k;26}+w_{k;27}\right)+g_{36}\left(w_{k;25}-2w_{k;36}+w_{k;47}\right)}{\Delta^4}$$

$$+2D_I\frac{w_{k;25}-w_{k;26}+w_{k;15}-w_{k;14}}{\Delta^4}+2D_{II}\frac{w_{k;25}-w_{k;14}+w_{k;13}-w_{k;24}}{\Delta^4} \qquad (48)$$

$$+2D_{III}\frac{w_{k;25}-w_{k;24}+w_{k;35}-w_{k;36}}{\Delta^4}+2D_{IV}\frac{w_{k;25}-w_{k;36}+w_{k;37}-w_{k;26}}{\Delta^4}=$$

$$\frac{n_{xx;25}\left(w_{k;24}-2w_{k;25}+w_{k;26}\right)+n_{yy;25}\left(w_{k;14}-2w_{k;25}+w_{k;36}\right)+2n_{xy;25}\left(w_{k;13}-w_{k;35}+w_{k;37}-w_{k;15}\right)}{\Delta^2}$$

Met behulp van (48) kunnen de differentievergelijkingen opgesteld worden voor netpunten op de rand en voor netpunten op één maaswijdte afstand van de rand.
Als voorbeeld zal de differentievergelijking voor netpunt 2 (figuur 18) afgeleid worden.

Voor netpunt 2 geldt dat $D_I = D_{Ii} = D_V = D_{VI} = D_{VII} = D_{VIII} = D_{XII} = 0$, omdat dit stijfheden zijn van plaatdelen die buiten de plaat liggen.

Hieruit volgt dat:

$$f_{(24)} = f_1 = 0 \qquad g_{(14)} = 0$$

$$f_{(25)} = f_2 = \tfrac{1}{2}D \qquad g_{(25)} = g_2 = 0$$

$$f_{(26)} = f_3 = \tfrac{1}{2}D \qquad g_{(36)} = g_{13} = D$$

De indexcijfers tussen haakjes zijn gegeven om netpunt 2 met netpunt 25 te kunnen vergelijken.

De differentievergelijking in netpunt 2 wordt dan:

$$\frac{-D\left(w_{k;1}-2w_{k;2}+w_{k;3}\right)+\tfrac{1}{2}D\left(w_{k;2}-2w_{k;3}+w_{k;4}\right)+D\left(w_{k;2}-2w_{k;13}+w_{k;24}\right)}{\Delta^4}$$

$$+2D\frac{w_{k;2}-w_{k;1}+w_{k;12}-w_{k;13}}{\Delta^4}+2D\frac{w_{k;2}-w_{k;13}+w_{k;14}-w_{k;3}}{\Delta^4}=\frac{n_{xx;2}\left(w_{k;1}-2w_{k;2}+w_{k;3}\right)}{\Delta^2} \qquad (49)$$

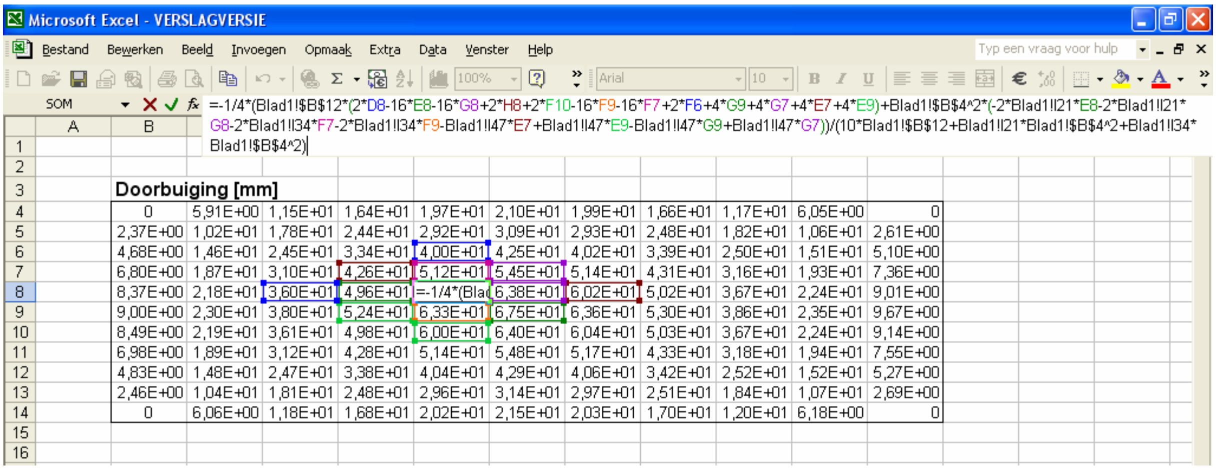
In (49) zijn de termen met $n_{yy;2}$ en $n_{xy;2}$ weggelaten omdat deze spanningen in netpunt 2 nul zijn.

Voor $w_{k;2}$ kan nu geschreven worden:

$$w_{k;2} = \frac{6Dw_{k;1} + 8Dw_{k;3} - Dw_{k;4} - 2Dw_{k;24} + 12Dw_{k;13} - 4Dw_{k;12} - 4Dw_{k;14}}{15D + 4n_{xx;2}\Delta^2} + \frac{2n_{xx;2}\left(w_{k;1} + w_{k;3}\right)}{15D + 4n_{xx;2}\Delta^2} \tag{50}$$

De verplaatsingen van de andere netpunten die op één maaswijdte afstand van de rand en op de rand liggen kunnen op dezelfde manier bepaald worden.

Vervolgens kunnen deze verplaatsingfuncties toegevoegd worden aan de spreadsheet van paragraaf 2.3.2. De spanningen per netpunt worden hieraan gekoppeld (figuur 20).



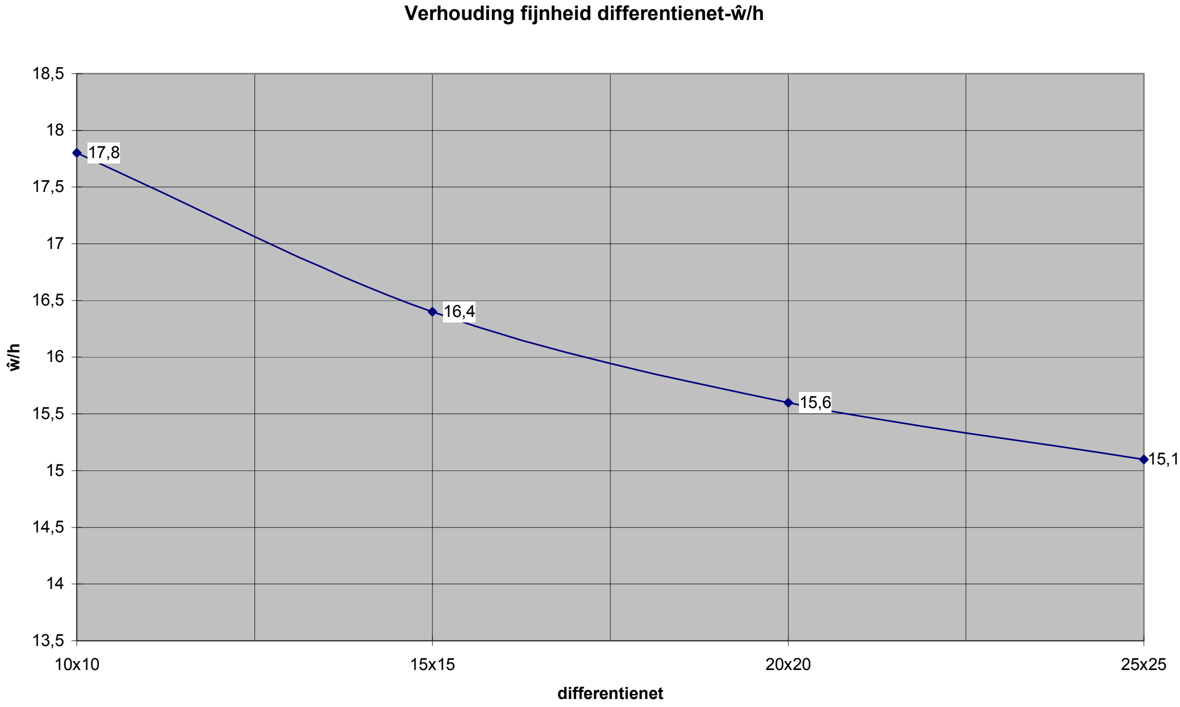
Figuur 20: Invoer verplaatsingsfuncties in Excel

Door nu de factor C proberenderwijs te veranderen, kan het knikmoment bepaald worden (C veranderen betekent indirect dat de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ verandert, want $C = \hat{w}/a^2$ met a = constant). Na verandering van C worden de spanningen berekend. Als deze berekend zijn wordt gekeken hoe het doorbuigingsveld reageert op deze spanningen. Als de verplaatsingen groter worden, betekent het dat C te groot is en dat de plaat uitknikt; worden de verplaatsingen echter kleiner, dan kan C nog opgevoerd worden om tot het knikmoment te komen. De C waarbij het doorbuigingsveld niet verandert (er heerst labiel evenwicht), is de factor waarbij de plaat op het punt staat uit te gaan knikken. Voor een 10x10-differentienet heeft C op moment van knikken een waarde van 8,90 x 10^{-5} [1/m]. Dit komt overeen met een verplaatsing $\hat{w}/h$ = 17,8.

Het gebruikte differentienet is vrij grof. Meer nauwkeurige resultaten worden verkrijgen door een fijner differentienet te gebruiken. Om het effect van een fijner differentienet te bepalen zijn de C factoren bepaald (waarbij de plaat op het punt staat uit te knikken) met een 15x15-differentienet, een 20x20/differentienet en een 25x25-differentienet (tabel 2).

Differentienet	C_{knik} x10^{-5} [1/mm]	$\hat{w}/h$ [-]
10x10	8,90	17,8
15x15	8,19	16,4
20x20	7,80	15,6
25x25	7,55	15,1

Tabel 2



Figuur 21: Invloed van de fijnheid van het differentienet op ŵ /h

In figuur 21 is *ŵ/h* uitgezet tegen de fijnheid van het differentienet. *ŵ/h* blijkt naar een bepaalde waarde te convergeren als de fijnheid van het differentienet groter wordt.
Met Picard-iteratie kan deze waarde geschat worden met de drie laatst bepaalde waarden [7].

De convergentiefactor is een mate van de convergentiesnelheid en kan als volgt bepaald worden

$$C = \frac{x_4 - x_3}{x_3 - x_2} = \frac{15{,}1 - 15{,}6}{15{,}6 - 16{,}4} = 0{,}625$$

Voor de fout geldt:

$$\varepsilon_4 \approx \frac{C}{1 - C}\left(x_4 - x_3\right) \approx 0{,}833$$

De waarde *r* waar het proces naar convergeert wordt dan:

$$r = \hat{w}/h = x_4 + \varepsilon_4 = 14{,}3$$

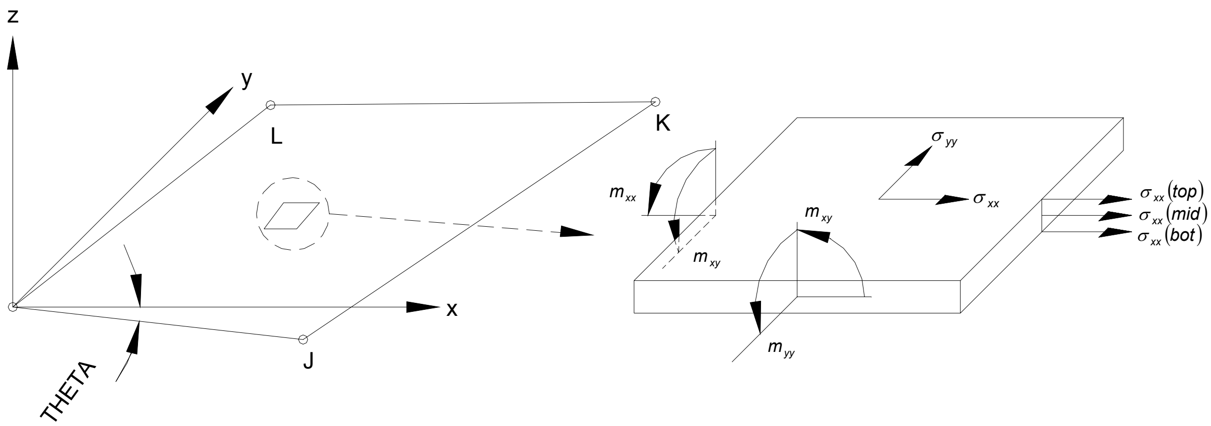
Ter vergelijking: Staaks vond met zijn eindige elementenberekeningen *ŵ/h* = 16,8 [2]. De afwijking is 15%.

3 Berekeningen met ANSYS

3.1 Inleiding

3.1.1 Elementen

Om het gedrag van koud vervormde glaspanelen met een niet vierkante vorm te voorspellen is gebruik gemaakt van het eindige-elementenprogramma ANSYS. Dit programma is zeer geschikt om 3-dimensionale constructies te berekenen waarin het gewenst is hogere orde effecten mee te nemen.
Hiertoe wordt de gewenste vorm in het programma ingevoerd en verdeeld in elementen (gemesht).
Voor de elementen is gekozen voor shell63-elementen (figuur 22). Een shell63-element wordt gevormd door vier knopen en heeft zowel buig- als membraaneigenschappen. Verder zijn belastingen in het vlak en normaal belastingen mogelijk. Het element heeft zes vrijheidsgraden per knoop: translaties in de *x*, *y* en *z* richtingen en rotaties om de *x*, *y* en *z*-assen.



Figuur 22: Het Shell63 element dat gebruikt is bij de eindige elementen berekeningen

3.1.2 Schematisering

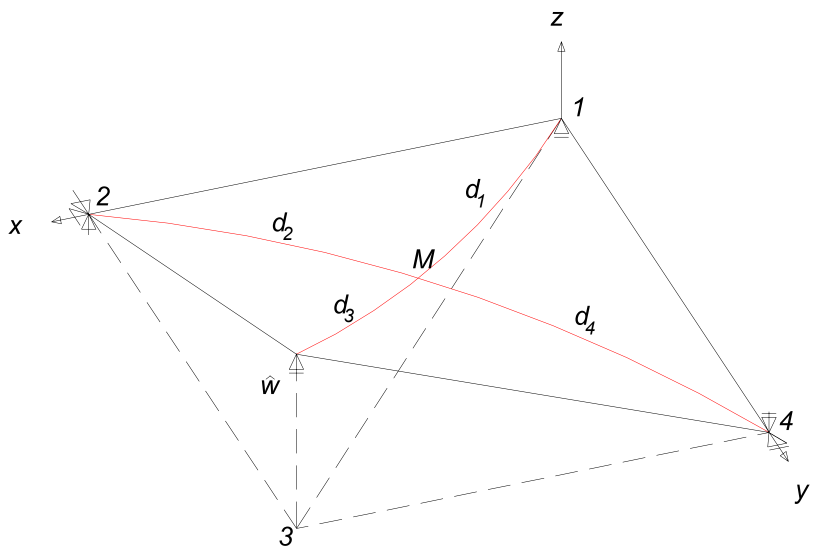
De invoer van de schematisering is hetzelfde als in paragraaf 1.3 (uitgangspunten) omschreven met de translatie-beperkingen als in tabel 3.

Hoekpunt	Translatiebeperking
1	*z*
2	*x, y, z*
3	*z*
4	*x, z*

Tabel 3

In de praktijk zal een plaat op drie hoeken gefixeerd worden in de *z*-richting en zal de vierde hoek loodrecht uit het vlak gedwongen worden om de gewenste vorm te krijgen (zie figuur 23).

Met ANSYS kan een opgelegde verplaatsing in de *z*-richting stapsgewijs worden aangebracht. Het programma berekent dan per stap de reactie van de plaat zodat een goed inzicht wordt verkregen in hoe de plaat zich gedraagt bij een bepaalde verplaatsing. Echter bij een grotere opgelegde *z*-verplaatsing komt de oplegreactie in *z*-richting steeds minder loodrecht op de plaat te staan. Dit effect kan gereduceerd worden door twee tegenoverliggende hoeken een opgelegde verplaatsing te geven, evenredig met de afstand van de hoeken naar het snijpunt *M* van de diagonalen (d_1 t/m d_4). Een opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ =200 mm van alleen hoek 3 geeft hetzelfde vervormingsbeeld van de plaat als tegelijkertijd opgelegde verplaatsingen $\hat{w}_3$ = 100 mm (in hoek 3) en $\hat{w}_1$ = ($100/d_3$ x d_1) mm (in hoek 1).



Figuur 23

3.1.3 Uitgangspunten

Indien niet anders vermeld zijn alle berekeningen uitgevoerd met:

- een lineair elastisch isotropisch materiaalgedrag van glas: E = 72000 N/mm^2 en ν = 0,23
- een stapgrootte van de opgelegde verplaatsingen van 2 mm in de hoek die het verst van *M* af ligt (bijv. hoek 3) en evenredige stapgrootte van de opgelegde verplaatsing in de schuin tegenover liggende hoek (in dit voorbeeld hoek 1: (2 x d_1/d_3) mm). De resultaten worden 'vertaald' naar de opgelegde verplaatsing van één hoek die het verst van *M* af ligt en die hetzelfde vervormingsbeeld geeft als de berekening met opgelegde verplaatsingen in twee tegenover elkaar liggende hoeken.

Als uitgangspunt voor de eindige-elementenberekeningen is een vierkante plaat van 1600x1600 mm met een dikte h = 8 mm gekozen. Zonder toevoeging van een kracht in de *z* richting blijkt dat ANSYS de berekening niet goed kan uitvoeren. De reden hiervan is dat het programma indifferent is in welke richting (in negatieve of positieve *z*-richting) de plaat gaat 'doorslaan' tijdens de overgang van het eerste naar het tweede vervormingspatroon. Om te zorgen dat de plaat wel in het tweede vervormingspatroon terecht komt wordt er een F_z = -0,5 N op het midden van de plaat ingevoerd.

Door systematisch de vorm te wijzigen ten opzichte van deze uitgangssituatie is getracht factoren op te sporen die van invloed zijn op het vervormingsgedrag van niet vierkante glaspanelen.

De invloed van de zwaartekracht is buiten beschouwing gelaten.

3.2 Vergelijking differentiemethode met eindige-elementenberekening

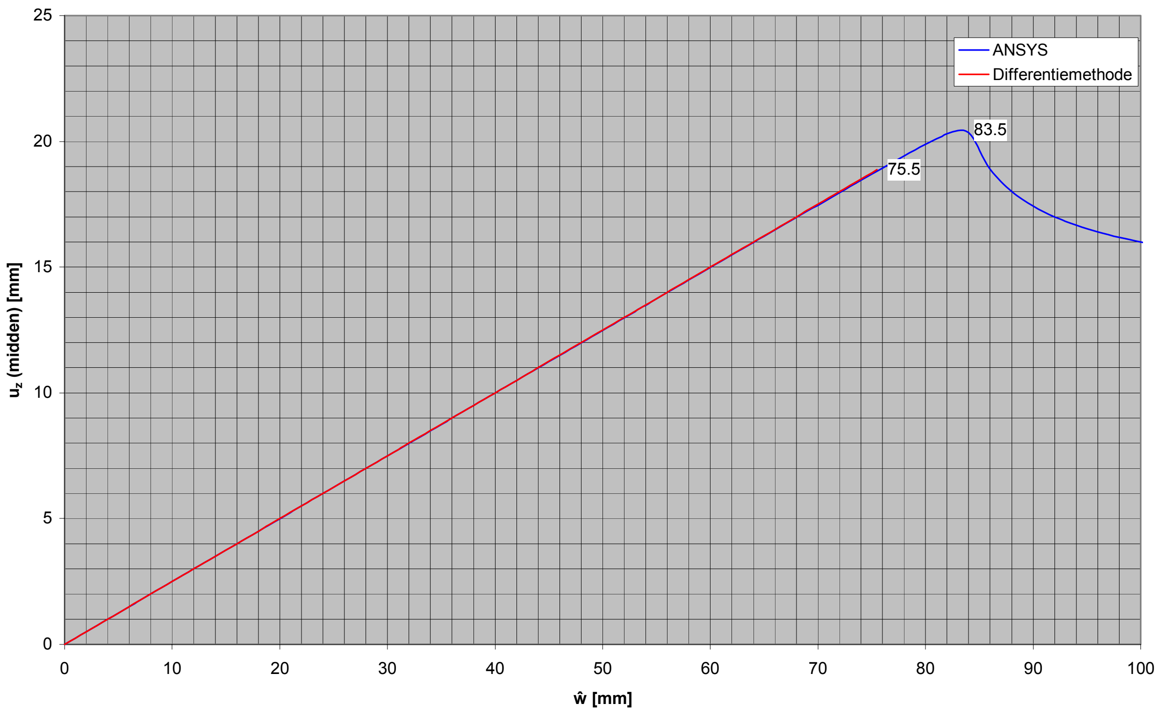
3.2.1 Uitkomsten

In hoofdstuk 2 is een glasplaat van 1000x1000 mm met een dikte h = 5 mm met de differentiemethode berekenend. Door een eindige-elementenberekening te maken van dezelfde plaat kunnen de oplossingen uit de differentiemethode vergeleken worden.

Hiertoe worden de berekeningen van een 25x25-differentienet (fijnst berekende differentienet) vergeleken met een eindige-elementenberekening met een mesh 20x20 (fijn genoeg, zie paragraaf 3.3).

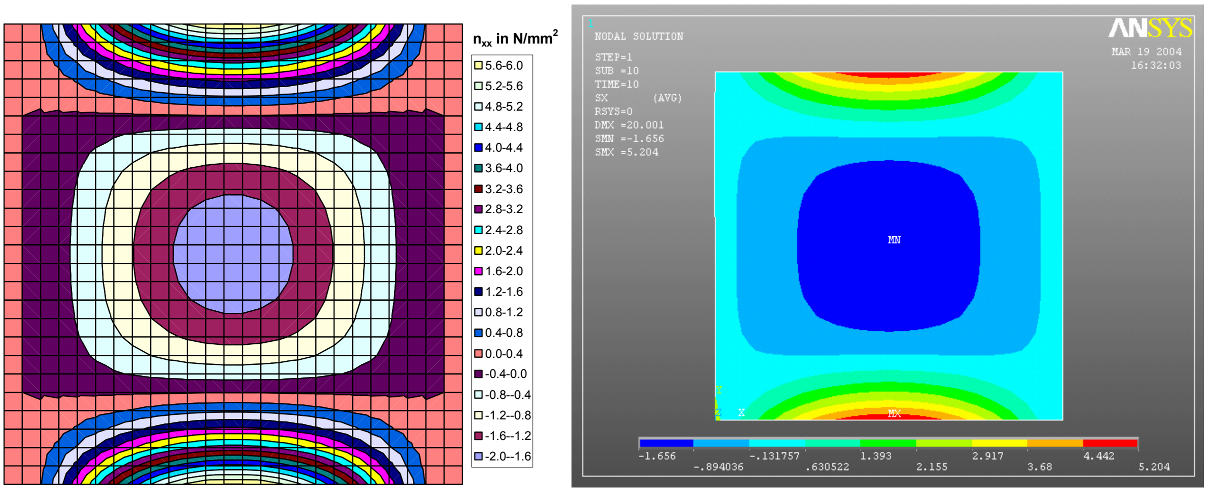
In figuur 24, 25 en 26 en in tabel 4 worden de resultaten van de twee verschillende berekeningen met elkaar vergeleken.

Het blijkt dat de grootste afwijking (bij een opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ = 40 mm) van de maximale spanningen uit de differentiemethode ten opzichte van de uitkomsten uit de ANSYS-berekening 16,7% is (tabel 4). Verder zijn alle spanningen uit de differentiemethode iets hoger dan de spanningen uit de eindige elementen methode. Het omslagpunt $\hat{w}_{crit}$ van de analytische methode is wat lager.

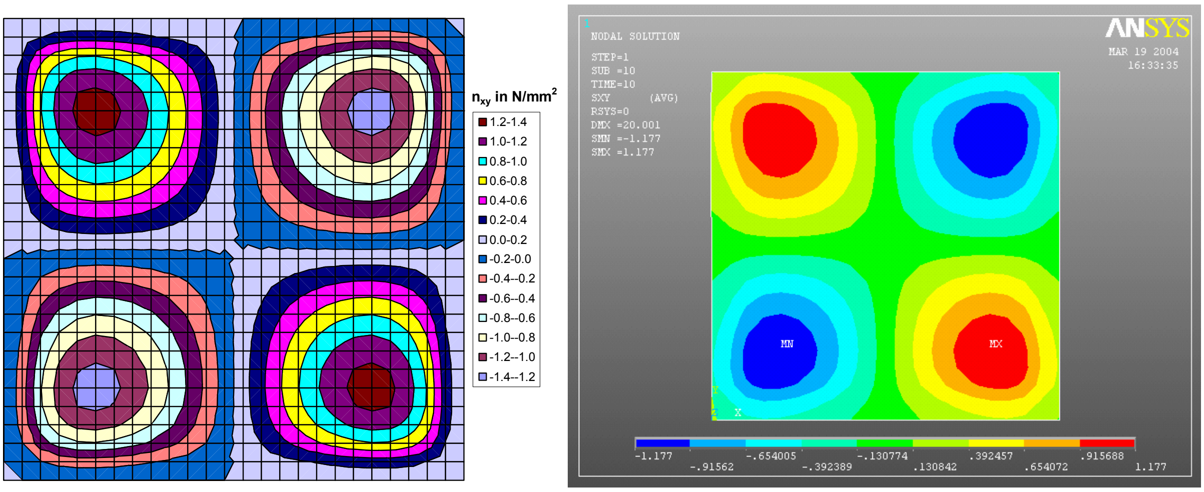


Figuur 24: Verplaatsing van het midden van de plaat u_z (midden) als functie van opgelegde verplaatsing $\hat{w}$

.



Figuur 25: Spanningen in middenvlak σ_{xx} (N/mm^2) uit differentieberekening (links) en eindige-elementenberekening (rechts) bij $\hat{w}$ = 40 mm



Figuur 26: Spanningen in middenvlak σ_{xy} (N/mm^2) uit differentieberekening (links) en eindige-elementenberekening (rechts) bij $\hat{w}$ = 40 mm

	EEM (ANSYS)	Differentie methode	Verschil differentie methode t.o.v. ANSYS
$\sigma_{xx;min}$ [N/mm^2]	-1,656	-1,847	11,5%
$\sigma_{xx;max}$ [N/mm^2]	5,204	6,075	16,7%
$\sigma_{xy;min}$ [N/mm^2]	-1,177	-1,279	-8,7%
$\sigma_{xy;max}$ [N/mm^2]	1,177	1,279	8,7%
$\hat{w}_{crit}$ [mm]	83,5	75,5	-9,6%
$\hat{w}_{crit}/h$ [-]	16,7	15,1	-9,6%

Tabel 4: Vergelijking differentiemethode met EEM (ν = 0,23) bij $\hat{w}$ = 40 mm; $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$

3.2.2 Verklaring van de verschillen

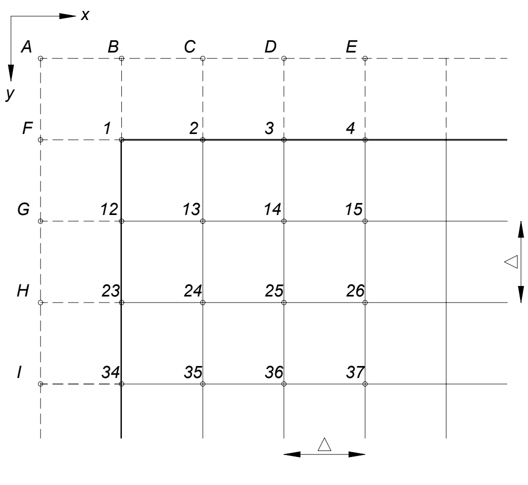
1. Verwaarlozing van de factor $-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}C$ bij het bepalen van de kniklast met de differentie-methode

Er is ook een berekening gemaakt met de differentiemethode inclusief deze factor. Vergelijking (48) kan dan worden hergeformuleerd:

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_{14}\left(w_{k;3}-2w_{k;14}+w_{k;25}\right)+f_{24}\left(w_{k;23}-2w_{k;24}+w_{k;25}\right)-2f_{25}\left(w_{k;24}-2w_{k;25}+w_{k;26}\right)}{\Delta^4}\\
&-\frac{g_{25}\left(w_{k;14}-2w_{k;25}+w_{k;36}\right)+f_{26}\left(w_{k;25}-2w_{k;26}+w_{k;27}\right)+g_{36}\left(w_{k;25}-2w_{k;36}+w_{k;47}\right)}{\Delta^4}\\
&+2D_I\frac{w_{k;25}-w_{k;26}+w_{k;15}-w_{k;14}}{\Delta^4}+2D_{II}\frac{w_{k;25}-w_{k;14}+w_{k;13}-w_{k;24}}{\Delta^4}\\
&+2D_{III}\frac{w_{k;25}-w_{k;24}+w_{k;35}-w_{k;36}}{\Delta^4}+2D_{IV}\frac{w_{k;25}-w_{k;36}+w_{k;37}-w_{k;26}}{\Delta^4}=\\
&\frac{n_{xx;25}\left(w_{k;24}-2w_{k;25}+w_{k;26}\right)+n_{yy;25}\left(w_{k;14}-2w_{k;25}+w_{k;36}\right)+2n_{xy;25}\left(w_{k;13}-w_{k;35}+w_{k;37}-w_{k;15}\right)}{\Delta^2}\\
&+\underbrace{2n_{xy;25}C}_{\text{extra term}}
\end{aligned}
\qquad (51)
$$

Uit deze vergelijking kan voor elk netpunt de verplaatsing worden afgeleid op dezelfde wijze als in paragraaf 2.3.3 (in (51) is dat netpunt 25, zie ook figuur 27).

Het blijkt dat de factor $-2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}C$ geen significante invloed heeft op het omslagpunt van de plaat. Voor een 25x25-differentienet is $\hat{w}/h$ ook 15,1.



Figuur 27

2. Verwaarlozing van de dwarscontractie bij het afleiden van de differentievergelijking voor doorbuiging

Bij het afleiden van de differentievergelijkingen voor de doorbuiging is bij het invoeren van de momenten (vergelijking (31)) de dwarscontractie verwaarloosd.
Om de invloed van deze verwaarlozing te bepalen zijn er twee extra berekeningen gemaakt (één met de differentiemethode en één met ANSYS) van dezelfde plaat als hierboven beschreven (1000x1000x8 mm), echter met een dwarscontractiecoëfficiënt $\nu = 0$ (tabel 6a en 6b).

	EEM (ANSYS) ν=0,23	EEM (ANSYS) ν=0	Verschil ν=0 t.o.v. ν=0,23
$\sigma_{xx;min}$ [N/mm^2]	-1,656	-1,637	1,1%
$\sigma_{xx;max}$ [N/mm^2]	5,204	5,201	-0,1%
$\sigma_{xy;min}$ [N/mm^2]	-1,177	-1,166	0,9%
$\sigma_{xy;max}$ [N/mm^2]	1,177	1,166	-0,9%
$\hat{w}_{crit}$ [mm]	83,5	73	-12,6%
$\hat{w}_{crit}/h$ [-]	16,7	14,6	-12,6%

Tabel 6a: Vergelijking EEM (ν = 0) met EEM(ν = 0,23) bij $\hat{w}$ = 40 mm; $\sigma_{xx;} = \sigma_{yy}$

	Differentie methode ν = 0,23	Differentie methode ν = 0	Verschil ν=0 t.o.v. ν=0,23
$\sigma_{xx;min}$ [N/mm^2]	-1,847	-1,847	0,0%
$\sigma_{xx;max}$ [N/mm^2]	6,075	6,075	0,0%
$\sigma_{xy;min}$ [N/mm^2]	-1,279	-1,279	0,0%
$\sigma_{xy;max}$ [N/mm^2]	1,279	1,279	0,0%
$\hat{w}_{crit}$ [mm]	75,5	73,5	-2,7%
$\hat{w}_{crit}/h$ [-]	15,1	14,7	-2,7%

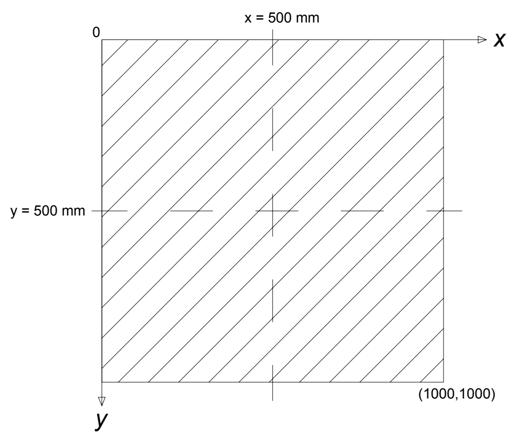
Tabel 6b: Vergelijking differentiemethode (ν = 0) met differentiemethode (ν = 0,23) bij $\hat{w}$ = 40 mm; $\sigma_{xx;} = \sigma_{yy}$

Het blijkt dat de normaalspanningen in het middenvlak berekend met de differentiemethode niet veranderen als $\nu = 0$ in plaats van $\nu = 0{,}23$. Dit komt omdat de spanningsfunctie (die in paragraaf 2.3.2 opgelost is) onafhankelijk is van ν (zie vergelijking (16) in paragraaf 2.3.1). De normaalspanningen in het middenvlak berekend met de differentiemethode zijn hieruit volgend ook onafhankelijk van ν (zie vergelijking (5) in paragraaf 2.1).
Ook de normaalspanningen in het normaalvlak berekend met ANSYS met $\nu = 0$ wijken minimaal af van de berekening met $\nu = 0{,}23$ (max. 1,1%). Door afrondingen in het programma zijn ze niet exact gelijk.

De verwaarlozing van de dwarscontractie bij de differentiemethode lijkt wel invloed te hebben op de bepaling van $\hat{w}_{crit}$. Bij $\nu = 0$ wijkt $\hat{w}_{crit}$ berekend met de differentiemethode maar 0,7% (0,5 mm) af van $\hat{w}_{crit}$ berekend met ANSYS, terwijl deze afwijking bij $\nu = 0{,}23$ nog -9,6% (8,0 mm) bedraagt.
Er kan echter niet met zekerheid beweerd worden dat deze waarneming alleen veroorzaakt wordt door verwaarlozing van de dwarscontractie. Bij het bepalen van $\hat{w}_{crit}$ met de differentiemethode worden ook de normaalspanningen in het middenvlak meegenomen, het knikmoment van de plaat is dus afhankelijk van deze spanningen. Deze spanningen blijven nagenoeg hetzelfde bij verandering van $\nu = 0{,}23$ in $\nu = 0$. Het kan dus toeval zijn dat voor dit geval $\hat{w}_{crit}$ (voor beide methoden) dichter bij elkaar komt als $\nu = 0{,}23$ veranderd wordt in $\nu = 0$.

3. Extrapolatie van de spanningen n_{xx} op de randen met een normaal in de *y*-richting en van de spanningen n_{yy} op de randen met een normaal in de *x*-richting

De absolute normaalspanningen in het middenvlak zijn bij de differentiemethode groter dan bij de ANSYS-berekening, voor zowel het geval $\nu = 0{,}23$ als $\nu = 0$. In punt 2 is gebleken dat de dwarscontractie geen invloed heeft op deze spanningen in het middenvlak, dus kan worden geconcludeerd dat dit verschil voor het grootste deel wordt veroorzaakt door de extrapolatie van de spanningen n_{xx} op de randen met een normaal in de *y*-richting en van de spanningen n_{yy} op de randen met een normaal in de *x*-richting.



Figuur 28

In figuur 29 is de σ_{xx} (n_{xx}/h van verschillende differentienetten en de ANSYS-berekening) uitgezet tegen de *y*-coördinaat (0–500 mm) in de snede x = 500 mm; $\hat{w}$ = 40 mm (zie figuur 28). In

deze snede heerst op de rand (y = 0) de grootste trekspanning en in het midden (y = 500 mm) de grootste drukspanningen. Het blijkt dat de spanningen uit de differentiemethode in het midden van de plaat (uitvergroot in figuur 31) weinig afwijkt van de ANSYS-berekening (15x15 differentienet benadert ANSYS-berekening het nauwkeurigst). In de buurt van de rand van de plaat (uitvergroot in figuur 30) wijken de spanningen uit de differentiemethode significant af van de ANSYS-berekening. Op de rand, waar de trekspanning het grootst is, benadert het 10x10-differentienet de ANSYS-berekening het best.
Tussen de rand en het midden van de plaat wijkt het 10x10-differentienet het meeste af van de ANSYS-berekening.

Verder is de afwijking van de spanningen σ_{xx} van de differentiemethode ten opzichte van de ANSYS-berekening op de rand van de snede (x = 500 mm en y = 0) uitgezet tegen de gedwongen verplaatsing $\hat{w}$ (figuur 32). Hieruit blijkt dat naarmate $\hat{w}$ groter wordt de afwijking ten opzichte van de ANSYS-berekening steeds groter wordt. In de buurt van het omslagpunt ($\hat{w}$ = 70 mm) is de afwijking van het 20x20- en 25x25-differentienet meer dan 35%. Het 10x10-differntienet blijkt de ANSYS-berekening het beste te benaderen.

Opgemerkt wordt dat bij een vierkante plaat het spanningsverloop van σ_{xx} en σ_{yy} precies hetzelfde is (zie Appendix D Figuur D2 en D3).

4. Op één maaswijdte van de randen met normaal in de *x*-richting zijn de spanningen n_{xx} nul en op één maaswijdte van de randen met een normaal in de *y*-richting zijn de spanningen n_{yy} nul

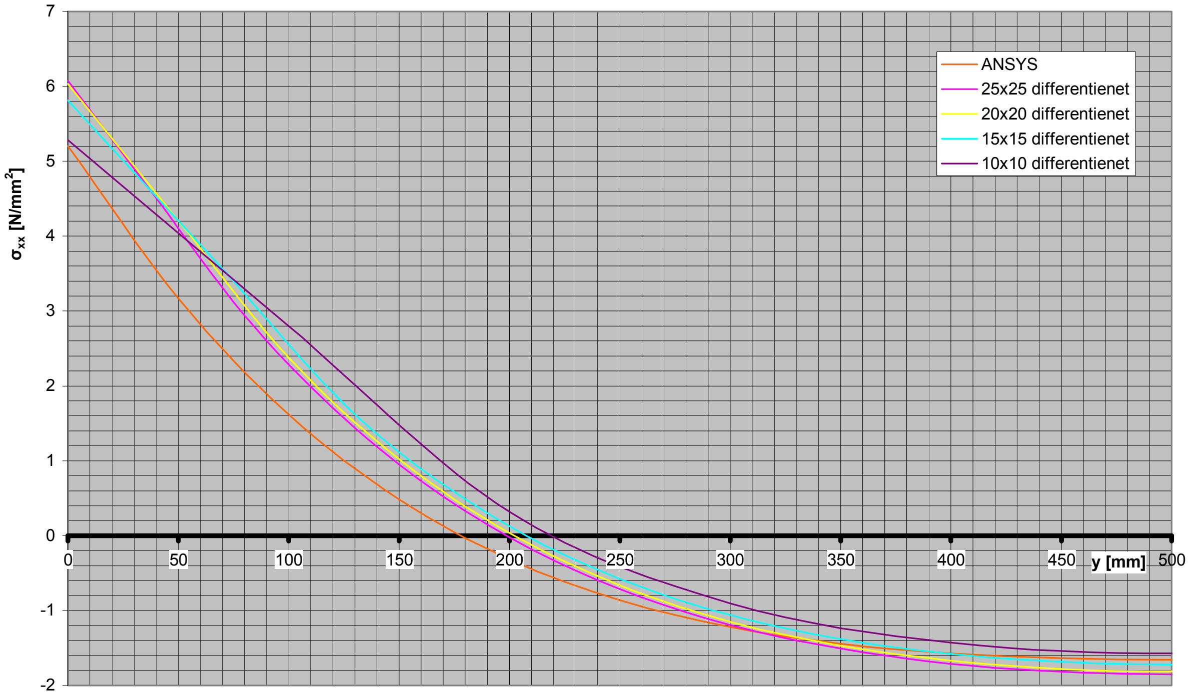
Door te voldoen aan de heersende randvoorwaarden zijn op één maaswijdte van de randen met normaal in de x-richting de spanningen n_{xx} nul en op één maaswijdte van de randen met een normaal in de y-richting de spanningen n_{yy} nul, terwijl die in werkelijkheid een waarde moeten hebben (zie figuur 13 paragraaf 2.3.2).
In figuur 33 zijn de spanningen σ_{xx} (n_{xx}/h) in het middenvlak uitgezet tegen y (0-500 mm; x = 500 mm, zie figuur 28). Hieruit blijkt dat vanaf 15x15-differentienet en fijner er geen significant verschil bestaat ten opzichte van de spanningen uit de ANSYS-berekening. De berekening met een 10x10-differentienet wijkt vooral ter plaatse van de rand af van de ANSYS-berekening.

3.2.3 Conclusie

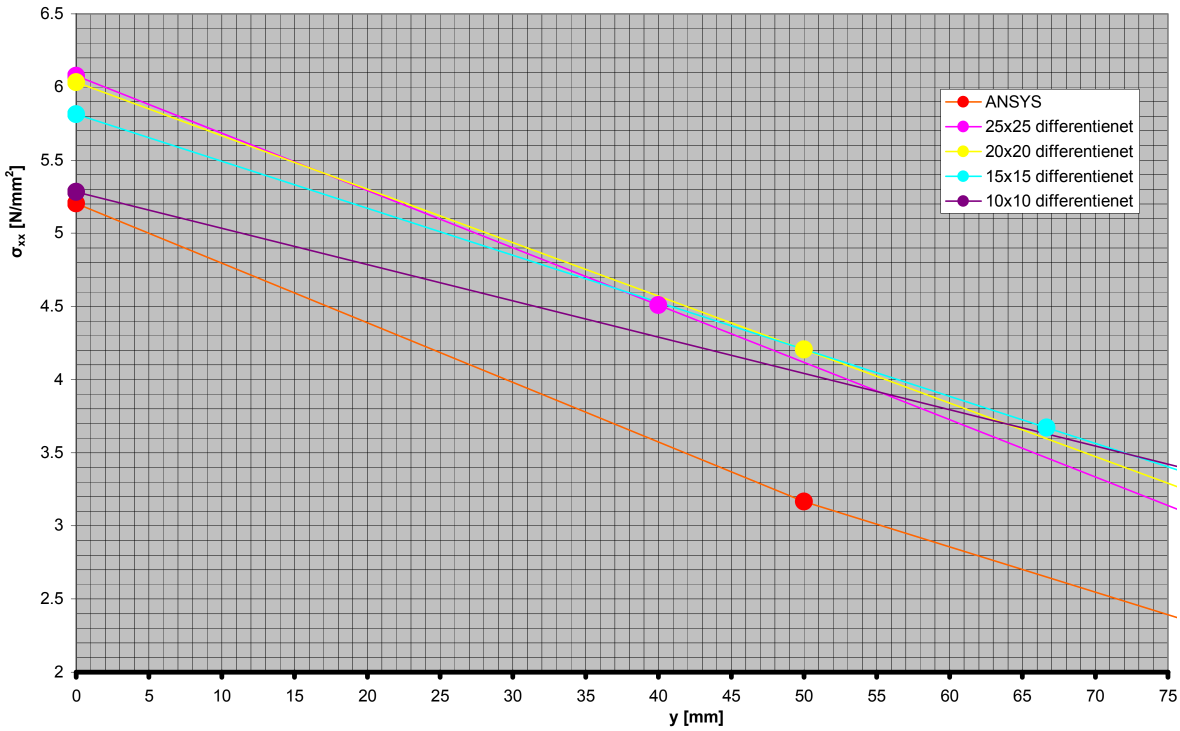
De afwijking van de differentieberekeningen ten opzichte van de ANSYS-berekening wordt voornamelijk veroorzaakt door extrapolatie van de spanningen n_{xx} op de randen met een normaal in de y-richting en van de spanningen n_{yy} op de randen met een normaal in de x-richting.

Voor de bepaling van het omslagpunt van een vierkante vierpuntsopgelegde plaat is de differentiemethode uit ingenieurs oogpunt (ondergrensbenadering) geschikt vanaf het 15x15-differentienet en fijner (afwijkingen ten opzichte van ANSYS maximaal 10%). Het 15x15-differentienet benaderd het omslagpunt het meest nauwkeurig (afwijking ten opzichte van ANSYS is 2,4%)

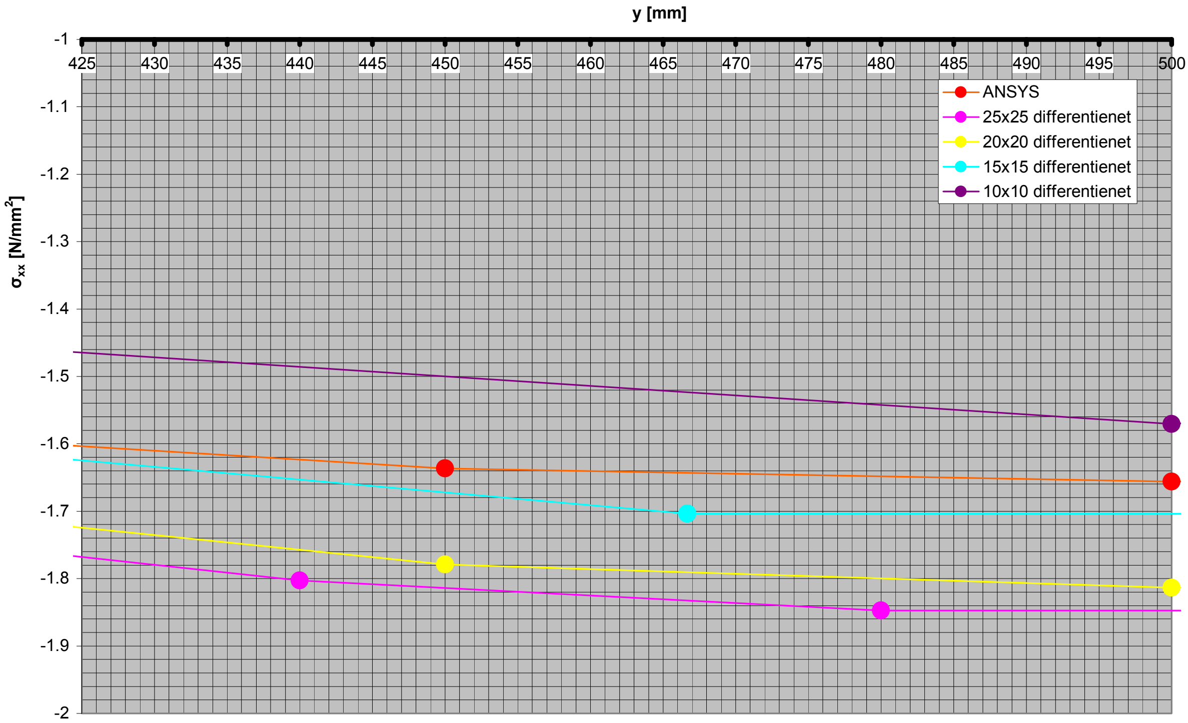
De normaalspanningen in het middenvlak lijkt gemiddeld gezien het best benaderd te worden door het 10x10-differentienet. Voor deze methode geldt dus niet dat een fijner differentienet leidt tot nauwkeurigere resultaten!



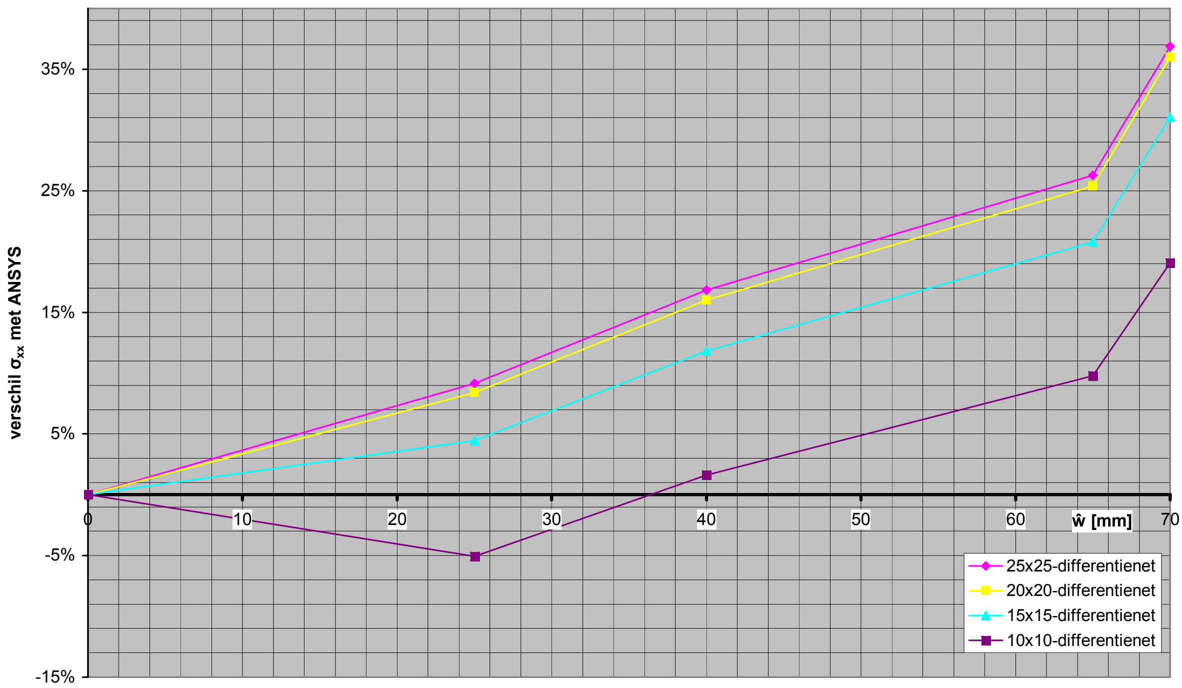
*Figuur 29: Spanningen σ_{xx} in het middenvlak (uit de differentieberekeningen met verschillende differentienetten en uit de ANSYS-berekening) in de doorsnede van de plaat met **x = 500 mm** (constant) en **y = 0 – 500 mm**; ŵ = 40 mm.*



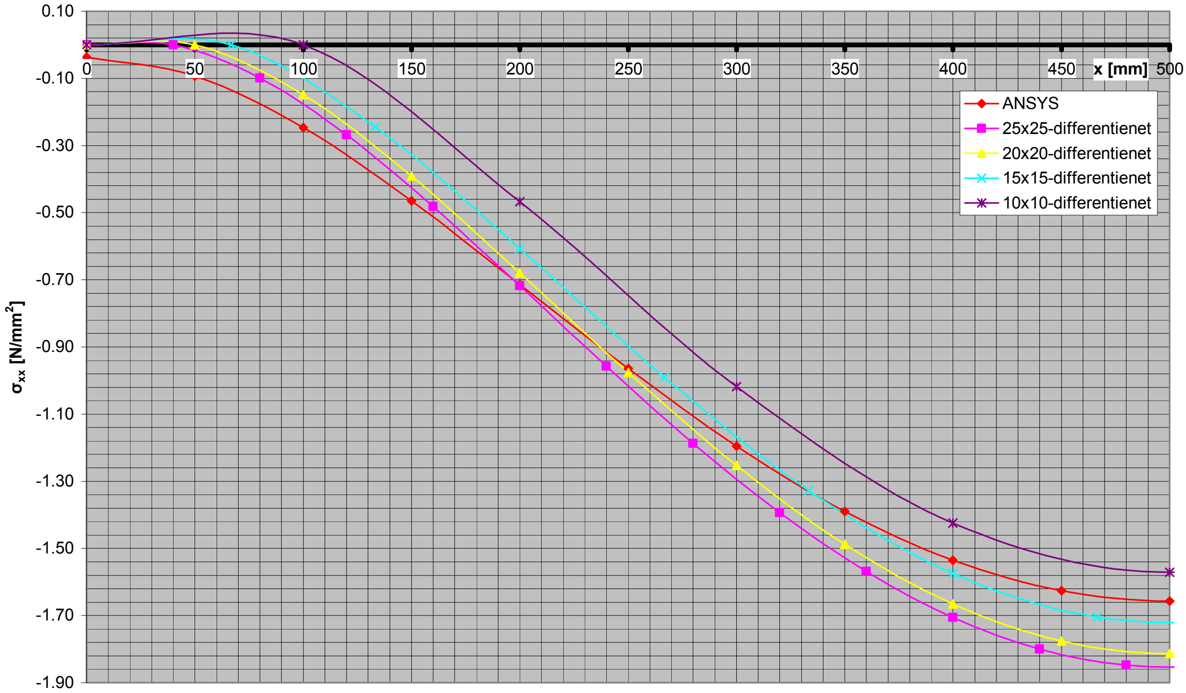
*Figuur 30: Spanningen σ_{xx} in het middenvlak (uit de differentieberekeningen met verschillende differentienetten en uit de ANSYS-berekening) in de doorsnede van de plaat met **x = 500 mm** (constant) en **y = 0 – 75 mm**; ŵ = 40 mm.*



*Figuur 31: Spanningen **σ_{xx}** in het middenvlak (uit de differentieberekeningen met verschillende differentienetten en uit de ANSYS-berekening) in de doorsnede van de plaat met **x = 500 mm** (constant) en **y = 425 – 500 mm**; ŵ = 40 mm.*



*Figuur 32: Verschil spanningen **σ_{xx}** (in het middenvlak) uit differentiemethode t.o.v. de spanningen **σ_{xx}** uit ANSYS - berekening op de rand **x = 500 mm en y = 0 mm**; ŵ variërend.*



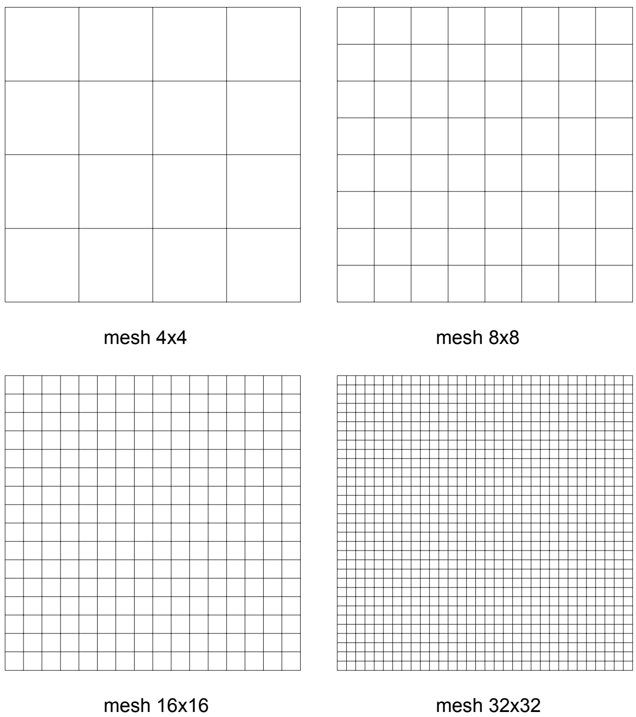
Figuur 33: Spanningen $\boldsymbol{\sigma_{xx}}$ *in het middenvlak (uit de differentieberekeningen met verschillende differentienetten en uit de ANSYS-berekening) in de doorsnede van de plaat met* ***x = 0-500 mm*** *en* ***y = 500 mm*** *(constant);* $\hat{w}$ *= 40 mm*

3.3 Invloed van de meshfijnheid op deberekeningen

Door de keuze van een fijnere mesh bij een eindige-elementenberekening worden de uitkomsten nauwkeuriger. Een fijnere mesh vereist echter grotere berekeningen van het programma wat zich uit in een langere rekentijd en een grotere omvang van de output.
Er is daarom onderzocht wat de minimale fijnheid van de mesh moet zijn om voldoende nauwkeurige uitkomsten te krijgen in het kader van dit onderzoek.

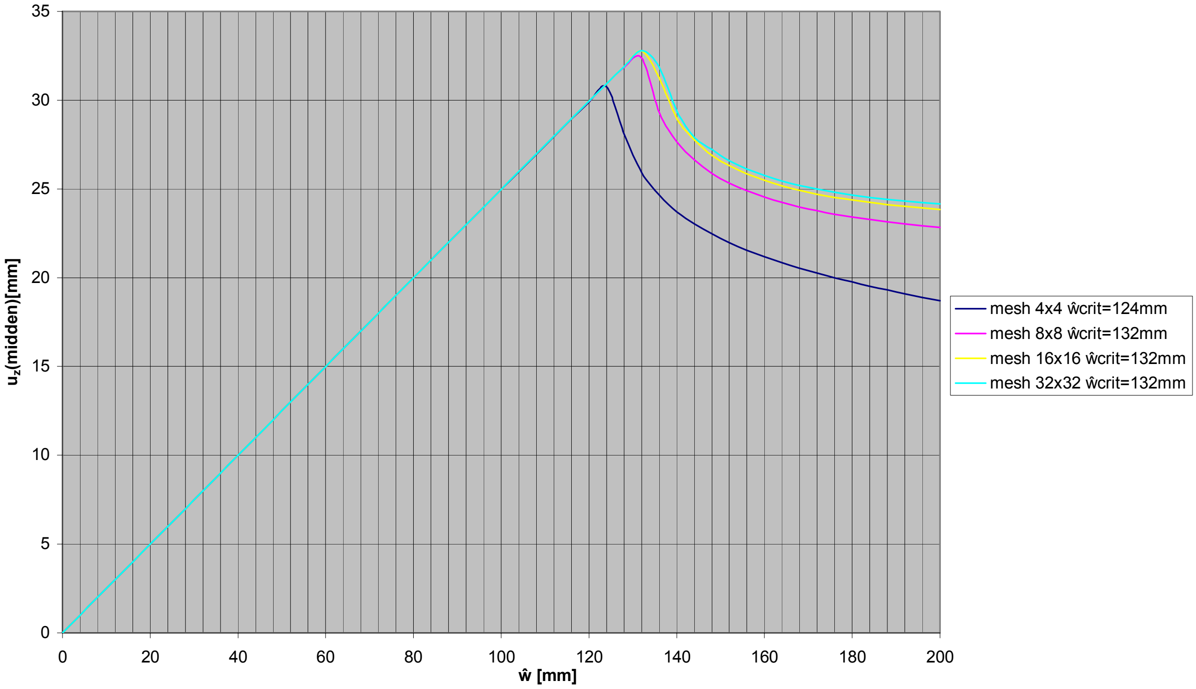
Er zijn 4 berekeningen gemaakt van een glasplaat 1600x1600 mm met h = 8 mm (figuur 34):

1. mesh 4x4; elementen 400x400 mm
2. mesh 8x8; elementen 200x200 mm
3. mesh 16x16; elementen 100x100 mm
4. mesh 32x32; elementen 50x50 mm



Figuur 34: Overzicht berekende meshes

De verplaatsing van het middelpunt van de plaat in z-richting bij een stapsgewijs opvoeren van de verplaatsing $\hat{w}$ van één van de hoeken is uitgezet in figuur 35. In deze figuur blijkt u_z in het midden lineair toe te nemen met $\hat{w}$ totdat u_z op een bepaald moment een maximum bereikt (het omslagpunt: overgang van het eerste vervormingspatroon naar tweede vervormingspatroon). Hierna neemt u_z (niet lineair) af bij toename van $\hat{w}$.
Het blijkt dat alleen een mesh 4x4 significant afwijkt van de andere meshes. Er kan daarom geconcludeerd worden dat de fijnheid van de mesh 8x8 voldoende nauwkeurig is voor het doel van dit onderzoek.
Een mesh 8x8 bestaat uit 64 elementen. Bij de berekeningen zijn daarom alle platen ‘gemesht’ in minimaal 64 elementen.

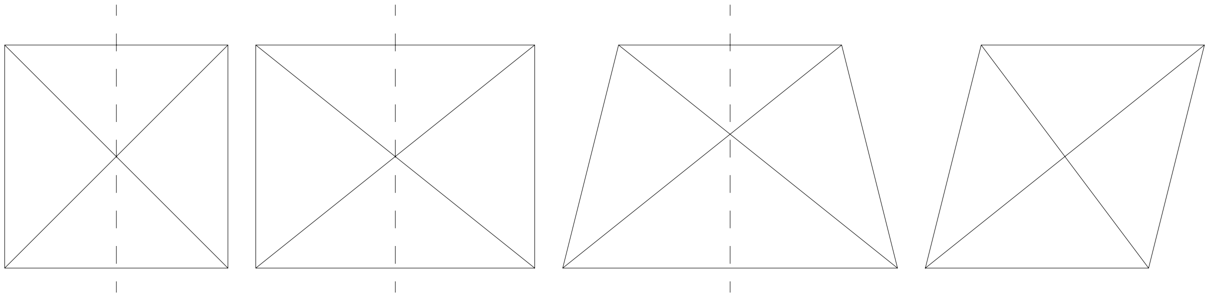


Figuur 35: Vergelijking van verschillende meshes op het omslagpunt van het midden

3.4 Niet vierkante vormen van de glasplaat

3.4.1 Inleiding

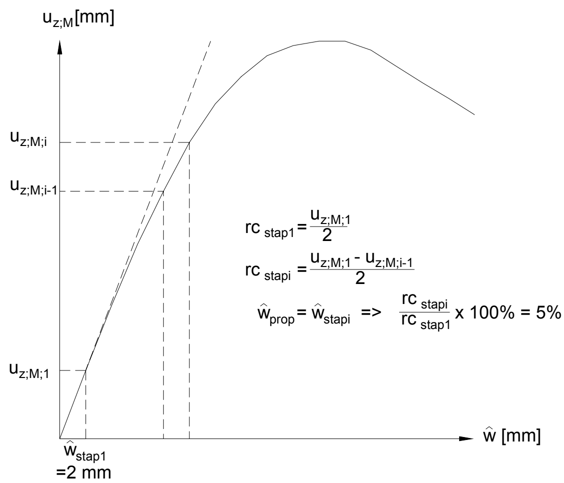
Uit het onderzoek van Staaks blijkt dat een parallellogram (figuur 36D) geen duidelijk omslagpunt heeft [2]. Direct na het opleggen van een gedwongen verplaatsing van één hoek uit het vlak neemt deze plaat het tweede vervormingspatroon aan, met een gebogen diagonaal, een nagenoeg rechte diagonaal en gebogen zijden. Een gelijkzijdig trapezium en een rechthoek blijken daarentegen hetzelfde gedrag te vertonen als een vierkante plaat: de plaat hebben een duidelijk omslagpunt tussen het eerste en tweede vervormingspatroon.



Figuur 36:
A. vierkant
B. rechthoek
C. gelijkzijdig trapezium
D. parallellogram

Een logische verklaring voor het feit dat een parallellogram meteen het tweede vervormingspatroon aanneemt is dat de diagonalen (waarin de druk wordt opgebouwd) niet even lang zijn. De langste diagonaal heeft een grotere kniklengte en zal dus al eerste gaan knikken om de korte diagonaal.
Bij het vierkant, de rechthoek en het trapezium zijn de diagonalen even lang, waardoor de kans van knikken van ene diagonaal even groot is als de kans van knikken van de andere diagonaal (indien er geen initiële vervormingen zijn).

Niet vierkante, rechthoekige of gelijkzijdig trapezium vormen hebben geen duidelijk omslagpunt, omdat zij gelijk na aanbrengen van de opgelegde verplaatsing het tweede vervormingspatroon aannemen. De vervorming van de plaat is in de beginfase echter nagenoeg lineair met de opgelegde verplaatsing. Er is een arbitraire proportionaliteitsgrens voor $\hat{w}$ vastgesteld om de resultaten van niet vierkante, rechthoekige of gelijkzijdig trapezium vormen te kunnen kwantificeren (figuur 37).
Als de verplaatsing in *z*-richting van M ($u_{z;M}$) wordt uitgezet tegen de opgelegde verplaatsing in *z* richting van één hoek ($\hat{w}$), dan is de proportionaliteitsgrens $\hat{w}_{prop}$ de opgelegde verplaatsing waarbij de richtingscoëfficiënt (rc) van die stap 5% is van de rc van stap 1. Boven deze grens is er geen sprake meer van dubbele kromming.

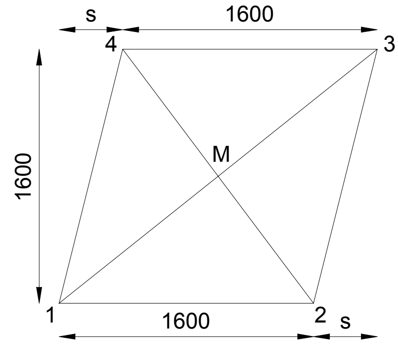


Figuur 37: Bepalen proportionaliteitsgrens

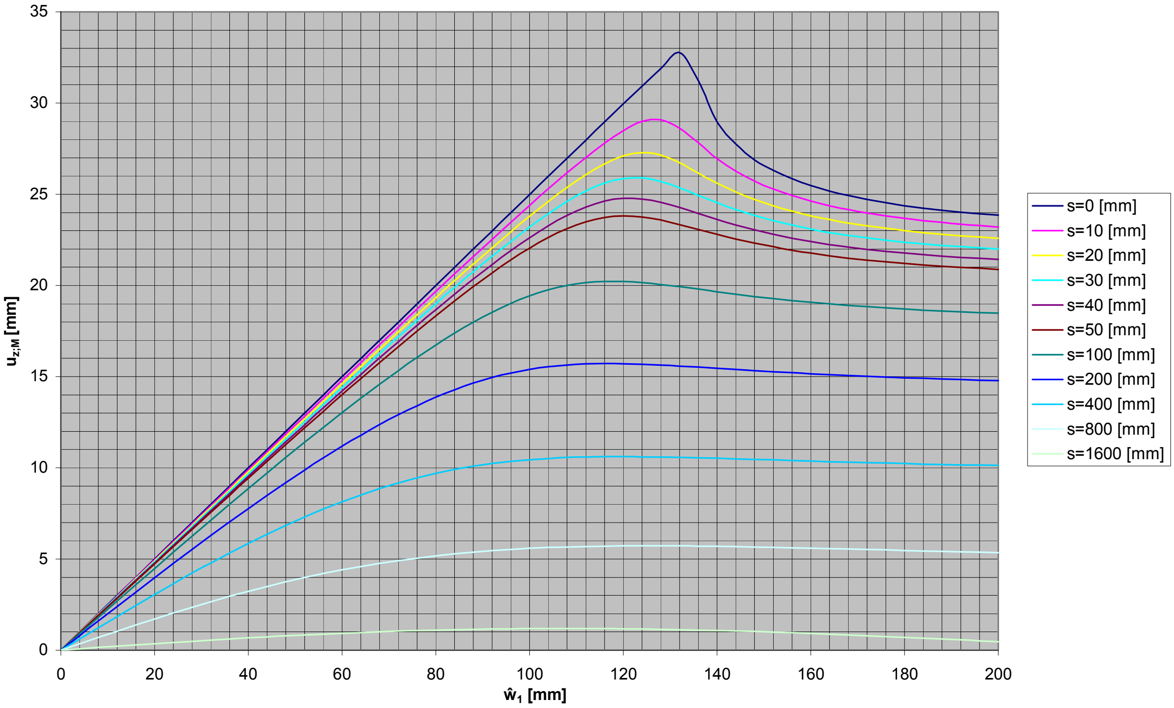
In dit onderzoek is geprobeerd factoren op te sporen die van invloed zijn op het gedrag van vervormen van een koud getordeerde glasplaat. Begonnen is met het berekenen van een serie parallellogramvormen (par. 3.4.2), gevolgd door een serie rechthoekige trapeziumvormen (par. 3.4.3).
In Appendix F is een lijst weergegeven met gegevens van alle relevante berekeningen die gemaakt zijn met ANSYS.

3.4.2 Parallellogramvorm

Om de invloed van de parallellogramvorm op het vervormingsgedrag van een glasplaat te bepalen is een serie van parallellogrammen berekend. Het uitgangspunt van deze serie is de 1600x1600x8 mm glasplaat, s = 0 (figuur 38). Vervolgens wordt s opgevoerd tot een maximum van 1600 mm.
In figuur 39 is de z-verplaatsing van het snijpunt van de diagonalen uitgezet tegen de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ van één hoek die het verst van M af ligt (hier $\hat{w}_1$ of $\hat{w}_3$).
Bij toenemende s wijkt de verplaatsing van M (in z-richting) steeds meer af van de verplaatsing van M van een vierkante plaat (s = 0). Dit komt dit doordat bij toenemende s het verschil in lengte van de beide diagonalen steeds groter wordt, waardoor de 2^e orde effecten eerder een rol gaan spelen.



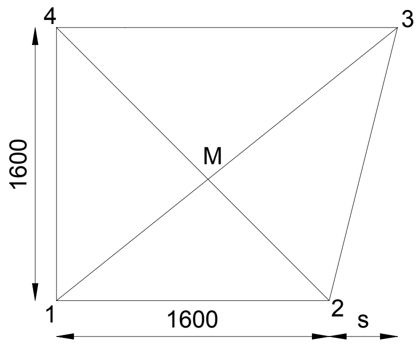
Figuur 38



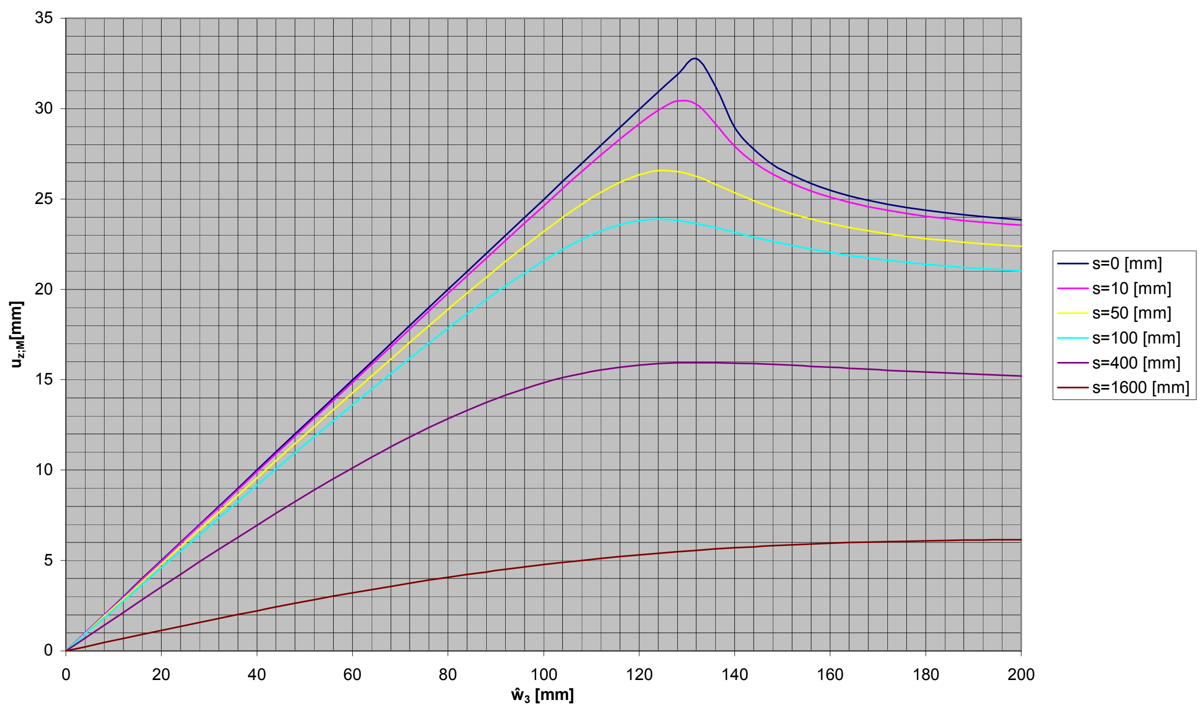
Figuur 39: Vergelijking van parallellogrammen met een toenemende s

3.4.3 Rechthoekige trapeziumvorm

Om de invloed van de punt op het vervormingsgedrag van een glasplaat te bepalen is een serie van rechthoekige trapeziumvormen berekend. Het uitgangspunt van deze serie is de 1600x1600x8 mm glasplaat, s = 0 (figuur 40). Vervolgens wordt s opgevoerd tot een maximum van 1600 mm.
In figuur 41 is de z-verplaatsing van het snijpunt van de diagonalen uitgezet tegen de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ van één hoek die het verst van M af ligt (hier $\hat{w}_3$).
Ook hier blijkt dat bij toenemende s de verplaatsing van M (in z-richting) steeds meer afwijkt van de verplaatsing van M van een vierkante plaat (s = 0), echter in minder mate dan bij de parallelvormen bij dezelfde s. Ook hier komt dit doordat bij toenemende s het verschil in lengte van de beide diagonalen steeds groter wordt, waardoor de 2[e] orde effecten eerder een rol gaan spelen.



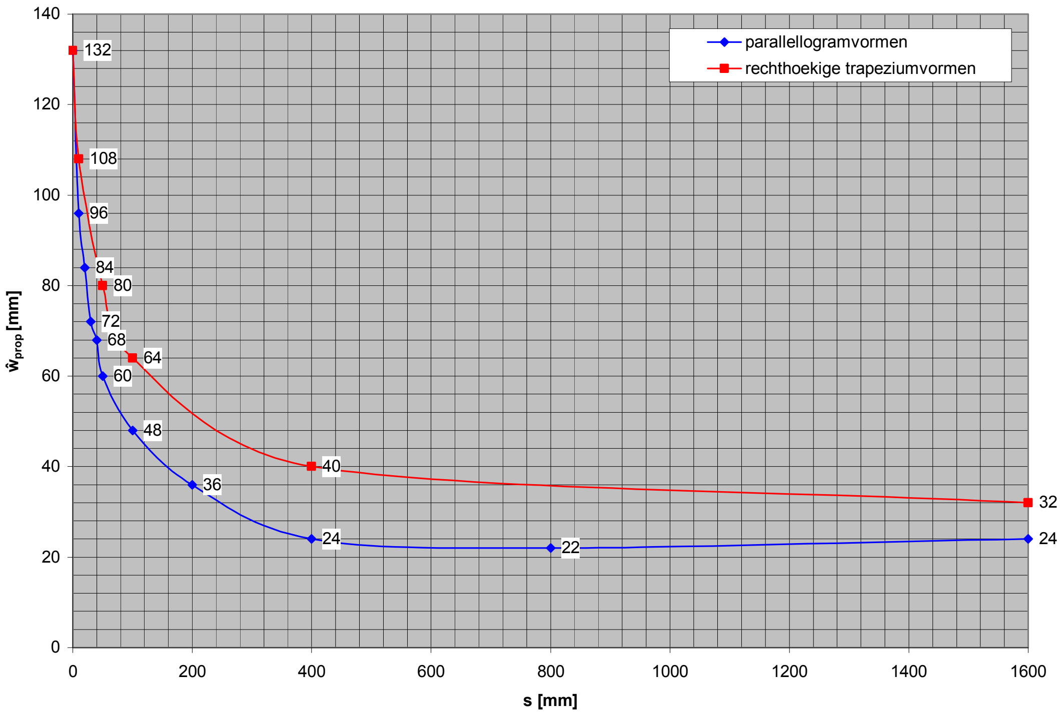
Figuur 40



Figuur 41: Vergelijking van rechthoekige trapeziumvormen met een toenemende s

3.4.4 Vergelijking serie parallellogramvormen met serie rechthoekige trapeziumvormen

In figuur 42 worden de uitkomsten van de serie parallellogramvormen vergeleken met de serie rechthoekige trapeziumvormen. Het blijkt dat in alle gevallen bij dezelfde *s* de parallellogramvormen een lagere $\hat{w}_{prop}$ hebben dan de rechthoekig trapeziumvormen.
Een verklaring hiervoor is dat bij elke *s* het verschil in lengte van de diagonalen van de parallellogramvormen groter is dan het verschil in lengte van de diagonalen de rechthoekige trapeziumvormen.

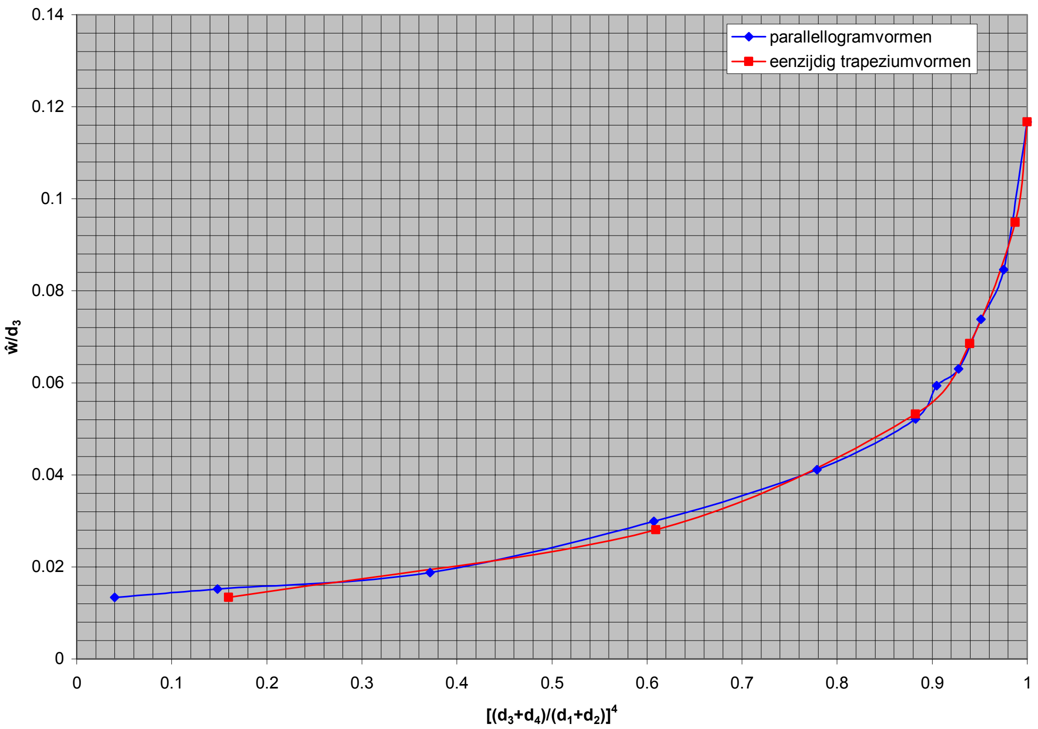


Figuur 42: Vergelijking uitkomsten parallellogramvormen met uitkomsten rechthoekige trapeziumvormen

In de praktijk zal men de behoefte hebben om op een eenvoudige manier te achterhalen wat de proportionaliteitsgrens van een bepaalde vorm is. Hiertoe is geprobeerd een vloeiende grafiek te construeren van de berekende series met dimensieloze parameters op de assen, waarin voor zoveel mogelijk plaatvormen de proportionaliteitsgrens af te lezen is (figuur 43).

Als langs de assen is de parameter $\hat{w}_{prop}/d_3$ uitgezet wordt tegen $[(d_2+d_4)/(d_1+d_3)]^4$, waarin d_1 t/m d_4 de afstanden van de hoeken tot *M* zijn, blijkt er een zeer vloeiend lopende grafiek te ontstaan.
Deze grafiek is echter niet bruikbaar voor veel andere plaatvormen. In Staaks onderzoek [2] is bewezen dat $\hat{w}_{prop}$ onafhankelijk is van de schaalgrootte van de plaat (bij gelijkblijvende dikte), m.a.w. een plaat met bepaalde afmetingen heeft dezelfde $\hat{w}_{prop}$ als een twee keer zo grootte plaat met dezelfde vorm. De parameter tegen $[(d_2+d_4)/(d_1+d_3)]^4$ verandert niet door een andere schaalgrootte van de plaat, maar de parameter $\hat{w}_{prop}/d_3$ wordt kleiner als de schaalgrootte toeneemt.

Vervolgens is er gezocht naar relevante geometrische factoren die invloed kunnen hebben op het vervormingsgedrag van een plaat. Er is geprobeerd een eenvoudige methode te bedenken om met deze factoren het vervormingsgedrag van een willekeurige plaatvorm te voorspellen (paragraaf 3.4.5).



Figuur 43: Vloeiende grafiek met dimensieloze parameters langs assen

3.4.5 Geometrische factoren die invloed hebben op het vervormingsgedrag

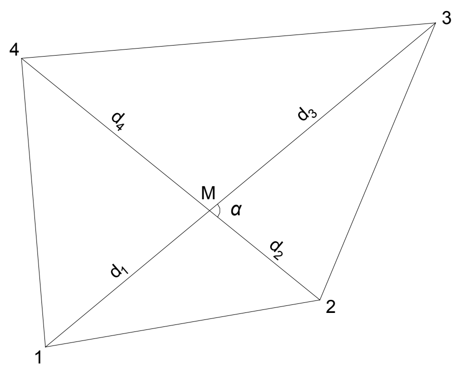
Met de kennis die tot nu toe bekend is over het vervormingsgedrag van een koud getordeerde plaat is geprobeerd geometrische factoren te vinden die van invloed kunnen zijn op het vervormingsgedrag. Het blijkt dat hoe meer een plaatvorm afwijkt van een spiegelsymmetrische vorm, hoe lager $\hat{w}_{prop}$ is.

De volgende vier factoren zijn geselecteerd om de plaatvorm vast te leggen(figuur 44):

1. **De verhouding (lengte korte diagonaal)/(lengte lange diagonaal): $(d_2+d_4)/(d_1+d_3) = l_{kort}/l_{lang}$ (≤ 1)**
   Hoe kleiner deze factor, des te groter is de afwijking van een vierkante, rechthoekige of gelijkszijde trapezium vorm. De diagonalen zijn even lang als de waarde 1 is. De vorm is dan echter alleen spiegelsymmetrisch als d_1=d_2 (figuur 44). De positie van de diagonalen onderling is dus ook van belang. Deze positie kan gekarakteriseerd worden door de factoren 2 en 3.

2. **De verhouding van de afstanden *d* van de van de lange diagonaal: $d_1/d_3 = d_{kort;lang}/d_{lang;lang}$**

3. **De verhouding van de afstanden *d* van de korte diagonaal: $d_2/d_4 = d_{kort;kort}/d_{lang;kort}$**



Figuur 44

4. **De hoek tussen de diagonalen: α**
   Voor deze factor kan de grote en de kleine hoek tussen de diagonalen gebruikt worden. Afgesproken wordt dat in de rest van het onderzoek met *α* de kleine hoek bedoeld wordt.

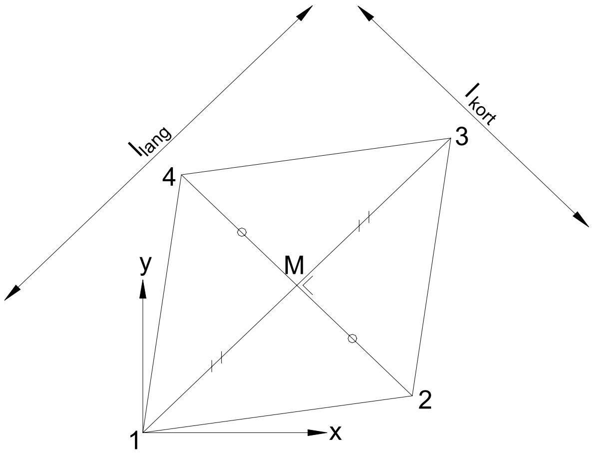
Door het variëren van één factor (met als uitgangspunt de vierkante vorm) is de invloed van de deze factor op de afwijking van $\hat{w}_{prop}$ ten opzichte van $\hat{w}_{prop;vierkant}$ (= 132 mm als *h* = 8 mm) onderzocht.

3.4.6 Invloed van de factor l_{kort}/l_{lang} op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

Om de invloed van de factor l_{kort}/l_{lang} op $\hat{w}_{prop}$ te vinden is een serie van berekeningen gemaakt waarin deze factor gevarieerd wordt en waarin de andere factoren constant worden gehouden (figuur 45 en tabel 7).

Als uitgangspunt is de vierkante plaat 1600x1600x8 mm genomen (tweede rij tabel 7).
Door de lengte van de korte diagonaal steeds een bepaalde waarde te laten afnemen en de lengte van de lange diagonaal constant te houden, wordt de factor l_{kort}/l_{lang} steeds iets kleiner.

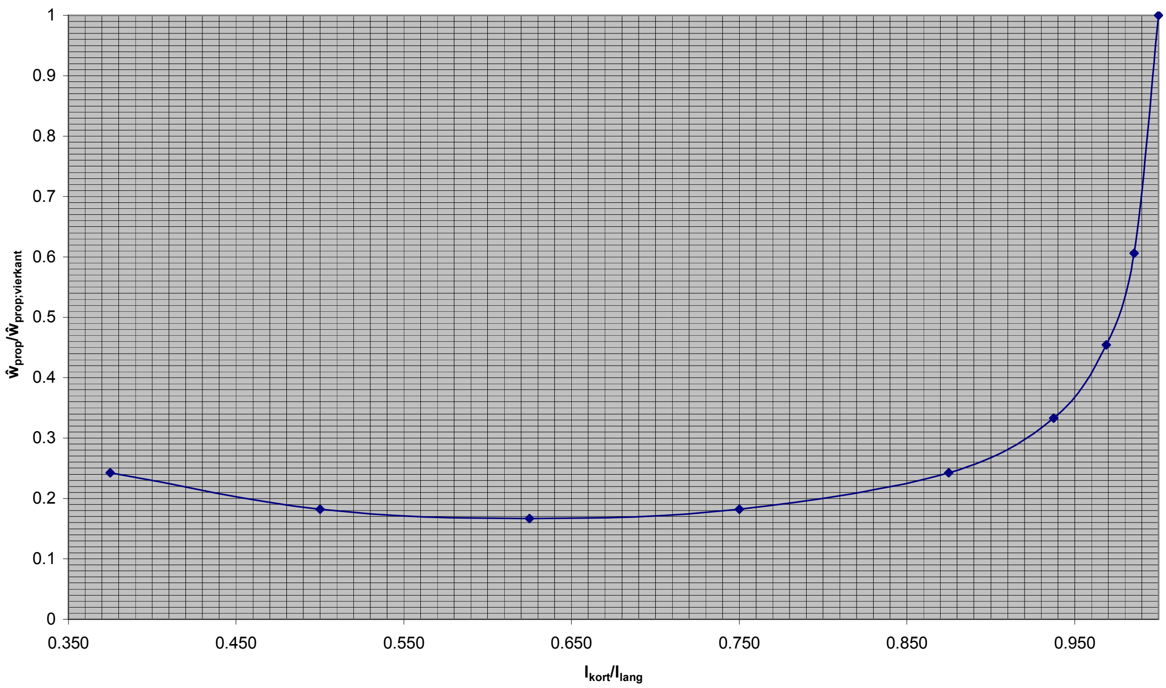
In figuur 46 is l_{kort}/l_{lang} uitgezet tegen $\hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$. De grafiek die zo ontstaat is niet voldoende nauwkeurig te benaderen met een 2e , 3e of 4e orde polynoom.



Figuur 45

l_{kort} [mm]	l_{lang} [mm]	l_{kort}/l_{lang} [-]	$\hat{w}_{prop}$ [mm]
2262.7	2262.7	1.000	132
2230.0	2262.7	0.986	80
2192.0	2262.7	0.969	60
2121.3	2262.7	0.937	44
1979.9	2262.7	0.875	32
1697.1	2262.7	0.750	24
1414.2	2262.7	0.625	22
1131.4	2262.7	0.500	24
848.5	2262.7	0.375	32

Tabel 7

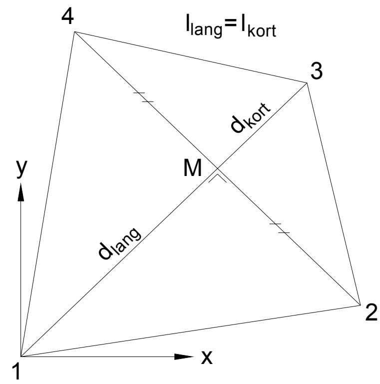


Figuur 46: Invloed l_{kort}/l_{lang} op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

In de grafiek is af te lezen dat $\hat{w}_{prop}$ kleiner wordt naarmate l_{kort}/l_{lang} kleiner wordt. Zoals eerder besproken zullen 2^{e} orde effecten een grotere rol spelen naarmate het verschil in lengte van de diagonalen groter wordt.
Verder laat de figuur zien dat de proportionaliteitsgrens $\hat{w}_{prop}$ toeneemt voor heel kleine waarden van l_{kort}/l_{lang}. Dit komt omdat de lange diagonaal zo lang wordt dat een groter verplaatsing $\hat{w}$ moet optreden voordat 2^{e} orde gaan optreden. In de limiet voor de lange diagonaal naar oneindig zal ook een oneindig grote verplaatsing $\hat{w}$ nodig zijn waarbij 2^{e} orde effecten een rol gaan spelen.

3.4.7 Invloed van de onderlinge positie van de diagonalen op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

De onderlinge positie van de diagonalen kan worden uitgedrukt in de factoren $d_{kort;lang}/d_{lang;lang}$ en $d_{kort;kort}/d_{lang;kort}$. Bij de vierkante vorm zijn beide diagonalen even lang. De afzonderlijke invloed van één van de factoren kan dus niet onderzocht worden als de vierkante vorm (1600x1600x8 mm) als uitgangspunt wordt genomen. Er is een serie berekeningen gemaakt waarin de positie van een diagonaal gevarieerd wordt ten opzicht van de andere diagonaal (figuur 47 en tabel 8). Beide diagonalen zijn even lang.
Verondersteld wordt dat de uitkomsten van deze berekeningen gelden voor de zowel de factor $d_{kort;lang}/d_{lang;lang}$ als de factor $d_{kort;kort}/d_{lang;kort}$.



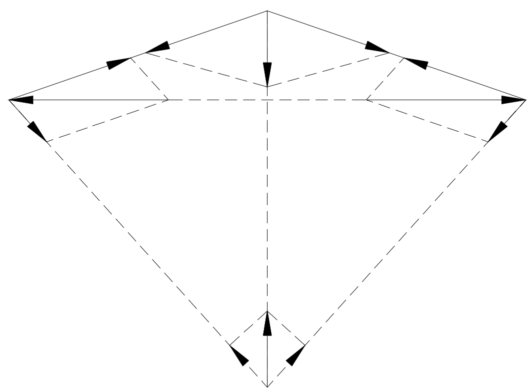
Figuur 47

dl_{kort} [mm]	d_{lang} [mm]	d_{kort}/d_{lang} [-]	$\hat{w}_{prop}$ [mm]
1131.4	1131.4	1.000	132
989.9	1272.8	0.778	108
848.5	1414.2	0.600	80
707.1	1555.6	0.455	72
565.7	1697.1	0.333	64

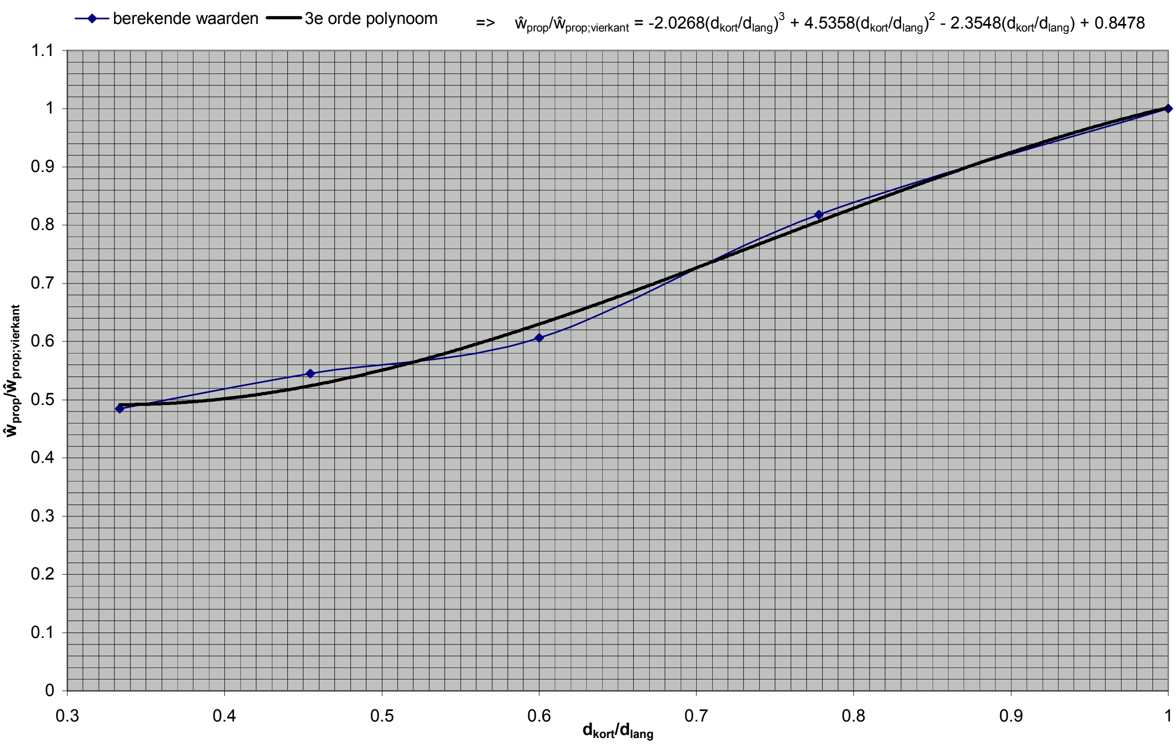
Tabel 8

In figuur 49 is d_{kort}/d_{lang} uitgezet tegen $\hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$. Er is een benadering gemaakt van de berekende waarden met een 3^{e} orde polynoom.

Het blijkt dat $\hat{w}_{prop}$ kleiner wordt naarmate d_{kort}/d_{lang} kleiner wordt. Een vakwerkmodel (figuur 48) laat zien dat in de symmetrische diagonaal een aanzienlijk grotere drukkracht optreedt dan in de asymmetrische diagonaal. De symmetrische diagonaal zal daarom uitknikken.



Figuur 48: Vakwerkmodel

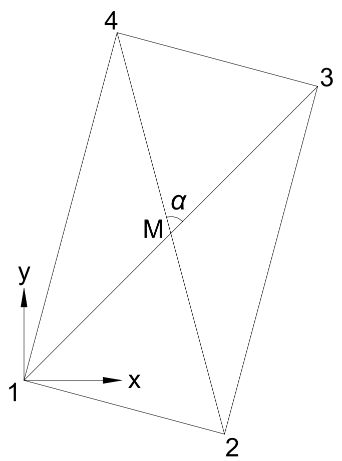


Figuur 49: Invloed d_{kort}/d_{lang} op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

3.4.8 Invloed van de hoek tussen de diagonalen op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

De invloed van de hoek tussen de diagonalen op $\hat{w}_{prop}$ is bepaald door een serie berekeningen te maken waarin alleen de hoek α (de kleinste hoek tussen de diagonalen) wordt gevarieerd (figuur 50 en tabel 9).

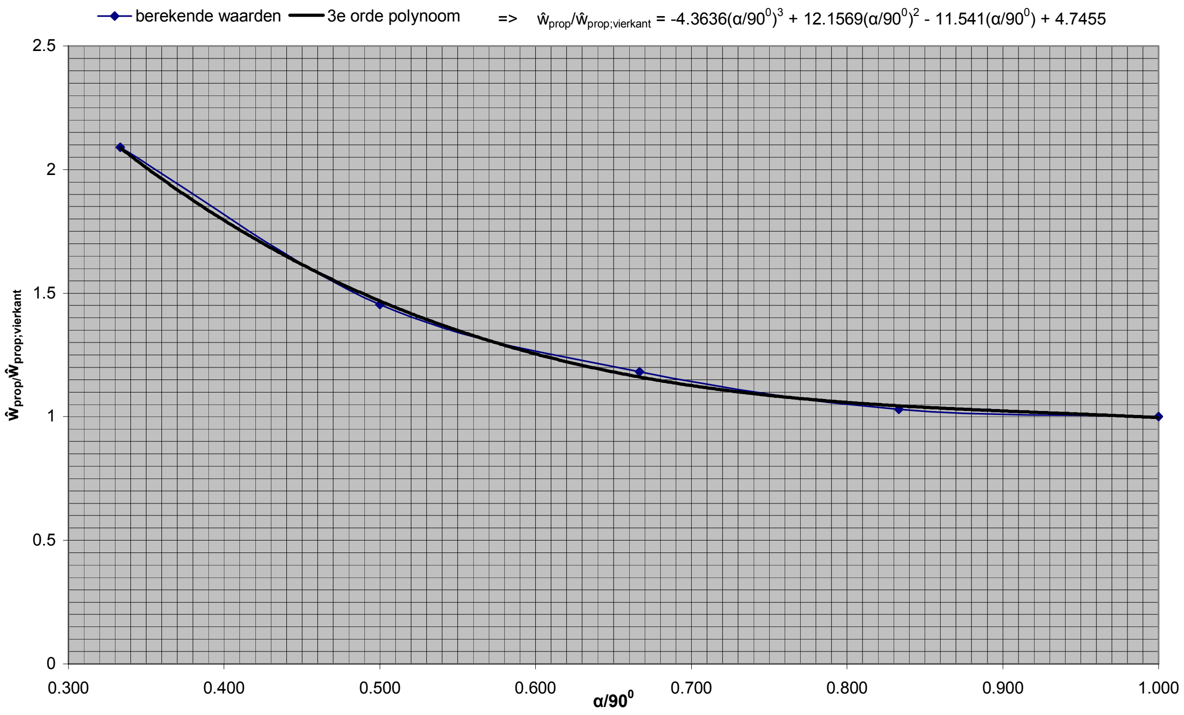
Om weer de vergelijking met het vierkant te kunnen maken is in figuur 51 $\alpha/90^0$ uitgezet tegen $\hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$. Ook hier is de grafiek benaderd met een 3^e orde polynoom. Het blijkt dat $\hat{w}_{prop}$ toeneemt naarmate α afneemt (en de vorm dus langwerpiger wordt). Dit is te verklaren doordat een langwerpige plaat veel meer getordeerd moet worden voordat 2^e orde effecten een rol gaan spelen. In de limiet voor α naar nul wordt de plaat een strip waarvan het uiteinde oneindig moet worden geroteerd voordat 2^e orde effecten optreden.



Figuur 50

α [^{0}]	α/90^0 [-]	$\hat{w}_{prop}$ [mm]
90	1.000	132
75	0.833	136
60	0.667	156
45	0.500	192
30	0.333	276

Tabel 9



Figuur 51: Invloed α op $\hat{w}_{prop}$ (ceteris paribus)

3.4.9 Theorie voor bepalen van $\hat{w}_{prop}$ van een willekeurige plaatvorm

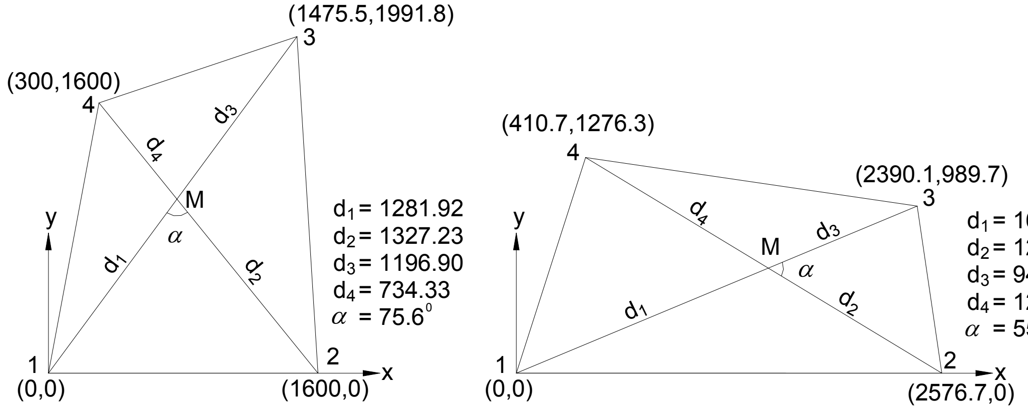
Als de invloed van de vier geometrische factoren onafhankelijk van elkaar zijn, dan kan voor een willekeurige plaatvorm met de hiervoor geconstrueerde grafieken $\hat{w}_{prop}$ bepaald worden. Dit kan als volgt in formulevorm beschreven worden:

$$\hat{w}^*_{prop} = \Phi_1.\Phi_2.\Phi_3.\Phi_4.\,\hat{w}_{prop;vierkant} \qquad (52)$$

Hierin is:

- $\Phi_1 = \hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$ bepaald door de factor l_{kort}/l_{lang} (figuur 46)
- $\Phi_2 = \hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$ bepaald door de factor $d_{kort;lang}/d_{lang;lang}$ (figuur 49)
- $\Phi_3 = \hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$ bepaald door de factor $d_{kort;kort}/d_{lang;kort}$ (figuur 49)
- $\Phi_4 = \hat{w}_{prop}/\hat{w}_{prop;vierkant}$ bepaald door de factor $\alpha/90^0$ (figuur 51)
- $\hat{w}_{prop;vierkant} = 132\frac{h}{8}$ mm voor een vierkante glasplaat met een dikte h
  ($\hat{w}_{prop;vierkant}$ is lineair afhankelijk van de dikte van de plaat en $\hat{w}_{prop;vierkant}$ = 132 mm voor een plaat met een dikte h = 8 mm)

Om deze theorie te toetsen zijn er twee willekeurige gekozen plaatvormen (met dikte h = 8 mm) berekend met ANSYS (figuur 52)



Plaatnummer 33 Plaatnummer 34

Figuur 52

1. Plaatnummer 33

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} l_{kort} = d_2 + d_4 \\ l_{lang} = d_1 + d_3 \end{array}\right\} \dfrac{l_{kort}}{l_{lang}} = 0{,}832 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = 0{,}22 \\
\left.\begin{array}{l} d_{kort;lang} = d_3 \\ d_{lang;lang} = d_1 \end{array}\right\} \dfrac{d_{kort;lang}}{d_{lang;lang}} = 0{,}934 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 = 0{,}95 \\
\left.\begin{array}{l} d_{kort;kort} = d_4 \\ d_{lang;kort} = d_2 \end{array}\right\} \dfrac{d_{kort;kort}}{d_{lang;kort}} = 0{,}553 \quad \Rightarrow \quad \Phi_3 = 0{,}59 \\
\alpha / 90^0 = 0{,}84 \quad \Rightarrow \quad \Phi_4 = 1{,}04
\end{array}\right\}
\begin{array}{rl}
\hat{w}^*_{prop} = & \Phi_1.\Phi_2.\Phi_3.\Phi_4.132 = 17mm \\
\hat{w}_{prop;ANSYS} = & 21mm \\
\text{verschil} = & -19\%
\end{array}$$

2. Plaatnummer 34

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} l_{kort} = d_2 + d_4 \\ l_{lang} = d_1 + d_3 \end{array}\right\} \dfrac{l_{kort}}{l_{lang}} = 0{,}972 \quad \Rightarrow \quad \Phi_1 = 0{,}48 \\
\left.\begin{array}{l} d_{kort;lang} = d_3 \\ d_{lang;lang} = d_1 \end{array}\right\} \dfrac{d_{kort;lang}}{d_{lang;lang}} = 0{,}579 \quad \Rightarrow \quad \Phi_2 = 0{,}61 \\
\left.\begin{array}{l} d_{kort;kort} = d_2 \\ d_{lang;kort} = d_4 \end{array}\right\} \dfrac{d_{kort;kort}}{d_{lang;kort}} = 0{,}965 \quad \Rightarrow \quad \Phi_3 = 0{,}98 \\
\alpha / 90^0 = 0{,}612 \quad \Rightarrow \quad \Phi_4 = 1{,}24
\end{array}\right\}
\begin{array}{rl}
\hat{w}^*_{prop} = & \Phi_1.\Phi_2.\Phi_3.\Phi_4.132 = 47mm \\
\hat{w}_{prop;ANSYS} = & 132mm \\
\text{verschil} = & -64\%
\end{array}$$

Uit de berekeningen van plaatnummer 33 maar vooral plaatnummer 34 blijkt dat de factoren niet onafhankelijk zijn. Vergelijking (52) is derhalve geen juiste theorie voor het bepalen van $\hat{w}_{prop}$ van een niet vierkante plaat.

3.4.10 Fitten van de resultaten met polynomen

Van de resultaten zou er een 5-dimensionale scatterplot gemaakt kunnen worden met de vier factoren uitgezet tegen $\hat{w}_{prop}$. Door deze plot te fitten met een 5-dimensionaal vlak, op een dergelijke manier dat alle $\hat{w}_{prop}$'s boven dit vlak liggen (ondergrensbenadering), ontstaat een veilige benadering geldend voor iedere plaatvorm. Er is echter geen programma gevonden dat 5-dimensionaal kan fitten.

Om dit probleem te ondervangen is getracht de resultaten te fitten met polynomen. In eerste instantie is het uitgangspunt een 2^e^ orde polynoom.

2^e^ orde polynoom

Het 2^e^ orde polynoom dat toegepast wordt heeft de volgende vorm:

$$a_1 + a_2x_1 + a_3x_2 + a_4x_3 + a_5x_4 + a_6x_1^2 + a_7x_1x_2 + a_8x_1x_3 + a_9x_1x_4 + a_{10}x_2^2 + a_{11}x_2x_3 + a_{12}x_2x_4 + a_{13}x_3^2 + a_{14}x_3x_4 + a_{15}x_4^2 = \hat{w}_{prop;i} \quad (53)$$

Hierin is:

- $x_1 = \dfrac{l_{kort}}{l_{lang}}$
- $x_2 = \dfrac{\alpha}{90^0}$
- $x_3 = \dfrac{d_{kort;lang}}{d_{lang;lang}}$
- $x_4 = \dfrac{d_{kort;kort}}{d_{lang;kort}}$
- $\hat{w}_{prop;i}$ is proportionaliteitsgrens voor berekening i

De factoren a_1 t/m a_{15} kunnen bepaald worden door het oplossen van een stelsel van 15 onafhankelijke vergelijkingen. Deze vergelijkingen kunnen opgesteld worden uit een selectie van de gemaakte berekeningen. In Appendix G bevindt zich een lijst met de factoren van alle relevante berekeningen met ANSYS en een worksheet van het rekenprogramma Maple waarmee het stelsel van vergelijkingen is opgelost.

Bij het selecteren van 15 onafhankelijke vergelijkingen is er getracht van iedere serie vormen (parallellogramvorm, rechthoekige trapeziumvormen etc.) enkele plaatvormen mee te nemen in het op te lossen stelsel zodat er een polynoom ontstaat die voor alle plaatvormen gebruikt kan worden voor het berekenen/benaderen van $\hat{w}_{prop}$.

In de kolom $\hat{w}_{prop;A}$ (tabel Appendix G) staan de proportionaliteitsgrenzen vermeld die berekend zijn met een geconstrueerde 2^e^ orde polynoom. De gearceerde waarden bevinden zich in de rijen van de plaatnummers die geselecteerd zijn voor het bepalen van de polynoom en zijn dus exact gelijk aan de berekende waarde met ANSYS ($\hat{w}_{prop;i}$).

Het blijkt dat veel van de plaatnummers die niet meegenomen zijn in de bepaling van het polynoom erg veel afwijken van de werkelijke waarden.
Er zijn vele mogelijke combinaties mogelijk voor het oplossen van het stelsel, maar er zal geen 2^e^ orde polynoom te construeren zijn die geldig is voor alle plaatnummers. Daarom is vervolgens geprobeerd de resultaten te fitten met een 3^e^ orde polynoom.

3e orde polynoom

Het 3e orde polynoom heeft in 5 dimensies de volgende vorm:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3 + a_5 x_4 + a_6 x_1^2 + a_7 x_1 x_2 + a_8 x_1 x_3 + a_9 x_1 x_4 + a_{10} x_2^2 + a_{11} x_2 x_3 \\ &+ a_{12} x_2 x_4 + a_{13} x_3^2 + a_{14} x_3 x_4 + a_{15} x_4^2 + a_{16} x_{13} + a_{17} x_2^3 + a_{18} x_3^3 + a_{19} x_4^3 + a_{20} x_1^2 x_2 \\ &+ a_{21} x_1 x_2^2 + a_{22} x_1^2 x_3 + a_{23} x_1 x_3^2 + a_{24} x_1^2 x_4 + a_{25} x_1 x_4^2 + a_{26} x_2^2 x_3 + a_{27} x_2 x_3^2 \\ &+ a_{28} x_2^2 x_4 + a_{29} x_2 x_4^2 + a_{30} x_3^2 x_4 + a_{31} x_3 x_4^2 = \hat{w}_{prop;i} \end{aligned} \qquad (54)$$

Hierin is:

- $x_1 = \dfrac{l_{kort}}{l_{lang}}$
- $x_2 = \dfrac{\alpha}{90^0}$
- $x_3 = \dfrac{d_{kort;lang}}{d_{lang;lang}}$
- $x_4 = \dfrac{d_{kort;kort}}{d_{lang;kort}}$
- $\hat{w}_{prop;i}$ is proportionaliteitsgrens voor berekening i

De factoren a_1 t/m a_{31} kunnen weer bepaald worden door een stelsel van 31 onafhankelijke vergelijkingen op te stellen met de berekende plaatnummers, op dezelfde manier als bij construeren van de 2e orde polynoom.

Er zijn twee polynomen bepaald. Met deze polynomen zijn weer de proportionaliteitsgrenzen berekend van alle berekende plaat nummers (zie tabel Appendix G kolom $\hat{w}_{prop;B}$ en $\hat{w}_{prop;C}$).

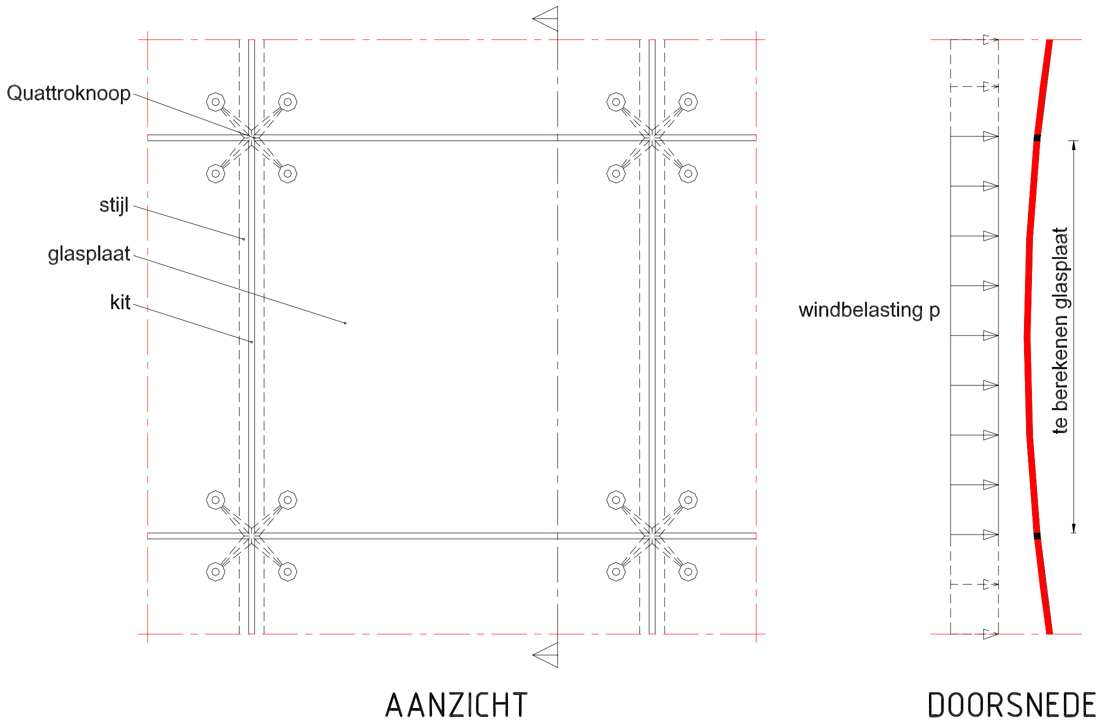
Het blijkt dat een 3e orde polynoom ook niet toereikend is voor het opstellen van een vergelijking toepasbaar voor alle plaatvormen. De meeste plaatnummers die niet meegenomen zijn in de bepaling van het polynoom wijken erg veel af van de werkelijke waarden. De berekende polynomen gaan ‘slingeren’.

Om de resultaten te op een voldoende nauwkeurige wijze te fitten is een ander soort vergelijking nodig dan een polynoom. Wellicht is er een programma wat de resultaten 5-dimensionaal kan fitten. Vanwege tijdsgebrek is hier geen nader onderzoek meer naar gedaan.

4 Windbelasting

4.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt de windbelasting op een koud vervormde vierkante vierpuntsopgelegde glasplaat besproken (figuur 53). De windbelasting is meestal de maatgevende belasting waarop gevelelementen gedimensioneerd moeten worden. Dit is zeker het geval bij verticaal geplaatste elementen, bij horizontaal geplaatste elementen kan ook de sneeuwbelasting maatgevend zijn.
Het vervormingsgedrag van de plaat als gevolg van windbelasting vergelijkbaar is met het vervormingsgedrag van de plaat als gevolg van andere loodrechte belastingen.

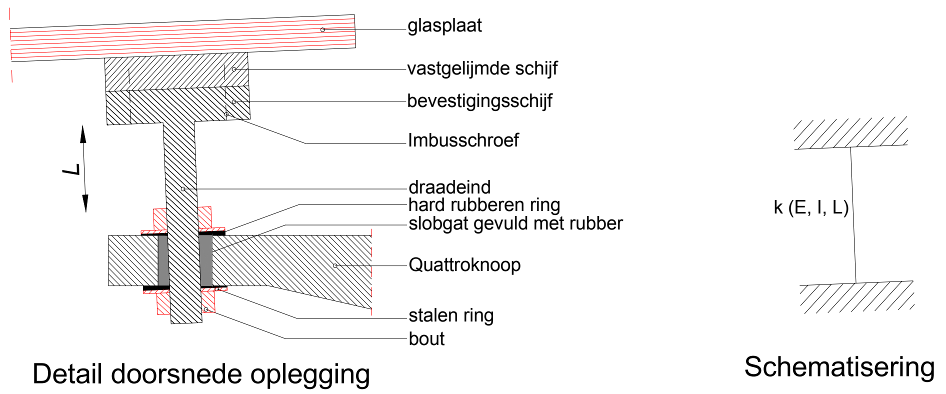


Figuur 53: vierkante glasplaten opgelegd op Quattroknopen

Onderzocht wordt wat de invloed van de stijfheid van de opleggingen is op het doorbuigingsgedrag van de plaat. Hiertoe wordt de plaat koud vervormd en vervolgens wordt de windbelasting stapsgewijs aangebracht. De druk waarbij de maximale toelaatbare doorbuiging van de plaat bereikt is, is de maximaal opneembare windbelasting.
Er zijn een viertal berekeningen gemaakt, iedere keer met een andere stijfheid van de oplegging. Met een eenvoudige spanningsberekening wordt vervolgens gekeken of deze stijfheden realistisch zijn.
Vervolgens is met behulp van NEN6702 [8] bepaald wat de maximale hoogten van gebouwen (voor verschillende gebieden in Nederland) is waarin de berekende plaat als gevelelement toegepast mag worden.
Tenslotte wordt de invloed van de dikte en de kromming van de plaat bepaald op de maximaal toelaatbare windbelasting met doorbuiging als criterium.

4.2 Modellering in ANSYS

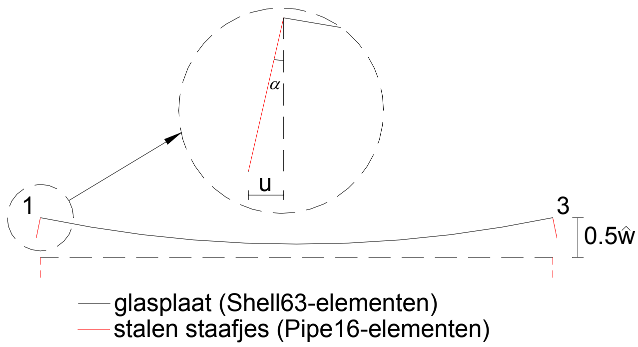
In figuur 54 is een detail van een oplegpunt van de plaat afgebeeld. In de fabriek zijn er schijven vastgelijmd aan de glasplaat. Op het werk worden deze schijven bevestigd aan bevestigingsschijven van de Quattroknopen met Imbusschroeven. Deze bevestiging kan beschouwd worden als een volledige inklemming. De plaat kan koud vervormd worden door het draaien van de bovenste bout zonder extra weerstand in het vlak, doordat het slobgat met rubberen vulling translaties en rotaties toelaat. Als de plaat de gewenste vorm heeft wordt de onderste bout vastgedraaid en ontstaat er onder ook een inklemming (zie schematisering).
Bij de modellering van de oplegging worden staafjes ingevoerd met lengte *L* (zie figuur 54). De gedachte hierachter is dat het draadeind tussen de bevestigingsschijf en de bovenste bout de stijfheid van de verbinding bepaald. Deze staafjes zijn momentvast aan de glasplaat verbonden en worden 'gemesht' met Pipe16-elementen. Deze ronde elementen hebben druk-, trek-, torsie- en buigcapaciteiten. Door het invoeren van de elasticiteitsmodulus *E*, de dwarscontractie ν en de diameter *D* worden deze capaciteiten door ANSYS gedefinieerd.



Figuur 54: Uitgangspunt voor opleggingen bij windberekening

De windberekening met ANSYS verloopt in een aantal stappen:

1. **Koudvervormen**
   De plaat wordt dubbelgekromd vervormd door een *run* uit te voeren met de gebruikelijke opgelegde translatiebeperkingen in de hoek van de plaat. De staafjes in de hoeken van de plaat ondergaan hierdoor translaties en rotaties in *x*-, *y*-, en *z*-richting (figuur 55). De staafjes vervormen niet doordat ze aan de onderkant vrij kunnen transleren en roteren. De translatie en rotaties aan de onderkant van de staafjes worden genoteerd.



Figuur 55: Doorsnede over diagonaal tussen hoekpunt 1 en 3 van vervormde glasplaat

2. **Monteren**
   Vervolgens wordt de berekening opnieuw gemaakt, alleen worden nu de translatie- en rotatiebeperkingen aan de onderkant van de staafjes (genoteerd in 1.) ingevoerd zodat de plaat hetzelfde vervormingsbeeld krijgt als in punt 1. (*loadstep* 1).

3. **Belasten**
   In de volgende *loadstep* wordt de windbelasting stapsgewijs aangebracht terwijl de translaties en rotaties aan de onderkant van de staafjes constant worden gehouden. De staafjes kunnen nu beschouwd worden als ingeklemd aan de boven- en onderkant en werken als het ware als verende ondersteuningen in de richting van het vlak van de plaat.

Opmerking: deze omweg van berekenen in ANSYS is noodzakelijk omdat er in het programma per loadstep alleen translatiebeperkingen kunnen worden toegevoegd en niet kunnen worden verwijderd.

De stijfheid *k* van de ondersteuningen in de richting van het vlak wordt gedefinieerd door de diameter *D* en de lengte *L* en de materiaaleigenschappen E en ν van de staafjes. In dit onderzoek wordt alleen de diameter *D* van de staafjes gevarieerd.
De windbelasting zorgt ervoor dat de plaat gaat uitbuigen. Als richtlijn voor de maximale uitbuiging van de plaat is 1/100 van de overspanning aangehouden [9] .
Uitgangspunten:

- Alle opleggingen zijn per berekening hetzelfde
- Staafeigenschappen:
  - $E = 2{,}1 \times 10^5$ N/mm^2
  - $\nu = 0{,}3$
  - $L = 50$ mm
  - $D = 16$, 20, 25 en 32 mm
- Plaatafmetingen 1600x1600x8 mm
- $\hat{w} = 130$ mm ($\hat{w}_{prop} = 132$ mm)
- Maximale doorbuiging $u_z = 1/100 \times$ overspanning = 16 mm

4.3 Resultaten

In tabel 10 zijn de resultaten van de windberekeningen afgebeeld.

D [mm]	p_{max} [N/mm2]	$F_{res;1}$ [N]	$u_{res;1}$ [mm]	$M_{res;1}$ [Nmm]	k_1 [N/mm2]	$\sigma_{max;1;d}$ [N/mm2]	$F_{res;2}$ [N]	$u_{res;2}$ [mm]	$M_{res;2}$ [Nmm]	k_2 [N/mm^2]	$\sigma_{max;2;d}$ [N/mm^2]	k_{gem} [N/mm^2]
16	0.00105	8633	0.59	1119	1.46E+04	5	7672	0.39	69811	1.97E+04	-32	1.72E+04
20	0.00175	17455	0.51	2284	3.42E+04	10	13524	0.35	63892	3.86E+04	-33	3.64E+04
25	0.00295	32330	0.42	6013	7.70E+04	20	23586	0.29	55531	8.13E+04	-35	7.92E+04
32	0.00455	52271	0.28	13531	1.87E+05	33	37383	0.2	41813	1.87E+05	-36	1.87E+05

Tabel 10: Resultaten windberekening met ANSYS

Bij de kleinste stijfheid (*D* = 16 mm) is de resulterende verplaatsing van de opleggingen bij maximale windbelasting het grootst. Deze verplaatsing kan door de kitvoeg tussen de glasplaten opgevangen worden zodat de waterdichtheid van de gevel gewaarborgd blijft.
Toelichting:

- p_{max} is de maximale winddruk op de koud vervormde plaat waarbij de maximale doorbuiging (in het midden van de plaat maatgevend) bereikt wordt

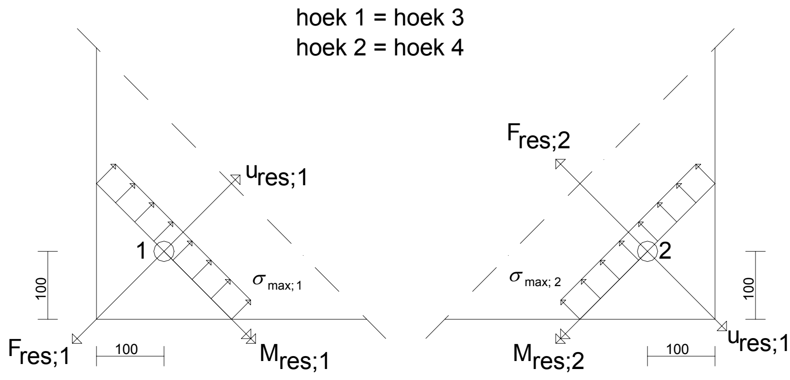
- $F_{res;i}$ is de resulterende kracht in het *xy*-vlak op de oplegging in hoek *i* bij maximale winddruk

- $u_{res;i}$ is de resulterende verplaatsing in het *xy*-vlak van de oplegging in hoek *i* bij maximale winddruk

- $M_{res;i}$ is het resulterende moment in de plaat ter plaatse van de oplegging in hoek *i* bij maximale winddruk

- k_i is de berekende stijfheid in het *xy*-vlak van de oplegging in hoek *i*

- $\sigma_{max;i;d}$ is de berekende maximale spanning in de plaat ter plaatse van de oplegging in hoek *i* (zie figuur 56). In ANSYS zijn de opleggingen in de hoeken gemodelleerd, in werkelijkheid zullen deze op een zekere afstand van de rand liggen. Hierbij wordt aangenomen dat de opleggingen op 100 mm afstand (in de *x*- en *y*-richting) van de hoek af liggen. Verder worden de spanning ter plaatse van de opleggingen gelijkmatig verdeeld verondersteld over de doorsnede van de plaat loodrecht op de resulterende kracht en het resulterende moment. Het doel van deze laatste veronderstelling is om een indruk te krijgen welke orde van grootte de spanningen in plaat hebben, zodat bekeken kan worden of de stijfheden van de opleggingen realistisch zijn. Doordat de plaat symmetrisch is werken de resulterende krachten en momenten in dezelfde richting.



Figuur 56: aanname krachtsverdeling

De spanningen in de plaat zijn als volgt berekend:

$$\sigma_{\max;d} = \gamma_{f;q}\left(\frac{F_{res}}{A} + \frac{M_{res}}{W}\right)$$

Hierin is:

- $\gamma_{f;q}$ = 1,2 veiligheidsfactor volgens NEN2608 [2]
- $A = bh = 200\sqrt{2}\,x\,8 = 2263\text{ mm}^2$, de effectieve doorsnede ter plaatse van de oplegging
- $W = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}x\,200\sqrt{2}\,x\,8^2 = 3017\,\text{mm}^3$, het weerstandmoment van de plaat ter plaatse van de oplegging

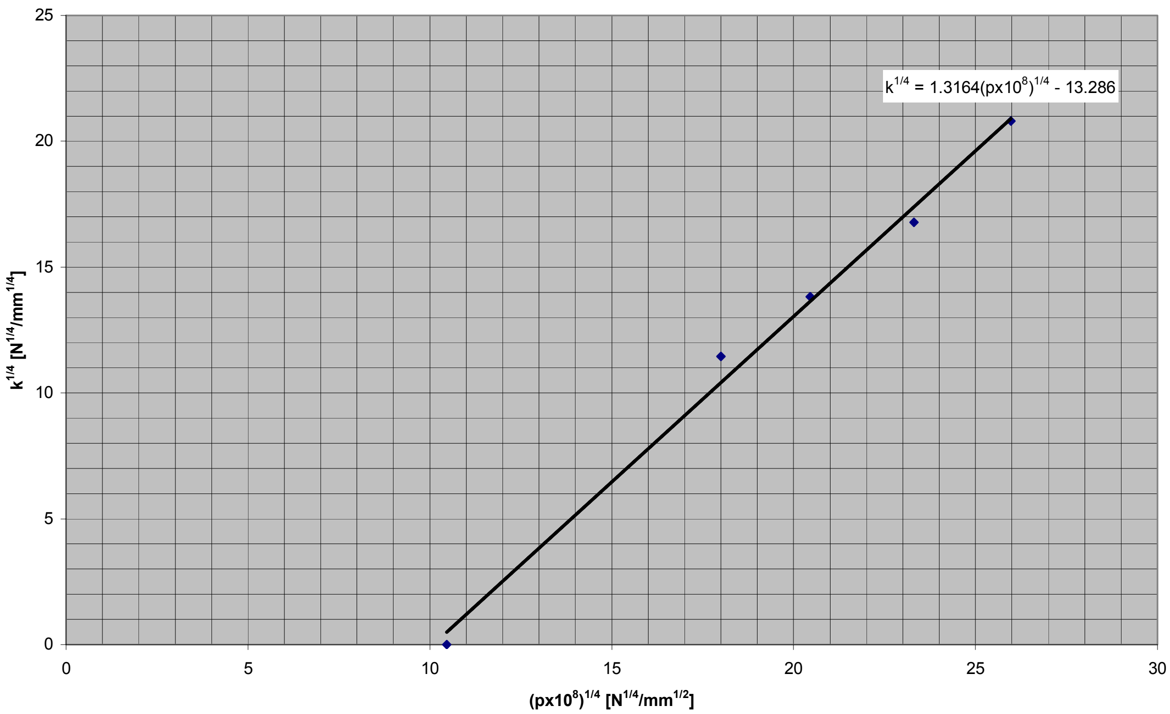
- k_{gem} is de gemiddelde stijfheid van de opleggingen bepaald met k_1 en k_2. Theoretisch zouden deze stijfheden aan elkaar gelijk moeten zijn. De stijfheden zijn echter bepaald met alleen de translaties in de *x*- en *y*-richting te kijken, de rotaties in alle richtingen en de translaties in de *z*-richting zijn verwaarloosd. Deze verwaarlozing komt tot uiting bij de bepaling van de stijfheden van hoek 1 (= hoek 3) en van hoek 2 (= hoek 4), omdat de stand van hoek 1 en 3 zijn verschillend van de stand van hoek 2 en 4. Dit verschil is te verwaarlozen.

Beschouwd worden nu de maximaal berekende buigtrekspanning in de glasplaat (deze zijn maatgevend ten opzichte van de drukspanningen in glas, glas is immers een bros materiaal). De maximale berekende trekspanning in de glasplaat is 33 N/mm^2. In werkelijk is de maximale spanning groter door het ontstaan van piekspanningen ter plaatse van de opleggingen. In tabel 11 zijn de maximale buigtreksterkte volgens NEN2608 [8] weergegeven (windbelasting heeft een korte belastingsduur). De maximale buigtrekspanning in de plaat heeft dezelfde orde van grootte als waarden in de tabel; de toepasbaarheid van de berekende opleggingen kunnen derhalve als realistisch beschouwd worden.

	Belastingduur		
Glassoort	lang	middellang	kort
Floatglas	9,7	12,8	25,7
Thermisch versterkt	26,2	29,3	42,2
Thermisch voorgespannen	58,9	62,1	79,9
Chemisch voorgespannen	78,6	81,9	94,9

Tabel 11: rekenwaarden uiterst opneembare buigtrek-spanningen $f_{tm;u;d}$ [N/mm^2] volgens NEN2608 [8]

In figuur 57 is een grafiek afgebeeld die geconstrueerd is met de resultaten, waarin de maximale windbelasting op de plaat uitgezet is tegen de stijfheid van de verbindingen. In de grafiek is tevens een windberekening verwerkt met een stijfheid k = 0 van de opleggingen. Bij deze berekening zijn geen extra translatie- en rotatiebeperkingen opgelegd (ter plaatse van de opleggingen) na het koud vervormen van de plaat, m.a.w. dit is een windberekening met de uitgangsschematisering.



Figuur 57: Verband tussen de stijfheid van de verbindingen en de maximale windbelasting

De resultaten kunnen benaderd worden door een lineaire functie:

$$k^{\frac{1}{4}} = 131{,}64 p^{\frac{1}{4}} - 13{,}253 \quad (55)$$

Met behulp van NEN6702 [7] is bepaald wat de maximale gebouwhoogte (tabel 12) mag zijn als gebruik wordt gemaakt van een in het werk vervormde glasplaat (1600x1600x8 mm; $\hat{w}$ = 130 mm). De opleggingen met een stijfheid k = 1,72 x 10^4 N/mm^2 (staafjes D = 16 mm) blijken niet voldoende stijf te zijn voor de opname van windbelasting.

			Maximale gebouwhoogte [m]					
			gebied I		gebied II		gebied III	
D [mm]	$p_{max;rep}$ [N/mm2]	$p_{max;d}$ [N/mm2	onbebouwd	bebouwd	onbebouwd	bebouwd	onbebouwd	Bebouwd
16	0.00105	0.00044	-	-	-	-	-	-
20	0.00175	0.00073	3	10	6	13	10	17
25	0.00295	0.00123	17	25	29	37	50	58
32	0.00455	0.00190	100	100	>150	>150	>150	>150

Tabel 12: Maximale gebouwhoogten voor een in het werk vervormde glasplaat (1600x1600x8 mm); $\hat{w}$=130 mm [7]
Opmerkingen:

- *Toegepaste veiligheidsfactor* $\gamma_{f;q}$ = 1,2
- *voor de lokale windvormfactor $C_{pe;loc}$is een factor 2 genomen (meest ongunstige) => stuwdruk* $p_{w;\mathrm{rep}} = \dfrac{p_{max;rep}}{2}$
- *overige factoren 1 (meest ongunstige)*
- *gebied I: Markermeer , Waddeneilanden, Wormerland en de provincie Noord-Holland ten noorden van de gemeenten Heemskerk, Uitgeest, Purmerend en Edam-Volendam*
- *gebied II: het resterende deel van de provincie Noord-Holland, de provincies Groningen, Friesland, Flevoland, Zuid-Holland en Zeeland*
- *gebied III: het resterende deel van Nederland*

4.4 Invloed van de dikte *h* van de plaat

De maximale opneembare windbelasting op een in het werk vervormde plaat (met de maximale toelaatbare doorbuiging als criterium) is als vanzelfsprekend afhankelijk van de dikte *h* van de plaat. Om de invloed van deze factor te kwantificeren zijn er twee windberekeningen gemaakt:

1. *h* = 12 mm
2. *h* = 16 mm

De opleggingen zijn gemodelleerd met staafjes met een diameter D = 16 mm (k = 1,72 x 10^4 N/mm^2)

De resultaten zijn in tabel 13 weergegeven. Het blijkt dat als de dikte van de plaat twee keer zo groot wordt de opneembare windbelasting twee-in-het-kwadraat keer zo groot wordt. In formule vorm:

$$p_{\max} = 0{,}00105x\left(\frac{h}{8}\right)^2 \tag{56}$$

h [mm]	p_{max} [N/mm^2]
8	0,00105
12	$0{,}00215 \approx \left(\frac{12}{8}\right)^2 x0{,}00105$
16	$0{,}00415 \approx \left(\frac{16}{8}\right)^2 x0{,}00105$

Tabel 13: resultaten windberekening met variërende h

4.5 Invloed van opgelegde verplaatsing $\hat{w}$

De vorm van de plaat is afhankelijk van de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$. Afhankelijk van deze vorm reageert de plaat op een bepaalde manier op windbelasting. Bij de vorige windberekeningen is uitgegaan van een opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ = 130 mm. Onderzocht is wat het effect is op de maximaal toelaatbare windbelasting (met de maximale toelaatbare doorbuiging als criterium) als de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ twee keer zo klein wordt gemaakt ($\hat{w}$ = 65 mm). De afmetingen van de plaat hebben de uitgangswaarden (1600x1600x8 mm) en de opleggingen zijn gemodelleerd met staafjes D = 16 mm (k = 1,72 x 10^4 N/mm^2) .

Het blijkt dat de maximaal toelaatbare windbelasting 1,5 keer zo klein wordt als de opgelegde verplaatsing $\hat{w}$ twee keer zo klein is (tabel 14).

Er kan geconcludeerd worden dat de mate van vervorming een significante invloed heeft op de maximaal toelaatbare windbelasting. Hoe groter de opgelegde vervorming (of: hoe sterker de hyparvorm), hoe groter de maximaal toelaatbare windbelasting.

$\hat{w}$ [mm]	$p_{max;rep}$ [N/mm^2]
130	0,00105
65	0,0007

Tabel 14

5 Samenvatting, conclusies en aanbevelingen

5.1 Samenvatting

Dit onderzoek gaat over glaspanelen die in het werk koud worden vervormd om een gekromde gevel te volgen. Uit eerder onderzoek bleek dat het vervormingspatroon van deze panelen sterk af kan hangen van de mate van vervorming.
Bij vierkante, rechthoekige en gelijkzijdige trapeziumvormige platen, waarvan één oplegging geleidelijk uit het vlak wordt gebracht, is er een duidelijke overgang waarneembaar tussen een initieel vervormingspatroon en een uiteindelijk vervormingspatroon. Dit laatste patroon is een enkelgekromd vervormingstype dat over het algemeen esthetisch niet wenselijk is vanwege onverwachte reflecties in het gevelbeeld.
Om het inzicht in de mechanica van dit stabiliteitsprobleem te vergroten is met behulp van de plaattheorie een stelsel van vergelijkingen met randvoorwaarden (geldend voor een vierkant vierpuntsopgelegd paneel) opgesteld en opgelost met de differentiemethode. De oplossing is vergeleken met een eindige-elementenberekening met het computerprogramma ANSYS.
Bij anders gevormde panelen (niet-vierkant, niet-rechthoekig en niet-gelijkzijdig trapeziumvormig) is de overgang tussen een initieel patroon en een uiteindelijk patroon veel minder of helemaal niet waarneembaar. In het onderzoek is een proportionaliteitsgrens gedefinieerd waarbij 2^e orde effecten een belangrijke rol gaan spelen. Indien de opgelegde paneelvervorming beneden deze grens blijft kan de constructieberekening worden uitgevoerd met een lineair model.
Voor vele plaatvormen is de proportionaliteitsgrens bepaald met behulp van ANSYS. Met de resultaten is getracht ontwerpgrafieken en benaderingsformules op te stellen die toepasbaar zijn voor elke willekeurige plaatvorm.
Als laatste is het gevolg van windbelasting op een koudvervormde vierkante gevelplaat onderzocht. De mate van doorbuiging is als criterium voor de maximale belasting gebruikt. Onderzocht is onder andere de invloed van de stijfheid van de opleggingen op de maximaal toelaatbare windbelasting.

5.2 Conclusies

1. Uit de plaattheorie blijkt dat geen scherpe overgang bestaat tussen het eerste en tweede vervormingspatroon van koud vervormde panelen (respectievelijk dubbel gekromd en enkel gekromd). Niettemin laten vierkante, rechthoekige en gelijkzijdig trapeziumvormige panelen een duidelijke overgang zien.

2. Door enkele termen uit de plaattheorie te verwaarlozen kan een knikprobleem worden geformuleerd. De theoretische hoekverplaatsing van een vierkant paneel waarbij knik optreedt, is 14,3 maal de paneeldikte.

3. De verhouding van de lengtes van de paneeldiagonalen heeft de belangrijkste invloed op het 2^e orde effect: Als de diagonalen zich verhouden als 9 : 10 is de hoekverplaatsing waarbij 2^e orde effecten een rol gaat spelen slechts 27 % van een vierkant paneel.

4. Het eerste vervormingspatroon (dubbel gekromd) treedt op in vierkante panelen, rechthoekige panelen en panelen in de vorm van een gelijkzijdig trapezium bij een kleine hoekverplaatsing. Bij andere vormen gaat al snel het tweede type vervormingspatroon (enkel gekromd) overheersen.

5. De mate waarin een gekromd glaspaneel het gevelbeeld volgt moet voor elk paneel individueel worden beoordeeld. Het blijkt niet mogelijk om hiervoor algemene regels of grafieken op te stellen.

6. De wijze waarop een plaat wordt opgelegd is van wezenlijk belang voor mate waarop de plaat doorbuigt door loodrechte belasting. Dit komt door de stijfheid van de opleggingen en de stijfheid van de plaat die groter wordt naarmate de kromming toeneemt.

7. De opleggingen beïnvloeden in grote mate de vorm van het glaspaneel. Ze bepalen ook de spanningsconcentratie en een groot deel van de stijfheid van het paneel. Daarom dienen ontwerp en montage van de opleggingen speciale aandacht te krijgen.

5.3 Aanbevelingen

1. De afgeleide differentiaalvergelijkingen met randvoorwaarden die gelden voor een vierkante plaat zijn opgelost met de differentiemethode. Wellicht is het mogelijk deze vergelijking ook analytisch op te lossen. Hieruit zou de exacte waarde van de theoretische omslagverplaatsing volgen.

2. Het is eenvoudig om parameterstudies uit te voeren met eindige-elementenprogramma's. Daardoor komt veel betrouwbare informatie beschikbaar over het gedrag van constructie-elementen. Echter het opstellen van ontwerpgrafieken of het fitten van benaderingsformules blijkt vaak niet mogelijk. Hierdoor is deze informatie vooralsnog niet toegankelijk voor routinematige toepassing door constructeurs. Onderzoek zou moeten worden gedaan naar het toegankelijk maken van deze informatie. Bijvoorbeeld, algoritmes voor het fitten van meerdimensionale data, analysemethoden om onafhankelijke parameters te selecteren of software voor interpolatie van gegevens in een database. Het omgaan met grote hoeveelheden kwantitatieve informatie speelt een rol in vele gebieden van wetenschap en technologie. Daarom zou dit onderzoek eerst moeten inventariseren hoe dit elders is opgelost.

3. Bij een vierpuntsopgelegde koud vervormde plaat treden de maatgevende spanningen op ter plaatse van de opleggingen. Voor het afleiden van formules voor het kwantificeren van deze spanningen zijn vele eindige-elementenberekeningen nodig van het oplegdetail. Dit zou kunnen worden uitgewerkt in een vervolgproject.

4. In dit onderzoek is uitgegaan van opleggingen in de hoeken van de plaat. Er zijn ook andere manieren van opleggen mogelijk, zoals opleggen in een sponning. Onderzoek zou gedaan moeten worden naar het gedrag van de koud vervormde plaat met andere opleggingen.

Literatuurlijst

[1] prof. Dr. Ir. M. Eekhout, *De adaptatie van glas aan fluid designs*, Programmaboekje Symposium Koers: Constructief Ontwerpen met Glas, Symposium Koers, Technische Universiteit Eindhoven, 15 december 2003

[2] D. Staaks, *Scriptie afstudeerproject: Koud torderen van glaspanelen in blobs*, Technische Universiteit Eindhoven, Faculteit Bouwkunde, Constructief ontwerpen, oktober 2003

[3] J. Blaauwendraad, *CT3130 Mechanica van Constructies Deel I: Platen*, Technische Universiteit Delft, Faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen, mei 2000

[4] Stephan P. Timoshenko en S. Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, 2nd edition

[5] Ir. J. Witteveen, *Het berekenen van platen met sprongsgewijs veranderende dikte met behulp van de differentiemethode*, HERON, jaargang 13, no. 3/4, Delft 1965

[6] J.H.J. Almering e.a., *ANALYSE*, geheel herzien door Dr. H. Bavinck en Dr.Ir. R.W. Goldbach, 6e druk, Delft Universitaire Pers

[7] M.G. v.d. Ruijtenbeek, *Beknopte handleiding ANSYS 6.1*, Technische Universiteit Delft, Faculteit Ontwerp, Constructie en Productie, Versie 1, december 2003

[8] NEN6702: *Belastingen en vervormingen*, TGB 1990, 1e druk december 1991, waarin verwerkt het correctieblad, september 1993, Nederlands Normalisatie Instituut

[9] NEN 2608-2: *Vlakglas voor gebouwen – Niet verticaal geplaatst glas – Weerstand tegen windbelasting, sneeuw, eigengewicht – Eisen en bepalingsmethode*, , 2e ontwerp, maart 2000, Nederlands Normalisatie Instituut

[10] D. Staaks, *Koud torderen van glaspanelen in blobs*, Programmaboekje Symposium Koers: Constructief Ontwerpen met Glas, Symposium Koers, Technische Universiteit Eindhoven, 15 december 2003

[11] Hoogenboom, P.C.J. dr.ir., *Afleiding van een onafhankelijke vervormingsparameter voor vierhoekige platen*, Technische Universiteit Delft, Faculteit Civiele Techniek, Afdeling Constructiemechanica

Appendix A

Resultaten van Dries Staaks

Koud torderen van glaspanelen in blobs

Door ir. Dries Staaks,
Afstudeeronderzoek aan de TU Eindhoven in opdracht van Octatube Space Structures, Delft
[10]

Blobs en koud vervormen

De complexiteit van het realiseren van de transparante delen van 'Blobs' en afgeleiden daarvan in de architectuur vormt de rechtstreekse aanleiding voor dit onderzoek waarin het koud vervormen van glas centraal staat. Op basis van definitie kennen transparante façades in blobarchitectuur een onregelmatige geometrie. Het hoogste doel, een exacte geometrische kopie van het vloeiende ontwerp uitgevoerd in glas, is technisch en/of economisch meestal onbereikbaar. Een benadering van de geometrie met een driehoeksindeling maakt invulling met vlakke platen mogelijk, drie punten liggen immers altijd in één vlak. Het doel van koud vervormen is middels gedwongen vervorming van vlakke glaspanelen vanwege de inherente voordelen, een stap dichter bij de ideale vloeiende geometrie te komen. In tegenstelling tot warm buigen is het niet mogelijk om met koud vervormen elke willekeurige vorm te verkrijgen. De invloed op de vorm is beperkt tot het definiëren van de randvoorwaarden van de opleggingen d.m.v. beperking in translatie- en rotatievrijheid. Binnen dit kader van gedwongen posities en hoekverdraaiingen zal de plaat 'op zijn eigen manier' vervormen. Zodoende zijn bepaalde geometrieën voor de hand liggend koud te vervormen en andere onmogelijk. Een koud gebogen cylindrische vorm is bijvoorbeeld betrekkelijk eenvoudig te verkrijgen en bovendien in heel wat gevallen een geschikt alternatief voor warm gebogen glas. De optredende permanente spanningen ten gevolge van cylindrisch buigen zijn eenvoudig te bepalen aangezien deze zich omgekeerd evenredig verhouden tot de buigstraal:

$$\sigma = \frac{Et}{2R} \qquad \text{(A1)}$$

Met :
- E elasticiteitsmodulus [N/mm²]
- t glasdikte [mm]
- R buigstraal [mm]

Naast cylindrisch buigen biedt de techniek van koud torderen een belangrijke uitbreiding van de mogelijkheden om transparantie in blobfaçades middels koud vervormen te realiseren. In plaats van een verdeling van de vloeiende geometrie in driehoeken met vlakke platen volstaat een vierhoekige indeling met koud getordeerde panelen. Een typisch vierhoekig glaspaneel in een dubbelgekromde gevel wordt op vier punten ondersteund waarvan er drie in één vlak liggen en één uit dit vlak.

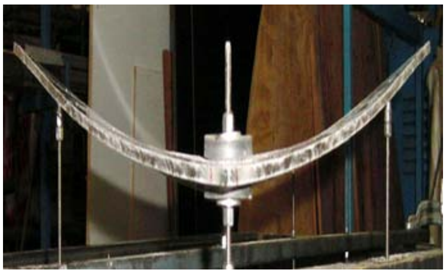
Onderzoek

De vermoedelijk eerste toepassing van koud getordeerde glaspanelen door Octatube Space Structures in het Stadhuis Alphen aan den Rijn naar ontwerp van Erick van Egeraat Architecten is ontstaan vanuit een pragmatische invalshoek. Maar een steekhoudende theoretische basis voor koud torderen ten aanzien van vervormingen en spanningen ontbrak. De potentie van de techniek leidde tot een afstudeeronderzoek aan de TU Eindhoven uitgevoerd door de auteur in opdracht van Octatube Space Structures. Met als doelstelling het vaststellen van de wetmatigheden in architectonische, constructieve en productietechnische zin en het opstellen van praktische richtlijnen ten aanzien van het koud torderen van thermisch voorgespannen glasplaten. In het onderzoek naar koud torderen vormt puntgehouden kozijnloze beglazing het uitgangspunt. Kennis van de meest basale manier om een plaat te torderen, namelijk d.m.v. vier puntopleggingen, genereert een kader waarbinnen het torsiegedrag voor lijnopleggingen in een later stadium te beredeneren valt. Kozijnloze façades zijn bovendien relatief eenvoudig in staat om de continu variërende hoekaansluitingen in blobs op te vangen op basis van flexibele siliconenvoegen.

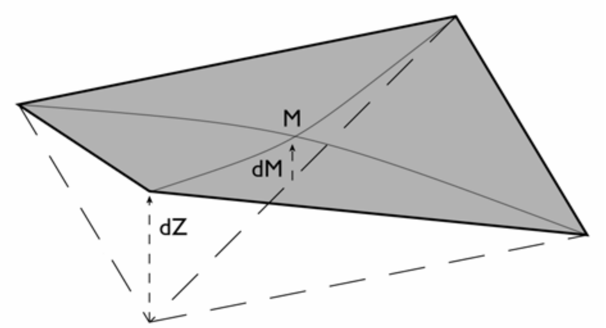
Polycarbonaat experimenten

Om een eerste inzicht in het vervormingspatroon van getordeerde platen te verkrijgen is gebruik gemaakt van polycarbonaat (PC). De grote vervormingen die PC toelaat maken dat het gedrag eenvoudig visueel geanalyseerd kan worden. Een op vier punten opgelegde plaat van 400x400 mm met uitkragende randen wordt onderworpen aan toenemende torsie door twee tegenovergestelde punten gelijktijdig in stappen van 10 mm op te schroeven. Hierbij dient opgemerkt te worden dat de opwaartse verplaatsing van twee punten met 10 mm equivalent is met een verplaatsing van 20 mm van één punt. De uitkomst van het experiment vertoonde enigszins verrassend een plotselinge verandering in vervormingsmodus tussen 20 en 30 mm. De eerste modus betreft een dubbelgekromd vervormingsbeeld. De ene diagonaal is hol, de andere bol, terwijl de randen van de plaat recht blijven (Figuur A1). De tweede modus treedt op vanaf 30 mm. Deze vormt bij benadering een enkelgekromde vorm, waarbij één diagonaal bijna recht is en de ander sterk gebogen. De randen van de plaat blijven hierbij niet meer recht. Tijdens verder opvoeren van de vervorming blijft de plaat in de tweede modus, waarbij de 'rechte' diagonaal steeds rechter wordt en de andere diagonaal steeds sterker gebogen wordt (Figuur A2).

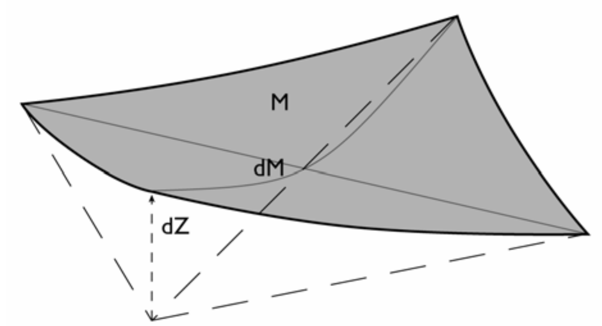
A.



A.



B.



B.

Figuur A1: eerste vervormingsmodus:
A. Foto van PC experiment bij 2x20 mm verplaatsing (400% opgerekt in hoogte)
B. Schematische voorstelling

Figuur A2: tweede vervormingsmodus:
A. Foto van PC experiment bij 2x40 mm verplaatsing (400% opgerekt in hoogte)
B. Schematische voorstelling

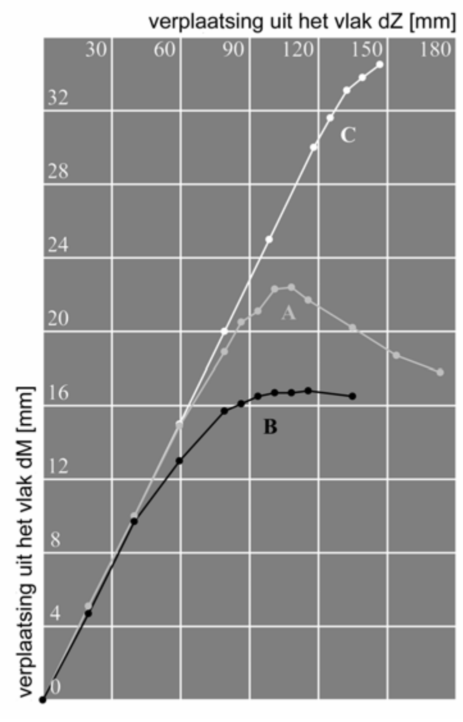
Proefopstelling met glas

In de volgende onderzoeksfase zijn drie glasplaten met 100 mm uitkragende plaatranden getordeerd in een vierpuntsondersteunde proefopstelling op een glasbok:

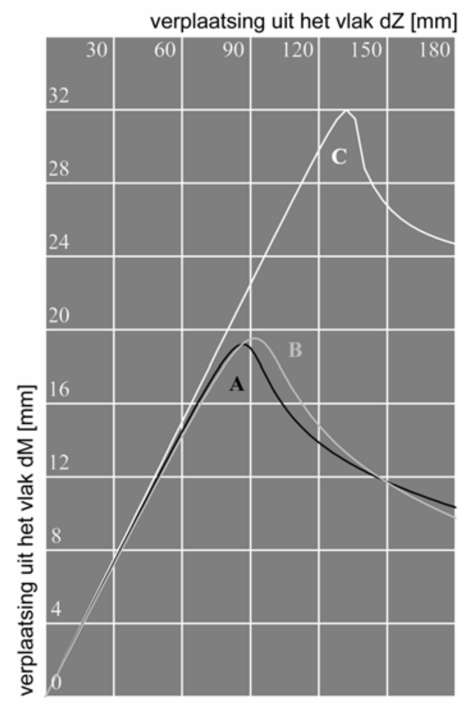
A. A 1721x1688 mm t=8 mm
B. 1779x1800 mm t=10 mm
C. 2066x1088 mm t=10 mm

Een van de ondersteuningen wordt een afstand dZ uit zijn vlak verplaatst, tot een maximum van 180 mm. Opnieuw viel een verandering van vervormingsmodus waar te nemen. Deze verandering is zichtbaar in de grafiek (Figuur A3), waar de verplaatsing dM van het middelpunt van de plaat is uitgezet tegen de opgedrongen verplaatsing uit het vlak dZ. In het eerste deel van deze grafiek vertoont de relatie dM:dZ een verhouding 1:4. In combinatie met rechte plaatranden vertegenwoordigt dit een hyperbolische paraboloïde geometrie, meestal hypar genoemd.
De verandering van modus resulteert in een afname van dM als gevolg van het rechter worden van de diagonaal tussen de twee vaste oplegpunten. Een exact rechte diagonaal zal nooit optreden, dit zou het vouwen van een plaat betekenen.

Parallel aan de proeven op de glasplaten zijn geometrisch niet-lineaire berekeningen uitgevoerd. Op de eerste plaats om de vervorming binnen toelaatbare spanningen te houden en op de tweede plaats om het praktijkgedrag met het theoretische gedrag te kunnen vergelijken. De numerieke resultaten komen sterk overeen met het vervormingsverloop van de praktijkproeven, maar met een sterk ideaal karakter (Figuur A4).



Figuur A3: Uitkomsten experimenten

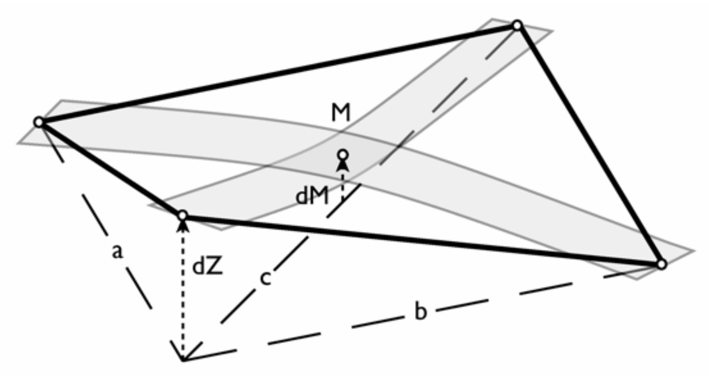


Figuur A4: Uitkomsten berekeningen

Lattenmodel

Uit de numerieke analyses kan opgemaakt worden dat de plotseling optredende omslag in modus het gevolg is van optredende instabiliteit in de middenzone van de plaat. In de plaat vindt een significante opbouw van membraanspanningen plaats, die exponentieel verloopt. In de middenzone ontstaat druk en aan de randen trek. Bij een bepaalde waarde van de druk in de middenzone knikt de plaat als het ware uit. Dit knikken leidt in dit geval niet tot bezwijken, maar resulteert in de typische verandering van vervormingsmodus. Vanuit een ontwerpstandpunt is inzicht in het moment van optreden van de omslag noodzakelijk om het vervormingspatroon van een plaat van specifieke geometrie te kunnen voorspellen.

Aan de hand van een lattenmodel is het instabiliteitsfenomeen verder onderzocht. Het model bestaat uit een rechthoek van vier randstaven en twee diagonale stroken, verbonden op hun kruispunt (Figuur A5). Bij tordere gedraagt het lattenmodel zich vergelijkbaar met een plaat en kunnen de twee typische vervormingsmodi worden waargenomen.
De stroken zijn onderhevig aan buiging en zuivere druk in het vlak van de plaat. De randstaven ondervinden enkel zuivere trek. Beschouwen we alleen buiging in de diagonalen dan zullen twee aangrenzende hoekpunten van de rechthoek in tegenovergesteld richting verplaatsen. De afstand tussen twee hoekpunten wordt hierdoor groter. De randstaven bieden echter weerstand tegen deze verlenging, waardoor hierin trek optreedt. Op basis van evenwicht in het vlak van de plaat zal er in de diagonalen druk optreden.



Figuur A5

De output van een eindige elementen berekening van het lattenmodel laat zien dat de druk in de diagonalen bij toenemende dZ kwadratisch oploopt. Zodra de druk in de diagonaal de Eulerse kniklast van de strook bereikt treedt de verandering van modus op! Druk en trek in de diagonalen en randen bereiken hiermee hun maximum en blijven in het verdere verloop constant. Verdere toename van dZ genereert enkel meer buiging in de 'geknikte' diagonaal, terwijl de andere diagonaal steeds rechter wordt.

Voor het lattenmodel is een theorie opgesteld die het moment van instabiliteit voorspelt voor rechthoekige geometrieën. De theorie, gebaseerd op universele mechanica is bovendien geldig voor elk materiaal. Gebaseerd op een stelsel van vergelijkingen bestaande uit evenwicht-, constitutionele en kinematische vergelijkingen kan (onder de aanname dat $A_{randstaaf} = A_{strook}$) het optreden van de omslag in het lattenmodel bepaald worden m.b.v. de volgende formule:

$$dZ_{omslag} = 2\sqrt{\left(a+\gamma a^2\right)^2 + \left(b+\gamma b^2\right)^2 - \left(c-\gamma c^2\right)^2} \qquad \text{(A2)}$$

Met:
- a lengte rechthoek [mm]
- b breedte rechthoek [mm]
- c lengte diagonaal [mm]

en:

$$\gamma = \frac{\pi^2 t^2}{12c^3}$$

t strookdikte diagonalen [mm]

Voor een vierkant (a=b) kan de algemene formule sterk vereenvoudigd worden:

$$\frac{dZ_{omslag}}{t} = 3{,}35 \qquad \text{(A3)}$$

Voor een lange strook (a>>b) tot:

$$\frac{dZ_{omslag}}{t} = 3,63 \qquad \text{(A4)}$$

Voor alle tussenliggende verhoudingen van a/b kan aangetoond worden dat de ratio ligt tussen 3,35 en 3,63.

Aan de hand van deze resultaten kunnen voor het lattenmodel de volgende conclusies worden opgesteld ten aanzien van het omslagmoment:

1. dZ_{omslag} is materiaalonafhankelijk.
   Hoewel er door een andere stijfheid andere spanningen optreden neemt de Eulerse knikkracht van de diagonaal in dezelfde mate toe of af, waardoor de omslag optreedt bij dezelfde mate van torsie.
2. Er bestaat een lineair verband tussen dZ_{omslag} en de strookdikte t.
3. De absolute grootte van het vierkant heeft geen invloed op dZ_{omslag}!
   Analoog aan de invloed van het materiaal zullen er bij een andere grootte andere spanningen optreden, maar de Eulerse kniklast verandert opnieuw in dezelfde mate, waardoor er netto geen verschil in omslagpunt optreedt.
4. De invloed van de lengte/breedte verhouding op dZ_{omslag} verhouding is zeer gering.
   Ten gevolge van andere verhouding van lengte en breedte zal het omslagmoment minder dan 10% afwijken.

Plaatmodel

Om de voorgaande analytische formule op een dergelijk manier aan te passen dat die geldig wordt voor platen is relatief complex. Voor dit onderzoek is daarom volstaan met een toetsing van plaatgedrag aan de conclusies en resultaten van het lattenmodel d.m.v. eindige elementen analyses. Deze analyses tonen aan dat de meeste conclusies grotendeels hun geldigheid behouden. De conclusies voor platen op een rij:

1. dZ_{omslag} is niet geheel materiaalonafhankelijk, maar de invloed is zeer gering.
   Hoewel het omslaggedrag nog steeds geen invloed ondervindt van de elasticiteitsmodulus E leidt een hogere dwarscontractiecoëfficiënt ν tot een geringe toename van het omslagpunt. Omdat de ν-waarden van gangbare plaatmaterialen onderling niet veel afwijken, zullen de omslagpunten van verschillende materialen niet meer dan 15% afwijken.

2. Er bestaat een lineair verband tussen dZ_{omslag} en de plaatdikte t.
   Voor een vierkanten plaat geldt $dZ_{omslag} = 16,8 \cdot$plaatdikte.

3. De schaalgrootte van de plaat heeft verwaarloosbare invloed op dZ_{omslag}.

4. Voor een rechthoekige geometrie is het omslagpunt hoger dan voor een vierkant.
   In tegenstelling tot het lattenmodel heeft de lengte/breedte-verhouding aanzienlijke invloed op het omslagpunt van de plaat. Voor een plaat met de verhouding 1:2 is een toename van +/- 30% vastgesteld.

Maximale spanningen

Voor het bepalen van de spanningen bij het torderen van platen bestaat een eerste orde mechanicatheorie, vernoemd naar Nadai, de opsteller ervan. Aangezien het geometrisch niet lineaire gedrag bij koud torderen een zeer grote rol speelt en tenslotte leidt tot de verandering van vervormingsmodus heeft deze theorie maar een zeer beperkte geldigheid. Maar de spanningstoestand volgens Nadai vormt wel het uitgangspunt. Naarmate dZ toeneemt zullen de spanningen steeds meer afwijken. De invloed van de membraanspanningen leidt tot een meer dan evenredige toename van de spanningen in de hoeken van de plaat en een minder evenredige toename in het midden. Volgens de eerste orde theorie heerst er constante spanning in de gehele plaat, de maximale spanningen bij koud torderen zullen dus in de hoeken optreden. De spanningen in de hoeken lopen bij vierkante platen op tot 165% in vergelijking met de eerste orde theorie. Wanneer $dZ<dZ_{omslag}$, dan kunnen de maximale spanningen in de plaat bepaald worden met de volgende empirische formule:

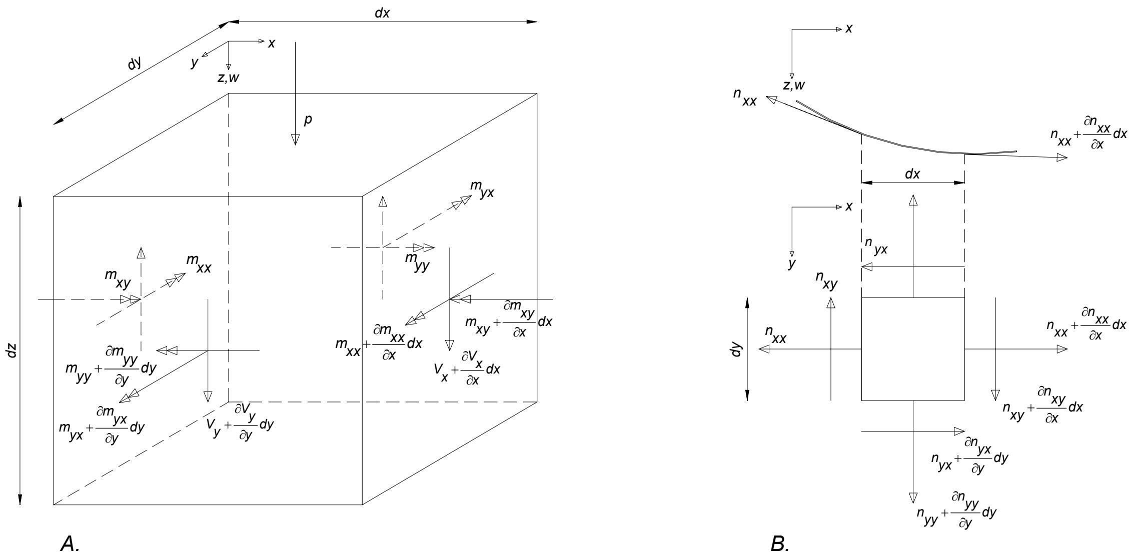
$$\sigma_{max} = \left[\sqrt{3}\,\frac{(1-\nu)}{a^2}\,\frac{Et}{2\left(1-\nu^2\right)}\,dZ \right] x \left[1+0,65\left(\frac{dZ}{dZ_{omslag}}\right)^{\frac{6}{5}} \right] \qquad \text{(A5)}$$

Conclusies

Koud getordeerd glas vormt een aantrekkelijk alternatief voor warm gevormd glas in dubbelgekromde façades. Het verkregen inzicht in het mechanische gedrag en de vastgestelde wetmatigheden qua vervormingen en spanningen voorzien de architect, engineer en constructeur van de nodige bagage om deze economisch en productietechnisch laagdrempelige techniek in de blobarchitectuur in te kunnen zetten.

Appendix B

Afleiding differentiaalvergelijking van het gebogen oppervlak
[4]



Figuur B1: Positieve plaat-spanningsgrootheden

Er zijn behalve laterale belastingen ook krachten werkzaam in het middenvlak van de plaat. Bij kleine buigingen zijn deze laatste krachten te verwaarlozen, maar als de buiging groter wordt kan hun aandeel aanzienlijk worden. De krachten door alleen buiging kunnen apart van de krachten in het middenvlak beschouwd worden.
Er wordt een oneindig klein blokje uit de plaat 'gesneden' (fig. B1-A) waar alleen de laterale krachten op werken.
V_x en V_y zijn dwarskrachten per eenheid van lengte. Verder zijn m_{xx}, m_{yy} en m_{xy} momenten per eenheid van lengte.
Momentenevenwicht geeft de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial m_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = V_x \qquad (B1)$$

$$\frac{\partial m_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = V_y \qquad (B2)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = p \qquad (B3)$$

Vervolgens wordt een oneindig klein vlakje uit het middenvlak van de plaat beschouwd (fig. B1-B).
Hierin zijn n_{xx}, n_{yy} en n_{xy} normaalkrachten per eenheid van lengte en n_{xy} = n_{yx}. Projecteren van deze krachten in het xy-vlak en aannemende geeft de volgende evenwichtsvergelijkingen:

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} + X = 0 \qquad (B4)$$

$$\frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \qquad (B5)$$

Hierin stellen X en Y de twee componenten van de lichaamskrachten of van de tangentiële krachten per eenheid van oppervlak in het middenvlak van de plaat voor.

Door de buiging van de plaat zijn er echter ook componenten van de normaalkrachten in de z-richting.

Projectie van n_{xx} in de z-richting geeft:

$$-n_{xx}dy\,\frac{\partial w}{\partial x}+\left(n_{xx}+\frac{\partial n_{xx}}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right)dy$$

Uitwerking hiervan en verwaarlozing van de termen met een hogere dan de tweede orde wordt dit:

$$n_{xx}dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdy+\frac{\partial n_{xx}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}dxdy \qquad (B6)$$

Op dezelfde manier kan de component van n_{yy} in z-richting bepaald worden:

$$n_{yy}dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}dxdy+\frac{\partial n_{yy}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy \qquad (B7)$$

Als de component van de schuifkracht n_{xy} in de z-richting wordt beschouwd, is de helling van het gebogen middenvlak in de y-richting ter plaatse van de twee tegenoverliggende zijden van het vlakje respectievelijk $\partial w/\partial y$ en $\partial w/\partial y + (\partial^2 w/\partial x\partial y)$. Hieruit volgt de component van n_{xy} in z-richting:

$$n_{xy}dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy$$

Een analoge uitdrukking kan bepaald worden voor de schuifkracht n_{yx} (met $n_{xy} = n_{yx}$).
De totale component van de schuifspanningen in de z-richting is dan:

$$2n_{xy}dy\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial n_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}dxdy+\frac{\partial n_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}dxdy \qquad (B8)$$

Differentiëren van (B1) en (B2) en substitutie van het resultaat in (B3) geeft (er geldt $m_{xy} = m_{yx}$):

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2}=p \qquad (B9)$$

Dit is echter een differentiaalvergelijking zonder inachtneming van de normaalkrachten. De componenten in de z-richting van deze krachten moeten aan de rechterzijde van (B9) toegevoegd worden, zij kunnen immers als loodrechte belasting beschouwd worden.

Substitutie van (B6), (B7) en (B8) in (B9) geeft na vereenvoudiging met (B4) en (B5):

$$\frac{\partial^2 m_{xx}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 m_{yy}}{\partial y^2}=p+n_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+n_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2n_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-X\frac{\partial w}{\partial x}-Y\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (B10)$$

Verder geldt:

$$m_{xx}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \qquad (B11)$$

$$m_{yy}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \qquad (B12)$$

$$m_{xx}=-(1-\nu)D\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \qquad (B13)$$

Hierin is:

- ν de poissonfactor;
- D de zogenaamde plaatstijfheid waarvoor geldt: $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

  (E is de elasticiteitsmodulus en h de dikte van de plaat).

Differentiëren van (B11), (B12) en (B13) en substitutie hiervan in (B10) geeft uiteindelijk:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}\left(p + n_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - X\frac{\partial w}{\partial x} - Y\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (2)$$

Bij deze afleiding is geen rekening gehouden met rekken in het middenvlak als gevolg van extensie. Als de buiging van de plaat niet te groot is zijn deze verwaarloosbaar.
In Appendix C worden de vergelijkingen afgeleid waar wel rekening wordt gehouden van de rekken in het middenvlak.

Appendix C

Afleiding algemene vergelijkingen voor grote buiging van platen

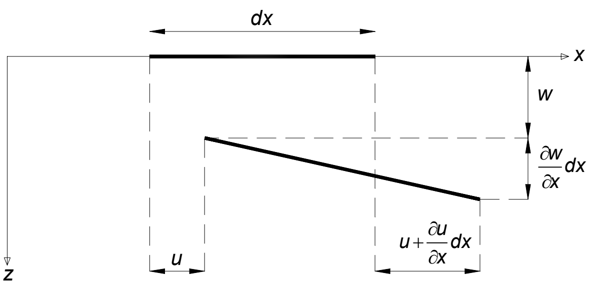
[4]

Bij relatief grote buiging van de plaat zullen de rekken van het middenvlak van de plaat niet meer verwaarloosbaar zijn. De krachten n_{xx}, n_{yy} en n_{xy} hangen nu niet alleen af van de externe krachten werkend op het *xy*-vlak, maar worden ook beïnvloed door de rekken in het middenvlak van de plaat door buiging. Aangenomen wordt dat er geen lichaamskrachten in het *xy*-vlak werken en dat de belasting loodrecht op de plaat staat.
De vergelijkingen van het evenwicht van een oneindig klein vlakje uit het middenvlak in *xy*-vlak geldt dan[3]:

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} = 0 \qquad (C1)$$

$$\frac{\partial n_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad (C2)$$

De derde vergelijking nodig om de drie krachten n_{xx}, n_{yy} en n_{xy} te bepalen wordt verkregen door de rekken van het middenvlak gedurende buiging te beschouwen.
De *x*, *y* en *z* componenten van de kleine verplaatsingen die een punt in het middenvlak van de plaat ondergaat gedurende buiging wordt aangegeven met respectievelijk *u*, *v* en *w*.



Figuur C1

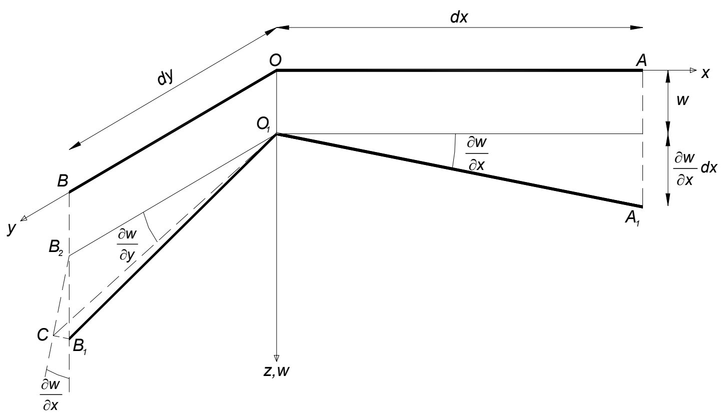
Als een lineair element van het middenvlak in de *x* richting bekeken wordt, blijkt uit fig. C1 dat de verlenging van het element als gevolg van de verplaatsing *u* gelijk is aan $(\partial u/\partial x)dx$ en dat de verlenging van hetzelfde element als gevolg van de verplaatsing *w* $\frac{1}{2}(\partial w/\partial x)^2 dx$ (m.b.v. een Taylorontwikkeling) is. De totale verlenging in de *x* richting van een element uit het middenvlak van de plaat is:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \qquad (C3)$$

Op gelijke wijze kan de verlenging in de *y*-richting van een element uit het middenvlak van de plaat afgeleid worden:

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \qquad (C4)$$

De schuifrek als gevolg van de verplaatsingen *u* en *v* is $\partial u/\partial y + \partial v/\partial x$. Om de schuifrek te bepalen als gevolg van verplaatsing *w* worden er twee oneindig kleine lineair elementen *OA* en *OB* in de *x*- en *y*-richting bekeken (fig. C2). Door de verplaatsing in de *z*-richting komen deze elementen in de posities O_1A_1 en O_1B_1. Het verschil tussen de hoek $\pi/2$ en de hoek $A_1O_1B_1$ is de



Figuur C2

[3] Zie voor afleiding Appendix B

schuifrek als gevolg van de verplaatsing *w*. Om dit verschil te bepalen wordt de hoek $B_2O_1A_1$ beschouwd, waarin B_2O_1 parallel is aan *BO*. Door nu het vlak $B_2O_1A_1$ om de as O_1A_1 te roteren met een hoek $\partial w/\partial y$ komt het vlak $B_2O_1A_1$ in het vlak $B_1O_1A_1$ te liggen en komt het punt B_2 op positie *C*. De verplaatsing B_2C is gelijk aan $(\partial w/\partial y)dy$ en is gelijk aan de rotatie van de verticaal B_2B_1 om de hoek $\partial w/\partial x$. Hieruit volgt dat B_1C gelijk is aan $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)dy$. De hoek CO_1B_1, wat de schuifrek als gevolg van de verplaatsing *w* voorstelt, is gelijk aan $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$. Toevoegen van deze schuifrek aan de rek als gevolg van de verplaatsingen *u* en *v* geeft:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (C5)$$

Door nu de B3, B4 en B5 twee keer te differentiëren en te combineren wordt de volgende vergelijking verkregen:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad (C6)$$

Door nu de rek componenten te vervangen door de drie equivalente vergelijkingen (C7), (C8) en (C9) kan (C6) uitgedrukt worden in termen van n_{xx}, n_{yy} en n_{xy}:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{hE}\left(n_{xx} - \nu n_{yy}\right) \qquad (C7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{hE}\left(n_{yy} - \nu n_{xx}\right) \qquad (C8)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{hG} n_{xy} \qquad (C9)$$

Deze drie vergelijkingen kunnen vereenvoudigd worden door het invoeren van een spanningsfunctie *F* die afhankelijk is van *x* en *y*. Deze spanningsfunctie is zo gekozen dat aan de evenwichtsvergelijkingen (C1) en (C2) wordt voldaan:

$$n_{xx} = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \qquad (C10)$$

$$n_{yy} = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \qquad (C11)$$

$$n_{xy} = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \qquad (C12)$$

Substitutie van (C10), (C11) en (C12) in (C7), (C8) en (C9) en substitutie van dit resultaat in (C6) geeft:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] \qquad (3)$$

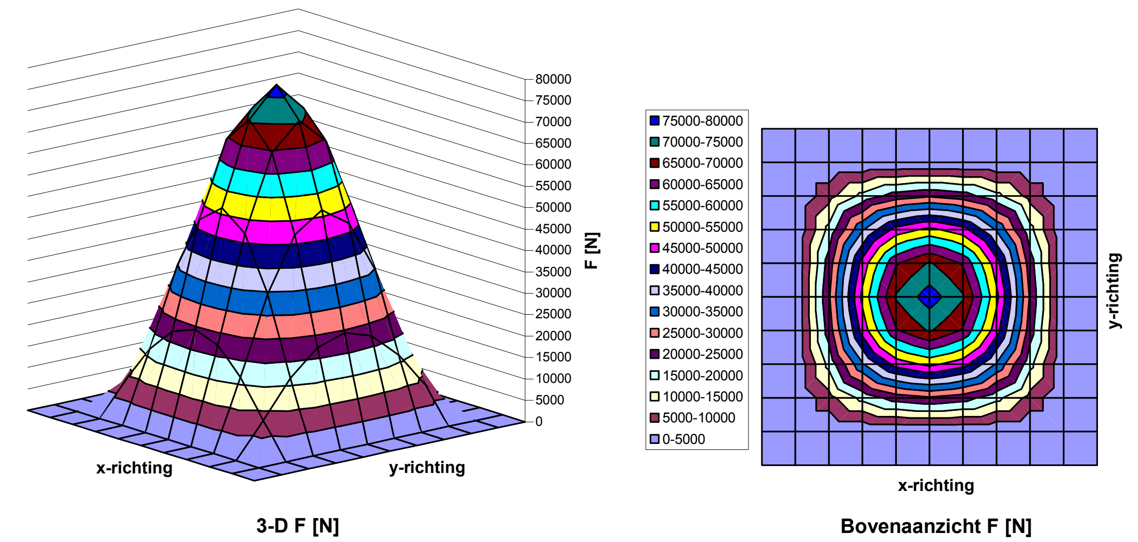
De tweede vergelijking die nodig is om *F* en *w* op te lossen wordt verkregen door substitutie van (C10), (C11) en (C12) in (2) :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{h}{D}\left(\frac{p}{h} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) \qquad (4)$$

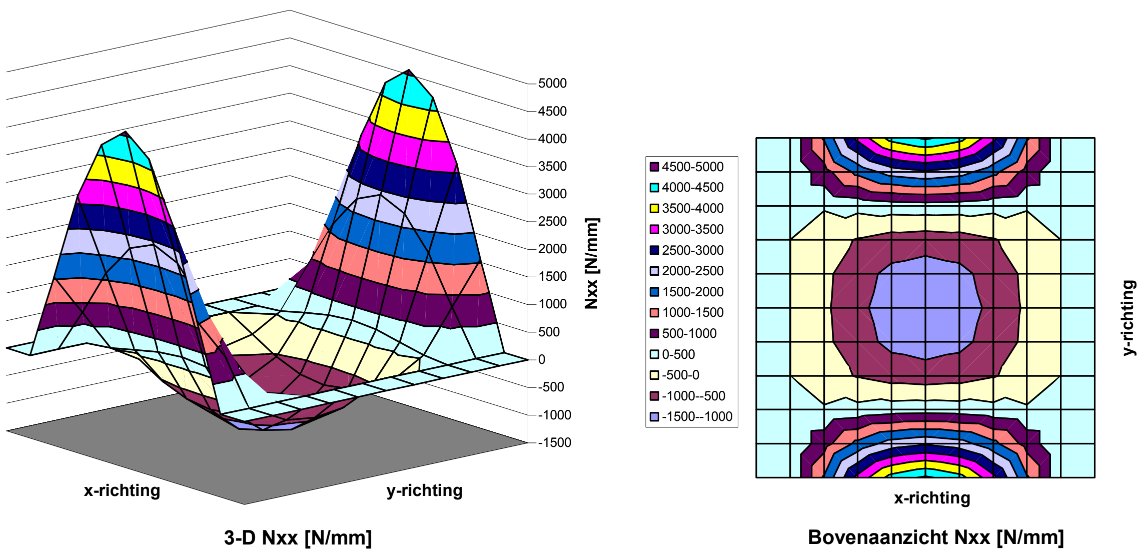
Vergelijking (3) en (4) bepalen samen met de randvoorwaarden de twee functies *F* en *w*.

Appendix D

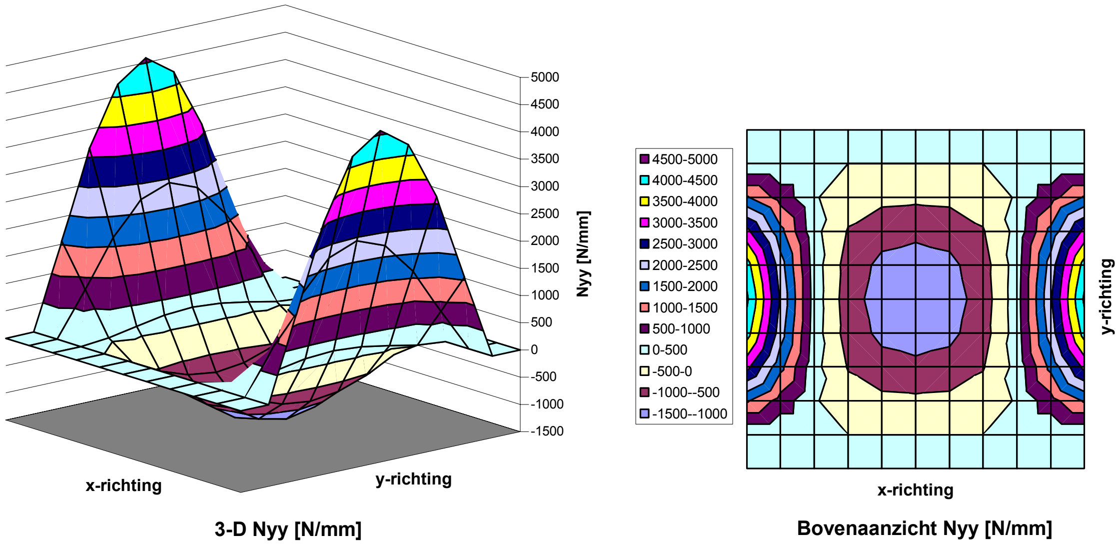
Met de differentiemethode bepaalde spanningen in het middenvlak voor een 10x10-differentienet



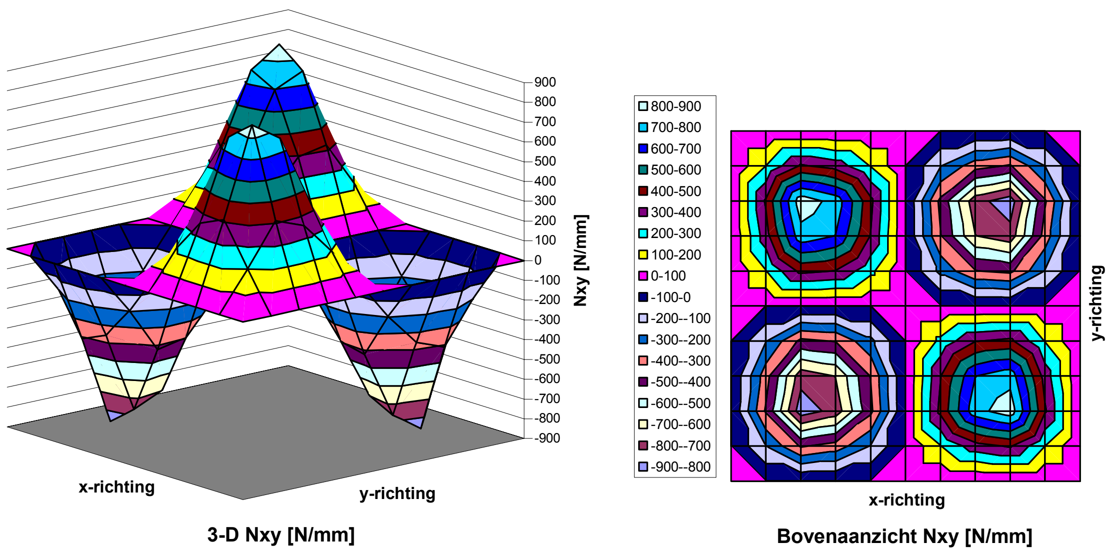
Figuur D1: Spanningsfunctie F [N]



Figuur D2: Normaalspanningen n_{xx} [N/mm] in het middenvlak



Figuur D3: Normaalspanningen n_{yy} [N/mm] in het middenvlak



Figuur D4: Normaalspanningen n_{yy} [N/mm] in het middenvlak

Appendix E

Afleiding van een onafhankelijke vervormingsparameter voor vierhoekig platen [11]

Evenwichtsvergelijkingen

Een glaspaneel wordt belast door vier hoekkrachten of oplegreacties R_1, R_2, R_3 en R_4. Vanzelfsprekend moeten deze in evenwicht zijn. Er zijn drie evenwichtsvergelijkingen; krachtenevenwicht in de *z*-richting, momentenevenwicht om de *x*-as en momentenevenwicht om de *y*-as:

$$\begin{aligned} &R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0 \\ &y_1R_1 + y_2R_2 + y_3R_3 + y_4R_4 = 0 \\ &x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3 + x_4R_4 = 0 \end{aligned}$$

Als één van de hoekkrachten bekend is kunnen de andere hoekkrachten met deze vergelijkingen worden uitgerekend. Blijkbaar kan de spanningstoestand van een paneel beschreven worden met één parameter. Deze parameter noemen we *R*. Als *R* bekend is liggen de hoekkrachten ook vast. Als we R_1 R_2 en R_3 oplossen uit de evenwichtsvergelijkingen krijgen we het volgende resultaat.

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-x_2y_1 + y_2x_1 + x_2y_4 - x_1y_4 + y_1x_4 - y_2x_4}{x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 - y_1x_3 + y_2x_3 - y_2x_1} R_4 \\ R_2 &= \frac{x_3y_4 - x_4y_3 - x_2y_4 + y_2x_4 + x_2x_3 - y_2x_3}{x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 - y_1x_3 + y_2x_3 - y_2x_1} R_4 \\ R_2 &= \frac{x_1y_4 - x_1y_3 + y_1x_3 - x_3y_4 + x_4y_3 - y_1x_4}{x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 - y_1x_3 + y_2x_3 - y_2x_1} R_4 \end{aligned}$$

Dit kunnen we ook schrijven als

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{-x_2y_1 + y_2x_1 + x_2y_4 - x_1y_4 + y_1x_4 - y_2x_4}{A} R \\ R_1 &= \frac{x_3y_4 - x_4y_3 - x_2y_4 + y_2x_4 + x_2y_3 - y_2x_3}{A} R \\ R_1 &= \frac{x_1y_4 - x_1y_3 + y_1x_3 - x_3y_4 + x_4y_3 - y_1x_4}{A} R \\ R_1 &= \frac{x_2y_1 - x_2y_3 + x_1y_3 - y_1x_3 + y_2x_3 - y_2x_1}{A} R \end{aligned}$$

waarin *A* het oppervlak van het paneel is. De reden om door *A* te delen is dat daardoor *R* de eenheid kN krijgt. Voor de hand ligt nu de volgende definitie.

$$\begin{aligned} R_1 &= b_1R \\ R_2 &= b_2R \\ R_3 &= b_3R \\ R_4 &= b_4R \end{aligned}$$

Hierin zijn b_1, b_2, b_3 en b_4 parameters die volgen uit de vorm van het paneel.

$$b_1 = \frac{-r_{23} + r_{24} - r_{34}}{A}$$
$$b_2 = \frac{r_{13} - r_{14} + r_{34}}{A}$$
$$b_3 = \frac{-r_{12} + r_{14} - r_{24}}{A}$$
$$b_4 = \frac{r_{12} - r_{13} + r_{23}}{A}$$

waarin:

$$r_{12} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$
$$r_{13} = x_1 y_3 - x_3 y_1$$
$$r_{14} = x_1 y_4 - x_4 y_1$$
$$r_{23} = x_2 y_3 - x_3 y_2$$
$$r_{24} = x_2 y_4 - x_4 y_2$$
$$r_{34} = x_3 y_4 - x_4 y_3$$

Opgemerkt wordt dat ook een andere definitie van de parameters *b* geschikt zou kunnen zijn. Het paneeloppervlak *A* kan worden berekend met

$$A = \frac{1}{2}\left(r_{12} + r_{23} + r_{34} - r_{14}\right)$$

Kinematische vergelijking

Een glaspaneel heeft vier onafhankelijke hoekverplaatsingen w_1, w_2, w_3 en w_4. Het paneel kan op drie manieren bewegen zonder te vervormen, translatie in de *z*- richting, rotatie om de *x*-as en rotatie om de *y*-as. Blijkbaar bestaat er één onafhankelijke parameter die de vervorming beschrijft (4 - 3 = 1). Deze parameter noemen we *w*. Vaak is de getransponeerde van de evenwichtsvergelijkingen een geschikte keuze voor de kinematische vergelijkingen. Dus,

$$w = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 + b_4 w_4$$

Hieronder wordt bewezen dat dit inderdaad een geschikte keuze is omdat $w = 0$ bij starre translaties en starre rotaties.

Bij een starre translatie geldt: $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = a$

Substitutie hiervan in de kinematische vergelijking geeft

$$\begin{aligned} w &= a\left(b_1 + b_2 + b_3 + b_4\right) \Leftrightarrow \\ &= a\left(\frac{-r_{23} + r_{24} - r_{34}}{A} + \frac{r_{13} - r_{14} + r_{34}}{A} + \frac{-r_{12} + r_{14} - r_{24}}{A} + \frac{r_{12} - r_{13} + r_{23}}{A}\right) \Leftrightarrow \\ &= a\left(\frac{0}{A}\right) = 0 \end{aligned}$$

Bij een kleine starre rotatie om de *x*-as geldt:

$$w_1 = a y_1$$
$$w_2 = a y_2$$
$$w_3 = a y_3$$
$$w_4 = a y_4$$

Substitutie in de kinematische vergelijking geeft

$$w = a\left(b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 + b_4 y_4\right) \Leftrightarrow$$
$$= a\left(\frac{-r_{23} + r_{24} - r_{34}}{A} y_1 + \frac{r_{13} - r_{14} + r_{34}}{A} y_2 + \frac{-r_{12} + r_{14} - r_{24}}{A} y_3 + \frac{r_{12} - r_{13} + r_{23}}{A} y_4\right)$$

Verdere uitwerking geeft $w = 0$.

Bij een kleine starre rotatie om de *y*-as geldt:

$$w_1 = a x_1$$
$$w_2 = a x_2$$
$$w_3 = a x_3$$
$$w_4 = a x_4$$

Substitutie in de kinematische vergelijking geeft:

$$w = a\left(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4\right) \Leftrightarrow$$
$$= a\left(\frac{-r_{23} + r_{24} - r_{34}}{A} x_1 + \frac{r_{13} - r_{14} + r_{34}}{A} x_2 + \frac{-r_{12} + r_{14} - r_{24}}{A} x_3 + \frac{r_{12} - r_{13} + r_{23}}{A} x_4\right)$$

Verdere uitwerking geeft $w = 0$.

De vervormingsparameter w kan gebruikt worden als objectieve en onafhankelijke maat voor de vervorming van de panelen.

Constitutieve vergelijking

De constitutieve vergelijking van een glaspaneel geeft het verband tussen de vervormingsparameter w en de krachtsparameter R. Deze vergelijking kan op verschillende manieren worden afgeleid, bijvoorbeeld door de complementaire energie van het paneel te minimaliseren. Wanneer ook de constitutieve vergelijking bekend is, kunnen de oplegreacties van een vervormd paneel worden berekend. In dit verslag gaan we hier niet verder op in omdat dit buiten het kader van het onderzoek valt. We willen immers de stabiliteit van vervormde panelen onderzoeken en de oplegreacties zijn hiervoor niet van belang.

Appendix F

Lijst met gegevens over de plaatvormen berekend met ANSYS (excl. wind)

Nr	opmerking	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	h	$\hat{w}_{1;prop}$	$\hat{w}_{2;prop}$	$\hat{w}_{3prop}$	$\hat{w}_{4;prop}$	$\hat{w}_{prop}$	w_{prop}
1	vierkant	0.0	0.0	1600.0	0.0	1600.0	1600.0	0.0	1600.0	8	66	0	66	0	132	-132
2	parallelogram	0.0	0.0	1600.0	0.0	1610.0	1600.0	10.0	1600.0	8	48	0	48	0	96	-96
3		0.0	0.0	1600.0	0.0	1620.0	1600.0	20.0	1600.0	8	42	0	42	0	84	-84
4		0.0	0.0	1600.0	0.0	1630.0	1600.0	30.0	1600.0	8	36	0	36	0	72	-72
5		0.0	0.0	1600.0	0.0	1640.0	1600.0	40.0	1600.0	8	34	0	34	0	68	-68
6		0.0	0.0	1600.0	0.0	1650.0	1600.0	50.0	1600.0	8	30	0	30	0	60	-60
7		0.0	0.0	1600.0	0.0	1700.0	1600.0	100.0	1600.0	8	24	0	24	0	48	-48
8		0.0	0.0	1600.0	0.0	1800.0	1600.0	200.0	1600.0	8	18	0	18	0	36	-36
9		0.0	0.0	1600.0	0.0	2000.0	1600.0	400.0	1600.0	8	12	0	12	0	24	-24
10		0.0	0.0	1600.0	0.0	2400.0	1600.0	800.0	1600.0	8	11	0	11	0	22	-22
11		0.0	0.0	1600.0	0.0	3200.0	1600.0	1600.0	1600.0	8	12	0	12	0	24	-24
12	rechthoekig trape-	0.0	0.0	1600.0	0.0	1610.0	1600.0	0.0	1600.0	8	54	0	54	0	108	-108
13	zium	0.0	0.0	1600.0	0.0	1650.0	1600.0	0.0	1600.0	8	39	0	40	0	80	-79
14		0.0	0.0	1600.0	0.0	1700.0	1600.0	0.0	1600.0	8	30	0	32	0	64	-62
15		0.0	0.0	1600.0	0.0	2000.0	1600.0	0.0	1600.0	8	16	0	20	0	40	-36
16		0.0	0.0	1600.0	0.0	3200.0	1600.0	0.0	1600.0	8	8	0	16	0	32	-21
17	diagonaallengte	0.0	0.0	1588.4	11.6	1600.0	1600.0	11.6	1588.4	8	40	0	40	0	80	-80
18		0.0	0.0	1575.0	25.0	1600.0	1600.0	25.0	1575.0	8	30	0	30	0	60	-60
19		0.0	0.0	1550.0	50.0	1600.0	1600.0	50.0	1550.0	8	22	0	22	0	44	-44
20		0.0	0.0	1500.0	100.0	1600.0	1600.0	100.0	1500.0	8	16	0	16	0	32	-32
21		0.0	0.0	1400.0	200.0	1600.0	1600.0	200.0	1400.0	8	12	0	12	0	24	-24
22		0.0	0.0	1300.0	300.0	1600.0	1600.0	300.0	1300.0	8	11	0	11	0	22	-22
23		0.0	0.0	1200.0	400.0	1600.0	1600.0	400.0	1200.0	8	12	0	12	0	24	-24
24		0.0	0.0	1100.0	500.0	1600.0	1600.0	500.0	1100.0	8	16	0	16	0	32	-32
25	diagonaalpositie	0.0	0.0	1700.0	100.0	1600.0	1600.0	100.0	1700.0	8	54	0	42	0	108	-95
26		0.0	0.0	1800.0	200.0	1600.0	1600.0	200.0	1800.0	8	40	0	24	0	80	-60
27		0.0	0.0	1900.0	300.0	1600.0	1600.0	300.0	1900.0	8	36	0	16	0	72	-45
28		0.0	0.0	2000.0	400.0	1600.0	1600.0	400.0	2000.0	8	32	0	11	0	64	-32
29	hoek diagonalen	0.0	0.0	1365.7	-179.8	1600.0	1600.0	234.3	1779.8	8	68	0	68	0	136	-136
30		0.0	0.0	1092.8	-292.8	1600.0	1600.0	507.2	1892.8	8	78	0	78	0	156	-156
31		0.0	0.0	800.0	-331.4	1600.0	1600.0	800.0	1931.4	8	96	0	96	0	192	-192
32		0.0	0.0	507.2	-292.8	1600.0	1600.0	1092.8	1892.8	8	138	0	138	0	276	-276
33	vierhoeken	0.0	0.0	1600.0	0.0	1475.5	1991.8	300.0	1600.0	8	14	0	13	0	21	-27
34		0.0	0.0	2576.7	0.0	2390.1	989.7	410.7	1276.3	8	66	0	38	0	132	-97
35		0.0	0.0	1120.0	-1120.0	2260.0	0.0	1120.0	1120.0	8	43	0	44	0	88	-87
36		0.0	0.0	1110.0	-1110.0	2260.0	0.0	1110.0	1110.0	8	37	0	38	0	76	-75
37		0.0	0.0	1080.0	-1080.0	2260.0	0.0	1080.0	1080.0	8	26	0	28	0	56	-54
38		0.0	0.0	1050.0	-1050.0	2260.0	0.0	1050.0	1050.0	8	21	0	24	0	48	-45
39		0.0	0.0	900.0	-900.0	2260.0	0.0	900.0	900.0	8	11	0	16	0	32	-25
40		0.0	0.0	1000.0	-1000.0	1980.0	0.0	1000.0	1000.0	8	0	5	0	5	10	10
41		0.0	0.0	1010.0	-1010.0	1980.0	0.0	1010.0	1010.0	8	0	5	0	5	10	10
42		0.0	0.0	1040.0	-1040.0	1980.0	0.0	1040.0	1040.0	8	0	5	0	5	10	10
43		0.0	0.0	1664.8	2.8	1386.6	1179.5	-425.5	533.0	8	0	16	0	10	32	25
44		0.0	0.0	1550.0	400.0	985.3	1211.9	124.6	1399.4	8	0	14	0	12	28	25
45		0.0	0.0	1000.0	-500.0	1821.5	152.5	211.9	1689.7	8	0	14	0	40	80	41

Opmerkingen:

- Alles in mm
- (x_1,y_1) t/m (x_4,y_4) zijn de coördinaten van de hoekpunten van de plaat in het *xy*-vlak
- $\hat{w}_{prop;1}$ t/m $\hat{w}_{prop;4}$ zijn de opgelegde verplaatsingen in de desbetreffende hoeken bij de proportionaliteitsgrens
- $\hat{w}_{prop}$ is de opgelegde verplaatsing bij de proportionaliteitsgrens van één hoek die het verst van *M* af ligt en die hetzelfde vervormingsparameter *w* heeft als de berekening met opgelegde verplaatsingen in twee tegenover elkaar liggende hoeken
- w_{prop} is de proportionaliteitsgrens van de vervormingsparameter *w* (zie Appendix E)

Appendix G

Overzicht fitten van resultaten met 2e en 3e orde polynomen

Overzicht van de factoren:

nr	opmerking	x_1	x_2	x_3	x_4	$\hat{w}_{prop;i}$ [mm]	$\hat{w}_{prop;A}$ [mm]	$\hat{w}_{prop;B}$ [mm]	$\hat{w}_{prop;C}$ [mm]
1	vierkant	1	1	1	1	132	132	99	132
2	parallellogram	0.9938	1.0000	1	1	96	115	96	96
3		0.9876	1.0000	1	1	84	100	90	-100
4		0.9814	0.9999	1	1	72	86	72	72
5		0.9753	0.9998	1	1	68	74	62	-60
6		0.9692	0.9997	1	1	60	64	60	60
7		0.9395	0.9988	1	1	48	48	755	48
8		0.8828	0.9950	1	1	36	230	11996	36
9		0.7809	0.9801	1	1	24	1302	24	24
10		0.6202	0.9208	1	1	22	-1843	$-6{,}20 \times 10^6$	22
11		0.4472	0.7048	1	1	24	-172006	$-1{,}90 \times 10^8$	$5{,}71 \times 10^7$
12	rechthoekig trape-	0.9969	0.9980	0.9938	0.9938	108	108	108	108
13	zium	0.9845	0.9902	0.9697	0.9697	80	80	80	80
14		0.9693	0.9807	0.9412	0.9412	64	64	64	64
15		0.8835	0.9296	0.8000	0.8000	40	40	40	40
16		0.6325	0.7952	0.5000	0.5000	32	32	32	32
17	diagonaallengte	0.9855	1	1	1	80	95	86	-20
18		0.9687	1	1	1	60	60	60	60
19		0.9375	1	1	1	44	19	-16	10
20		0.8750	1	1	1	32	32	-186	470
21		0.7500	1	1	1	24	432	24	24
22		0.6250	1	1	1	22	1333	2160	-8380
23		0.5000	1	1	1	24	2734	7659	-30690
24		0.3750	1	1	1	32	4636	17946	-73190
25	diagonaalpositie 1	1	1	0.7778	1	108	108	108	108
26		1	1	0.6000	1	80	88	146	50
27		1	1	0.4545	1	72	72	72	72
28		1	1	0.3333	1	64	58	-130	440
25	diagonaalpositie 2	1	1	1	0.7778	108	99	87	-240
26		1	1	1	0.6000	80	80	80	80
27		1	1	1	0.4545	72	69	72	260
28		1	1	1	0.3333	64	64	64	64
29	hoek diagonalen	1	0.8333	1	1	136	-84021	136	$-1{,}92 \times 10^7$
30		1	0.6667	1	1	156	-334195	156	$2{,}27 \times 10^7$
31		1	0.5000	1	1	192	-750688	192	$2{,}75 \times 10^8$
32		1	0.3333	1	1	276	$1{,}33 \times 10^6$	276	$8{,}87 \times 10^{8*}$
33	vierhoeken	0.8317	0.8403	0.9337	0.5533	21	21	21	21
34		0.9718	0.6126	0.5794	0.9645	132	$-3{,}32 \times 10^6$	132	132
35		0.9912	1	0.9825	1	88	108	88	90
36		0.9823	1	0.9652	1	76	88	78	76
37		0.9558	1	0.9153	1	56	56	56	56
38		0.9292	1	0.8678	1	48	64	48	48
39		0.7965	1	0.6618	1	32	659	32	32
40		0.9900	1	1	0.9800	10	2095	10	10
41		0.9802	1	1	0.9604	10	7890	-162	10
42		0.9519	1	1	0.9038	10	46132	10	10
43		0.8441	0.6069	0.6331	0.3843	32	$3{,}19 \times 10^6$	32	32
44		0.8972	0.9547	0.8272	0.2798	28	741038	28	28
45		0.7854	0.8333	0.3491	0.7763	80	$-1{,}23 \times 10^6$	80	80

Hierin is:

- $x_1 = l_{kort}/l_{lang}$
- $x_2 = \alpha/90^0$
- $x_3 = d_{kort;lang}/d_{lang;lang}$
- $x_4 = d_{kort;kort}/d_{lang;kort}$
- $\hat{w}_{prop;i}$ is de proportionaliteitsgrens van plaatnummer *i* (*i* = 1,2,..,45)
- $\hat{w}_{prop;A}$ is de proportionaliteitsgrens benaderd met een 2e orde polynoom
- $\hat{w}_{prop;B}$ is de proportionaliteitsgrens benaderd met een 3e orde polynoom
- $\hat{w}_{prop;C}$ is de proportionaliteitsgrens benaderd met een 3e orde polynoom
- grijs gearceerd betekent meegenomen in het stelsel voor bepalen polynoom

Maple worksheet voor bepalen 2e orde polynoom:

```
> restart:
>
>eq:=w_prop_i=a1+a2*x1+a3*x2+a4*x3+a5*x4+a6*x1^2+a7*x1*x2+a8*x1*x3+a9*x1*x4+a10*x2^2+a11*x2*x3
+a12*x2*x4+a13*x3^2+a14*x3*x4+a15*x4^2;
```

$$eq := w\_prop\_i = a1 + a2\ x1 + a3\ x2 + a4\ x3 + a5\ x4 + a6\ x1^2 + a7\ x1\ x2 + a8\ x1\ x3 + a9\ x1\ x4 + a10\ x2^2 + a11\ x2\ x3 + a12\ x2\ x4 + a13\ x3^2 + a14\ x3\ x4 + a15\ x4^2$$

```
>
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000:  w_prop_i:=132: eq1:=simplify(eq):  #nr 1
> x1:=9395:  x2:=9988:  x3:=10000: x4:=10000:  w_prop_i:=48:  eq7:=simplify(eq):  #nr 7
> x1:=9969:  x2:=9980:  x3:=9938:  x4:=9938:   w_prop_i:=108: eq12:=simplify(eq): #nr 12
> x1:=9845:  x2:=9902:  x3:=9697:  x4:=9697:   w_prop_i:=80:  eq13:=simplify(eq): #nr 13
> x1:=9693:  x2:=9807:  x3:=9412:  x4:=9412:   w_prop_i:=64:  eq14:=simplify(eq): #nr 14
> x1:=8835:  x2:=9296:  x3:=8000:  x4:=8000:   w_prop_i:=40:  eq15:=simplify(eq): #nr 15
> x1:=6325:  x2:=7952:  x3:=5000:  x4:=5000:   w_prop_i:=32:  eq16:=simplify(eq): #nr 16
> x1:=9687:  x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000:  w_prop_i:=60:  eq18:=simplify(eq): #nr 18
> x1:=8750:  x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000:  w_prop_i:=32:  eq20:=simplify(eq): #nr 20
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=7778:  x4:=10000:  w_prop_i:=108: eq25:=simplify(eq): #nr 25
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=4545:  x4:=10000:  w_prop_i:=72:  eq27:=simplify(eq): #nr 27
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=10000: x4:=6000:   w_prop_i:=80:  eq30:=simplify(eq): #nr 26
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=10000: x4:=3333:   w_prop_i:=64:  eq32:=simplify(eq): #nr 28
> x1:=8317:  x2:=8403:  x3:=9337:  x4:=5533:   w_prop_i:=21:  eq37:=simplify(eq): #nr 33
> x1:=9558:  x2:=10000: x3:=9153:  x4:=10000:  w_prop_i:=56:  eq41:=simplify(eq): #nr 37
>
> x1:='x1': x2:='x2': x3:='x3': x4:='x4': w_prop_i:='w_prop_i':
>
> sols:=solve({eq1,eq7,eq12,eq13,eq14,eq15,eq16,eq18,eq20,eq25,eq27,eq30,eq32,eq37,eq41},{a1,
a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,a11,a12,a13,a14,a15}):
> w_prop:=subs(sols,eq);
```

$$\begin{aligned} w\_prop := w\_prop\_i = & -\frac{1306501054225378571062885410288656488267861472}{90993826616987847568661148805239558489} \\ & -\frac{5083503662332320473888722170144280993228 38}{48254301993857191892471821336111887077 5}\ x1 + \frac{26054321537836259367056901469391565117341361}{84927571509188657730750405551556921256 40}\ x2 \\ & +\frac{250989728375428733326540016035625478896175954032535 11}{188135325000198377644494174242454917864312495744 88}\ x3 \\ & -\frac{1404311895091366859955362576045903538513423613123812 29}{293961445312809965069522147253835809162988274601375}\ x4 + \frac{1174}{7332025}\ x1^2 \\ & +\frac{1358165798999163060168423157972539399 91}{2547827145275659731922512166546707637692 0}\ x1\ x2 + \frac{33462031845267902}{4889353637771888535 25}\ x1\ x3 \\ & +\frac{6172513920624375261624179887450862212457459}{619376779016512880830362707687504626722925 20}\ x1\ x4 - \frac{7619939523053682221548275169978031624 59}{2547827145275659731922512166546707637692 0}\ x2^2 \\ & -\frac{33585361446062704302109549564994327588771933901337}{20121425133711056432566221844112825440033422004800 0}\ x2\ x3 \\ & -\frac{32392568811160659158218380443217812680552844251 9}{379649530824736913822004185737977838491196641600 0}\ x2\ x4 - \frac{240}{3918722533}\ x3^2 \\ & +\frac{8519179420466631340258418977474766130601}{2547827145275659731922512166546707637692 00}\ x3\ x4 + \frac{18671}{17780889000}\ x4^2 \end{aligned}$$

```
> x1:=10000: x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000:   solve(w_prop); #w_prop_i:=132: #nr 1
```

$$132$$

```
> x1:=9938:  x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000.0: solve(w_prop); #w_prop_i:=96:  #nr 2
```

$$115.235998$$

```
> x1:=9876:  x2:=10000: x3:=10000: x4:=10000.0: solve(w_prop); #w_prop_i:=84:  #nr 3
```

$$99.72599830$$

```
> x1:=9814:  x2:=9999:  x3:=10000: x4:=10000.:  solve(w_prop); #w_prop_i:=72:  #nr 4
```

$$85.75899830$$

```
> x1:=9753:  x2:=9998:  x3:=10000: x4:=10000.0: solve(w_prop); #w_prop_i:=68:  #nr 5
```

etc.