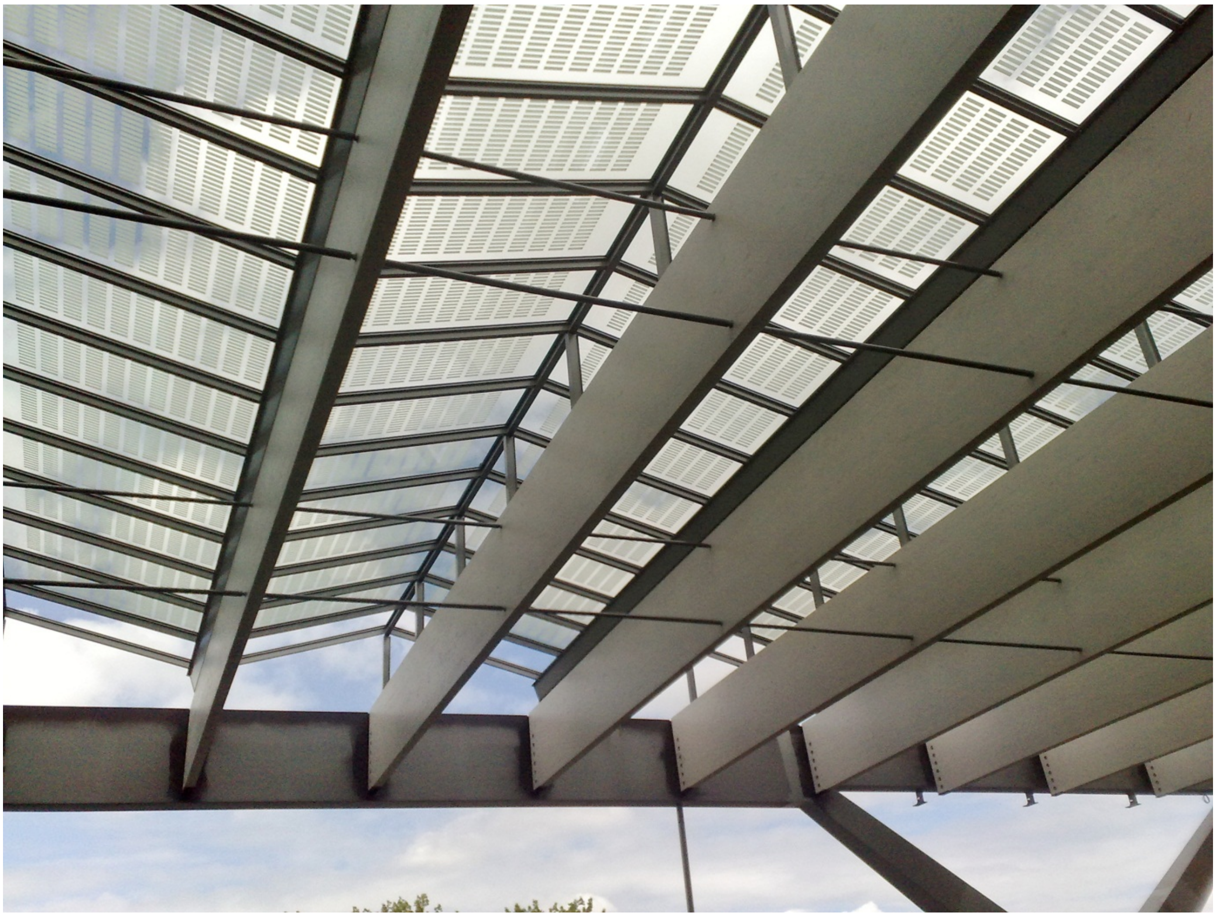
Technische Universiteit Delft
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

De effectieve kiplengte van houten liggers



Roeland van Straten

November 2012

Technische Universiteit Delft
Faculteit der Civiele Techniek en Geowetenschappen

De effectieve kiplengte van houten liggers

Bepaling aan de hand van analytische methoden, energievergelijkingen en EEM berekeningen.

Student: Roeland van Straten
Studienummer: 1504932

Begeleiders: Ir. G.J.P. Ravenshorst
Ir. J.W. Welleman
Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom

Supervisie: Prof. Dr. Ir. J.W.G. van de Kuilen

November 2012

Voorwoord

Dit rapport is tot stand gekomen in het kader van het vak 'extra deel afstudeerwerk' (CIE5050-09) aan de faculteit Civiele Techniek en Geowetenschappen van de Technische Universiteit in Delft. Doel van het vak is het zelfstandig uitvoeren van onderzoek op een academisch niveau, waarbij het gekozen onderwerp niet gerelateerd hoeft te zijn aan het onderwerp van het uiteindelijke afstudeerwerk.

Dit eindrapport gaat over het bepalen van de effectieve kiplengtes van houten liggers. In juni 2011 is door deze auteur (1) reeds onderzoek uitgevoerd naar het bepalen van de effectieve kiplengte voor de meest standaard belastingsconfiguraties. In dit rapport is een deel van dat rapport overgenomen zodat een compleet rapport ontstaat over het bepalen van de effectieve kiplengte. De overgenomen delen zijn gemarkeerd met een asterisk achter de paragraaftitel.
In juni 2012 heeft Khalid Saleh (2) de effectieve kiplengte bepaald voor belastingsconfiguraties met ongelijke negatieve eindmomenten. Van deze oplossing zal in dit onderzoek gebruik worden gemaakt.

Gedurende dit onderzoek ben ik begeleid door Ir. G.J.P. Ravenshorst, Ir. J.W. Welleman en Dr. Ir. P.C.J. Hoogenboom. Hiervoor wil ik graag mijn dank uitspreken.

Steenwijk, oktober 2012

Roeland van Straten

Samenvatting

In dit extra afstudeerwerk is onderzoek gedaan naar het bepalen van de effectieve kiplengte voor een rechthoekige houten ligger. Allereerst zijn verschillende methoden voor het bepalen van de effectieve kiplengte uit de literatuur met elkaar vergeleken. Daaruit bleek dat de effectieve kiplengtes alleen bekend zijn voor liggers op 2 steunpunten voor een aantal standaard belastingsconfiguraties en dat de literatuur geen methode aanreikt waarmee de effectieve kiplengtes voor onbekende belastingsconfiguraties bepaald kunnen worden.

Op analytische wijze is geverifieerd dat voor het kritieke kipmoment van een ligger, belast met een constant moment over de liggerlengte, geldt: $M_0 = \frac{\pi}{kl} \cdot \sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t}$. Hierin wordt de inklemmingsfactor k bepaald aan de hand van de rotatieveerstijfheid in het horizontale vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. Helaas is op analytische wijze geen uitdrukking te vinden voor het kritieke kipmoment van een ligger voor andere belastingsgevallen.

Met behulp van een energiebeschouwing kan elk belastingsgeval worden vertaald naar een equivalent uniform moment over de ligger, waarvan het kritieke kipmoment reeds bekend is. De effectieve kiplengte is dus een virtuele lengte die de wijze van belasten in rekening brengt op het kritieke kipmoment van een ligger. Voor elk belastingsgeval kan de effectieve kiplengte worden bepaald met de equivalente uniforme momentfactor m volgens: $l_{eff} = m\ l$.
Met behulp van een energiebeschouwing is tevens een methode bepaald waarmee de equivalente momentfactor bepaald kan worden voor een ligger belast met een q-last en ongelijke eindmomenten. Deze methode kan gebruikt worden om voor de losse overspanningen van een doorgaande ligger of de ongesteunde delen in een ligger met kipsteunen de equivalente momentfactor te bepalen.
Met behulp van een energiebeschouwing is tevens de invloed bepaald van een belasting die aangrijpt boven of onder het normaalkrachtencentrum op de effectieve kiplengte. Helaas is de invloed van rotatieveren voor andere belastingsgevallen dan het basisgeval niet af te leiden met behulp van een energiebeschouwing.

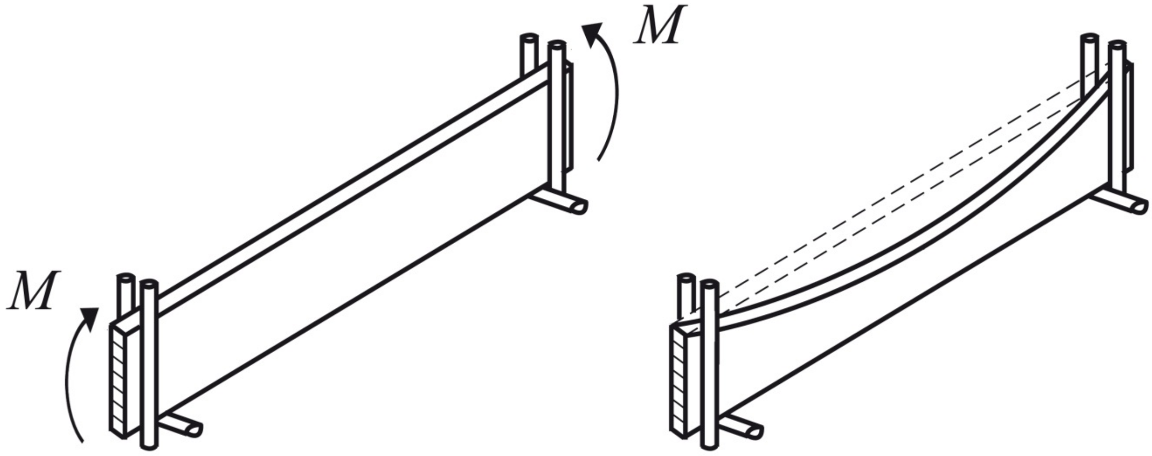
Met behulp van EEM berekeningen zijn de oplossingen met behulp van analytische methoden en de oplossingen met behulp van energievergelijkingen geverifieerd. De equivalente momentfactoren voor liggers zonder rotatieveren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen blijken goed overeen te komen met de literatuur of de gevonden oplossingen. Voor liggers met rotatieveren is aangetoond dat de inklemmingsfactor alleen kan worden toegepast op het basisgeval. Voor andere belastingsconfiguraties wordt een schattingsmethode aangereikt waarmee de effectieve inklemmingsfactor te bepalen is voor eindige rotatiestijfheden, vervolgonderzoek moet echter aantonen of dit een veilige benadering geeft van de effectieve kiplengte. Voor liggers met oneindig stijve rotatiestijfheden worden in de literatuur momentenfactoren gevonden voor het bepalen van de effectieve kiplengte.

Inhoudsopgave

1 Inleiding

De toetsingscriteria van liggers kunnen grofweg opgedeeld worden in eisen aan de sterkte van de ligger, eisen aan de doorbuiging van de ligger en eisen aan de stabiliteit van de ligger. Rekening houdend met de stabiliteit van een ligger dient deze gecontroleerd te worden op knikinstabiliteit en kipinstabiliteit. De eerste vorm van stabiliteit treedt op onder invloed van een normaalkracht in een ligger of kolom. De tweede vorm treedt op onder invloed van buiging, waarbij zijdelingse instabiliteit van de ligger kan optreden, aangeduid met het kippen van de ligger. In dit onderzoek zal laatstgenoemde verder worden onderzocht, zonder daarbij een combinatie van knik en kip mee te nemen.

Tijdens het kippen van een ligger zal de drukzone van de ligger onder invloed van buiging in de sterke as zijdelings gaan verplaatsen zoals weergegeven in Figuur 1.1.



Figuur 1.1 Visualisatie van het kippen van een ligger

1.1 Aanleiding

In de literatuur worden verschillende methoden aangereikt voor het toetsen van houtconstructies op kipinstabiliteit. Dit betekent niet dat de toetsing op kip nog erg onbekend is, maar is eerder het gevolg van de ontwikkeling van de Eurocode. Voor die tijd bestonden er verschillende methoden in de nationale normen. Deze zijn echter meestal beperkt te gebruiken voor een paar standaard belastingsgevallen en de herkomst ervan is soms onduidelijk. Voor veelvoorkomende belastingsgevallen, zoals een doorgaande ligger over meerdere steunpunten, is het onduidelijk hoe het kipmoment bepaald kan worden. Dit is aanleiding om kipinstabiliteit van houten liggers nader te onderzoeken.

1.2 Doel

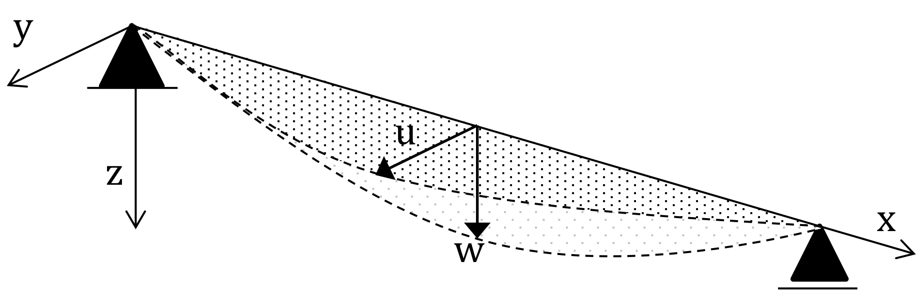
Bij de toetsing op kipinstabiliteit wordt gebruik gemaakt van de effectieve kiplengte (l_{eff}). Dit is een virtuele lengte die de wijze van belasten in rekening brengt op het kritieke kipmoment van de ligger. Het doel van dit onderzoek is het bepalen van de effectieve kiplengte voor verschillende belastingsconfiguraties en deze te vergelijken met waarden uit de literatuur. Tevens zal voor verschillende belastingsconfiguraties het kipgedrag worden gemodelleerd in EEM software. Enerzijds om de effectieve kiplengtes voor de standaard belastingsconfiguraties te verifiëren en anderzijds om de invloed van belastingsconfiguraties met rotatieveren en/of kipsteunen op de effectieve kiplengte nader te onderzoeken.

1.3 Uitgangspunten

In dit rapport zal worden uitgegaan van een houten ligger met een rechthoekige doorsnede, zodoende hoeft welving (flensbuiging) niet te worden meegenomen. Tevens wordt aangenomen dat de beginexcentriciteiten van de ligger niet groter zijn dan $e \leq \frac{l}{500}$ voor gelamineerd hout en $e \leq \frac{l}{300}$ voor gezaagd hout, anders zijn de rekenregels uit de Eurocode niet geldig. Tot slot wordt, tenzij anders aangegeven, ervan uitgegaan dat de belasting aangrijpt in het normaalkrachtencentrum (NC) van de doorsnede.

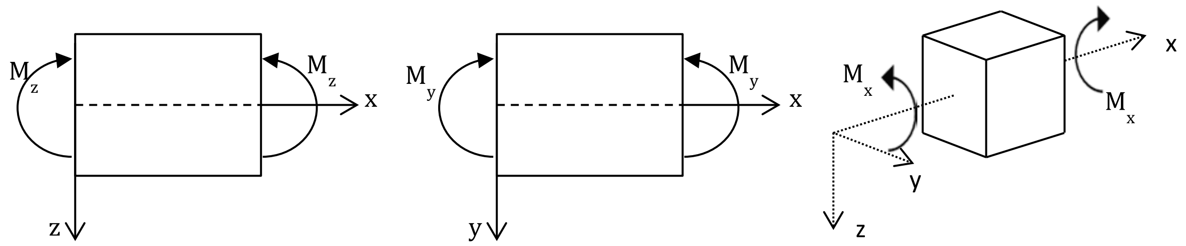
1.4 Tekenafspraken

In dit gehele rapport zal, tenzij expliciet anders vermeld, worden uitgegaan van een ligger belast op twee steunpunten met het in Figuur 1.2 aangegeven assenstelsel. De ligger kan een verticale verplaatsing w en een horizontale verplaatsing u ondergaan.



Figuur 1.2 Ligger op twee steunpunten ondergaat een zakking w

Tevens zullen de in Figuur 1.3 aangegeven positieve momenten worden aangehouden. Let op: dit is afwijkend ten opzichte van de notaties in de houtnormen, daar wordt voor het moment M_z de notatie M_y gebruikt en andersom. De hier aangehouden notatie komt voort uit het mechanica onderwijs op de TU Delft.



Figuur 1.3 Positieve momenten in het aangegeven assenstelsel

1.5 Leeswijzer

<u>Toetsing op kipinstabiliteit</u>
Om te beginnen zal worden uitgelegd op welke wijze er getoetst wordt op kipinstabiliteit.

<u>Literatuuronderzoek naar de effectieve kiplengte</u>
Vervolgens wordt er in de literatuur gekeken naar methoden om de effectieve kiplengte te bepalen, welke vervolgens met elkaar worden vergeleken.

Afleiding kiplengtes met analytische oplossing
In dit hoofdstuk zal op analytische wijze een oplossing worden gegeven voor het kritieke kipmoment van een ligger door het oplossen van een differentiaalvergelijking. Tevens zal worden bekeken wat de invloed is van rotatieveren in het horizontale vlak op het kipmoment van de ligger.

Afleiding kiplengtes met energiebeschouwing
Vervolgens wordt met behulp van energievergelijkingen voor verschillende belastingsgevallen de effectieve kiplengte bepaald.

Afleiding kiplengtes met EEM berekeningen
Tot slot wordt het kipgedrag voor verschillende belastingsconfiguraties gemodelleerd in DIANA om de effectieve kiplengtes te verifiëren voor belastingsgevallen afgeleid met analytische methoden of afgeleid met een energiebeschouwing. Voor een ligger met kipsteunen zal de invloed op de effectieve kiplengte worden bepaald.

Conclusies
Dit hoofdstuk bevat de conclusies die getrokken kunnen worden uit dit onderzoek.

Aanbevelingen voor praktijk
In dit hoofdstuk zullen concrete aanbevelingen worden gedaan die van toepassing zijn op de praktijk.

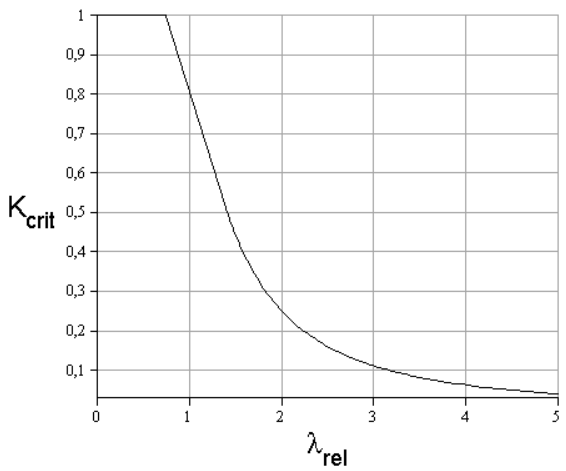
Aanbevelingen voor vervolgonderzoek
Tot slot zullen de aanbevelingen voor vervolgonderzoek worden gepresenteerd.

2 Toetsing op kipinstabiliteit

Bij de toetsing op kipinstabiliteit dient de rekenwaarde van de buigspanning, berekent volgens een geometrisch lineaire (1[e] orde) berekening uitgaande van lineair elastisch materiaalgedrag, kleiner te zijn dan de rekenwaarde van de buigsterkte vermenigvuldigd met een instabiliteitsfactor k_{crit}:

$$\sigma_{m,0,d} \leq k_{crit} \cdot f_{m,o,d} \tag{2.1}$$

Deze factor k_{crit} zorgt ervoor dat de buigsterkte begrensd wordt, om zo de stabiliteit van de ligger te garanderen. De instabiliteitsfactor is afhankelijk van de relatieve slankheid van de ligger en het verloop ervan is weergegeven in Figuur 2.1.



Figuur 2.1 Verloop instabiliteitsfactor als functie van de relatieve slankheid

De relatieve slankheid is een factor die de theoretisch kritieke buigspanning σ_{crit} relateert aan de karakteristieke druksterkte en is gedefinieerd als:

$$\lambda_{rel} = \sqrt{\frac{f_{m,o,k}}{\sigma_{crit}}} \tag{2.2}$$

Voor verschillende waarden van λ_{rel} is de instabiliteitsfactor weergegeven in Tabel 2.1.

$\boldsymbol{\lambda_{rel}}$	$\boldsymbol{k_{crit}}$
$\boldsymbol{\lambda_{rel}} \leq 0.75$	$k_{crit} = 1$
$0.75 < \boldsymbol{\lambda_{rel}} \leq 1.4$	$k_{crit} = 1.56 - 0.75 \cdot \lambda_{rel}$
$\mathbf{1.4} < \boldsymbol{\lambda_{rel}}$	$k_{crit} = \dfrac{1}{{\lambda_{rel}}^2}$

Tabel 2.1 Waarde van de instabiliteitsfactor voor verschillende waarden van de relatieve slankheid

2.1 Bepalen van de kritieke buigspanning*

Om de relatieve slankheid te bepalen is het nodig de kritieke buigspanning σ_{crit} van de ligger te bepalen. Deze wordt gegeven door:

$$\sigma_{crit} = \frac{M_{crit}}{W} \tag{2.3}$$

Hierbij is M_{crit} het theoretische kipmoment van de ligger, waarbij zijdelingse instabiliteit optreedt. Voor een ligger die wordt belast met een constant moment over de ligger en aan beide zijden een gaffeloplegging heeft, geldt:

$$M_{crit} = \frac{\pi}{l_{eff}} \sqrt{EI_{yy} GI_t} \tag{2.4}$$

Waarin:

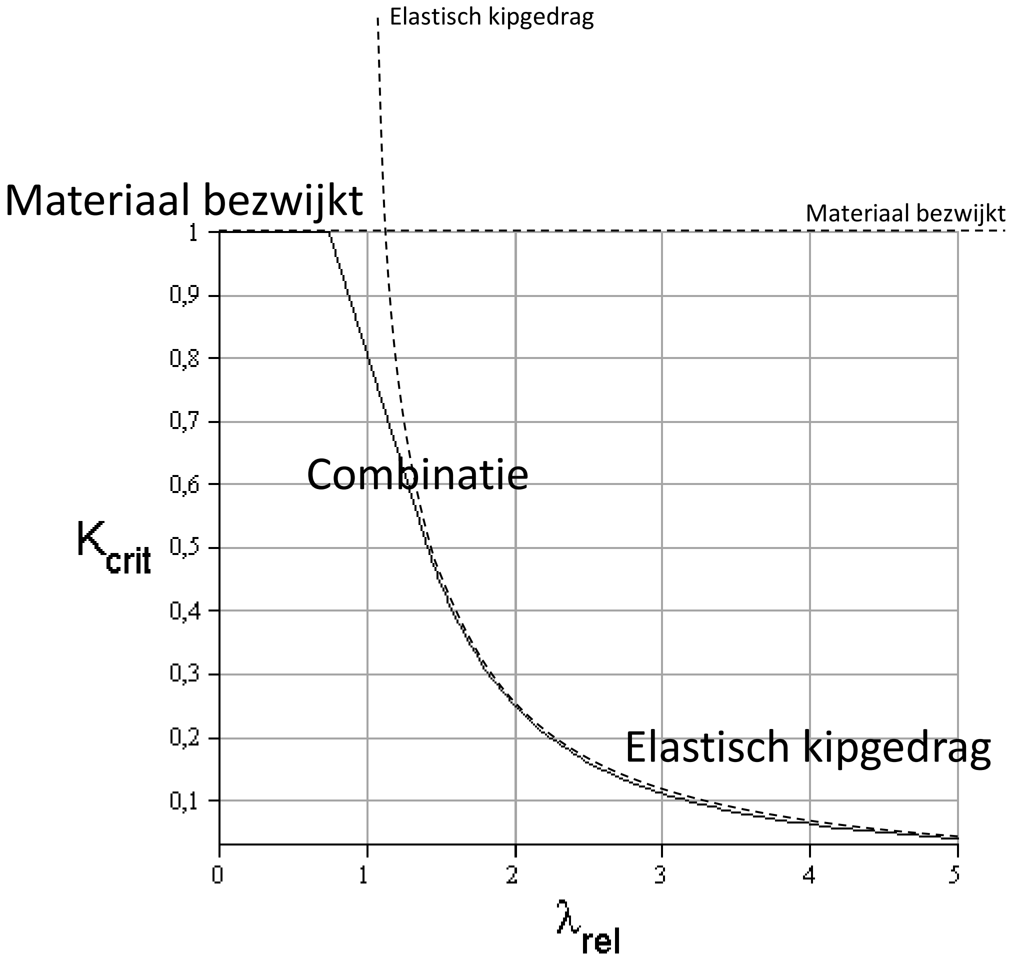
l_{eff} Effectieve kiplengte
E Elasticiteitsmodulus (5% ondergrenswaarde)
I_{yy} Traagheidsmoment in zijdelingse richting
G Afschuivingsmodulus (5% ondergrenswaarde)
I_t Torsietraagheidsmoment

Er moet worden aangemerkt dat bij hout wordt gerekend met een 5% ondergrenswaarde voor de elasticiteitsmodulus en de afschuivingsmodulus aangezien een gemiddelde waarde bij hout te weinig zekerheid biedt. In het vervolg van dit verslag zal dit niet meer expliciet worden vermeld, maar wordt ervan uitgegaan dat de 5% ondergrenswaarde van de elasticiteitsmodulus en afschuivingsmodulus zal worden gebruikt bij de toetsing op kip. Tevens is het belangrijk om in te zien dat de notatie voor het traagheidmoment I_{yy} overeenkomt met de notatie I_z wat gebruikt wordt in de houtnormen. Het kritieke kipmoment zal in hoofdstuk 4 nog uitgebreid worden afgeleid.

2.2 Achtergrond instabiliteitsfactor

Om meer inzicht te geven in het toetsen op kipinstabiliteit is het belangrijk om de achtergrond van de instabiliteitsfactor te weten. Aangezien de kritieke buigspanning bepaald wordt via het theoretische kipmoment, waarbij wordt uitgegaan van elastisch materiaalgedrag, dient de instabiliteitsfactor de buigsterkte te begrenzen voor de werkelijk optredende bezwijkvorm. Het materiaal kan namelijk bezwijken voordat het theoretische kipmoment wordt bereikt.

De instabiliteitsfactor is afhankelijk van de relatieve slankheid van de ligger, aangezien het bezwijkgedrag voor een hoge relatieve slankheid afwijkt van liggers met een lage relatieve slankheid. Voor liggers met hoge relatieve slankheid zal het elastisch kipgedrag maatgevend zijn, aangezien het materiaal nog lang niet bezweken is voordat de ligger gaat kippen. Voor liggers met lage relatieve slankheid zal het materiaal echter veel eerder bezwijken dan dat het theoretische kipmoment is bereikt. Daar tussenin bevindt zich een gebied waarbij een combinatie van beide bezwijkvormen optreedt, zie Figuur 2.2.



Figuur 2.2 Bezwijkvormen voor verschillende relatieve slankheden

Aangezien de instabiliteitsfactor algemeen geldend is voor alle situaties is de verwachting dat de waarde van k_{crit} aan de conservatieve kant is, de exacte afleiding is echter onbekend. In dit onderzoek zal daar ook geen aandacht aan worden besteed.

Een manier om de instabiliteitsfactor te omzeilen is gebruik te maken van een geometrisch niet lineaire eindige elementen berekening, waarbij rekening gehouden dient te worden met de beginexcentriciteit van de ligger. Op die manier volstaat een spanningstoetsing op de ligger, aangezien een geometrisch niet lineaire berekening wordt uitgevoerd.

3 Literatuuronderzoek naar de effectieve kiplengte

In dit hoofdstuk zal in de literatuur worden gezocht naar methoden voor het bepalen van de effectieve kiplengte voor gebruik bij een geometrisch lineaire (1^e orde) berekening, uitgaande van lineair elastisch materiaalgedrag, waarna getoetst wordt met de instabiliteitsfactor k_{crit} zoals uitgewerkt in het vorige hoofdstuk.
De effectieve kiplengte is een virtuele lengte die de invloed van de belastingssituatie in rekening brengt op het kritieke kipmoment van een ligger en is afhankelijk van de belastingssituatie en het aangrijpingspunt van de belasting. Voor zover mogelijk zullen de verschillende methoden onderling worden vergeleken.

3.1 Eurocode*

In de Eurocode [3] zijn voor enkele belastingsgevallen de waarden van de effectieve kiplengte gegeven, zie Tabel 3.1.

Belastingtype	Effectieve kiplengte
Constant moment	$l_{eff} = 1.0 \cdot L$
Puntlast op ½ L	$l_{eff} = 0.8 \cdot L$
Gelijkmatig verdeelde q-last	$l_{eff} = 0.9 \cdot L$

Tabel 3.1 Effectieve kiplengtes uit de Eurocode

Tevens houdt de Eurocode rekening met het aangrijpingspunt van de belasting. De effectieve kiplengte moet aangepast worden als de belasting boven de drukzone of onder de trekzone aangrijpt. In het eerste geval dient de effectieve kiplengte met 2h te worden vergroot en in het tweede geval met 0.5 h te worden verminderd.

3.2 Step*

In het Step-dictaat [4] wordt voorgesteld om elk ander belastingsgeval, anders dan het basisgeval om te rekenen naar een constant moment over de ligger door gebruik te maken van een equivalante momentfactor m. Voor een 9-tal standaard belastingsgevallen is de m-factor gegeven in bijlage 1.
Het kipmoment voor zo'n nieuw belastingsgeval kan berekend worden volgens:

$$M_{crit,nieuw} = \frac{1}{m} \cdot M_{crit,basis} \tag{3.1}$$

3.2.1 Analogie met effectieve kiplengte*

Het mag volkomen helder zijn dat gebruik van een equivalente momentfactor gelijk staat aan het gebruik van de effectieve kiplengte. Door de uitdrukking voor $M_{crit,basis}$ in te vullen in de vorige vergelijking ontstaat:

$$M_{crit,nieuw} = \frac{1}{m} \cdot M_{crit,basis} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_{yy} GI_t} = \frac{\pi}{l_{eff}} \sqrt{EI_{yy} GI_t} \tag{3.2}$$

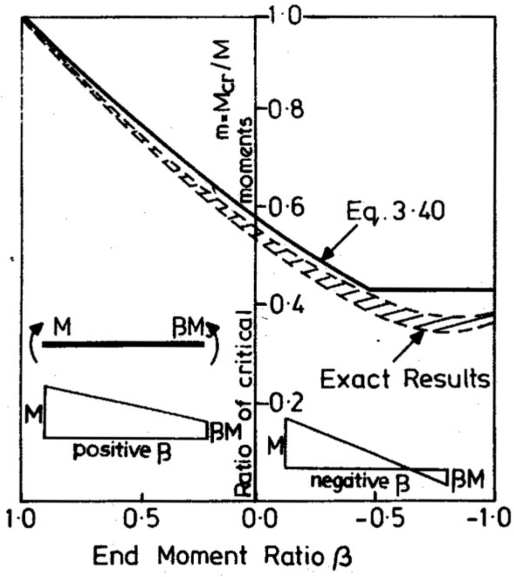
Hieruit kan worden gevonden dat $l_{eff} = m \cdot l$.

3.2.2 Kirby and Nethercot*

In Kirby and Nethercot [5] is de momentenfactor voor een moment met een lineair verloop over de lengte van de ligger op analytische wijze bepaald. Voor de exacte oplossing wordt tevens een benaderingsformule gegeven waarmee de momentfactor bepaald kan worden, zie Figuur 3.1. De benaderingsformule luidt:

$$m = 0.57 + 0.33 \cdot \beta + 0.1 \cdot \beta^2 \geq 0.43 \tag{3.3}$$

Hierin is β een factor die aangeeft hoeveel het moment afneemt tot het einde van de ligger. Voor de rechter momentenlijn in Figuur 3.1 is β negatief. Bij een constant moment over de ligger geldt: β=1. Deze benaderingsformule geeft waarden voor de momentfactor die hoger liggen dan de werkelijke waarden en geeft dus een veilige benadering voor de equivalente momentfactor.



Figuur 3.1 Lineaire momentenverdeling

Met deze formule zijn tevens belastingsgeval 2 en 3 uit bijlage 1 af te leiden:

Moment aan één enkele zijde (β=0):

$$m = 0.57 + 0.33 \cdot 0 + 0.1 \cdot 0^2 = 0.57 \tag{3.4}$$

Moment aan twee zijden (tegengesteld, β=-1):

$$m = 0.57 + 0.33 \cdot -1 + 0.1 \cdot (-1)^2 = 0.34 \ngeq 0.43 \Rightarrow m = 0.43 \tag{3.5}$$

Deze blijken overeen te komen met de waarden gegeven in bijlage 1. Deze waarden zijn dus aan de veilige kant aangezien ze al benaderd zijn met formule (3.3).

3.2.3 Vergelijking met de Eurocode*

De factoren van de Eurocode worden in Tabel 3.2 vergeleken met de equivalente momentfactoren uit bijlage 1. Te zien is dat de factoren in de Eurocode aan de conservatieve kant zijn aangezien deze hoger zijn geschat dan de factoren uit bijlage 1, een te hoge m-factor leidt immers tot een te klein kipmoment.

Belastingtype	Eurocode	m-factor	verschil
Constant moment	1.0	1.0	0
Puntlast op ½ L	0.8	0.74	0.06
Gelijkmatig verdeelde q-last	0.9	0.88	0.02

Tabel 3.2 Vergelijking tussen equivalente momentfactoren en de Eurocode

3.3 DIN*

In de Duitse DIN [(6)] wordt voorgesteld om de volgende uitdrukking te gebruiken voor de effectieve kiplengte:

$$l_{eff} = \frac{l}{a_1\left[1 - a_2 \frac{a_z}{l}\sqrt{\frac{B}{T}}\right]} \tag{3.6}$$

Waarin:

l	Lengte van de overspanning
a_1	Factor 1 (afleiding onbekend)
a_2	Factor 2, brengt belasting boven of onder het NC in rekening
a_z	Afstand tussen NC en het aangrijpingspunt van de belasting (verticaal)
B	Buigstijfheid EI_{yy}
T	Torsiestijfheid GI_t

3.3.1 Vergelijking met equivalente momentfactoren*

Ervan uitgaande dat de belasting aangrijp in NC ($a_z = 0$) kan de vergelijking worden herschreven tot:

$$l_{eff} = \frac{l}{a_1} = \frac{1}{a_1} \cdot l \tag{3.7}$$

Dit is identiek aan een momentfactor gelijk aan $m = \frac{1}{a_1}$. Ter vergelijking worden de factoren in de Duitse DIN omgerekend naar equivalente momentfactoren m en vergeleken met de waarden uit bijlage 1. Het resultaat is te zien in Tabel 3.3.

Belastingssituatie	m-DIN-factor	m-factor	verschil
Constant moment	$\frac{1}{1.0} = 1.0$	1.0	0
Moment op één van de liggereinden	$\frac{1}{1.77} = 0.56$	0.57	0.01
Puntlast op ½ L	$\frac{1}{1.35} = 0.74$	0.74	0
q-last	$\frac{1}{1.13} = 0.88$	0.88	0
Puntlast op ½ L (inklemming)	$\frac{1}{1.70} = 0.59$	0.59	0
q-last (inklemming)	$\frac{1}{1.30} = 0.77$	0.39	0.38

Tabel 3.3 Vergelijking tussen DIN en Step-dictaat

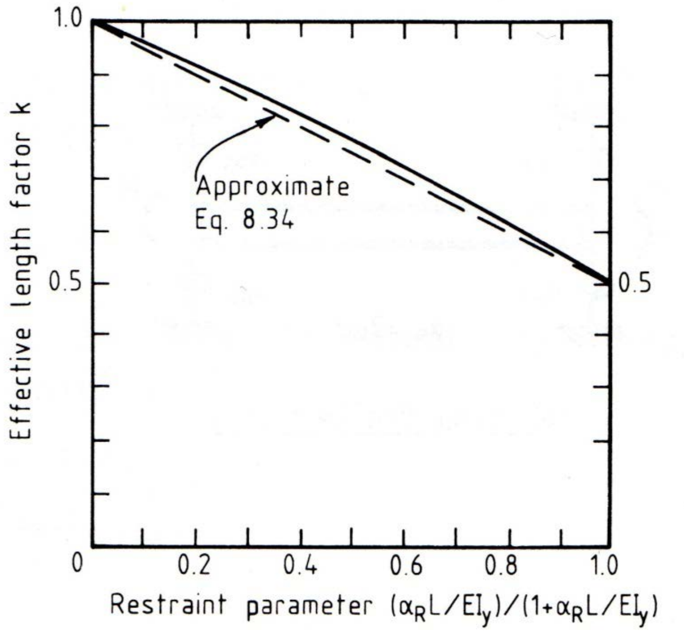
Hieruit kan worden geconcludeerd dat de equivalente momentfactoren goed overeen blijken te komen met de factoren in de Duitse DIN. Waar het grote verschil in de laatste belastingssituatie vandaan komt wordt duidelijk in hoofdstuk 0.

3.4 Trahair

De effectieve kiplengte voor een uniform moment over de liggerlengte, waarbij de rotatie ter plaatse van de gaffeloplegging word verhinderd in het x-y vlak, is volgens Trahair [7] te bepalen via:

$$l_{eff} = k \cdot l$$

In deze formule wordt k de inklemmingsfactor genoemd. Deze factor kan voor rotatieveren met gelijke rotatiestijfheden worden bepaald uit Figuur 3.2.



Figuur 3.2 Relatie tussen k en de dimensieloze rotatiestijfheid volgens Trahair

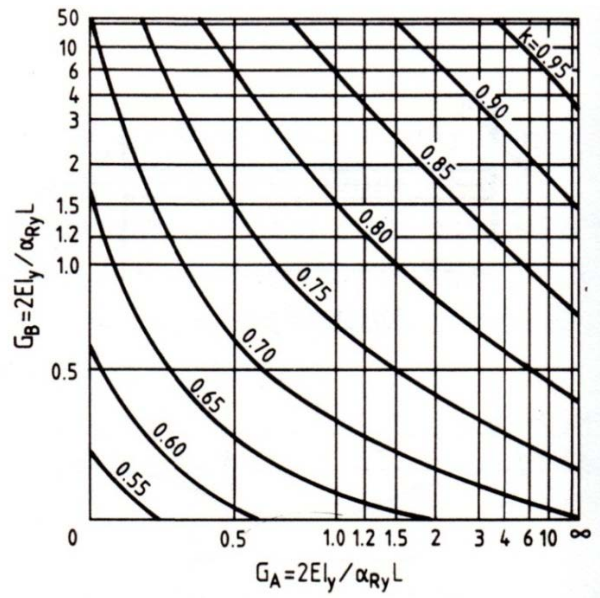
De exacte oplossing is op analytische wijze bepaald, de volledige afleiding van Figuur 3.2 is echter onbekend. Deze oplossing kan volgens Trahair benaderd worden met onderstaande formule voor de inklemmingsfactor, afhankelijk van de rotatiestijfheid α_r:

$$k = \frac{2 + \alpha_r L/EI_y}{2 + 2\,\alpha_r L/EI_y} \tag{3.8}$$

Het vreemde van deze benadering is dat deze onder de werkelijke oplossing ligt. Hierdoor geeft dit een te lage inklemmingsfactor, waardoor een te hoog kipmoment wordt berekend. Dit zal in volgende hoofdstukken nog worden behandeld.

Voor ongelijke rotatiestijfheden kan de inklemmingsfactor grafisch worden bepaald uit Figuur 3.3, ook hier is de afleiding voor deze oplossing onbekend. Hierbij dient opgemerkt te worden dat een oneindige rotatiestijfheid α_r leidt tot een dimensieloze rotatiestijfheid G_A gelijk aan 0. Dit is omgekeerd ten opzichte van de eerste verwachting van velen.

Ter controle kan voor gelijke rotatiestijfheden gelijk aan 0 uit beide figuren worden vastgesteld dat de inklemmingsfactor naar 1 gaat, wat overeenkomt met een effectieve kiplengte gelijk aan de overspanningslengte. Dit komt overeen met de vrije uitbuiging van een op druk belaste scharnierend opgelegde kolom. Voor gelijke rotatiestijfheden welke naar oneindig gaan, kan worden vastgesteld dat de inklemmingsfactor 0.5 nadert. De effectieve kiplengte is dan gelijk aan de helft van de overspanningslengte, dit komt overeen met een op druk belaste kolom welke aan beide zijden is ingeklemd. Tot slot zal worden gekeken naar de situatie met aan een zijde een rotatiestijfheid gelijk aan 0 en aan de andere zijde een oneindig stijve rotatieveer. Volgens Figuur 3.3 nadert de inklemmingsfactor dan een waarde van 0.7. De effectieve kiplengte komt wederom overeen met een op druk belaste kolom welke in dit geval aan een zijde is ingeklemd.



Figuur 3.3 k-waarden uit Trahair voor ongelijke dimensieloze rotatiestijfheden G_A en G_B

3.5 Fruchtengarten

In Fruchtengarten [8] is de invloed van verhinderde rotatie in het x-y vlak bepaald met behulp van eindige elementen berekeningen voor gangbare staalprofielen voor verschillende belastingsconfiguraties. De resultaten voor vrije rotatie en verhinderde rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de opleggingen worden weergegeven in Tabel 3.4 voor de meest standaard belastingconfiguraties, daarbij worden de momentenfactoren omgerekend naar equivalente momentenfactoren. Andere belastingsconfiguraties zijn opgenomen in bijlage 3.

Belastingssituatie	Vrije rotatie Enkele gaffeloplegging	Verhinderde rotatie Dubbele gaffeloplegging	Inklemmingsfactor (k_{min})
Constant moment	$\frac{1}{1.01} = 0.99$	$\frac{1}{1.93} = 0.52$	$\frac{1.01}{1.93} = 0.52$
Moment op één van de liggereinden	$\frac{1}{1.84} = 0.54$	$\frac{1}{3.59} = 0.28$	$\frac{1.84}{3.59} = 0.51$
Puntlast op ½ L	$\frac{1}{1.38} = 0.72$	$\frac{1}{2.08} = 0.48$	$\frac{1.38}{2.08} = 0.66$
q-last	$\frac{1}{1.14} = 0.88$	$\frac{1}{1.85} = 0.54$	$\frac{1.14}{1.85} = 0.62$
Puntlast op ½ L (inklemming)	$\frac{1}{1.74} = 0.57$	$\frac{1}{1.90} = 0.53$	$\frac{1.74}{1.90} = 0.92$
q-last (inklemming)	$\frac{1}{2.62} = 0.38$	$\frac{1}{2.91} = 0.34$	$\frac{2.62}{2.91} = 0.90$

Tabel 3.4 Momentenfactoren uit Fruchtengarten

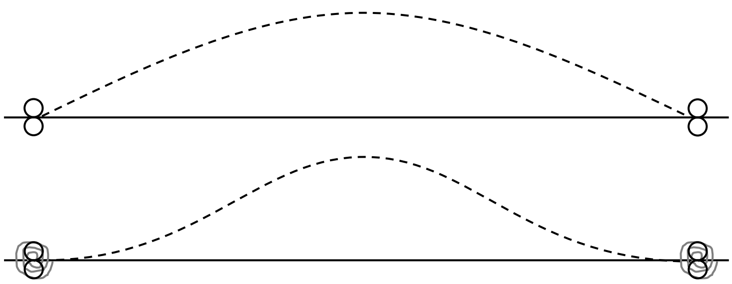
De equivalente momentfactoren voor een enkele gaffeloplegging laten goede overeenkomsten zien met de eerder gevonden waarden in de literatuur. Het is met name interessant om de equivalente momentenfactoren te bekijken voor een dubbele gaffeloplegging (zie ook Figuur 3.4). Dit laat zien dat lang niet voor alle belastingconfiguraties de equivalente momentenfactor gehalveerd wordt ten opzicht van een enkele gaffeloplegging, zoals de verwachting is met behulp van de inklemmingsfactor uit de vorige paragraaf voor het basisgeval. Voor elk belastingsgeval lijkt een minimale inklemmingsfactor te gelden, aangezien de dubbele gaffeloplegging niet voor elk belastinggeval een inklemmingsfactor van 0.5 laat zien. De equivalente momentenfactoren voor een dubbele gaffeloplegging zullen in hoofdstuk 6 worden geverifieerd.

3.6 Samenvattend

De effectieve kiplengtes uit de behandelde literatuur blijken, op één belastingsgeval na, goed met elkaar overeen te komen, al is de Eurocode wat aan de conservatieve kant. De effectieve kiplengtes zijn alleen bekend voor liggers op 2 steunpunten, met aan beide uiteinden gaffelopleggingen, voor een aantal standaard belastingsconfiguraties. Er is echter onbekend wat de effectieve kiplengte is voor een doorgaande ligger over meerdere steunpunten met rotatiestijfheid in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. Tevens is de afleiding van de inklemmingsfactor volgens Trahair [7] (voor liggers belast met een constant moment) onbekend. De volgende vragen blijven dus onbeantwoord in dit hoofdstuk en zullen in de volgende hoofdstukken worden behandeld:

- Op welke manier kunnen de effectieve kiplengtes worden bepaald voor belastingconfiguraties welke niet in de literatuur worden gegeven voor liggers met en zonder rotatieveren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen?
- Kan de afwijking tussen de DIN [6] en het Step-dictaat [4] voor een ligger belast met een q-last en aan beide zijden ingeklemd worden verklaard?
- Wat is de afleiding voor de inklemmingsfactor volgens Trahair [7] voor een ligger belast met een constant moment en met rotatieveren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen?

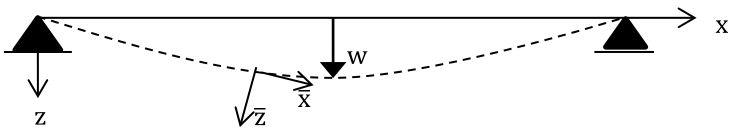
Tenzij anders vermeld wordt steeds uitgegaan van de situatie zonder rotatiestijfheid, dus zonder rotatieveer ter plaatse van de gaffeloplegging, zie de bovenste situatie in Figuur 3.4. Het bovenaanzicht van de ligger zal daarbij niet expliciet worden getekend zonder rotatieveren. Indien een situatie met rotatieveren behandeld wordt zal het bovenaanzicht wel expliciet worden weergegeven, zoals geschetst in de onderste situatie in Figuur 3.4 voor oneindig stijve rotatieveren.



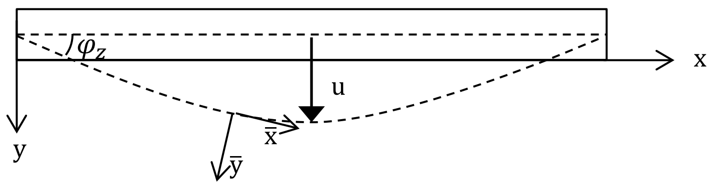
Figuur 3.4 Bovenaanzicht ligger, situatie met en zonder rotatieveren in het x-y vlak

4 Afleiding kiplengtes met analytische methode

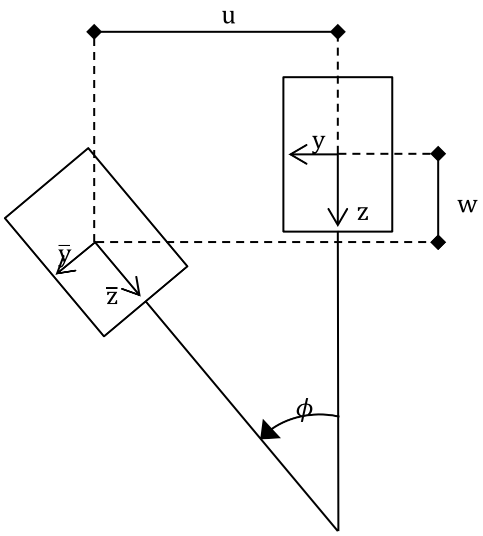
In dit hoofdstuk zal een differentiaalvergelijking worden afgeleid, waarmee het kipverschijnsel kan worden beschreven. Op die manier kan het kritieke kipmoment worden bepaald, waarbij de ligger zal gaan kippen. Hiermee is tevens de effectieve kiplengte bekend. We beschouwen een ligger op twee steunpunten, welke een zakking w, een zijdelingse verplaatsing u en een rotatie ϕ kan ondergaan zoals weergegeven in Figuur 4.1 t/m Figuur 4.3.



Figuur 4.1 Ligger op twee steunpunten ondergaat een zakking w



Figuur 4.2 De ligger ondergaat tevens een zijdelingse verplaatsing u



Figuur 4.3 Zijaanzicht van de ligger, gedraaid met een hoek φ

4.1 Evenwichtsvergelijkingen*

In het gedraaide $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$-assenstelsel wordt het evenwicht van de ligger bekeken. Voor buiging van de ligger in het $\bar{x}$-$\bar{z}$ -vlak geldt er de volgende evenwichtsvergelijking:

$$-EI_{\text{zz}}\frac{d^2w}{dx^2} = M_{\bar{z}} \tag{4.1}$$

Tevens geldt er voor de buiging in het $\bar{x}$-$\bar{y}$ –vlak de volgende vergelijking:

$$-EI_{\text{yy}}\frac{d^2u}{dx^2} = M_{\bar{y}} \tag{4.2}$$

Voor de wringing in de verdraaide doorsnede kan in het mechanica 2 boek [9] tevens voor het evenwicht worden gevonden dat moet gelden:

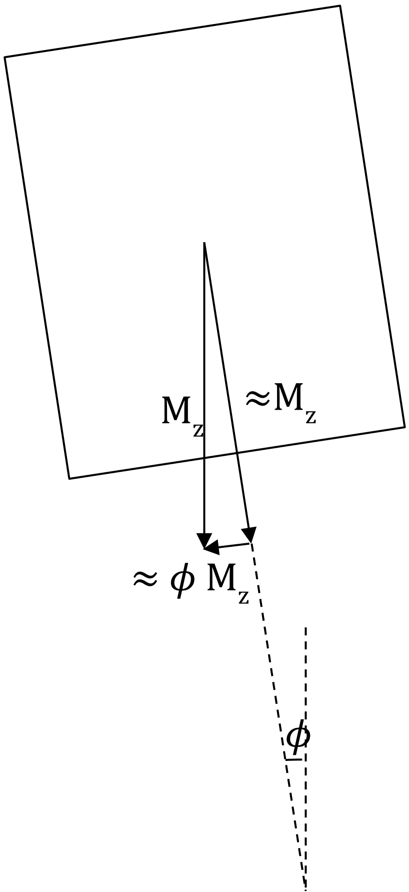
$$GI_t \frac{d\phi}{dx} = M_{\overline{x}} \tag{4.3}$$

Aangezien een rechthoekige doorsnede als uitgangspunt is genomen hoeft welving hierin niet te worden meegenomen.

Vervolgens kunnen deze termen worden uitgedrukt in de uitwendige belasting. In de verdraaide doorsnede kan worden ingezien dat onder aanname van een kleine hoek ϕ geldt:

$$M_{\overline{z}} = \cos\phi \cdot M_z \approx M_z \tag{4.4}$$

$$M_{\overline{y}} = \sin\phi \cdot M_z \approx \phi\, M_z \tag{4.5}$$



Figuur 4.4 Relatie tussen de momenten in de gedraaide doorsnede

Voor het torderend moment $M_{\overline{x}}$ kan in Figuur 4.5 worden ingezien dat, door een zekere rotatie φ_z om de z-as, het moment kan worden uitgedrukt in M_z:

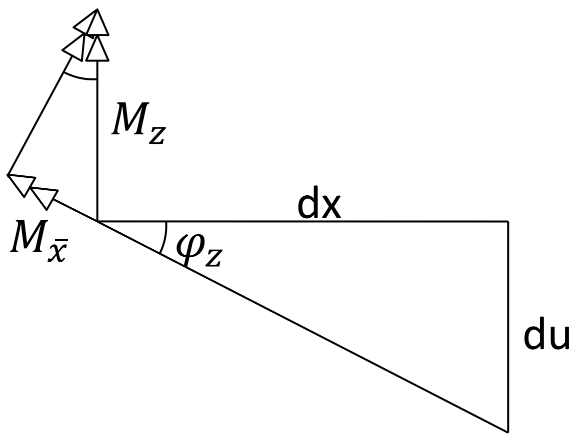
$$M_{\overline{x}} = \sin\varphi_z \cdot\ M_z \approx \varphi_z \cdot M_z \tag{4.6}$$

Ter herinnering worden de verschillende notaties voor een moment Mz weergegeven in Figuur 4.6. De rotatie φ_z is ook wel bekend als de eerste afgeleide naar het verplaatsingsveld u, en kan dus geschreven worden als:

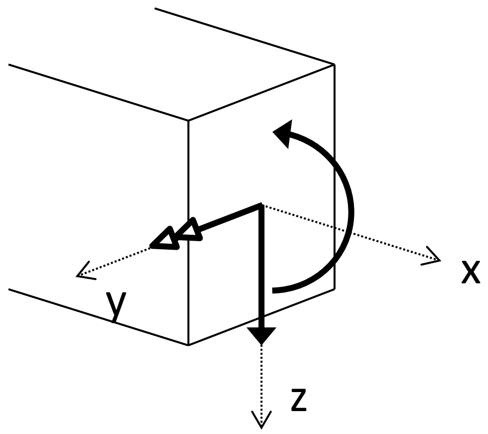
$$\varphi_z = \frac{du}{dx} \tag{4.7}$$

Zodoende geldt er voor $M_{\bar{x}}$:

$$M_{\bar{x}} = \frac{du}{dx} \cdot M_z \tag{4.8}$$



Figuur 4.5 Relatie tussen Mz en $M_{\bar{x}}$ door een verplaatsing u Mz



Figuur 4.6 Diverse notaties voor eenzelfde moment

4.2 Algemene DV voor kip*

Invullen van (4.4), (4.5) en (4.8) in de gevonden evenwichtsvergelijkingen (4.1), (4.2) en (4.3) levert:

$$-EI_{zz}\frac{d^2w}{dx^2} = M_z \tag{4.9}$$

$$-EI_{yy}\frac{d^2u}{dx^2} = \phi \cdot M_z \tag{4.10}$$

$$GI_t\frac{d\phi}{dx} = \frac{du}{dx}\,M_z \tag{4.11}$$

De eerste vergelijking blijft een losstaande differentiaalvergelijking die de zakking van de ligger in het x-z-vlak beschrijft. De laatste twee zijn aan elkaar gekoppeld en zullen gecombineerd worden tot een enkele DV die het kipgedrag beschrijft. Differentiëren van vergelijking (4.11) geeft:

$$GI_t\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2}\,M_z \tag{4.12}$$

Herschrijven van (4.10) geeft een uitdrukking voor $\frac{d^2u}{dx^2}$:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\phi \cdot M_z}{EI_{yy}} \tag{4.13}$$

Invullen van (4.13) in (4.12) levert:

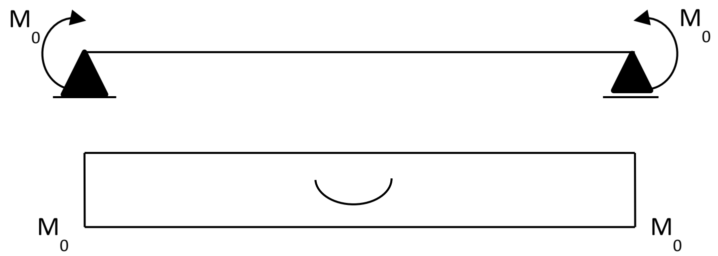
$$GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\varphi \cdot M_z^2}{EI_{yy}} \tag{4.14}$$

De rechterterm naar de linkerkant brengen levert de algemene differentiaalvergelijking voor kip:

$$GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\varphi \cdot M_z^2}{EI_{yy}} = 0 \tag{4.15}$$

4.3 Basisgeval*

Er zal nu voor een ligger die belast wordt door een constant moment M_0 worden afgeleid wat de kritische kipbelasting is. De belastingssituatie is aangegeven in Figuur 4.7.



Figuur 4.7 Ligger op twee steunpunten belast door een constant moment

Aangezien de ligger enkel met een constant moment M_0 belast wordt, geldt er: $M_z = M_0$. Invullen in de DV levert vervolgens:

$$GI_t \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{\phi \cdot M_0^2}{EI_{yy}} = 0 \tag{4.16}$$

Deze kan vereenvoudigd worden tot:

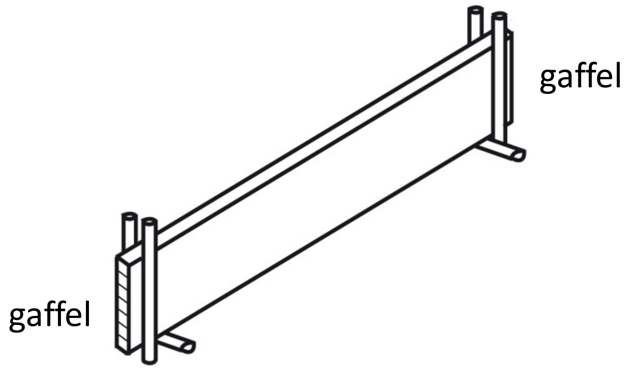
$$\phi'' + k^2 \cdot \phi = 0 \quad \text{met: } k = \frac{M_0}{\sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t}} \tag{4.17}$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking heeft de volgende vorm:

$$\phi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \tag{4.18}$$

De ligger zal op beide uiteinden worden opgelegd met een gaffeloplegging, zodat deze niet kan roteren om de x-as. Zodoende kunnen de volgende randvoorwaarden worden opgesteld:

$$\phi(0) = 0 \quad \text{en} \quad \phi(l) = 0 \tag{4.19}$$



Figuur 4.8 Een gaffeloplegging

Uitwerken levert:

$$\phi(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0 \tag{4.20}$$

$$\phi(l) = A \cdot \sin(kl) + \cos(kl) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A \cdot \sin(kl) = 0 \tag{4.21}$$

Ervan uitgaande dat $A \neq 0$ moet gelden: $\sin(kl) = 0$, dit geldt alleen voor: $kl = n\pi$. De kleinste waarde voor de kritieke belasting wordt gevonden door te kiezen voor $n = 1$ en na invullen van k geeft dat:

$$kl = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{M_0}{\sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t}} \cdot l = \pi \quad \Rightarrow \quad M_0 = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t} \tag{4.22}$$

De factor A in vergelijking (4.21), en daarmee de rotatie ϕ, blijft hiermee onbekend. Dit wordt veroorzaakt door het oplossen van een eigenwaardeprobleem, waarbij de variabele zelf onbekend blijft. Alleen de sinus-vorm is in dit geval te herkennen.
Hetzelfde antwoord kan tevens op een snelle manier met maple[1] worden gevonden, zie bijlage 4A.

Op deze manier is een uitdrukking gevonden voor het kritische kipmoment van een ligger belast met een constant moment over de lengte van de ligger. Deze blijkt overeen te komen met vergelijking (2.4), afkomstig uit de Eurocode, met een effectieve kiplengte gelijk aan de volledige lengte van de overspanning. Zodoende kan voor een ligger belast met een constant moment de effectieve lengte gelijk worden gesteld aan de overspanningslengte:

$$l_{eff} = 1.0 \cdot l \tag{4.23}$$

Hetzelfde kan worden geconcludeerd door te kijken naar bijlage 1, waarbij de equivalente momentfactor voor een constant moment gelijk wordt gesteld aan 1.0. Tevens valt te zien dat voor belastingsgeval 1.4 in bijlage 2 de a_1-factor gelijk wordt gesteld aan 1.0. Uitwerken van de gegeven vergelijkingen in hoofdstuk 3 geeft hetzelfde resultaat als formule (4.22).

[1] Maple is een computerprogramma waarmee symbolische en algebraische berekeningen op gestructureerde wijze kunnen worden uitgevoerd, zie http://www.maplesoft.com.

4.4 DV oplossen voor andere belastingsgevallen*

Nu het basisgeval op analytische wijze is afgeleid zou de weg open moeten staan om ook andere belastingsgevallen op analytische wijze op te lossen. Het enige verschil met de voorgaande situatie is dat het moment M_z afhangt van de locatie x op de liggeras. De functie voor de momentenlijn hangt dus af van de variabele x. Uitgaande van een lineair of kwadratisch momentenverloop komt de DV er als volgt uit te zien:

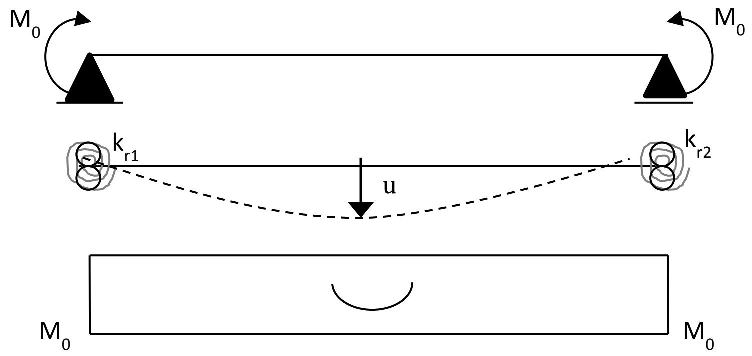
$$\phi(x)'' + C_1 \cdot \phi(x) + C_2 \cdot \phi(x) \cdot x + C_3 \cdot \phi(x) \cdot x^2 = 0 \tag{4.24}$$

met constanten C_1, C_2 en C_3. Voor een lineair verlopend moment zijn de constanten C_1 en C_3 gelijk aan nul. Voor een kwadratisch verlopend moment zijn de constanten C_1 en C_2 gelijk aan nul. Voor een constant moment geldt $C_1 = \frac{{M_0}^2}{EI_{yy} \cdot GI_t}$ met de overige constanten gelijk aan nul, dit levert tevens de differentiaalvergelijking op welke is opgelost in de vorige paragraaf. Het probleem met het oplossen van de differentiaalvergelijking, waarin C_2 of C_3 ongelijk aan nul, is dat maple een enorm lange algemene oplossing geeft waarvoor het kipmoment vervolgens niet meer oplosbaar is. Een poging om de momentenlijn te benaderen met een reeks van sinus-functies bood ook geen oplossing. Maple kan dus geen oplossing vinden voor het theoretische kipmoment van andere belastingsgevallen dan het basisgeval.

Er zal dus naar een andere methode moeten worden gekeken om voor andere belastingsgevallen het kipmoment te bepalen, dit wordt gedaan in hoofdstuk 0.

4.5 Kipmoment voor basisgeval met rotatieveren

Nu de oplossing voor het basisgeval bekend is zal worden bekeken wat de invloed is van rotatieveren in het z-y vlak op het kipmoment van de ligger. Tot noch toe was aangenomen dat de ligger een volledig vrije uitbuigingsvorm heeft in de vorm van een sinus. Als de ligger echter doorgaand over meerdere steunpunten is uitgevoerd kan deze vrije rotatie niet optreden. Dit gedrag kan worden gemodelleerd met rotatieveren, welke zichtbaar zijn in het bovenaanzicht ter plaatse van de gaffelopleggingen, zie Figuur 4.9. De ligger wordt belast met een constant moment M_0 over de ligger.



Figuur 4.9 Basisgeval met in het bovenaanzicht aan beide zijde een rotatieveer

4.5.1 Differentiaalvergelijking

Allereerst zal de differentiaalvergelijking worden herschreven naar de onbekende zijdelingse verplaatsing u van de ligger, zoals weergegeven in Figuur 4.9. Door het tweemaal differentiëren van formule 4.10 kan een uitdrukking worden gevonden voor de tweede afgeleide van de rotatie:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{EI_{yy}}{M_z}\frac{d^4u}{dx^4} \tag{4.25}$$

Invullen in vergelijking 4.12 levert:

$$-\frac{GI_tEI_{yy}}{M_z}\frac{d^4u}{dx^4} = \frac{d^2u}{dx^2}M_z \tag{4.26}$$

Dit is te herschrijven tot onderstaande differentiaalvergelijking voor de zijdelingse uitbuiging van de ligger:

$$\frac{GI_tEI_{yy}}{M_z}\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dx^2}M_z = 0 \tag{4.27}$$

Dit valt te vereenvoudigen tot:

$$u'''' + \alpha^2\ u'' = 0 \quad \text{met: } \alpha^2 = \frac{M_z^2}{GI_tEI_{yy}} \tag{4.28}$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking kan als volgt worden geschreven:

$$u = C_1 \cdot \cos(\alpha x) + C_2 \cdot \sin(\alpha x) + C_3 x + C_4 \tag{4.29}$$

Hierin zijn de constanten C_1 t/m C_4 afhankelijk van de randvoorwaarden. Op beide uiteinden van de ligger kunnen 2 randvoorwaarden worden opgesteld. Op beide einden dient de zijdelingse verplaatsing gelijk aan nul te zijn. Tevens dient op beide einden het moment in evenwicht te zijn met het product van de rotatiestijfheid en de hoekverdraaiing.

$$\begin{aligned} &x = 0: u = 0 \\ &x = 0: M_y - kr_1\varphi = 0 \\ &x = L: u = 0 \\ &x = L: M_y + kr_2\varphi = 0 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Uitwerken van de bekende uitdrukkingen voor het moment $M = -EI\frac{d^2u}{dx^2}$ en de hoekverdraaiing $\varphi = -\frac{du}{dx}$ leveren de volgende randvoorwaarden op:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_4 = 0 \\ &-EI\frac{d^2u}{dx^2} + kr_1\frac{du}{dx} = 0 \ \Rightarrow EI \cdot \alpha^2 \cdot C_1 + kr_1 \cdot \alpha \cdot C_2 + kr_1 \cdot C_3 \\ &\cos(\alpha L) \cdot C_1 + \sin(\alpha L) \cdot C_2 + L \cdot C_3 + C_4 = 0 \\ &-EI\frac{d^2u}{dx^2} - kr_2\frac{du}{dx} = 0 \\ &\qquad \Rightarrow EI \cdot (\cos(\alpha L) \cdot \alpha^2 \cdot C_1 + \sin(\alpha L) \cdot \alpha^2 \cdot C_2) \\ &\qquad + kr_2(\sin(\alpha L) \cdot \alpha \cdot C_1 - \cos(\alpha L) \cdot \alpha \cdot C_2 - C_3) = 0 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Herschrijven in matrixnotatie levert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ EI\,\alpha^2 & kr_1\,\alpha & kr_1 & 0 \\ \cos(\alpha L) & \sin(\alpha L) & L & 1 \\ EI\cos(\alpha L)\,\alpha^2 + kr_2\sin(\alpha L)\alpha & EI\,sin(\alpha L)\,\alpha^2 - kr_2\cos(\alpha L)\alpha & -kr_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

De triviale oplossing (constanten C_1, C_2, C_3 en C_4 gelijk aan nul) is niet interessant, aangezien de zijdelingse verplaatsing van de ligger dan gelijk aan nul is. Een niet-triviale oplossing wordt gevonden door de determinant van de matrix gelijk aan nul te stellen. Dit levert de volgende vergelijking op:

$$\begin{aligned} Det = \alpha(2kr_1\,kr_2\ &+ kr_1\alpha\sin(\alpha L) - 2kr_1\,kr_2\ \cos(\alpha L) + kr_2\,EI\,\alpha\cdot\sin(\alpha L) \\ &+ EI^2\alpha^3 L\sin(\alpha L) - kr_2\,EI\alpha^2 L\cos(\alpha L) - kr_1\,EI\alpha^2 L\cos(\alpha L) \\ &- kr_1\,kr_2\,\alpha L\sin(\alpha L)) = 0 \end{aligned} \tag{4.33}$$

De oplossing $\alpha = 0$ vervalt omdat dit een onbelaste ligger betreft. Vervolgens wordt gezocht naar een oplossing van onderstaande vergelijking:

$$\begin{aligned} 2kr_1\,kr_2\ &+ kr_1 EI\alpha\sin(\alpha L) - 2kr_1\,kr_2\ \cos(\alpha L) + kr_2\,EI\,\alpha\sin(\alpha L) \\ &+ EI^2\alpha^3 L\sin(\alpha L) - kr_2\,EI\alpha^2 L\cos(\alpha L) - kr_1\,EI\alpha^2 L\cos(\alpha L) \\ &- kr_1\,kr_2\,\alpha L\sin(\alpha L) = 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Vermenigvuldigen van de vergelijking met $\frac{L^2}{EI^2}$ levert:

$$\begin{aligned} 2\frac{kr_1 L}{EI}\frac{kr_2 L}{EI}\ &+ \frac{kr_1 L}{EI}\alpha L\sin(\alpha L) - 2\frac{kr_1 L}{EI}\frac{kr_2 L}{EI}\cos(\alpha L) + \frac{kr_2 L}{EI}\alpha L\sin(\alpha L) \\ &+ (\alpha L)^3\sin(\alpha L) - \frac{kr_2 L}{EI}(\alpha L)^2\cos(\alpha L) - \frac{kr_1 L}{EI}(\alpha L)^2\cos(\alpha L) \\ &- \frac{kr_1 L}{EI}\frac{kr_2 L}{EI}\alpha L\sin(\alpha L) = 0 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Vervolgens worden twee dimensieloze grootheden ingevoerd:

$$\rho_1 = \frac{kr_1 L}{EI} \quad \rho_2 = \frac{kr_2 L}{EI} \tag{4.36}$$

Derhalve kan de vergelijking worden herschreven tot:

$$\begin{aligned} 2\rho_1\rho_2\ &+ \rho_1\alpha L\sin(\alpha L) - 2\rho_1\rho_2\cos(\alpha L) + \rho_2\,\alpha L\sin(\alpha L) + (\alpha L)^3\sin(\alpha L) \\ &- \rho_2(\alpha L)^2\cos(\alpha L) - \rho_1(\alpha L)^2\cos(\alpha L) - \rho_1\rho_2\alpha L\sin(\alpha L) = 0 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Vereenvoudiging van deze vergelijking levert:

$$\begin{aligned} (\,\rho_1 + \rho_2)\alpha L(\sin(\alpha L) - \alpha L\cos(\alpha L)) &+ \rho_1\rho_2(2 - 2\cos(\alpha L) - \alpha L\sin(\alpha L)) \\ &+ (\alpha L)^3\sin(\alpha L) = 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Delen door $\sin(\alpha L)$levert:

$$(\,\rho_1 + \rho_2)\alpha L\left(1 - \alpha L\frac{\cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)}\right) + \rho_1\rho_2\left(2\frac{1-\cos(\alpha L)}{\sin(\alpha L)} - \alpha L\right) + (\alpha L)^3 = 0 \tag{4.39}$$

Gebruik makend van de volgende regels uit de goniometrie:

$$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \qquad \sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha) \tag{4.40}$$

kan de vergelijking worden herschreven tot:

$$(\rho_1 + \rho_2)\alpha L(1 - \alpha L \cot(\alpha L)) + \rho_1\rho_2 \left(4 \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha L}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha L}{2}\right)} - \alpha L \right) + (\alpha L)^3 = 0 \tag{4.41}$$

Tot slot kan gebruik worden gemaakt van het feit dat $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$:

$$(\rho_1 + \rho_2)\alpha L(1 - \alpha L \cot(\alpha L)) + \rho_1\rho_2 \left(2\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \alpha L \right) + (\alpha L)^3 = 0 \tag{4.42}$$

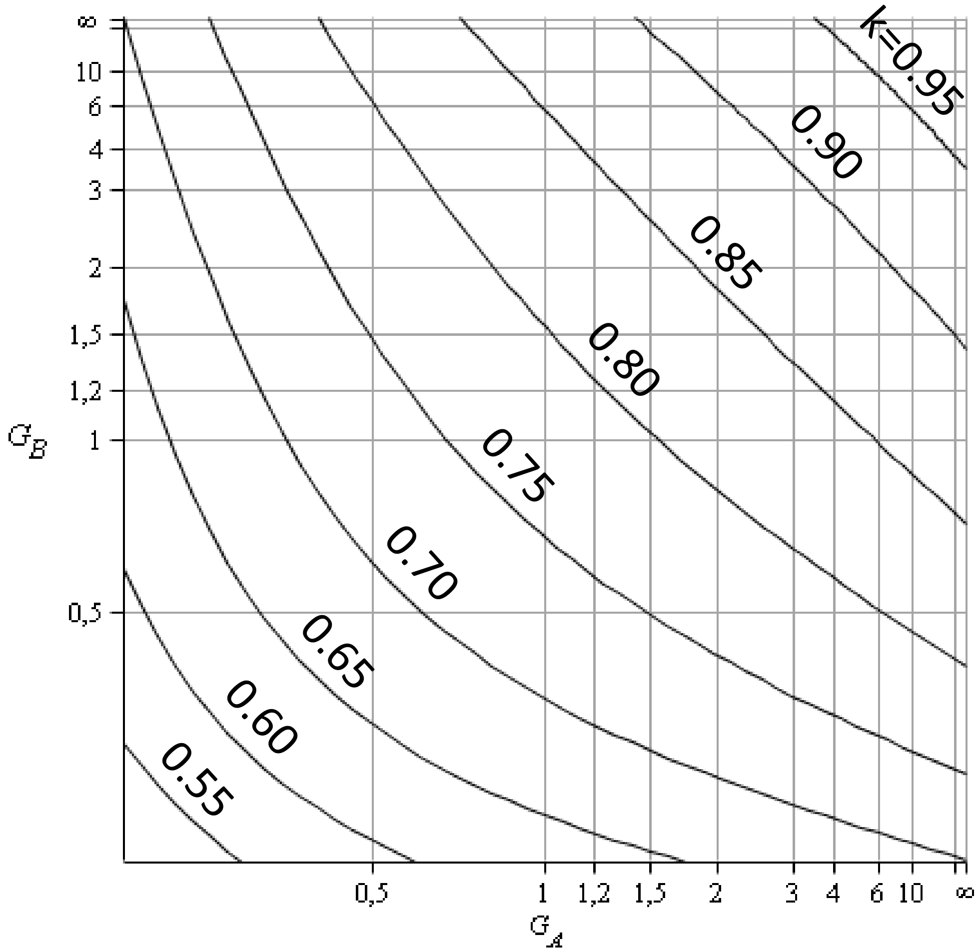
Dit levert exact dezelfde vergelijking op als gegeven in het dictaat van CT2031 (10) voor het knikprobleem van een op druk belaste staaf met rotatieveren ter plaatse van de opleggingen.

Vergelijking met literatuur

Indien $G_A = \frac{2}{\rho_1}$ en $G_B = \frac{2}{\rho_2}$ dan kan de transcendente vergelijking worden herschreven tot:

$$\begin{gathered} \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)\alpha L(1 - \alpha L \cot(\alpha L)) + \left(2\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \alpha L\right) + \frac{1}{4}G_A G_B(\alpha L)^3 = 0 \\ \left(\frac{G_A + G_B}{2}\right)(1 - \alpha L \cot(\alpha L)) + \frac{2\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right)}{\alpha L} + \frac{1}{4}G_A G_B(\alpha L)^2 = 1 \end{gathered} \tag{4.43}$$

Dit is exact dezelfde vergelijking als formule 6.39 in Trahair (7).



Figuur 4.10 k-waarden afhankelijk van de dimensieloze veerstijfheden G_A en G_B

4.5.2 Oplossen van transcendente vergelijking

Deze transcendente vergelijking dient opgelost te worden om het kritieke kipmoment van de ligger te kunnen bepalen. De kleinste positieve wortel in αL zal de kritieke waarde van het kipmoment leveren:

$$M_0 = \frac{\alpha L}{L}\sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t} \tag{4.44}$$

Het kleinste positieve wortel in αL ligt op het interval $\pi < \alpha L < 2\pi$. Indien ervan wordt uitgegaan dat $\alpha L = \frac{\pi}{k}$ geldt er:

$$M_0 = \frac{\pi}{kL}\sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t} \tag{4.45}$$

De kleinste positieve wortel van de inklemmingsfactor k ligt op het interval $0.5 < k < 1.0$. De transcendente vergelijking kan vervolgens worden opgelost door waarden van k tussen 0.5 en 1.0 in te vullen in de vergelijking. De vergelijking reduceert zich dan tot een vergelijking waarin alleen nog G_A en G_B als onbekenden voorkomen. Zo'n vergelijking is vaak gemakkelijk te herschrijven tot $G_B = f(G_A)$. Deze functie kan vervolgens worden geplot.

De beschreven procedure is uitgevoerd in maple, waarmee voor verschillende waarden van k de afhankelijkheidsrelatie tussen G_A en G_B is geplot. Het volledige maple script is te zien in bijlage 4B, het resultaat is te zien in Figuur 4.10.

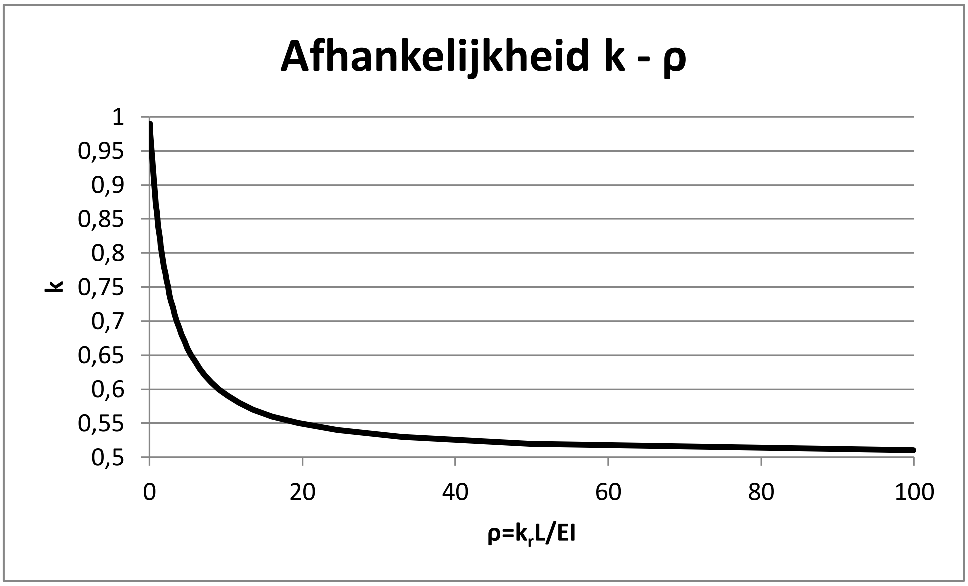
De k-waarden komen goed overeen met de waarden uit Trahair [7], welke geplot zijn in Figuur 3.3.

4.5.3 Situatie met gelijke rotatiestijfheden

Uitgaande van gelijke rotatiestijfheden reduceert de vergelijking zich tot:

$$2\rho \cdot \alpha L(1 - \alpha L \cot(\alpha L)) + \rho^2 \left(2\tan\left(\frac{\alpha L}{2}\right) - \alpha L\right) + (\alpha L)^3 = 0 \tag{4.46}$$

Op eenzelfde manier als eerder kan de waarde van k, waarmee αL bepaald is, worden ingevuld in de formule. Vervolgens kan de dimensieloze rotatiestijfheid ρ worden opgelost, aangezien dit de enige



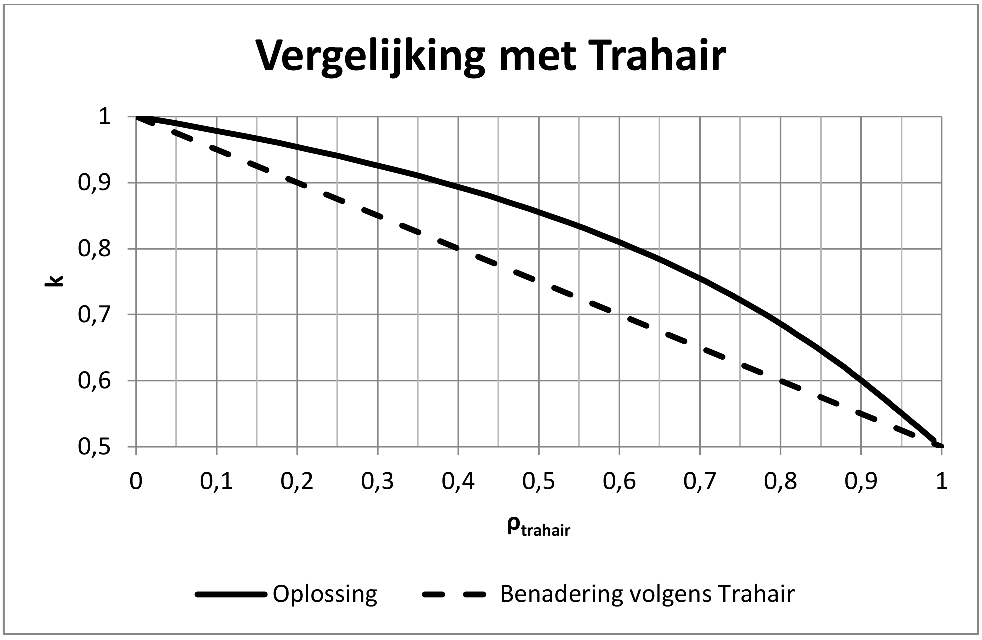
Figuur 4.11 Afhankelijkheid inklemmingsfactor k en dimensieloze rotatiestijfheid ρ

onbekende variabele is in de vergelijking. Alleen de positieve wortel wordt als oplossing meegenomen. Door voor verschillende k-waarden tussen 0.5 en 1 de rotatiestijfheid op te lossen, kan een grafiek worden geplot door al deze bekende punten. Als Δk klein wordt genomen, ontstaat een vloeiende lijn, welke wordt weergegeven in Figuur 4.11.

Volgens Trahair [7] kan de waarde van k het beste worden uitgezet tegen een dimensieloze rotatiestijfheid welke is gedefinieerd volgens:

$$\rho_{trahair} = \frac{\rho}{1+\rho} \tag{4.47}$$

Een plot met deze aangepaste dimensieloze rotatiestijfheid is weergegeven in Figuur 4.12.



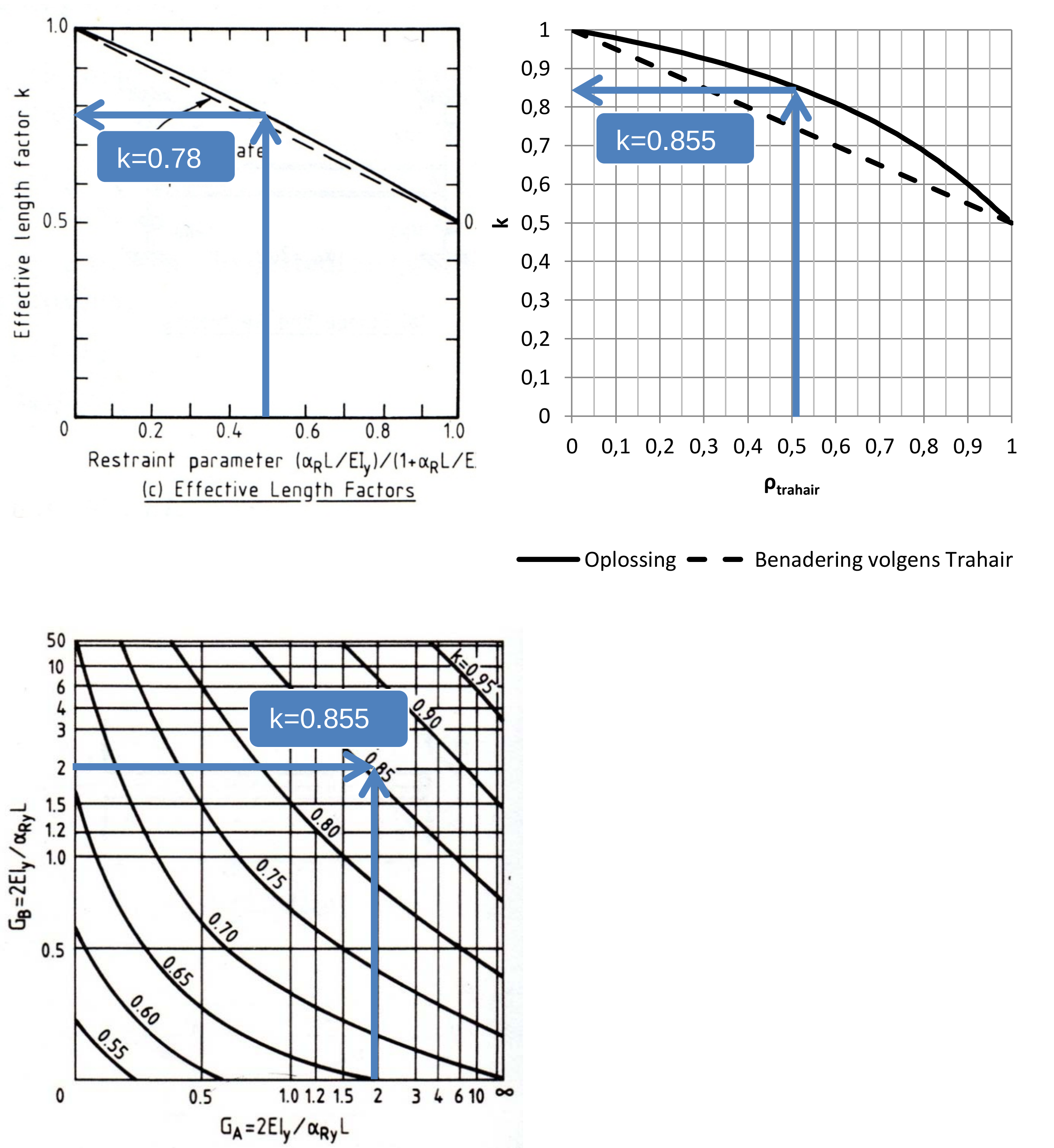
Figuur 4.12 Vergelijking met Trahair

De oplossing wijkt af de exacte oplossing volgens Trahair (Figuur 3.2), maar komt wel overeen met Figuur 3.3 met ongelijke rotatiestijfheden. Deze vergelijking wordt hieronder uitgewerkt in een voorbeeld.

4.5.4 Voorbeeld

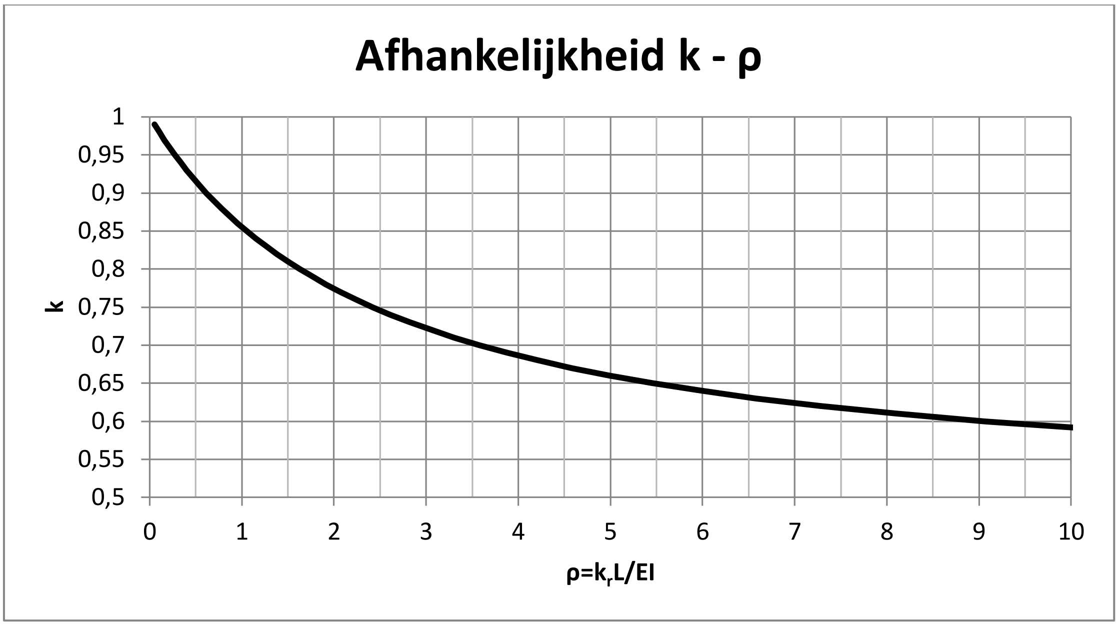
Als voorbeeld wordt de situatie bekeken waarvoor geldt: $k_{r1} = k_{r2} = \frac{EI}{L}$. Zodoende geldt er voor de dimensieloze rotatiestijfheden: $\rho_1 = \rho_2 = \frac{kr_1 L}{EI} = 1$, $G_A = G_B = \frac{2}{\rho_1} = 2$ en $\rho_{trahair} = \frac{\rho}{1+\rho} = 0.5$. Met behulp van deze dimensieloze rotatiestijfheden wordt de inklemmingsfactor afgelezen uit de figuren: Figuur 3.2, Figuur 4.12 en Figuur 3.3. Dit is weergegeven in Figuur 4.13.

Aflezen in Figuur 4.10 of Figuur 3.3 levert k=0.855. Aflezen in Figuur 4.12 levert tevens k=0.855. Aflezen in Figuur 3.2 levert volgens de benadering k=0.75 en volgens de exacte oplossing k=0.78. De oplossing voor gelijke rotatiestijfheden volgens Trahair [7] wijkt dus af van de eerdere oplossing voor ongelijke rotatiestijfheden. Er zal in hoofdstuk 6 worden bekeken wat er in werkelijkheid gebeurt.



Figuur 4.13 Aflezen van de inklemmingsfactor uit de verschillende grafieken

Tot slot zal Figuur 4.11 worden uitvergroot, zodat een goed afleesbare grafiek ontstaat waarmee de inklemmingsfactor k bepaald kan worden, zie Figuur 4.14.



Figuur 4.14 Afhankelijkheid k – ρ

4.6 Samenvattend

In dit hoofdstuk is op analytische wijze het kipmoment voor het basisgeval bepaald, dit is overeenkomstig met de literatuur. Helaas kan op analytische wijze geen oplossing worden gevonden voor het kipmoment voor andere belastingsconfiguraties. In dit hoofdstuk is tevens het kipmoment voor een ligger belast met een constant moment en met rotatieveren in het het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen afgeleid. De oplossing voor ongelijke rotatieveerstijfheden komt goed overeen met Trahair [(7)]. De oplossing voor gelijke rotatiestijfheden wijkt echter af van de oplossing volgens Trahair. Zodoende zijn/blijven de volgende vragen onbeantwoord in dit hoofdstuk en zullen in de volgende hoofdstukken worden behandeld:

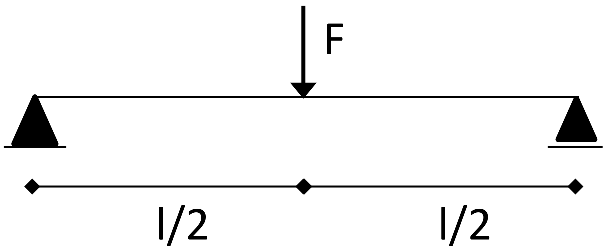
- Op welke manier kunnen de effectieve kiplengtes worden bepaald voor belastingconfiguraties welke niet in de literatuur worden gegeven voor liggers met en zonder rotatieveren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen?
- Kan de afwijking tussen de DIN [(6)] en het Step-dictaat [(4)] voor een ligger belast met een q-last en aan beide zijden ingeklemd worden verklaard?
- Kan de afwijking van de inklemmingsfactor tussen de afgeleide oplossing en Trahair voor gelijke rotatiestijfheden worden verklaard?

5 Afleiding kiplengtes met energiebeschouwing

In dit hoofdstuk zullen de equivalente momentfactoren worden berekend met behulp van energievergelijkingen en daarmee het theoretische kipmoment voor andere belastingsgevallen dan het basisgeval. Om te beginnen zal een methode worden uitgelegd waarmee de factoren bepaald kunnen worden. Vervolgens zal in een aantal voorbeelden de berekening van de equivalente momentfactoren worden uitgevoerd voor verschillende belastingsconfiguraties. Tot slot zal worden bekeken wat de invloed is als de belasting niet langer aangrijpt in het normaalkrachtencentrum.

5.1 Theorie*

In deze paragraaf zal de equivalente momentfactor worden bepaald door gebruik te maken van energievergelijkingen. Deze methode is gebaseerd op het feit dat de totale hoeveelheid energie aanwezig in en op het systeem gelijk moet blijven tijdens het kippen van de ligger. Om dit principe uit te leggen zal worden gekeken naar een ligger belast met een puntlast F op het midden van de overspanning l.



Figuur 5.1 Belastingssituatie voor een ligger belast met een puntlast halverwege de overspanning

5.1.1 Totale energievergelijking*

Doordat de ligger gaat buigen en torderen zal deze vervormen, de opgeslagen energie in de constructie door de vervorming wordt vervormingsenergie genoemd. Doordat de ligger gaat doorbuigen zullen de krachten op de ligger, in verticale zin, verplaatsen. De hoeveelheid potentiële energie van die kracht neemt dus af, de kracht verricht een zekere hoeveelheid arbeid. Deze arbeid moet gelijk staan aan de hoeveelheid vormveranderingsenergie die wordt opgeslagen in de constructie. Zodoende geldt er voor de vormveranderingsenergie en de potentiële energie tijdens het belasten:

$$E_v + E_p = constant \tag{5.1}$$

5.1.2 Vormveranderingsenergie*

Voordat de ligger gaat kippen heeft deze al een zekere doorbuiging w en heeft de kracht al een bepaalde hoeveelheid arbeid verricht. Dit is uiteraard volgens het principe van energievergelijkingen met elkaar in evenwicht.

Na het kippen zal de ligger geroteerd zijn onder een hoek ϕ, welke als klein wordt aangenomen. Zoals in hoofdstuk 6 (Figuur 6.7) blijkt is de rotatie, tot op het moment van kippen, nog als klein te veronderstellen. Zodoende kan voor het moment $M_{\bar{z}}$ wederom worden geschreven:

$$M_{\bar{z}} = \cos\phi \cdot M_z \approx M_z \tag{5.2}$$

De verplaatsing ten gevolge van dit moment zal gelijk zijn aan $\bar{w}$, doordat de hoek ϕ klein is geldt er:

$$\bar{w} = \cos\phi \cdot w_1 \approx w_1 \tag{5.3}$$

w_1 Is de verticale verplaatsing ten gevolge van het moment $M_{\bar{z}}$. Dit is reeds gelijk aan de verplaatsing w die de ligger had voor het moment van kippen. Zodoende hoeft de buiging in het $\bar{x}$-$\bar{z}$-vlak van de ligger niet in de energievergelijkingen te worden meegenomen, de opgeslagen vormveranderingsenergie door buiging in de sterke as staat namelijk al gelijk aan de arbeid verricht door de puntlast F ten gevolge van de zakking w van de ligger.

Voor de vormveranderingsenergie door buiging in het $\bar{x}$-$\bar{y}$-vlak en torsie kan worden geschreven:

$$E_v = \int_0^L \frac{{M_{\bar{y}}}^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \int_0^L \frac{{M_{\bar{x}}}^2}{2 \cdot GI_t} dx \tag{5.4}$$

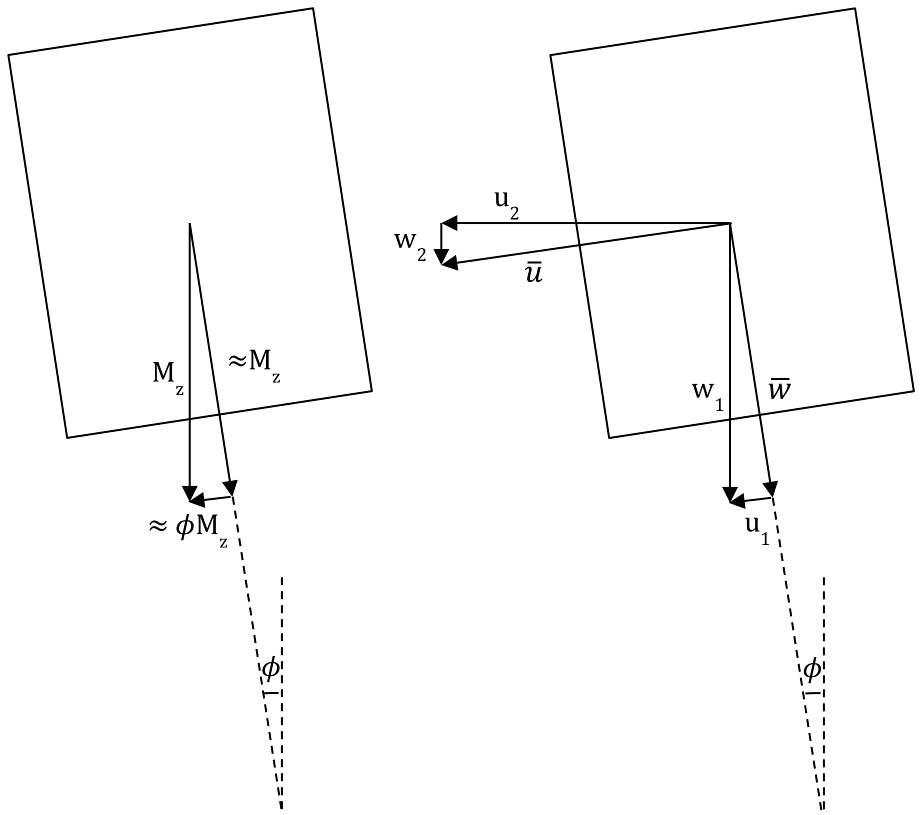
Met invulling van (4.3) en (4.5) kan dit worden herschreven tot:

$$E_v = \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \int_0^L \frac{\left(GI_t \cdot \frac{d\phi}{dx}\right)^2}{2 \cdot GI_t} dx \tag{5.5}$$

Uitwerken levert:

$$E_v = \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{5.6}$$

Deze vergelijking zal straks worden ingevuld in de totale energievergelijking. Er zal eerst worden gekeken naar de extra arbeid verricht door de puntlast F als gevolg van het kippen van de ligger.

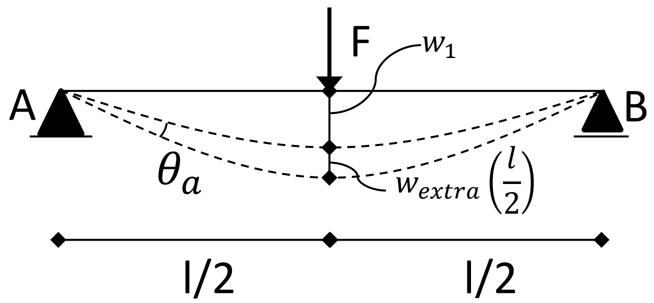


Figuur 5.2 A Relaties tussen de momenten in de geroteerde doorsnede *Figuur 5.2 B Ontbonden verplaatsingen $\bar{u}$ en $\bar{w}$*

5.1.3 Arbeid verricht door de puntlast F*

De hoeveelheid arbeid verricht door een puntlast F is gelijk aan de grootte van de kracht maal de afstand in de richting van die kracht. Zodoende kan voor de arbeid verricht door de puntlast op het midden van de overspanning l worden geschreven:

$$E_p = -F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) \tag{5.7}$$



Figuur 5.3 Schematisatie van de extra zakking (in verticale richting) ten gevolge van het kippen van de ligger

De enige onbekende is de extra verticale verplaatsing w_{extra} in het midden van de overspanning ten gevolge van het kippen van de ligger. In de vorige paragraaf is al aangetoond dat deze extra verplaatsing alleen wordt veroorzaakt door buiging in het $\bar{x}$-$\bar{y}$-vlak, de verplaatsing w_1 is al aanwezig voor het kippen en wordt veroorzaakt door buiging in het $\bar{x}$-$\bar{z}$-vlak. In het $\bar{x}$-$\bar{y}$-vlak ontstaat een verplaatsing $\bar{u}$, deze kan berekend worden door gebruik te maken van de momentenvlakstellingen. Door de buiging van een klein mootje dx van de ligger ontstaat er op een afstand x van dat mootje een verplaatsing $\bar{u}$:

$$\frac{d^2u}{dx^2}dx \cdot x \tag{5.8}$$

Die verplaatsing kan worden ontbonden in een horizontale en een verticale component: u_2 en w_2. Aangezien de verticale verplaatsing van belang is voor het bepalen van de hoeveelheid arbeid door de puntlast F, wordt <u>alleen naar de verticale verplaatsing w_2</u> gekeken, zie Figuur 5.2B. Deze kan worden uitgedrukt in $\bar{u}$ volgens:

$$w_2 = \sin\phi \cdot \bar{u} \approx \phi \cdot \bar{u} \tag{5.9}$$

Invullen in (5.8) levert een verplaatsing w_2 op een afstand x van een mootje dx van de ligger:

$$\phi\frac{d^2u}{dx^2}dx \cdot x \tag{5.10}$$

Om de zakking halverwege met behulp van uitdrukking (5.10) te bepalen kan dezelfde aanpak worden gebruikt als bij de momentenvlakstellingen. Eerst wordt de rotatie θ_a om het oplegpunt A bepaald door de zakking ter plaatse van steunpunt B gelijk te stellen aan 0.

$$w_{extra} = \theta_a \cdot l + \int_0^l \phi\frac{d^2u}{dx^2}(l - x)dx = 0 \tag{5.11}$$

Door het invullen van de bekende uitdrukking (4.13) voor $\frac{d^2u}{dx^2}$ en het herschrijven van (5.11) kan de rotatie θ_a worden bepaald volgens:

$$\theta_a = \frac{\int_0^l \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}}(l-x)dx}{l} \tag{5.12}$$

Nu de rotatie θ_a bekend is kan de extra zakking halverwege de overspanning bepaald worden uit:

$$w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) = \theta_a \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}}\left(\frac{l}{2} - x\right)dx \tag{5.13}$$

De arbeid verricht door de puntlast F kan vervolgens bepaald worden met (5.7).

5.1.4 Vinden van de equivalente momentfactor m*

Nu de uitdrukkingen voor de vormveranderingsenergie (5.6) en de verrichtte arbeid door de puntlast F (5.7) bekend zijn kunnen deze worden ingevuld in de totale energievergelijking (5.1). Dit levert:

$$\int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx - F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \tag{5.14}$$

Deze wordt herschreven tot:

$$F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) - \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx = \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{5.15}$$

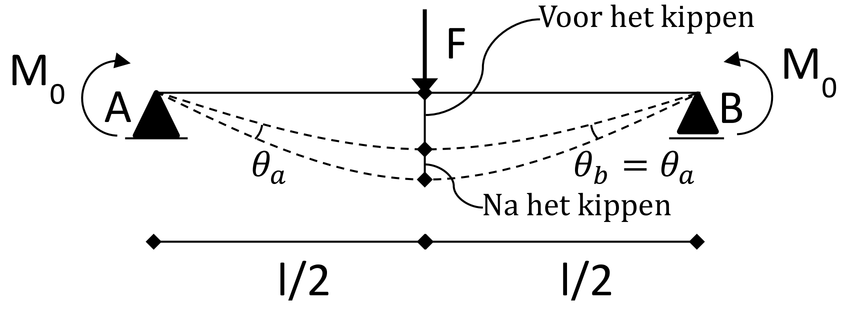
Dit is voor elk belastingsgeval op te lossen, uitgaande van een benadering voor de rotatie $\phi(x)$ over de lengte van de ligger. De rotatie kan worden beschreven met een sinus-reeks waarvan in dit onderzoek enkel de eerst term zal worden meegenomen:

$$\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) \tag{5.16}$$

*5.1.4.1 Versimpeling van de energievergelijking voor het basisgeval**

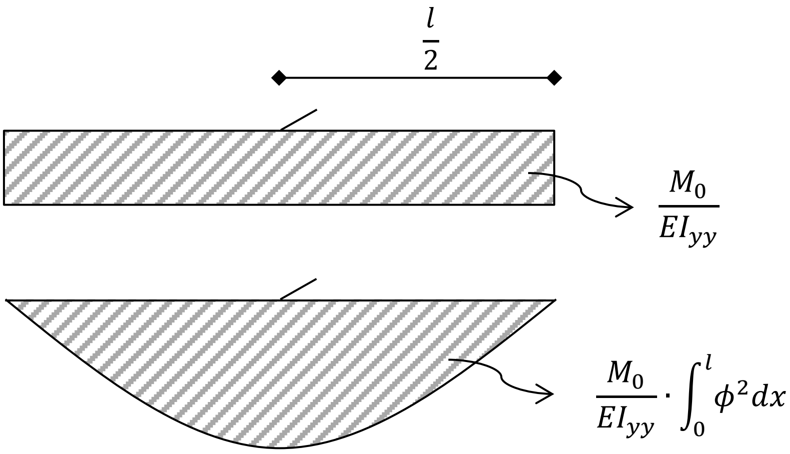
Om het belastingsgeval direct te vergelijken met een constant moment M_0 over de ligger wordt gekeken naar de arbeid die verricht wordt door de momenten M_0 op de uiteinden van de ligger. Deze momenten leveren een hoeveelheid arbeid gelijk aan:

$$2 \cdot \theta_a \cdot M_0 \tag{5.17}$$



Figuur 5.4 Schematisatie van de extra arbeid ten gevolge van het kippen verricht door de eindmomenten M_o

De arbeid is gelijk aan het product van moment met bijbehorende extra hoekverdraaiing (in dezelfde richting) ten gevolge van het kippen. Op basis van symmetrie is de extra rotatie θ_b gelijk aan θ_a. Voor het bepalen van θ_a kan wederom gebruik worden gemaakt van de momentenvlakstellingen. In dit geval wordt eerst het oppervlak van het $\phi^2 \frac{M_0}{EI_{yy}}$-vlak bepaald, waarbij de laatste term constant is en dus buiten de integraal is gehaald. Als uitgegaan wordt van een rotatie ϕ in de vorm van $\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$, dan mag het gehele oppervlak van het $\phi^2 \frac{M_0}{EI_{yy}}$-vlak worden vermenigvuldigd met de horizontale afstand tot het punt waarop de zakking (in dit geval) gelijk aan 0 moet zijn.



Figuur 5.5 Visuele interpretatie van het uitrekenen van de hoekverdraaiing θ_a

Het $\phi^2 \frac{M_0}{EI_{yy}}$-vlak is namelijk symmetrisch ten opzichte van de middendoorsnede van de ligger waardoor de totale hoekverdraaiing in de middendoorsnede gedacht kan worden. Dit levert:

$$\theta_a = \frac{\frac{M_0}{EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \cdot \frac{1}{2} l}{l} = \frac{M_0}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.18}$$

Invullen van $M_z = M_0$ in de totale energievergelijking en gebruik van (5.17) geeft:

$$\int_0^L \frac{(\phi \cdot M_0)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = 2 \cdot \frac{M_0}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \cdot M_0 \tag{5.19}$$

Het linkerlid van de vergelijking is gelijk aan de vormveranderingsenergie door buiging in de zwakke as en torsie, het rechterlid is de arbeid verricht door de momenten op beide uiteinden van de ligger. Herschrijven levert:

$$\frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = \frac{{M_0}^2}{EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx - \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.20}$$

Het rechterlid verder uitwerken geeft:

$$\frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx = \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx \tag{5.21}$$

Doordat in zowel vergelijking (5.15) als (5.21) aan de rechterkant de term voor de vormveranderingsenergie voor torsie overblijft, kunnen deze aan elkaar gelijk worden gesteld:

$$F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) - \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx = \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \qquad (5.22)$$

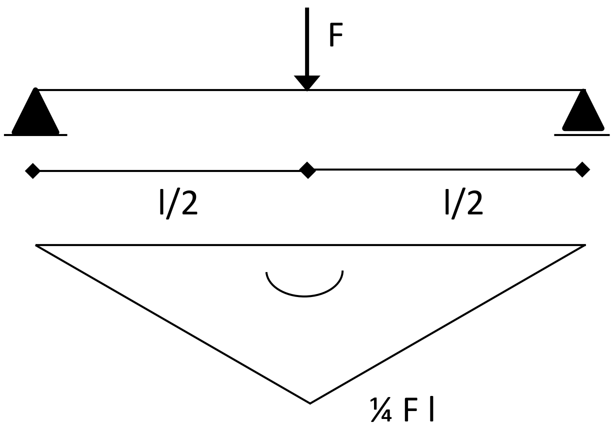
Oplossen van deze vergelijking door voor de rotatie ϕ aan te nemen dat bij benadering geldt $\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$ levert het equivalente constante moment over de ligger M_0. Nu M_0 bekend is wordt de momentfactor gevonden door:

$$m = \frac{M_0}{M_{max}} \qquad (5.23)$$

Waarin M_{max} het maximale moment is in de ligger.

5.2 Puntlast op ½ L*

In de komende paragrafen zullen voor een aantal standaard belastingsgevallen de equivalente momentfactoren worden berekend op basis van de methode die in de vorige paragraaf is aangereikt. De uitkomsten zullen worden vergeleken met de literatuur. Als eerste zal worden gekeken naar een puntlast F op het midden van een overspanning l. Eerst zal de extra zakking in het midden van de ligger worden bepaald ten gevolge van alleen het kippen. Vervolgens zal de vervormingsenergie worden bepaald, waarna de equivalente momentfactor wordt uitgerekend.



Figuur 5.6 Belastingssituatie A

Volgens vergelijking (5.12) is de hoekverdraaiing ter plaatse van het linker steunpunt gelijk aan:

$$\theta_a = \frac{\int_0^l \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}} (l - x) dx}{l} \qquad (5.24)$$

Aangezien de momentenlijn wiskundig gezien niet met één functie beschreven kan worden delen we deze op in twee bijdragen. De vergelijking voor θ_a wordt hiermee:

$$\theta_a = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{M_{z1}}{EI_{yy}} (l-x)dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{M_{z2}}{EI_{yy}} (\frac{l}{2} - x)dx}{l} \tag{5.25}$$

Invullen van de functies $M_{z1}(x) = \frac{F}{2}x$ en $M_{z2}(x) = \frac{F}{4}l - \frac{F}{2}x$ voor de momentenlijn geeft:

$$\theta_a = \frac{\int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{\frac{F}{2}x}{EI_{yy}} (l-x)dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{\frac{F}{4}l - \frac{F}{2}x}{EI_{yy}} (\frac{l}{2} - x)dx}{l} \tag{5.26}$$

Vervolgens kan de extra zakking ten gevolge van het kippen worden uitgerekend met:

$$w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) = \theta_a \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}} \left(\frac{l}{2} - x\right) dx \tag{5.27}$$

De vervormingsenergie door buiging kan tevens worden beschreven door het opdelen van de integraal in twee delen en kan worden geschreven als:

$$E_v = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi \cdot \frac{F}{2}x\right)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi \cdot \left(\frac{F}{4}l - \frac{F}{2}x\right)\right)^2}{2 \cdot EI_{yy}} \tag{5.28}$$

Volgens (5.22) kan nu gesteld worden dat geldt:

$$F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) - \mathrm{E}_v = \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.29}$$

Wederom wordt voor de rotatie ϕ aangenomen dat geldt: $\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$. Deze vergelijking is eenvoudig op te lossen met een programma als maple. De uitkomst luidt:

$$M_0 = 0.1829992319 \cdot Fl \tag{5.30}$$

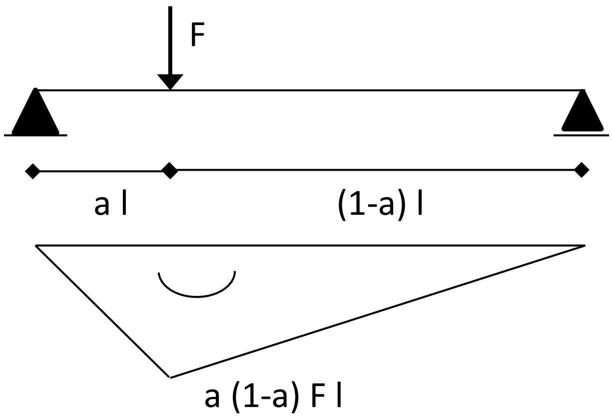
De momentfactor m kan nu worden uitgerekend. Voor het maximale moment van een puntlast op ½ l geldt: $M_{max} = \frac{1}{4} \cdot Fl$. Zodoende geldt er voor m:

$$m = \frac{0.1829992319 \cdot Fl}{\frac{1}{4} \cdot Fl} = 0.7319969276 \tag{5.31}$$

Deze waarde komt goed overeen met de equivalente momentfactor voor belastingsgeval 4 uit bijlage 1. Het complete maple-script is te vinden in bijlage 4C.

5.3 Puntlast op afstand aL*

Op vergelijkbare wijze kan de momentfactor worden bepaald voor een puntlast op een afstand aL vanaf het linker steunpunt. De belastingssituatie en momentenlijn zijn weergegeven in Figuur 5.7, het maximale moment op de ligger bedraagt $a(1-a)Fl$.



Figuur 5.7 Belastingssituatie B

Op vergelijkbare wijze als voor een puntlast op de helft van de overspanning zal de momentfactor worden bepaald, het grote verschil is dat in dit geval alles afhankelijk is van variabele a. Voor de rotatie θ_a valt af te leiden dat geldt:

$$\theta_a = \frac{\int_0^{al} \phi^2 \frac{M_{z1}}{EI_{yy}}(l-x)dx + \int_0^{(1-a)l} \phi^2 \frac{M_{z2}}{EI_{yy}}(l-al-x)dx}{l} \tag{5.32}$$

Voor de momentenlijn kunnen de volgende wiskundige functies worden gebruikt:

Linkerdeel: $M_{z1}(x) = (1-a)Fx \qquad 0 \leq x \leq al$ (5.33)

Rechterdeel: $M_{z2}(x) = (1-a)aFl - aFx \qquad 0 \leq x \leq (1-a)l$ (5.34)

Invullen wordt aan de lezer overgelaten. Vervolgens kan de extra zakking ten gevolge van het kippen worden uitgerekend met:

$$w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) = \theta_a \cdot al - \int_0^{al} \phi^2 \frac{M_{z1}}{EI_{yy}}(al-x)dx \tag{5.35}$$

De vervormingsenergie door buiging kan tevens worden beschreven door het opdelen van de integraal in twee delen en kan worden geschreven als:

$$\mathrm{E} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi \cdot M_{z1})^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(\phi \cdot M_{z2})^2}{2 \cdot EI_{yy}} \tag{5.36}$$

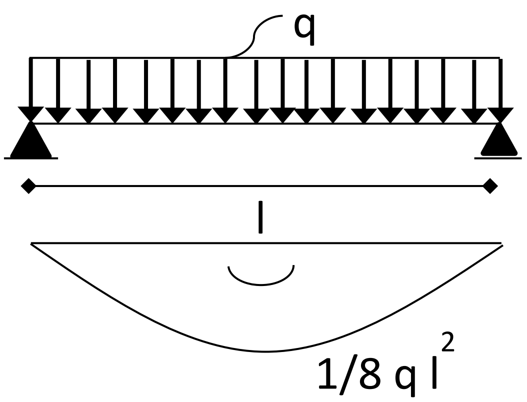
Volgens (5.22) kan nu gesteld worden dat geldt:

$$F \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) - \mathrm{E} = \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.37}$$

Wederom wordt de onbekende M_0 opgelost door aan te nemen dat voor de rotatie geldt: $\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$. Het equivalente moment is met maple dan eenvoudig op te lossen. Voor een puntlast op een kwart van de overspanning (voor a=0.25) levert dat een momentfactor m=0.67, deze komt goed overeen met de equivalente momentfactor voor belastingsgeval 7 uit bijlage 1. Het complete script is gegeven in bijlage 4D.

5.4 Verdeelde belasting q*

Voor een verdeelde belasting kan dezelfde aanpak worden gevolgd als in de vorige voorbeelden. Het enige verschil is dat de integralen nu niet te hoeven worden opgesplitst in twee delen, aangezien de momentenlijn met één wiskundige functie te beschrijven is.



Figuur 5.8 Belastingssituatie C

De momentenlijn is te beschrijven met:

$$M_z(x) = \frac{1}{2} qx(l - x) \tag{5.38}$$

Invullen van de functie voor het moment in vergelijkingen (5.12), (5.13) en (5.22) en oplossen met maple geeft m=0.88. Dit is exact gelijk aan de equivalente momentfactor die gevonden wordt in bijlage 1. Het maple-script is bijgevoegd in bijlage 4E.

5.5 Twee puntlasten op aL en bL van de overspanning*

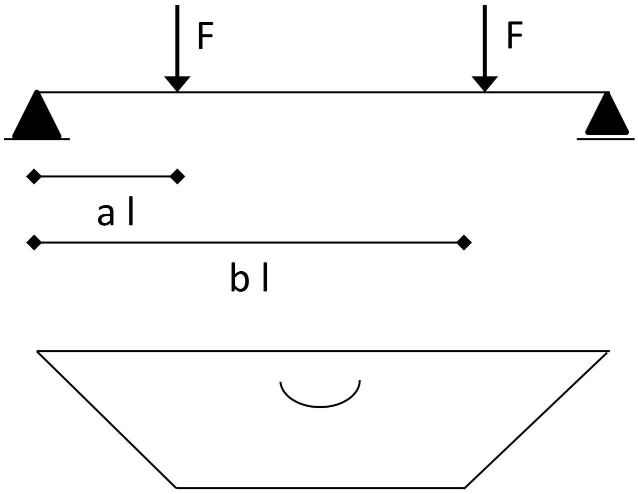
Voor de belastingssituatie in Figuur 5.9 zal kort worden besproken hoe de momentfactor m kan worden bepaald. In dit geval wordt de complete integraal opgedeeld in drie delen welke te beschrijven zijn met de volgende momentfuncties:

$$M_{z1}(x) = (2 - a - b)Fx \qquad 0 \le x \le a \cdot l \tag{5.39}$$

$$M_{z2}(x) = (2 - a - b)Fal + (2 - a - b)Fx - Fx \qquad 0 \le x \le (b - a) \cdot l \tag{5.40}$$

$$M_{z3}(x) = (2 - a - b)Fbl - F(b - a)l + (2 - a - b)Fx - 2Fx \quad 0 \le x \le (1 - b) \cdot l \tag{5.41}$$

Deze zijn eenvoudig af te leiden door de linker oplegreactie uit te rekenen, deze is gelijk aan $(1 - a)F + (1 - b)F = (2 - a - b)F$.



Figuur 5.9 Belastingssituatie D

De momentfactor wordt in dit geval bepaald door de arbeid die deze twee puntlasten leveren mee te nemen in de energiebeschouwing. Zodoende kan de momentfactor uitgerekend worden met:

$$F \cdot w_a + F \cdot w_b - \mathrm{E} = \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.42}$$

Waarin w_a en w_b de extra zakkingen zijn van de puntlasten op respectievelijk afstand al en bl ten opzichte van het linker steunpunt. E is hierin de totale vervormingsenergie door buiging in de zwakke as, welke opgedeeld is in drie delen doordat de momentenlijn met drie functies beschreven wordt. De momentfactor volgt uit:

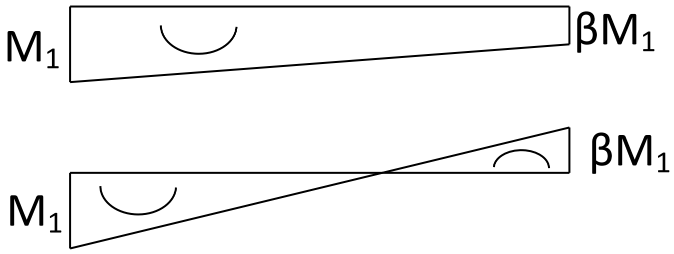
$$m = \frac{M_0}{max\big((2-a-b)a, (2-a-b)b-(b-a)\big) \cdot Fl} \tag{5.43}$$

aangezien het maximale moment in de ligger optreedt op afstand al of bl vanaf het linker steunpunt. Het complete maple script is gegeven in bijlage 4F. Voor een puntlast op een kwart en op driekwart van de overspanning (a=0.25, b=0.75) levert dit een momentfactor m=0.96, wat in overeenstemming is met bijlage 1. Voor een enkele puntlast op afstand al (dus a=0.25, b=1) levert dit de eerder gevonden momentfactor m=0.67. Let op: in het maple script is aangenomen dat $0 \leq a \leq b \leq 1$.

5.6 Benaderingsformule voor lineaire momenten*

Nu blijkt dat vrijwel alle equivalente momentenfactoren af te leiden zijn met behulp van een energiebeschouwing zal worden gekeken of benaderingsformule (3.3) ook kan worden onderbouwd met deze methode.

We gaan uit van een lineair verdeelde momentenlijn met aan de linkerzijde een moment M en aan de rechterzijde een moment βM, waarbij β varieert tussen -1 en 1. Het moment aan de linkerzijde is dus altijd groter of gelijk aan het moment aan de rechterzijde.



Figuur 5.10 Lineair verdeelde momentenlijn

Er is reeds bekend dat een moment een hoeveelheid arbeid levert gelijk aan het moment maal de hoekverdraaiing. Zodoende zal de hoekverdraaiing op beide uiteinden van de ligger eerst bepaald moeten worden. Hiervoor is uit (5.12) bekend dat geldt:

$$\theta_a = \frac{\int_0^l \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}} (l - x) dx}{l} \tag{5.44}$$

Enkel de functie voor het moment M_z moet nog worden bepaald in deze vergelijking. Deze kan worden afgeleid uit Figuur 5.10:

$$M_z = M_1 - \frac{(1 - \beta)}{l} M_1 \cdot x \tag{5.45}$$

Voor de hoekverdraaiing aan de rechterzijde van de ligger kan op vergelijkbare wijze als voor θ_a worden afgeleid dat geldt:

$$\theta_b = \frac{\int_0^l \phi^2 \frac{M_z}{EI_{yy}} \mathrm{x}\, dx}{l} \tag{5.46}$$

De afstand tot het rechter steunpunt $(l - x)$ is nu vervangen door de afstand tot het linker steunpunt x. Nu de rotaties op beide uiteinden bekend zijn kan eenvoudig de arbeid die beide momenten leveren worden bepaald:

$$M_1 \cdot \theta_a + \beta M_1 \cdot \theta_b \tag{5.47}$$

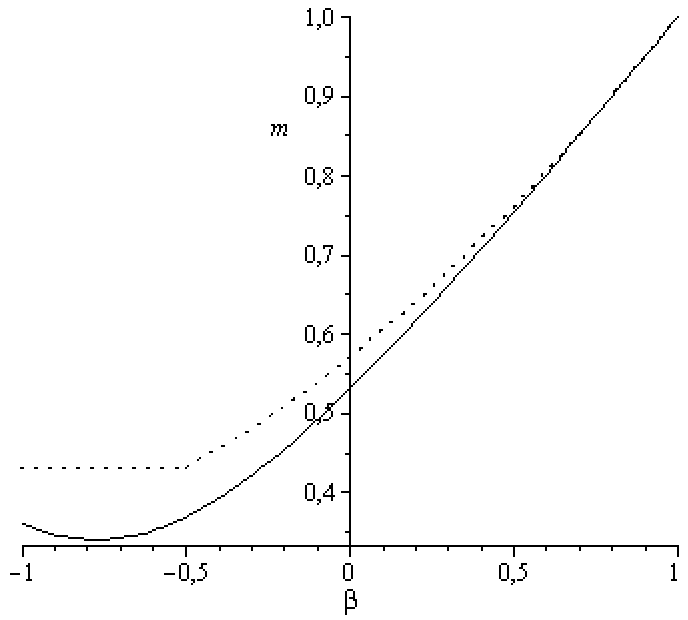
Vervolgens kan op vergelijkbare wijze als voor vergelijking (5.22) worden gevonden dat moet gelden:

$$M_1 \cdot \theta_a + \beta M_0 \cdot \theta_b - \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx = \frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \tag{5.48}$$

Deze vergelijking kan op eenvoudige wijze met maple worden opgelost, zie bijlage 4G. De functie voor de equivalente momentfactor m afhankelijk van β luidt:

$$m = 3.6039045 \cdot 10^{-1} \sqrt{2.18002156 + 3.347637582 \cdot \beta + 2.171680029 \cdot \beta^2} \tag{5.49}$$

Een plot van deze functie, almede de benaderingsformule (3.3), zijn te zien in Figuur 5.11.

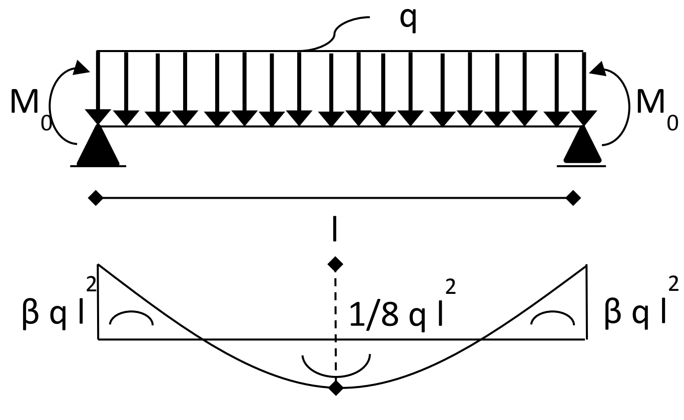


Figuur 5.11 Equivalente momentfactor m afhankelijk van β

Dit levert vrijwel hetzelfde resultaat op als de grafiek uit Kirby and Nethercot [(5)], getoond in Figuur 3.1. De exacte oplossing is dus met behulp van een energiebeschouwing af te leiden en laat eveneens zien dat de benaderingsformule een veilige benadering is voor de oplossing, aangezien iets te hoge m-factoren juist zorgen voor een iets te klein kipmoment, wat uiteraard aan de veilige kant is.

5.7 Invloed van negatieve eindmomenten op een ligger met een q-last*

In deze paragraaf zal gekeken worden wat de invloed is van het toevoegen van negatieve eindmomenten aan belastingsgeval C. De nieuwe belastingssituatie met bijbehorende momentenlijn is weergegeven in Figuur 5.12. Er wordt aangenomen dat er op het uiteinde een negatief moment werkt ter grootte van $\beta \cdot q \cdot l^2$.



Figuur 5.12 Belastingssituatie E

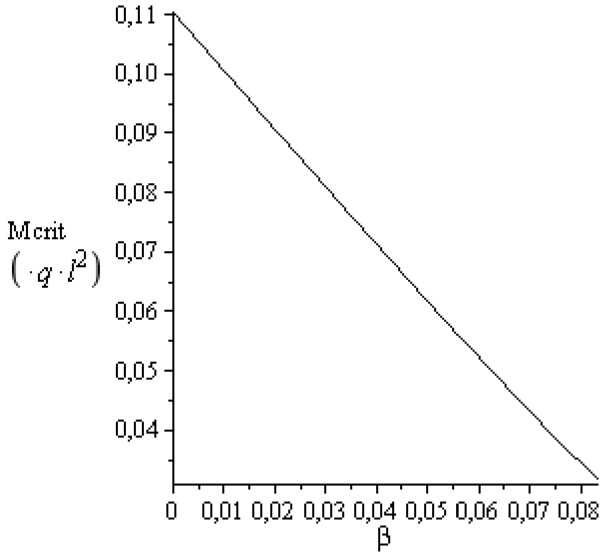
De enige verandering aan het maple script is het toevoegen van een negatief moment aan de functie voor de momentenlijn. Het moment wordt nu beschreven door:

$$M(x) = \frac{1}{2} q x (l - x) - \beta \cdot q l^2 \tag{5.50}$$

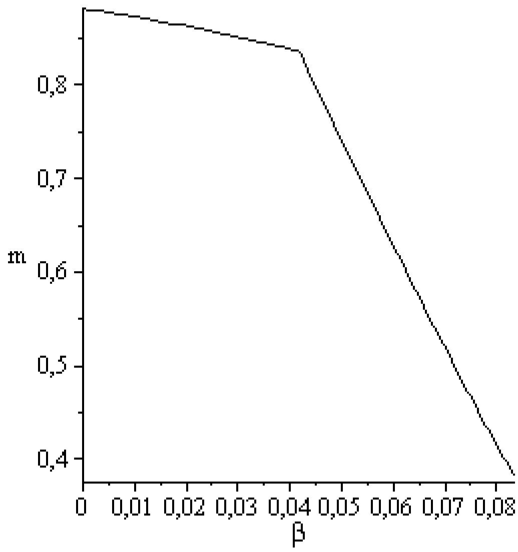
Evenals bij een constant moment over de ligger zal het moment arbeid verrichten, dit is gelijk aan:

$$-2 \cdot \beta \cdot ql^2 \cdot \theta_a \tag{5.51}$$

Dit zal worden toegevoegd in de energievergelijking. Vervolgens kan het uniforme kipmoment worden bepaald als functie van de kopmomentfactor β, het resultaat is te zien in Figuur 5.13a.



Figuur 5.13a Het uniforme kipmoment als functie van kopmomentfactor β



Figuur 5.13b Equivalente momentfactor als functie van kopmomentfactor β met maximaal moment $M_{max} = max\left(\beta, \frac{1}{8} - \beta\right)$

De momentfactor wordt vervolgens bepaald door het kipmoment te delen door het maximale moment wat optreedt in de ligger. Het maximale moment in de ligger is afhankelijk van β en kan worden beschreven met:

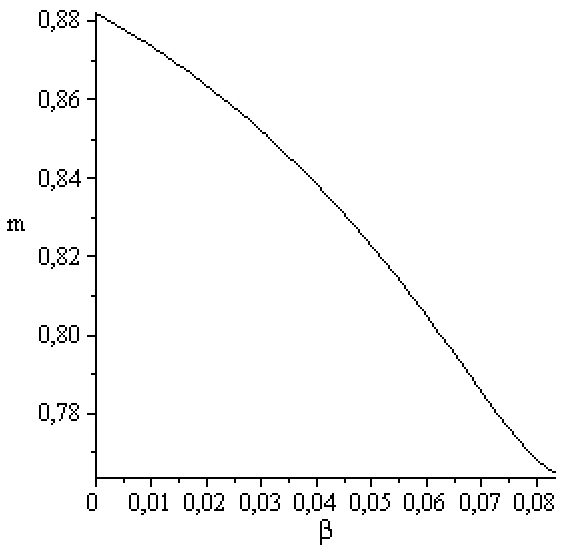
$$M_{max} = max\left(\beta, \frac{1}{8} - \beta\right) \tag{5.52}$$

Vervolgens kan de equivalente momentfactor worden berekend doordat geldt: $m = \frac{M_{crit}}{M_{max}}$, het resultaat is te zien in Figuur 5.13b. Voor β=0 komt de equivalente momentfactor overeen met de eerder gevonden waarde voor een verdeelde belasting q op de ligger. De knik in de grafiek komt doordat de equivalente momentfactor afhankelijk is van vergelijking (5.52). Tevens is te zien dat de equivalente momentfactor voor $\beta = \frac{1}{12}$ gelijk is aan 0.39, wat overeenkomt met de waarde van belastingsgeval 9 uit bijlage 1. Voor een inklemming geldt immers dat het inklemmingsmoment gelijk is aan $\frac{1}{12}ql^2$. Gek genoeg komt dit niet overeen met belastingsgeval 4.2 uit bijlage 2. In hoofdstuk 3 werd al gevonden dat de equivalente momentfactor volgens bijlage 2 gelijk is aan $m = \frac{1}{1.30} = 0.769$.

Er valt echter in te zien dat als het moment in het midden van de ligger gebruikt wordt als maximaal moment de equivalente momentfactor te berekenen is met:

$$m = \frac{M_{crit}}{\left(\frac{1}{8} - \beta\right) \cdot ql^2} \tag{5.53}$$

Wordt nu de equivalente momentfactor volgens (5.53) geplot dan wordt de grafiek in Figuur 5.14 gevonden. Te zien valt dat voor $\beta = \frac{1}{12}$ een equivalente momentfactor wordt gevonden gelijk aan 0.77, wat overeenkomt met bijlage 2.

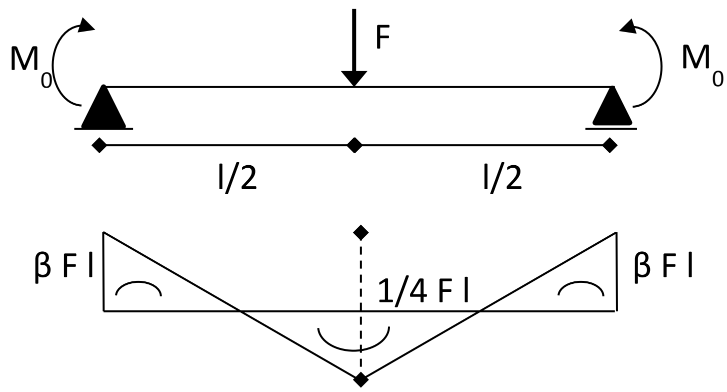


Figuur 5.14 Momentfactor als functie van kopmomentfactor β *met maximaal moment* $M_{max} = \frac{1}{8} - \beta$

Het is kennelijk zo dat in de DIN [(6)] het moment in de middendoorsnede gebruikt moet worden voor de toetsing op kipinstabiliteit, echter staat dit niet zo aangegeven in de norm. Het verschil in momentenfactoren tussen de DIN en het Step-dictaat [(4)] is hiermee verklaard. Het complete maple script is weergegeven in bijlage 4H.

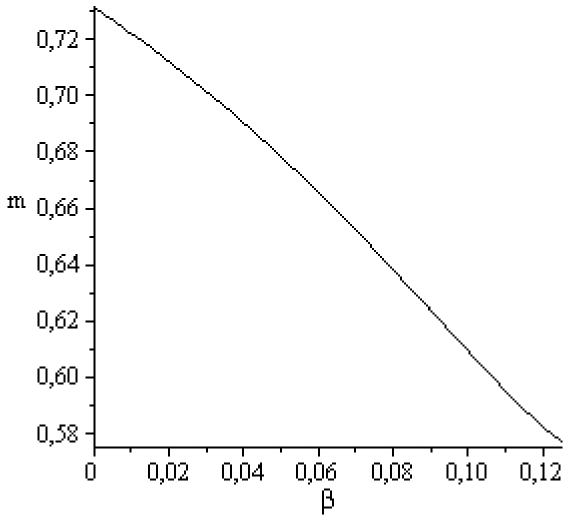
5.8 Invloed van negatieve eindmomenten op een ligger met een puntlast F*

In deze paragraaf zal worden gekeken naar de invloed van negatieve eindmomenten, aangrijpend op een ligger belast met een puntlast F, op de equivalente momentfactor. De belastingssituatie en de bijbehorende momentenlijn zijn weergegeven in Figuur 5.15.



Figuur 5.15 Belastingssituatie F

Ook hier wordt het negatieve eindmoment toegevoegd aan de functies die de momentenlijn beschrijven en wordt de arbeid verricht door de eindmomenten meegenomen in de energievergelijking. Het resultaat is een equivalente momentfactor zoals weergegeven in Figuur 5.16.

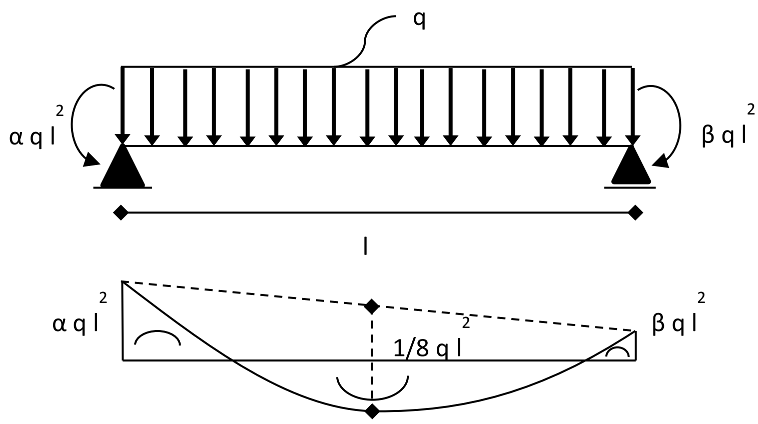


Figuur 5.16 Momentfactor als functie van kopmomentfactor β

De equivalente momentfactor is voor β=0 gelijk aan 0.73, wat overeenkomt met de eerste gevonden waarde van belastingsgeval A. Voor $\beta = \frac{1}{8}$ blijkt de equivalente momentfactor gelijk aan 0.58, wat overeenkomt met de waarde voor belastingsgeval 8 in bijlage 1. Voor een inklemming met een puntlast in het midden is het inklemmingsmoment immers gelijk aan $\frac{1}{8}Fl$. Het complete maple script is weergegeven in bijlage 4I.

5.9 Q-last met ongelijke negatieve eindmomenten

Voor een q-last met gelijke negatieve eindmomenten is de equivalente momentfactor reeds bepaald. Nu zal de equivalente momentfactor worden bepaald voor een ligger belast met een q-last met ongelijke negatieve eindmomenten $\alpha q l^2$ en $\beta q l^2$ zoals geschetst in Figuur 5.17.



Figuur 5.17 Belastingsconfiguratie met ongelijke negatieve eindmomenten

5.9.1 Maximale moment

Het maximale moment in de ligger ten gevolge van de q-last en de negatieve eindmomenten $\alpha q l^2$ en $\beta q l^2$ kan zich op de rand van de ligger bevinden of in het veld. De randmomenten zijn bekend, het maximale veldmoment kan eenvoudig worden afgeleid uit de momentenlijn:

$$M(x) = \frac{1}{2} q x (l - x) - \alpha q l^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \beta q l^2 \left(\frac{x}{l}\right) \tag{5.54}$$

Door de afgeleide van de momentenlijn gelijk te stellen aan 0 kan de x-coördinaat berekend worden waar het moment maximaal is:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} q (l - 2x) + \alpha q l - \beta q l = 0 \tag{5.55}$$

Dat levert:

$$x = -\frac{1}{2} l (2\beta - 2\alpha - 1) = l \left(\frac{1}{2} + \alpha - \beta\right) \tag{5.56}$$

Hierbij dient opgemerkt te worden dat het veldmoment binnen het domein $0 < x < l$ moet optreden, anders is de uitkomst slechts een wiskundige oplossing. Deze voorwaarde kan worden herschreven tot:

$$0 < \frac{1}{2} + \alpha - \beta < 1 \tag{5.57}$$

Dit valt te vereenvoudigen tot:

$$|\alpha - \beta| < \frac{1}{2} \tag{5.58}$$

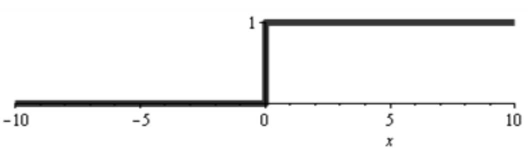
Na invullen van de uitdrukking voor x voor het maximale veldmoment, levert dit het maximale veldmoment:

$$M_{veld,max} = \left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right] q l^2 \tag{5.59}$$

Vervolgens dient het maximale moment in de ligger te worden bepaald in absolute zin, daarbij maakt het niet uit of het een positief of negatief moment betreft. Met onderstaande functie kan het maximale moment worden bepaald:

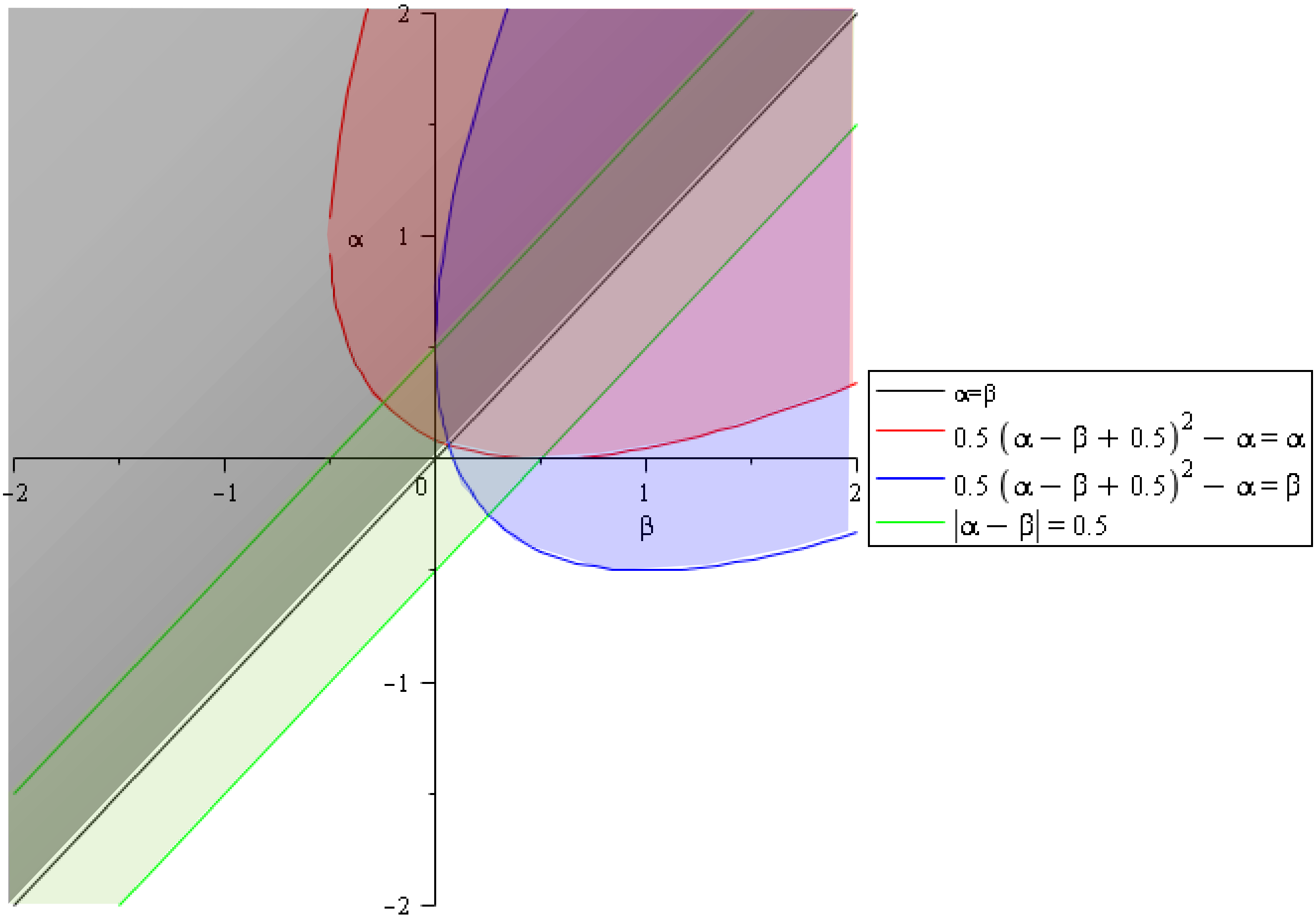
$$M_{max} = max\left(Heaviside\left(\frac{1}{2} - |\alpha - \beta|\right)\left(\frac{1}{2}\left(\alpha - \beta + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right), |\alpha|, |\beta|\right) \tag{5.60}$$

De functie Heaviside(x) is nul voor x<0 en 1 voor x>0, dit is geïllustreerd in Figuur 5.18.

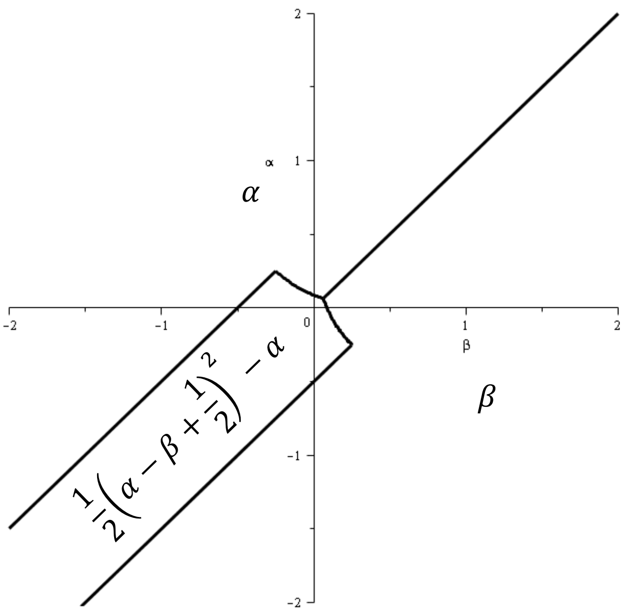


Figuur 5.18 Een plot van de functie Heaviside(x)

Het maximale moment kan tevens grafisch worden bepaald. Zodoende zullen de grenzen worden bepaald waarop twee of meer eind en/of veldmomenten aan elkaar gelijk zijn. De eerste grens is als de twee eindmomenten gelijk zijn ($\alpha = \beta$), in het zwart weergegeven in Figuur 5.19. De tweede grens is als het veldmoment gelijk is aan het eindmoment $\alpha \cdot ql^2$, in het rood weergegeven. De derde grens is als het eindmoment $\beta \cdot ql^2$ gelijk is aan het maximale veldmoment, in het blauw weergegeven. Tot slot is er een voorwaarde van toepassing op het maximale veldmoment. De grenzen van deze voorwaarden zijn $|\alpha - \beta| = \frac{1}{2}$, in het groen weergegeven in de figuur. Aangezien in het groene gebied het veldmoment maximaal kan zijn en daarbuiten één van de eindmomenten kan eenvoudig worden ingezien dat buiten het groene gebied het eindmoment $\alpha \cdot ql^2$ maximaal is in het grijze gebied en het eindmoment $\beta \cdot ql^2$ maximaal in het witte gebied. Binnen de groene lijnen zijn de grenzen tussen het veldmoment en de eindmomenten in het rood en blauw weergegeven. En de grens tussen de eindmomenten in het zwart. In het rode gebied wat binnen het grijze gebied valt is het eindmoment $\alpha \cdot ql^2$ maximaal. In het blauwe gebied wat in het witte gebied valt is het eindmoment $\beta \cdot ql^2$ maximaal. In het groene gebied wat overblijft is het veldmoment maximaal. Op die manier is voor elk gebied bekend welk moment maximaal is. Het resultaat is weergegeven in Figuur 5.20. Het maximale moment kan daaruit grafisch worden bepaald door te bekijken in welk gebied de belastingsconfiguratie zich bevind. Voor $\alpha = 0.5$ en $\beta = 1$ is het maximale veldmoment bijvoorbeeld gelijk aan β (vermenigvuldigd met ql^2).



Figuur 5.19 Grenzen waarop twee of meerdere eindmomenten aan elkaar gelijk zijn



Figuur 5.20 Grafisch aflezen van het maximale moment (uitgedrukt in ql^2)

Als de krachtsverdeling berekend is met een computerprogramma kan het maximale moment meestal eenvoudig worden afgelezen uit de momentenlijn. De analytische oplossing uit deze paragraaf kan dan ter controle worden gebruikt.

5.9.2 Bepalen van de equivalente momentfactor

In de energiebeschouwing leveren beide negatieve eindmomenten nu arbeid gelijk aan $-\alpha \cdot ql^2 \cdot \theta_a - \beta \cdot ql^2 \cdot \theta_b$. Vervolgens kan op analoge wijze als in voorgaande paragrafen de energiebeschouwing worden opgesteld, dit levert de volgende oplossing voor de equivalente momentfactor:

$$m = \frac{1}{60}\frac{\sqrt{30}\sqrt{45-30\alpha\pi^2-30\beta\pi^2+120\alpha\beta\pi^2-60\alpha^2\pi^2-60\beta^2\pi^2-10\alpha\pi^4-10\beta\pi^4+40\alpha\beta\pi^4+40\alpha^2\pi^4+40\beta^2\pi^4+\pi^4}}{\pi^2 \cdot M_{max}} \quad (5.61)$$

Uitwerken van deze oplossing levert:

$$m = \frac{R}{M_{\max}}$$

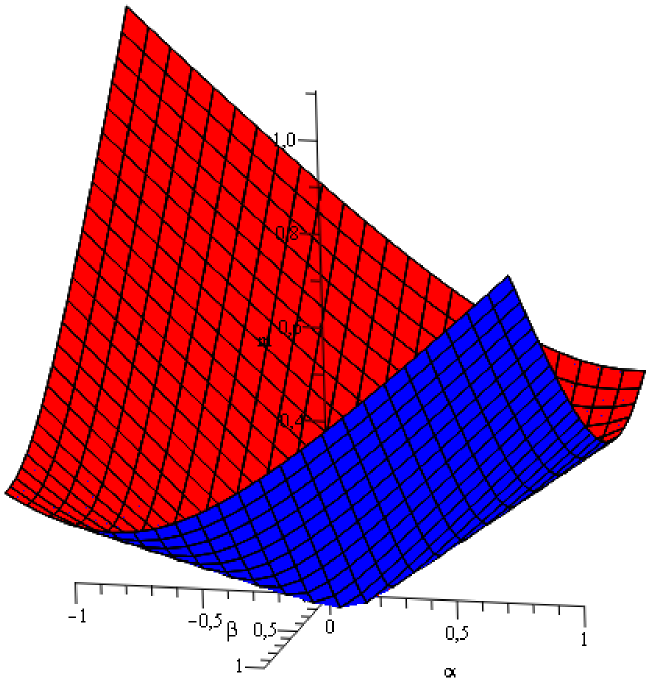
$$\text{met: } R^2 = 0.01218307668 - 0.1086636293\alpha - 0.1086636293\beta + 0.4346545170\alpha\beta + 0.2826727416\alpha^2 + 0.2826727416\beta^2 \quad (5.62)$$

Door het afronden van de constanten in deze oplossing kan een eenvoudige benaderingsformule worden gevonden:

$$R^2 = 0.0122 - 0.1086\alpha - 0.1087\beta + 0.4347\alpha\beta + 0.2827\alpha^2 + 0.2827\beta^2$$

$$R^2 = 0.0122 - 0.1086(\alpha+\beta) + 0.4347\alpha\beta + 0.2827(\alpha^2+\beta^2) \quad (5.63)$$

In Figuur 5.21 is te zien dat de benaderingsformule (rood) altijd boven de exacte oplossing (blauw) ligt. Dit is aan de veilige kant, aangezien een te hoge m-factor een lager kipmoment genereert.



Figuur 5.21 Vergelijking tussen benadering en exacte oplossing

De totale oplossing voor de equivalente momentfactor kan eenvoudig met maple of excel uitgerekend worden en is als volgt:

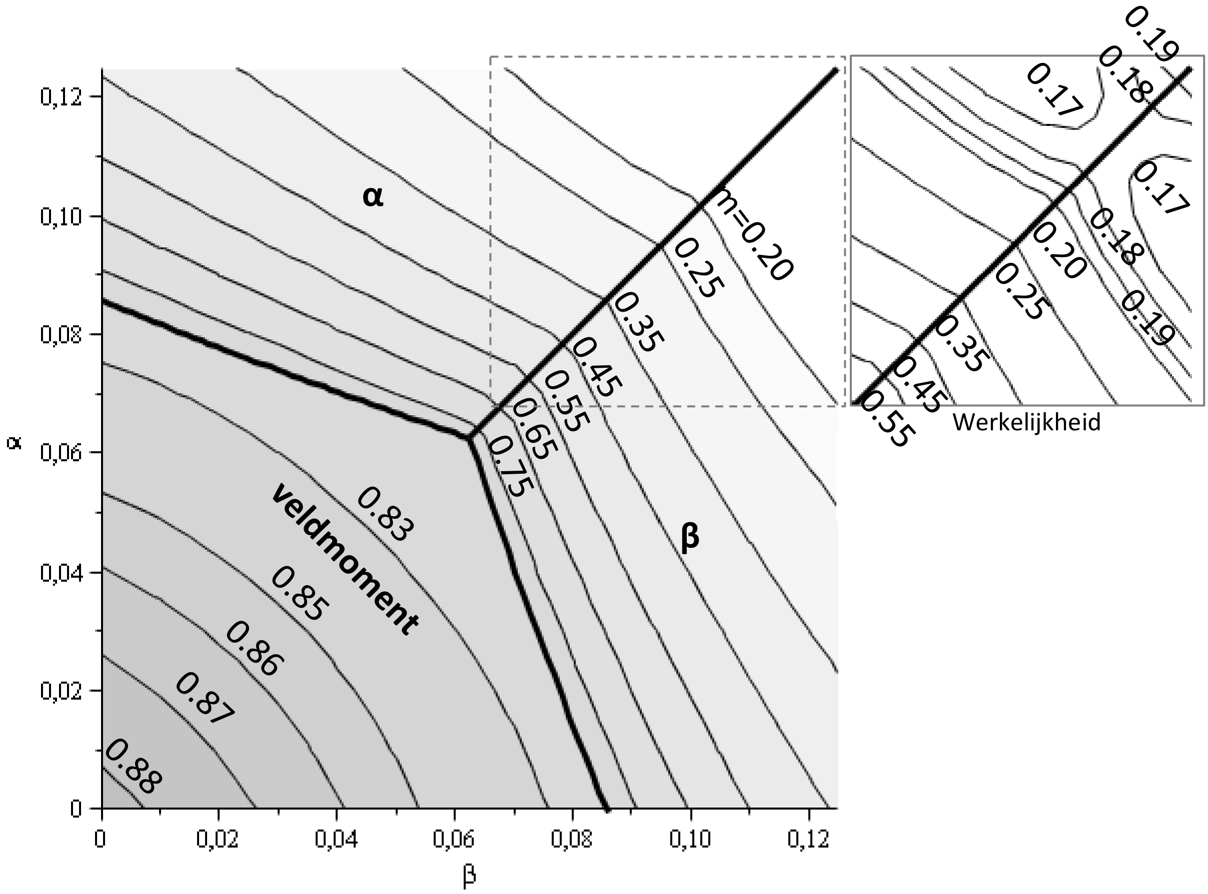
$$m = \frac{\sqrt{0.0122 - 0.1086(\alpha+\beta) + 0.4347\alpha\beta + 0.2827(\alpha^2+\beta^2)}}{max\left(Heaviside\left(\frac{1}{2} - |\alpha-\beta|\right)\left(\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\right), |\alpha|, |\beta|\right)} \tag{5.64}$$

Deze formule zal gebruikt worden in de volgende paragrafen. Voor de lezer is het eenvoudiger om uit te gaan van onderstaande formule, waarbij het maximale moment (in absolute zin) bepaald kan worden met behulp van een computerberekening:

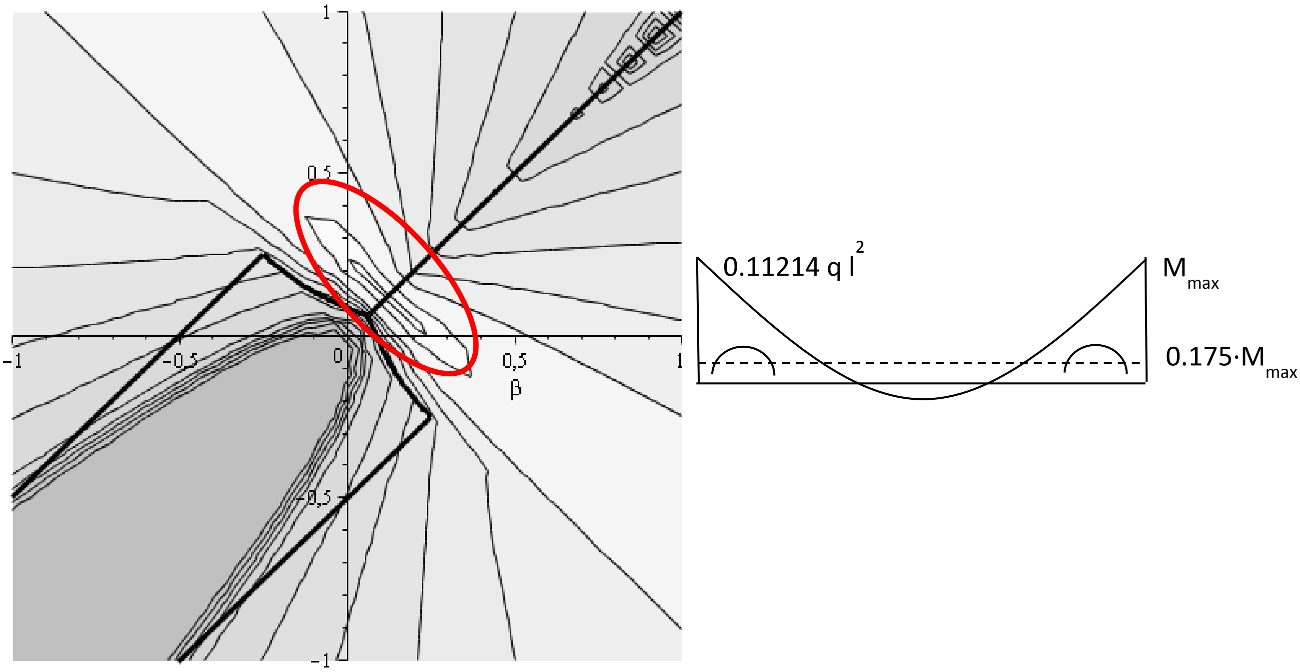
$$m = \frac{\sqrt{0.0122 - 0.1086(\alpha+\beta) + 0.4347\alpha\beta + 0.2827(\alpha^2+\beta^2)}}{|M_{max}|} \tag{5.65}$$

5.9.3 Grafisch bepalen van de equivalente momentfactor

De equivalente momentfactor kan worden geplot voor verschillende waarden van α en β. Zo ontstaat een hoogtekaart waarmee de equivalente momentfactor voor gangbare waarden van α en β te bepalen is. Voor een doorgaande ligger op drie, vier of meer steunpunten is de equivalente momentfactor eenvoudig te bepalen met Figuur 5.22. Let erop dat de equivalente momentfactor nooit naar nul zal gaan. Het theoretisch minimum binnen de grafiek ligt net onder m=0.17, echter is deze waarde niet geplot, aangezien de grafiek in dat gebied slecht af te lezen is. De werkelijkheid is ter vergelijking toegevoegd in Figuur 5.22. De lezer wordt daarom geadviseerd m=0.20 als minimum aan te houden, dit levert een veilige benadering op aangezien een te hoge equivalente momentfactor leidt tot een te klein kipmoment. In de figuur is tevens aangegeven welk moment maximaal is bij de gegeven momentfactor. De dikke zwarte lijnen geven de grenzen hiervan weer.



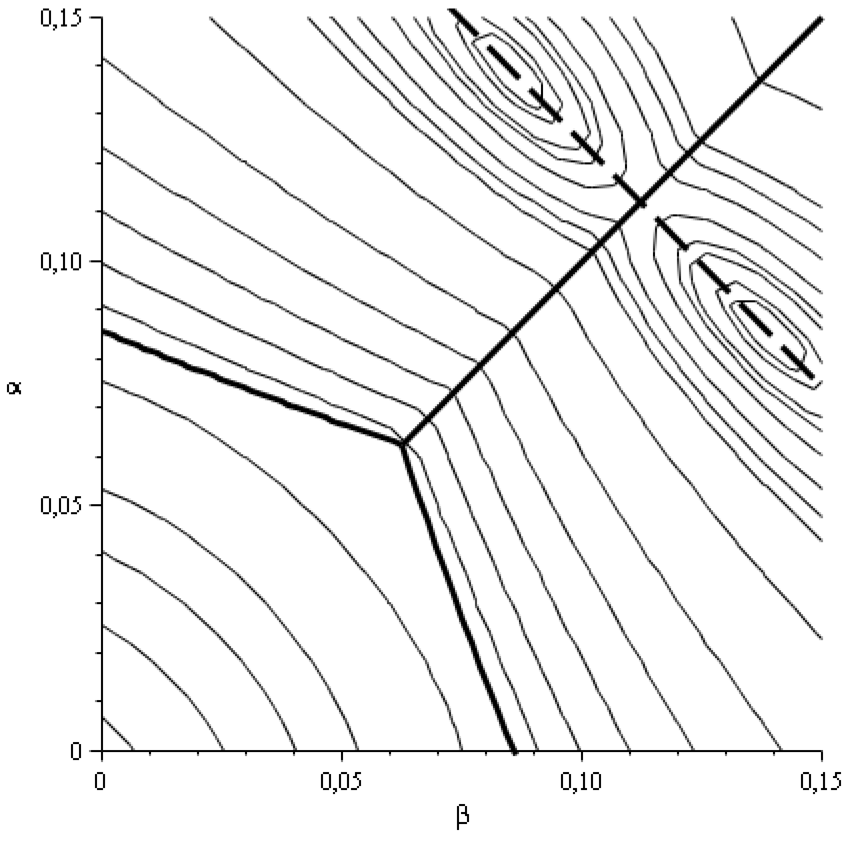
Figuur 5.22 Grafisch bepalen van de equivalente momentfactor



Figuur 5.23 Contourplot voor $-1 < \alpha < 1$ en $-1 < \beta < 1$ en verklaring voor de afname van de m-factor

Een contourplot voor $-1 < \alpha < 1$ en $-1 < \beta < 1$ is weergegeven in Figuur 5.23. Hier is binnen de rode cirkel een afname van de equivalente momentfactor te zien. Dit 'dal' in de hoogtekaart lijkt een omslagpunt in het kipgedrag van de ligger, aangezien het dal niet op een grensvlak ligt tussen twee of meer maximale momenten. Ervan uitgaande dat $\alpha = \beta$ kan de minimale equivalente momentfactor worden gevonden bij $\alpha = \beta = 0.11214$, met bijbehorende equivalente momentfactor m=0.175. Dit is berekend door de functie voor de equivalente momentfactor met als maximale moment één van beide eindmomenten te differentiëren en gelijk aan nul te stellen. Op eenzelfde manier kan het theoretisch minimum worden gevonden. Het theoretisch minimum zal liggen op een lijn loodrecht op de lijn $\alpha = \beta$ en dient deze lijn te snijden in het punt $\alpha = \beta = 0.11214$. Zodoende zal het theoretisch minimum liggen op de lijn $\alpha = 0.22427 - \beta$. Differentiëren van de functie voor de equivalente momentfactor levert een minimale equivalente momentfactor gelijk aan 0.157 (bij $\beta = 0.1387$, $\alpha = 0.22427 - 0.1387 = 0.0855$). Kennelijk daalt de equivalente momentfactor als het ene eindmoment wordt vergroot met $0.02656 \cdot \mathrm{q}l^2$ en het andere eindmoment wordt verkleind met $0.02656 \cdot \mathrm{q}l^2$ ten opzichte van $\alpha = \beta = 0.11214$.

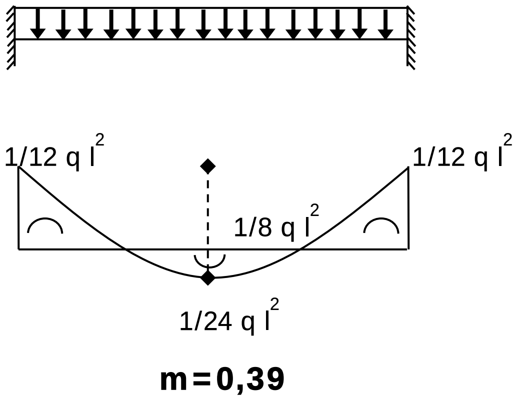
Het omslagpunt is met een onderbroken lijn aangegeven in Figuur 5.24. Linksonder deze lijn is het waarschijnlijk dat de bovenzijde van de ligger zijdelings instabiel wordt. Rechtsboven deze lijn zal de onderzijde van de ligger instabiel worden. Op een andere manier is het minimum in de grafiek niet te verklaren. Het omslagpunt zou geverifieerd kunnen worden met EEM berekeningen, daar zal in dit onderzoek echter geen aandacht meer aan worden besteed.

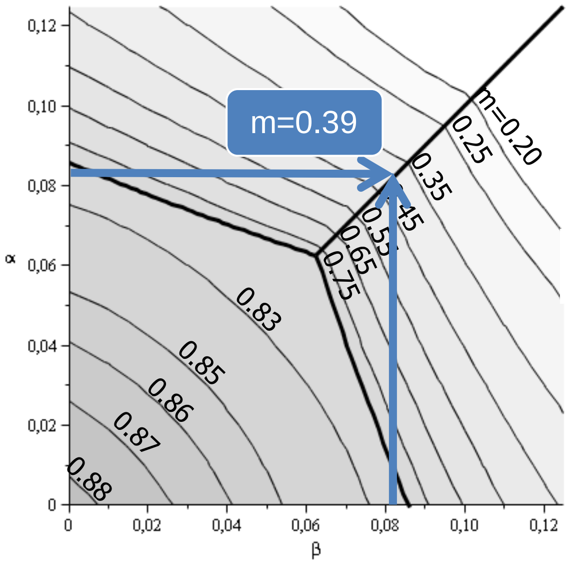


Figuur 5.24 Weergave van het omslagpunt waarop de minimale equivalente momentfactor optreedt (lijn $\alpha = 0.22427 - \beta$)

5.9.4 Voorbeeld

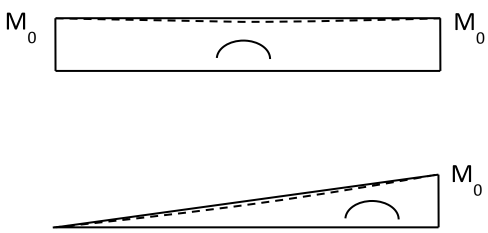
Om de manier van aflezen te verduidelijken zal in dit voorbeeld de equivalente momentfactor worden bepaald voor een ingeklemde ligger belast met een q-last. De bijbehorende momentenlijn is getekend, hierin is te zien dat de negatieve eindmomenten gelijk zijn aan $\frac{1}{12} q l^2$. Voor deze situatie is volgens de literatuur de equivalente momentfactor gelijk aan 0.39.

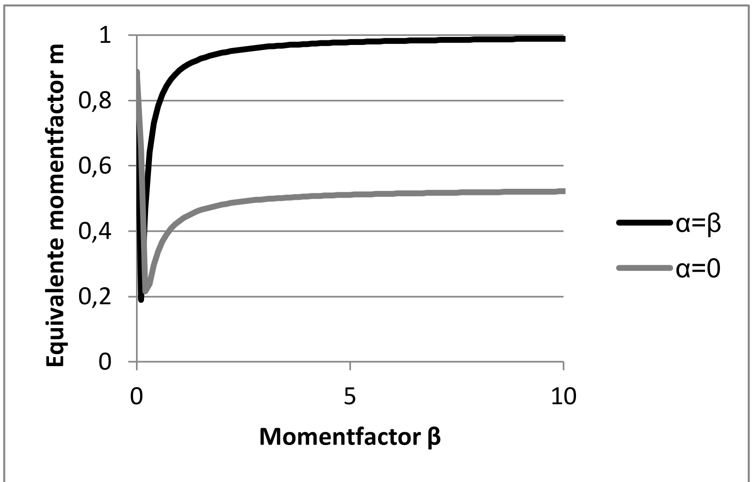




In de grafiek kan de waarde van de equivalente momenfactor worden afgelezen bij $\alpha = \beta = \frac{1}{12} = 0.0833$. Op die manier kan voor de equiavelnte momentfactor een waarde van 0.39 worden gevonden. Dit komt goed overeen met de literatuur.

Overigens kan men controleren dat voor $\alpha \to \infty, \beta \to \infty$ de equivalente momentfactor naar 1 gaat. Voor de situatie $\alpha = 0, \beta \to \infty$ gaat de equivalente momentfactor naar 0.53. Dit is in overeenstemming met de eerder gevonden waarden uit bijlage 1. De afleiding en geplotte figuren zijn afkomstig uit het maple script in bijlage 4J.

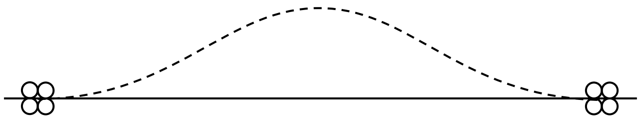




Figuur 5.25 Equivalente momentfactor voor situaties met relatief grote momentfactor β

5.10 Basisgeval met dubbele gaffeloplegging

In de energiebeschouwing is tot nog toe uitgegaan van vrije rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. Zoals reeds in hoofdstuk 4 analytisch is uitgewerkt, zal hier worden bekeken wat de invloed is van de verhinderde rotatie ter plaatse van de gaffelopleggingen, de zogenoemde dubbele gaffeloplegging, zie Figuur 5.26.



Figuur 5.26 Dubbele gaffeloplegging met bijbehorende uitbuigingsvorm

De rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen is nu verhinderd. Hierdoor zal er een extra negatief moment M_{hor} optreden in de ligger. Dit moment zal worden bepaald zodanig dat de rotatie in het x-y vlak gelijk aan 0 is. Het moment My is nu gelijk aan:

$$M_{\bar{y}} = \phi M_z - M_{hor} \tag{5.66}$$

Voor de rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de linker gaffeloplegging kan, in overeenstemming met de eerder afgeleide theorie, worden geschreven:

$$\theta_a = \frac{\int_0^l \frac{M_{\bar{y}}}{EI_{yy}}(l-x)dx}{l} \tag{5.67}$$

Zonder M_{hor} komt deze vergelijking overeen met vergelijking (5.12). Door θ_a gelijk aan 0 te stellen, levert dit de oplossing voor M_{hor}. Vervolgens blijft de oplossingsstrategie gelijk aan de eerdere theorie, waarbij alle vergelijkingen zijn omgeschreven tot moment $M_{\bar{y}}$ en niet meer M_z. Voor de rotatie ϕ wordt in dit geval aangenomen dat bij benadering geldt:

$$\phi(x) = \alpha \cdot \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi}{kl}x - \frac{\pi}{2k}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2k}\right)} \right) \tag{5.68}$$

Deze uitbuigingsvorm is overgenomen uit Trahair [7] en is geschetst in Figuur 5.26. Vervolgens kan vergelijking (5.19) worden aangepast tot:

$$\int_0^L \frac{\left(M_{\bar{y}}\right)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx + \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx = 2 \cdot \frac{M_{\bar{y}}}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx \cdot M_0 \tag{5.69}$$

Oplossen van deze vergelijking levert het kipmoment voor het basisgeval met een dubbele gaffeloplegging:

$$M_0 = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{EI_{yy} \cdot GI_t} \tag{5.70}$$

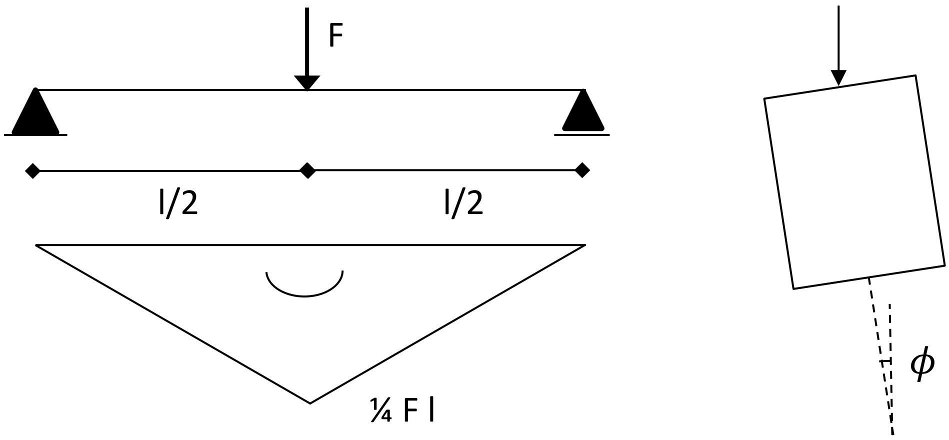
Dit komt overeen met de eerder gevonden analytische uitdrukking voor het kipmoment, met oneindig stijve rotatieveren, waarbij de inklemmingsfactor gelijk aan 0.5 was. Het volledige maple script is terug te vinden in bijlage 4K.

5.11 Belasting boven normaalkrachtencentrum*

Tot nog toe is er in de energiebeschouwing vanuit gegaan dat de belasting aangrijpt in het normaalkrachtencentrum (NC) van de doorsnede. In deze paragraaf zal worden nagegaan wat de invloed is van een belasting die bovenop de ligger aangrijpt, op een afstand van $\frac{1}{2}h$ boven NC.

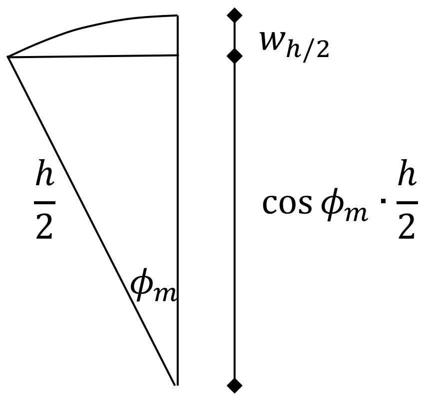
5.11.1 Extra hoeveelheid arbeid*

Er zal nogmaals naar de energiebeschouwing worden gekeken van een puntlast halverwege de overspanning l, zoals weergegeven in Figuur 5.27.



Figuur 5.27 Belastingssituatie

De uitdrukking voor de vervormingsenergie door buiging in de zwakke as en door torsie zal gelijk blijven. Echter doordat de kracht op een afstand $\frac{1}{2}h$ boven NC aangrijpt zal deze kracht ten gevolge van de rotatie ϕ_m, in het midden van de ligger, een extra zakking ondergaan, welke in Figuur 5.28 is aangeduid met $w_{h/2}$. Doordat de puntlast deze extra zakking ondergaat zal deze een extra hoeveelheid arbeid verrichten. Deze arbeid dient tevens in de energiebeschouwing te worden meegenomen. In het vervolg van deze paragraaf zal deze extra arbeid bepaald worden.



Figuur 5.28 Extra zakking door het wijzigen van het aangrijpingspunt van de belasting

De arbeid kan worden berekend als het product van kracht en verplaatsing:

$$F \cdot w_{h/2} \tag{5.71}$$

De extra verplaatsing $w_{h/2}$ kan uit Figuur 5.28 worden afgeleid:

$$w_{h/2} = \frac{h}{2} - \cos\phi_m \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2}(1 - \cos\phi_m) \tag{5.72}$$

Met behulp van de volgende goniometrische formule:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\,sin^2\,\alpha \quad \Rightarrow \quad 1 - \cos(2\alpha) = 2\,sin^2\,\alpha \tag{5.73}$$

kan deze worden herschreven tot:

$$w_{h/2} = \frac{h}{2}\left(2\sin^2\left(\frac{\phi_m}{2}\right)\right) \tag{5.74}$$

Uitgaande van een kleine rotatie ϕ geldt er voor kleine hoeken $\sin\alpha \approx \alpha$ en kan de extra zakking worden geschreven als:

$$w_{h/2} \approx h\left(\frac{\phi_m}{2}\right)^2 = \frac{h \cdot {\phi_m}^2}{4} \tag{5.75}$$

Invullen in (5.71) levert de extra arbeid ten gevolge van een belasting boven de neutrale lijn:

$$F \cdot w_{h/2} = \frac{F \cdot h \cdot {\phi_m}^2}{4} \tag{5.76}$$

Hierin is ϕ de rotatie ter plaatse van de kracht F, op de helft van de overspanning. Aangezien deze wordt benaderd met $\phi(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right)$ is de rotatie ter plaatse van de kracht gelijk aan $\alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \frac{1}{2} l\right) = \alpha$. De extra arbeid wordt dus:

$$\frac{F \cdot h \cdot \alpha^2}{4} \tag{5.77}$$

5.11.2 Terug naar de totale energievergelijking*

Nu de extra hoeveelheid arbeid ten gevolge van een belasting boven NC bekend is, kan deze worden ingevuld in de totale energievergelijking (5.1):

$$E_v + E_p - \frac{F \cdot h \cdot \alpha^2}{4} = constant \tag{5.78}$$

Er wordt nu een sprongetje gemaakt door terug te gaan naar vergelijking (5.15) en vervolgens wordt daar de extra hoeveelheid arbeid in ingevuld:

$$F_t \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{F_t \cdot h \cdot \alpha^2}{4} - \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx = \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \frac{d^2\phi}{dx^2} dx \tag{5.79}$$

Hierin geeft F_t de belasting aan op de top van de ligger (op een afstand $\frac{1}{2}h$ boven NC). Deze vergelijking kan uiteraard worden opgelost door de rechterzijde gelijk de stellen aan $\frac{{M_0}^2}{2 \cdot EI_{yy}} \cdot \int_0^l \phi^2 dx$, zoals afgeleid aan het begin van dit hoofdstuk. Er zal hier echter worden gekozen om een algemenere aanpak te volgen door gebruik te maken van de energiebeschouwing voor een puntlast F_{NC} (ter plaatse van NC). Deze wordt ingevuld in vergelijking (5.15):

$$F_{NC} \cdot w_{extra}\left(\frac{l}{2}\right) - \int_0^L \frac{(\phi \cdot M_z)^2}{2 \cdot EI_{yy}} dx = \frac{GI_t}{2} \cdot \int_0^L \frac{d^2\phi}{dx^2} dx \tag{5.80}$$

Uit deze twee vergelijkingen kunnen de onbekenden F_t en F_{NC} worden opgelost.

5.11.3 Bepalen verkleiningsfactor*

Voor een puntlast halverwege de overspanning kan met maple een oplossing worden gevonden voor F_{NC}. Hiervoor kan een groot deel van het script in bijlage 4C worden hergebruikt, zie bijlage 4L. Vervolgens kan ook een uitdrukking worden gevonden voor de onbekende F_t. Als naar de verhouding tussen F_t en F_{NC} gekeken wordt vindt men een uitdrukking in de vorm van:

$$\frac{F_t}{F_{NC}} = \sqrt{1+n^2} - n \qquad \text{met} \quad n = \frac{1.739 \cdot h}{2 \cdot l}\sqrt{\frac{EI_{yy}}{GI_t}} \tag{5.81}$$

Volgens AF&PA [11] is deze vergelijking geldig voor waarden van n tussen -0.34 en 1.72. Vergelijking (5.81) kan vervolgens worden benaderd met een Taylor-reeks ontwikkeling:

$$\sqrt{1+n^2} - n \cong 1 - n \tag{5.82}$$

Dit kan eenvoudig door gebruik te maken van maple:

taylor(sqrt(1+n^2)-n, n, 2);	$1\text{-}n+O(n^2)$

Hierbij zijn de hogere orde termen verwaarloosd.

Op deze wijze kan een verkleiningsfactor worden gevonden voor het kipmoment. Met bovenstaande geldt immers:

$$\frac{F_t}{F_{NC}} = 1 - n \tag{5.83}$$

Zodoende kan voor F_t worden afgeleid dat het kipmoment gelijk is aan:

$$M_{crit,top} = (1-n)M_{crit,NC} = \frac{(1-n)}{m} \cdot M_{crit,basis} \tag{5.84}$$

De factor 1-n is kleiner dan 1 en zal zodoende het kipmoment verkleinen. Aangezien de effectieve kiplengte voorkomt onder de deelstreep in vergelijking (2.4) wordt de effectieve kiplengte juist vergroot met een factor $\frac{1}{1-n}$. De factor n is voor elk ander belastingsgeval op een vergelijkbare manier uit te rekenen, maar daar zal in dit onderzoek geen aandacht aan worden besteed.

5.11.4 Vergelijking met Duitse DIN*

De effectieve kiplengte zal worden vergroot met een factor $\frac{1}{1-n}$, zodoende kan de volgende formule worden afgeleid:

$$L_{eff} = m \cdot \frac{1}{1-n} \cdot l \tag{5.85}$$

Uit vergelijking (3.7) kon tevens worden afgeleid dat $m = \frac{1}{a_1}$, zodoende kan (5.85) worden geschreven als:

$$L_{eff} = \frac{l}{a_1 \cdot (1-n)} \tag{5.86}$$

Deze vergelijking heeft dezelfde vorm als vergelijking (3.6) uit de DIN, waarin n gesteld wordt op:

$$\mathrm{n} = a_2 \frac{a_z}{l} \sqrt{\frac{B}{T}} \tag{5.87}$$

Waarin $B = EI_{yy},\ T = GI_t$ en $a_z = \frac{h}{2}$ voor een belasting op een afstand $\frac{h}{2}$ vanaf NC. In bijlage 2 kan tevens worden gevonden dat voor belastingsgeval 1.2 geld dat $a_2 = 1.74$, invullen van deze waarden in vergelijking (5.87) levert dezelfde uitkomst als in de vorige paragraaf.

5.11.5 Invloed verkleiningsfactor voor slanke en gedrongen liggers*

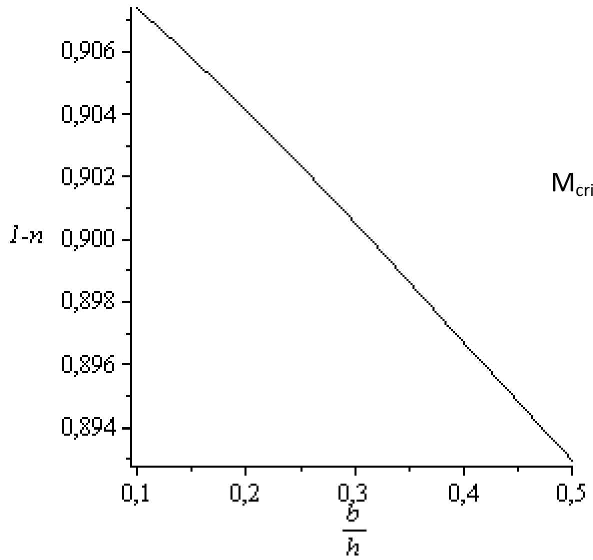
In deze paragraaf zal worden bekeken wat de invloed is van de verkleiningsfactor voor slanke en gedrongen liggers. Door in vergelijking (5.81) de uitdrukkingen voor de traagheidsmomenten van een rechthoekige doorsnede in te vullen en te veronderstellen dat $G \approx \frac{1}{16}E$ wordt er gevonden:

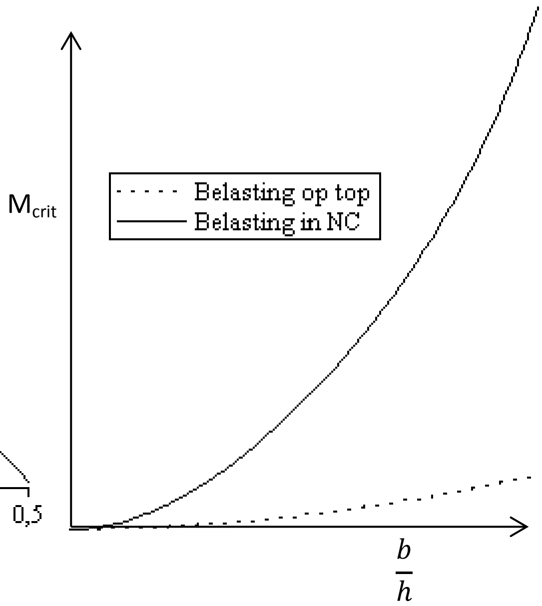
$$n = \frac{1.739 \cdot h}{2 \cdot l} \sqrt{\frac{\mathrm{E} \cdot \frac{1}{12} hb^3}{\frac{1}{16} E \cdot \frac{1}{3} hb^3 \left(1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.525 \left(\frac{b}{h}\right)^5\right)}} \tag{5.88}$$

Dit valt verder te vereenvoudigen tot:

$$n = \frac{1.739 \cdot h}{l} \sqrt{\frac{1}{1 - 0.63 \frac{b}{h} + 0.525 \left(\frac{b}{h}\right)^5}} \tag{5.89}$$

De term onder de wortel zorgt voor een verkleining van de factor 1-n bij toenemende verhouding tussen de breedte en de hoogte, zoals is weergegeven in Figuur 5.29 voor $h = \frac{1}{20} l$. Op het moment dat de belasting dus op de bovenkant van een ligger aangrijpt wordt het kritieke kipmoment meer verkleind als de ligger een gedrongen vorm heeft. Echter moet hierbij worden aangemerkt dat het kritieke kipmoment zelf ook afhangt van de slankheid van de ligger, zoals verder bestudeerd kan worden in het Dictaat CT2052 [(12)].





Figuur 5.29 Invloed van de slankheid op de factor 1-n

Figuur 5.30 Invloed slankheid op M_{crit}

Wordt de invloed van de slankheid op het kritieke kipmoment bekeken dan zal het kipmoment uiteraard kleiner zijn voor liggers met een kleinere slankheid, ook voor liggers waarbij de belasting aangrijpt boven NC, zie Figuur 31.

5.11.6 Vergelijking met de Eurocode*

In de Eurocode wordt ervan uitgegaan dat de effectieve kiplengte met 2h moet worden vergroot indien de belasting aangrijpt boven NC. In formulevorm levert dit:

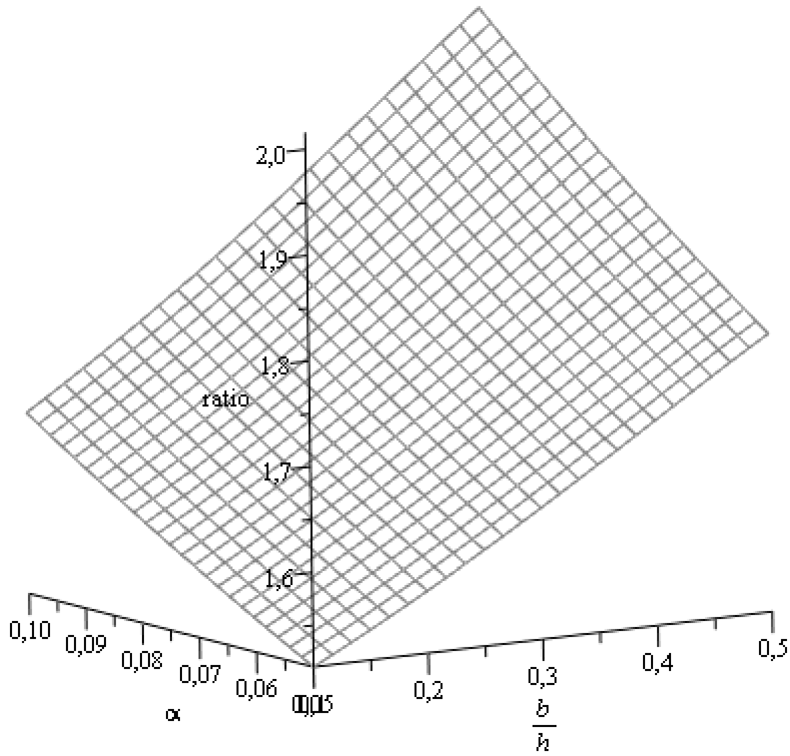
$$L_{eff} = L_{eff} + 2h \tag{5.90}$$

Er zal worden geprobeerd om formule (5.85) in dezelfde vorm te schrijven, zodat een vergelijking gemaakt kan worden tussen beide methoden. Herschrijven van (5.85) geeft:

$$L_{eff} = \frac{1}{1-n} \cdot ml = \frac{1}{1-n} \cdot L_{eff} = L_{eff} + \left(\frac{1}{1-n} - 1\right) L_{eff} = L_{eff} + \left(\frac{1}{1-n} - 1\right) ml \tag{5.91}$$

Door te veronderstellen dat er een verhouding $h = \alpha l$ bestaat tussen de lengte van een houten ligger en de hoogte kunnen (5.89) en (5.91) worden herschreven tot:

$$L_{eff} = L_{eff} + \left(\frac{1}{1-n} - 1\right) m \cdot \frac{1}{\alpha} h \quad \text{met} \quad n = 1.739 \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.525\left(\frac{b}{h}\right)^5}} \tag{5.92}$$



Figuur 5.31 Vergrotingsfactor voor verschillende waarden van α en $\frac{b}{h}$

Voor houten liggers is de verhouding tussen de breedte en de hoogte vrijwel nooit kleiner dan 1/10 of groter dan 1/2. Daarnaast wordt aangenomen dat voor de hoogte van een houten ligger geldt: $\frac{1}{20}l \leq h \leq \frac{1}{10}l$. Met deze aannames wordt gekeken naar de vergrotingsfactor $\left(\frac{1}{1-n} - 1\right) m \cdot \frac{1}{\alpha}$, een plot hiervan voor de aangenomen waarden van α en $\frac{b}{h}$ is te zien in Figuur 5.31. Hierin is te zien dat de vergrotingsfactor altijd kleiner dan of gelijk aan 2 blijft. Dit is volledig in overeenstemming met het verhogen van de effectieve kiplengte met 2h volgens de Eurocode.

In deze situatie is uitgegaan van een equivalente momentfactor m=0.74 en een factor a_2=1.74 (afkomstig uit bijlage 2). Voor andere belastingssituaties kan op vergelijkbare wijze worden ingezien dat de vergrotingsfactor $\left(\frac{1}{1-n} - 1\right) m \cdot \frac{1}{\alpha}$ ook kleiner dan 2 zal zijn. De benadering volgens de Eurocode is dus een veilige benadering voor een belasting boven NC.

5.12 Samenvattend

In dit hoofdstuk is met behulp van een energiebeschouwing de equivalente momentfactor bepaald voor verschillende belastingsconfiguraties. Voor de standaard belastingsconfiguraties blijkt deze methode overeenkomstige resultaten op te leveren als het Step-dictaat [(4)], DIN [(6)] en de Eurocode [(3)]. De afwijking tussen de DIN [(6)] en het Step-dictaat [(4)] voor een ligger belast met een q-last en aan beide zijden ingeklemd is tevens verklaard met behulp van een energiebeschouwing. In de DIN [(6)] staat aangegeven dat er getoetst wordt in de einddoorsnede, de gegeven equivalente momentfactor is echter afgeleid voor de middendoorsnede, hierdoor valt de momentfactor een factor 2 hoger uit.

Voor belastingsconfiguraties welke kunnen optreden in bijvoorbeeld een doorlopende ligger over meerdere steunpunten is tevens met behulp van een energiebeschouwing een methode afgeleid waarmee de equivalente momentfactor bepaald kan worden voor een ligger belast met een q-last en ongelijke eindmomenten uitgedrukt in ql^2. Daarbij kan gebruik worden gemaakt van een hoogtekaart of de achterliggende formule om de equivalente momentfactor te bepalen, deze factor dient gebruikt te worden na een geometrisch lineaire berekening (uitgaande van lineair materiaalgedrag) waarna getoetst wordt met behulp van de instabiliteitsfactor k_{crit}. Daarbij is uitgegaan van een vrije uitbuiging van de ligger in het x-y vlak, de invloed van rotatieveren is hiermee dus nog niet bepaald. De afgeleide methode kan niet worden geverifieerd met de literatuur, daarom zullen EEM berekeningen worden uitgevoerd om de methode te verifiëren. Ook voor andere belastingsgevallen dan het basisgeval is de invloed van rotatieveren nog niet bepaald. Voor het basisgeval met een dubbele gaffelinklemming blijkt de equivalente momentfactor overeen te komen met Trahair (7), zoals ook in hoofdstuk 4 naar voren kwam.

Indien de belasting niet langer aangrijpt in het normaalkrachtencentrum zal de effectieve kiplengte aangepast moeten worden. De oplossing is afgeleid met behulp van een energiebeschouwing en komt overeen met de DIN (6) en de Eurocode (3).

De volgende vragen zijn/blijven onbeantwoord in dit hoofdstuk en zullen in het volgende hoofdstuk worden behandeld:

- Op welke manier kunnen de effectieve kiplengtes worden bepaald voor belastingconfiguraties welke niet in de literatuur worden gegeven voor liggers met rotatieveren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen?
- Kan de afwijking van de inklemmingsfactor tussen de afgeleide oplossing en Trahair voor gelijke rotatiestijfheden worden verklaard?
- Verifieer de methode voor een q-last met ongelijke eindmomenten met behulp van EEM berekeningen

6 Afleiding kiplengtes met EEM berekeningen

In dit hoofdstuk zal het kipgedrag van houten liggers onder verschillende belastingsconfiguraties worden berekend met behulp van het eindige elementen softwarepakket DIANA. Dit gebeurd enerzijds om de effectieve kiplengtes te verifiëren voor belastingsconfiguraties welke zijn afgeleid in de vorige hoofdstukken en anderzijds om de kiplengtes voor onbekende belastingconfiguraties te bepalen. Zo zal de invloed van rotatieveren op de effectieve kiplengte worden bepaald, en zal een doorgaande ligger en een ligger met kipsteunen worden gemodelleerd.
In de eerste paragraaf zullen alle onderdelen die nodig zijn om de ligger te modelleren worden toegelicht. Vervolgens zullen de resultaten voor verschillende belastingsconfiguraties in de overige paragrafen worden behandeld.

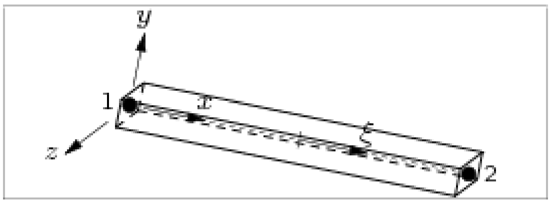
6.1 Modelleren van het kipgedrag

Om de ligger daadwerkelijk te laten kippen zal de ligger een kleine beginexcentriciteit worden gegeven, waarna de belasting in kleine stappen op de ligger wordt aangebracht. De ligger zal dus geometrisch niet lineair worden doorgerekend, daarbij wordt uitgegaan van lineair elastisch materiaalgedrag.

6.1.1 Elementtype

Om de modellering zo eenvoudig mogelijk te houden en niet volledig 3D te hoeven modelleren is ervoor gekozen om de ligger te modelleren met ligger-elementen. Een 3D modellering heeft tot gevolg dat het aantal vrijheidsgraden (DOF's) zou toenemen, wat een langere rekentijd tot gevolg heeft. In de situatie van een simpele ligger is dit beperkt tot zo'n 2 minuten rekentijd, wat nog goed te overzien zou zijn. Het gemak van een model met ligger elementen in plaats van volume elementen is echter ook dat de vrijheidsgraden direct kunnen worden vastgezet, zodat een roloplegging en een gaffeloplegging zeer eenvoudig toe te voegen zijn.

In DIANA is de ligger gemodelleerd met 'ligger-element' L12BE, zoals weergegeven in Figuur 6.1. Het elementtype L12BE heeft 2 knopen en op elke knoop 6 vrijheidsgraden (3 translaties en 3 rotaties). Er wordt standaard een twee punts Gauss integratie toegepast. Het element is gebaseerd op de theorie van Bernouilli, waarbij de aanname geldt dat vlakke doorsneden vlak blijven en loodrecht op de as van de ligger blijven staan.



Figuur 6.1 Liggerelement L12BE

6.1.2 Modelleren van hout

Hout is een orthotroop materiaal aangezien de materiaaleigenschappen langs de nerf anders zijn dan dwars daarop. Doordat gebruikt wordt gemaakt van ligger elementen kan alleen met een isotroop materiaal gerekend worden, waarbij de materiaaleigenschappen in onderling loodrechte richtingen aan elkaar gelijk zijn. De eigenschappen van de ligger zullen daarbij equivalent worden gekozen aan de ligger met orthotrope eigenschappen. Een alternatief zou zijn om de ligger te modelleren met volume elementen zodat het orthotrope materiaalgedrag wel kan worden meegenomen, daar is hier echter niet voor gekozen zoals reeds toegelicht is.

6.1.2.1 Verschil modellering orthotroop en isotroop

Om de juiste materiaaleigenschappen te kiezen zal eerst worden bekeken wat het verschil is bij het modelleren van hout als orthotroop of als isotroop materiaal. Als hout wordt gemodelleerd als isotroop materiaal dan ligt de verhouding tussen de elasticiteitsmodulus en de afschuifmodulus binnen bepaalde grenzen vast. Er geldt namelijk:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{6.1}$$

waarbij ν de poisson-factor is welke begrensd wordt tussen -1 en 0.5. Daar ligt ook gelijk het probleem van het modelleren van hout als isotroop materiaal. Voor hout geldt namelijk dat bij benadering geldt:

$$G = \frac{E}{16} \tag{6.2}$$

Aangezien ν maximaal 0,5 is zal voor een isotroop materiaal gelden dat:

$$G \geq \frac{E}{2(1+0.5)} = \frac{E}{3} \tag{6.3}$$

Zodoende kan hout niet worden gemodelleerd als isotroop materiaal met de werkelijke afschuifmodulus $G \approx \frac{E}{16} = 0.0625E$, aangezien de minimale afschuifmodulus $G = \frac{E}{3} = 0.33E$ bedraagt.

6.1.2.2 Bepalen van equivalente eigenschappen

Aangezien niet alleen de afschuifmodulus van belang is voor het kipgedrag van een ligger, maar met name de producten GI_t, EI_{yy} en EI_{zz}, zal worden bekeken of deze producten onveranderd kunnen blijven. Allereerst zullen deze producten voor de werkelijke situatie worden uitgerekend.

De torsiestijfheid en buigstijfheden kunnen als volgt worden uitgewerkt voor een rechthoekige doorsnede:

$$GI_t = G \cdot \frac{1}{3} hb^3 \left(1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.525\left(\frac{b}{h}\right)^5\right) \tag{6.4}$$

$$EI_{yy} = E \cdot \frac{1}{12} hb^3 \tag{6.5}$$

$$EI_{zz} = E \cdot \frac{1}{12} bh^3 \tag{6.6}$$

Voor de werkelijke situatie wordt uitgegaan van een gelamineerde ligger met sterkteklasse GL28h. Daarvoor gelden de volgende materiaaleigenschappen:

$E_{0.05} = 10200\ N/mm^2$ $\qquad G_{0.05} = \frac{E_{0.05}}{16} = 637{,}5\ N/mm^2$

De doorsnede van de ligger heeft de volgende afmetingen: 60 mm x 600 mm (bxh). En zodoende de volgende doorsnede eigenschappen:

$$I_t = \frac{1}{3}hb^3\left(1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.525\left(\frac{b}{h}\right)^5\right) = \frac{1}{3}\cdot 600\cdot 60^3\cdot(1 - 0.63\cdot 0.1 + 0.525\cdot 0.1^5)$$
$$= 40478626{,}8\,mm^3$$

$$I_{yy} = \frac{1}{12}hb^3 = 10200\cdot\frac{1}{12}\cdot 600\cdot 60^3 = 1{,}08\cdot 10^7\,mm^3$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12}bh^3 = 10200\cdot\frac{1}{12}\cdot 60\cdot 600^3 = 1{,}08\cdot 10^9\,mm^3$$

Voor de isotrope modellering kunnen de materiaaleigenschappen E en ν worden opgegeven. In DIANA dient de poisson-factor altijd tussen -1 en 0,5 te liggen, zodoende zal hier worden gekozen voor $\nu = 0.49$ aangezien het theoretische maximum van 0.5 niet getolereerd wordt. Hiermee ligt de verhouding tussen de afschuifmodulus en de elasticiteitsmodulus vast:

$$G = \frac{E}{2(1 + 0.49)} = \frac{E}{2.98} \tag{6.7}$$

Daarnaast kunnen de eigenschappen van de liggerdoorsnede handmatig worden ingevuld, waarbij I_t, I_{yy}, I_{yz}, I_{zz} en W_t opgegeven kunnen worden.

Aangezien de buigstijfheden EI_{yy} en EI_{zz} gelijk moeten blijven, is het logisch om de werkelijke waarden van E, I_{yy} en I_{zz} te gebruiken. Dan dient alleen de torsiestijfheid nog constant te worden gehouden. Aangezien alleen G verandert doordat er met een isotroop materiaal wordt gerekend, kan het torsietraagheidsmoment handmatig worden aangepast zodat het product GI_t constant blijft. Daartoe kan de volgende vergelijking worden opgesteld:

$$(GI_t)_{model} = (GI_t)_{werkelijk}$$
$$\frac{10200}{2.98}\cdot I_t = 637{,}5\cdot 40478626{,}8 \tag{6.8}$$

Dit levert $I_t = 7539144{,}24\,mm^3$, wat in overeenstemming is met een de verwachting. Aangezien G is toegenomen, moet I_t kleiner worden om het product gelijk te houden. Als samenvatting volgt in Tabel 6.1 een overzicht van de overeenkomsten en verschillen tussen het werkelijke materiaal en de modellering daarvan.

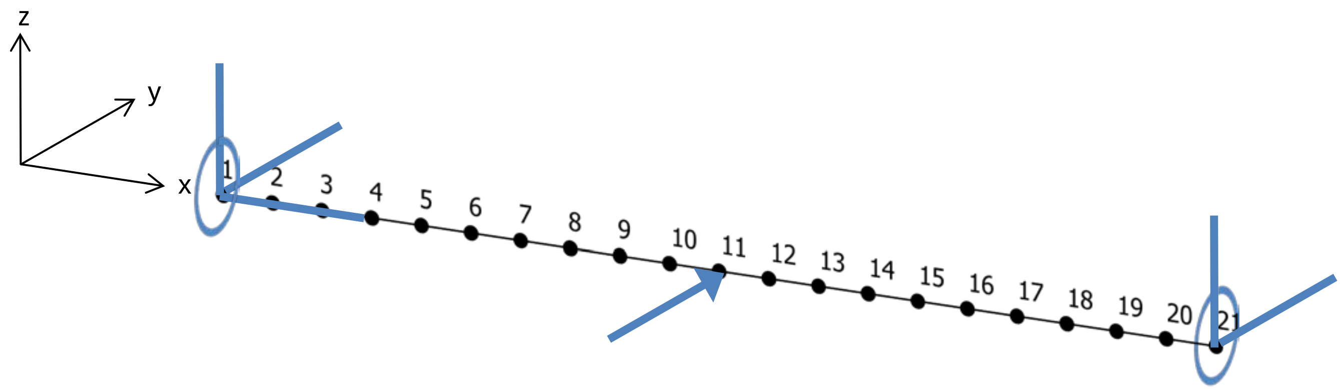
	Werkelijkheid	**Model**
Materiaalgedrag	Orthotroop	Isotroop
E	$10200\,N/mm^2$	$10200\,N/mm^2$
G	$637{,}5\,N/mm^2$	$3422{,}82\,N/mm^2\quad(\nu = 0.49)$
$\boldsymbol{I_{yy}}$	$1{,}08\cdot 10^7\,mm^3$	$1{,}08\cdot 10^7\,mm^3$
$\boldsymbol{I_{zz}}$	$1{,}08\cdot 10^9\,mm^3$	$1{,}08\cdot 10^9\,mm^3$
$\boldsymbol{I_t}$	$40478626{,}8\,mm^3$	$7539144{,}24\,mm^3$

Tabel 6.1 Vergelijking eigenschappen werkelijke ligger en model

Overigens dient opgemerkt te worden dat in DIANA tevens de volgende doorsnede eigenschappen zijn ingevoerd: $I_{yz} = 0$ en $W_t = I_t/b = 125652{,}404\ mm^2$. In bijlage 5 is te zien hoe deze eigenschappen zijn ingevoerd in DIANA.

6.1.3 Elementgrootte

De elementgrootte dient dusdanig te worden gekozen dat de resultaten in een juiste mate kunnen worden geïnterpreteerd. Te weinig elementen geven geen goed beeld van de verplaatsingen, aangezien de verplaatsingen tussen de knopen lineair worden geïnterpoleerd. Te veel elementen kan de rekenduur verlengen. Er wordt hier gekozen om de ligger met een overspanning van 10 m te modelleren met 20 elementen met een lengte van 0,5 m. Zodoende kan de rotatie om de liggeras en de zijdelingse verplaatsing van de ligger van x=0 tot x=L op een goede manier worden bekeken. Het resultaat is het model wat weergegeven is in Figuur 6.2.



Figuur 6.2 Model van de ligger inclusief opleggingen en horizontale kracht

6.1.4 Opleggingen

Aangezien een ligger op twee steunpunten zal worden gemodelleerd met aan het begin en einde een gaffeloplegging zijn de opleggingen toegevoegd zoals weergegeven in Tabel 6.2. Hierbij staat T voor de translatie in de desbetreffende richting en R voor de rotatie om de desbetreffende as.

	Tx	Ty	Tz	Rx	Ry	Rz
Knoop 1	1	1	1	1	0	0
Knoop 21	0	1	1	1	0	0

Tabel 6.2 Opleggingen, 1=vast, 0=vrij

Bij knoop 1 is een vaste oplegging geplaatst die alle translaties verhindert. Bij knoop 21 is een roloplegging geplaatst die translaties in de x-richting toestaat. Bij beide opleggingen is rotatie om de liggeras verhinderd door aanwezigheid van een gaffeloplegging.

6.1.5 Beginexcentriciteit

Aangezien het doel is het kipgedrag van de ligger te modelleren, dient de ligger een kleine beginexcentriciteit te hebben, anders zal de ligger zich enkel in het verticale vlak verplaatsen. De kracht die nodig is om een zijdelingse verplaatsing u te veroorzaken kan eenvoudig worden afgeleid met behulp van vergeet-me-nietje 5 uit bijlage 6.

$$F = \frac{48\,EI}{L^3} \cdot u = \frac{48 \cdot E \cdot \frac{1}{12} hb^3}{L^3} \cdot u = 5{,}28768\,u \tag{6.9}$$

Voor een verplaatsing van 1mm zal dus een kracht nodig zijn van 5,28768 N. In eerste instantie zal de kracht worden ingevoerd als 5.28768 N aangezien de kracht te controleren is doordat bij de analyse de stapgrootte kan worden opgegeven. Daar kan dan de gewenste beginexcentriciteit worden ingevoerd in mm. In paragraaf 6.2.2 zal de invloed van deze horizontale kracht worden toegelicht. Een alternatief zou zijn om de ligger initieel krom in te voeren in DIANA, echter is het dan niet mogelijk de beginexcentriciteit te variëren.

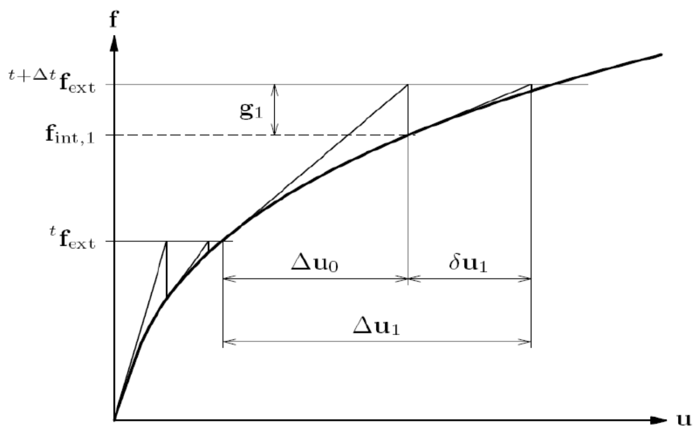
6.1.6 Belastingsgevallen en stapgroottes

Aangezien de ligger geometrisch niet lineair wordt doorgerekend dienen er meerdere belastingsgevallen te worden aangemaakt, zodat de horizontale kracht los van de werkelijke belasting kan worden aangebracht. Zodoende kan na het aanbrengen van de horizontale kracht deze kracht constant worden gehouden en de werkelijke belasting in stappen worden opgevoerd.

De stapgrootte van de horizontale kracht kan bijvoorbeeld op 10 worden gezet, zodat een beginexcentriciteit van 10mm wordt veroorzaakt. De stapgroottes van de werkelijke belasting dienen dusdanig te worden gekozen dat het kipgedrag goed zichtbaar wordt. Zodoende dient eerst het theoretische kipmoment bepaald te worden voordat aan de GNL (Geometrisch Niet Lineaire) berekening wordt begonnen. Vervolgens kunnen de stapgroottes worden ingeschat, daarbij is het aan te raden de stapgroottes kleiner te kiezen naarmate het kipmoment nadert. Hoe de stapgroottes ingevoerd kunnen worden is te zien in bijlage 5.

Naast de stapgroottes dienen tevens het maximum aantal iteraties, iteratiemethode en convergentiecriteria te worden bepaald. Het maximum aantal iteraties is mede afhankelijk van de stapgroottes. Bij een zeer kleine stapgrootte zijn maar weinig iteraties noodzakelijk. De stapgrootte is hier dusdanig gekozen dat meestal rond de 20 à 30 stappen nodig zijn, soms met uitschieters richting de 100 stappen, om het kipmoment te bereiken. Met name bij een zeer kleine beginexcentriciteit zijn kleine stappen nodig om de knik in de grafiek goed te laten berekenen, zie daarvoor ook Figuur 6.5.

Er zal gebruik worden gemaakt van de Full N-R methode, waarbij de stijfheidsmatrix na elke iteratie opnieuw wordt bepaald. Zie Figuur 6.3 voor een schematisatie van deze methode.

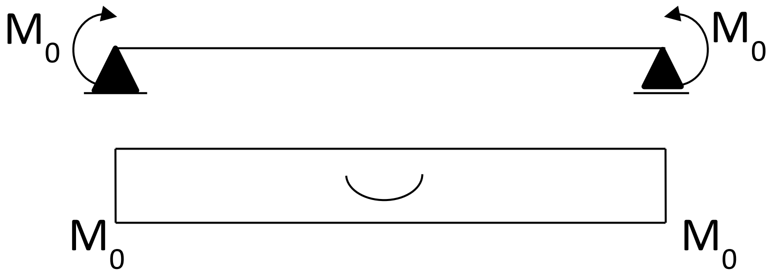


Figuur 6.3 Schematisatie Full Newton-Rapson iteratiemethode

Zowel kracht- als verplaatsingsconvergentie wordt toegepast, waarbij de convergentienorm bepaald is na het herhaaldelijk uitvoeren van eenzelfde berekening, totdat er geen aanmerkelijke verschillen meer optraden.

6.2 Basisgeval

Als eerste voorbeeld zal het basisgeval worden doorgerekend met het opgezette model in DIANA. Op de knopen 1 en 21 is daartoe een moment aangebracht om de y-as ter grootte van 1 Nmm. Dit moment wordt evenals de horizontale kracht bij de analyse door middel van stapgroottes gecontroleerd, aangezien de belasting in verschillende stappen wordt verhoogd. De belastingsconfiguratie is weergegeven in Figuur 6.4.



Figuur 6.4 Belastingsconfiguratie basisgeval met bijbehorende momentenlijn

6.2.1 Theoretisch kipmoment

Zowel voor de werkelijke situatie als voor het model zal theoretisch gezien hetzelfde kipmoment gelden. Dit kipmoment kan, uitgaande van de overspanningslengte van 10 m, als volgt worden berekend:

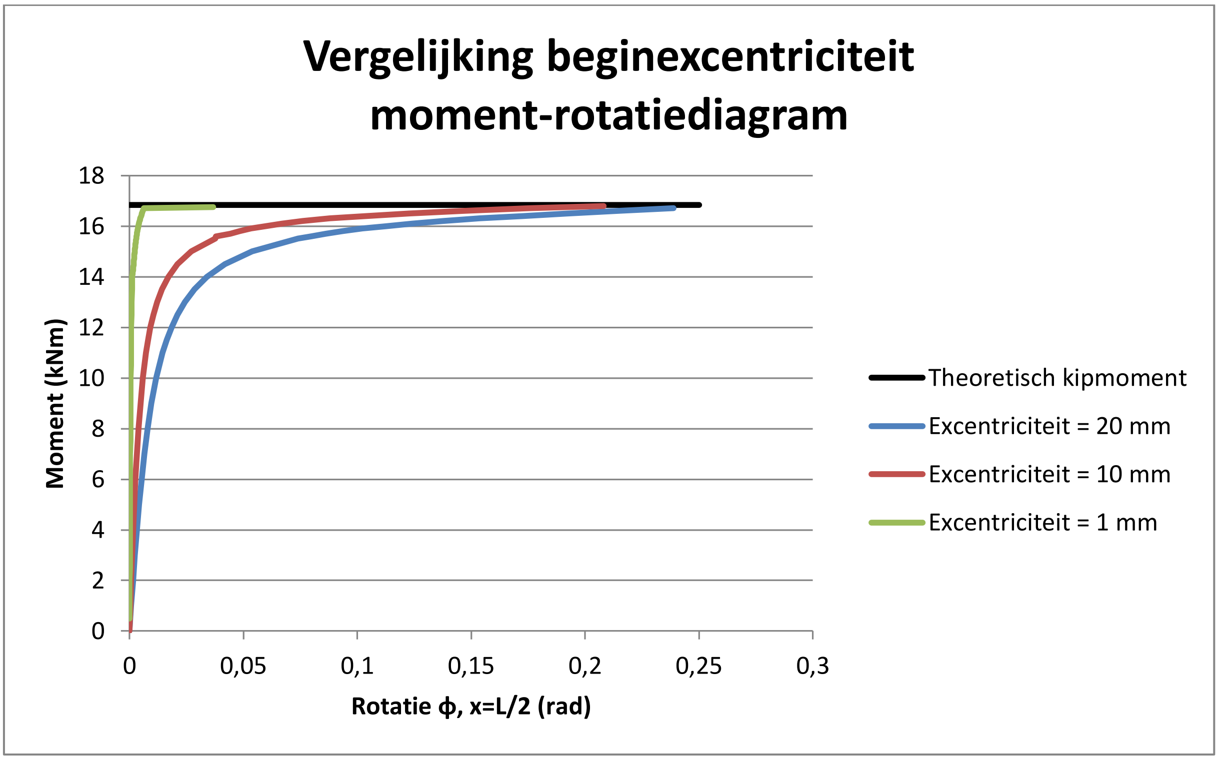
$$M_{crit} = \frac{\pi}{l_{eff}}\sqrt{EI_{yy}GI_t} = \frac{\pi}{10000}\sqrt{10200 \cdot 1{,}08 \cdot 10^7 \cdot 637{,}5 \cdot 40478400} = 16{,}8\ kNm$$

Overigens levert invullen van $GI_t = 3422{,}82 \cdot 7539144{,}24 = 2{,}58 \cdot 10^{10}\ Nmm$ exact hetzelfde kipmoment op (zie hiervoor tevens paragraaf 6.1.2.2).

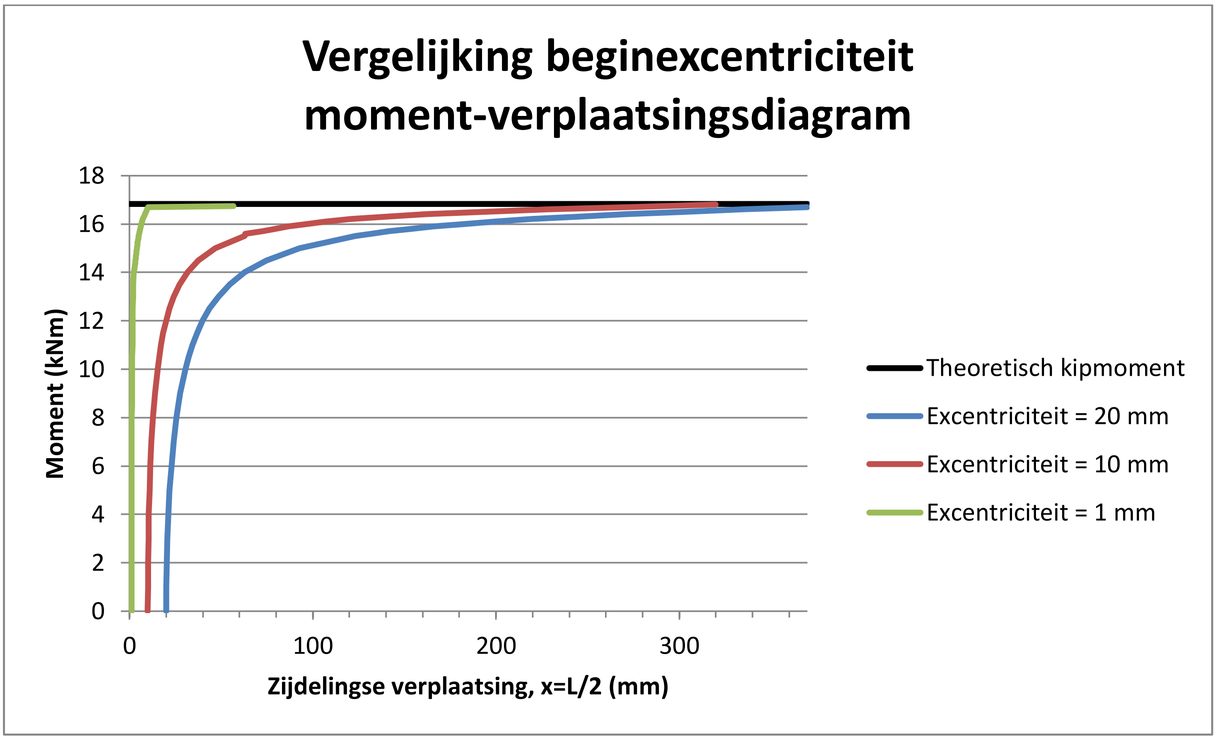
6.2.2 Vergelijking beginexcentriciteiten

Voor gelamineerd hout geldt dat de maximale beginexcentriciteit $\frac{L}{500}$ bedraagt, anders zijn de rekenregels uit de Eurocode niet geldig. Uitgaande van de overspanningslengte van 10 m bedraagt de maximale beginexcentriciteit dus 20 mm. Er zal worden bekeken wat de invloed is van het varieren van de beginexcentriciteit op het kipmoment voor het basisgeval. De situaties met beginexcentriciteiten van 1, 10 en 20mm zullen worden bekeken. De resultaten zijn weergegeven in Figuur 6.5 en Figuur 6.6.

In Figuur 6.5 is duidelijk te zien dat de EEM resultaten goed overeenkomen met het theoretische kipmoment. Het maakt niet uit hoe groot de beginexcentriciteit is, het kipmoment verandert hierdoor niet, alleen de spanningen en vervormingen zijn afhankelijk van de beginexcentriciteit. Dit wordt veroorzaakt doordat de homogene oplossing van de differentiaalvergelijking voor kip niet verandert bij verschillende beginexcentriciteiten. Alleen de particuliere oplossing verandert bij verschillende beginexcentriciteiten, zodoende zal het kipmoment ook niet veranderen.



Figuur 6.5 Vergelijking beginexcentriciteit voor het basisgeval, moment-rotatiediagram



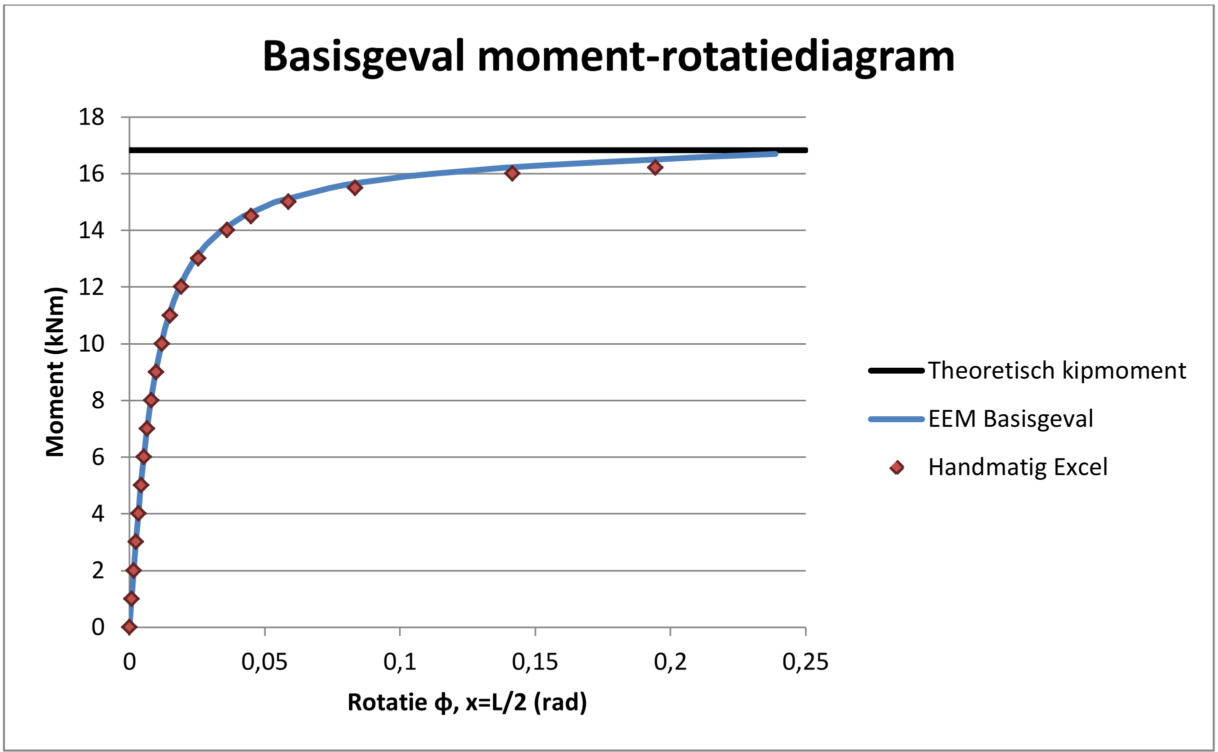
Figuur 6.6 Vergelijking beginexcentriciteit voor het basisgeval, moment-verplaatsingsdiagram

In Figuur 6.6 is goed te zien dat de beginexcentriciteit veroorzaakt door de horizontale kracht ook werkelijk overeenkomt met de gewenste beginexcentriciteit. Hoe groter de beginexcentriciteit, hoe langzamer het kipmoment wordt bereikt. Bij een excentriciteit van 1 mm wordt het theoretisch ideale kipgedrag benaderd waarbij tot Mcrit een rechte lijn zichtbaar is, die door verlies van evenwicht vervolgens horizontaal verder gaat. Vanaf nu zullen alle berekeningen worden uitgevoerd met een beginexcentriciteit van 20mm (L/500), aangezien de knik in de grafiek dan het makkelijkst met grote stappen is uit te rekenen.

Uit deze grafieken valt te concluderen dat in werkelijkheid nooit het ideale kipgedrag zal plaatsvinden, aangezien in de praktijk niets perfect recht blijkt te zijn. Er zal altijd een zekere beginexcentriciteit zijn waardoor onder toenemende verplaatsing en rotatie de ligger het kipmoment nadert. Door de beginexcentriciteit zeer klein de kiezen kan het ideale kipgedrag wel worden benaderd.

6.2.3 Vergelijking vervormingen met handberekening Excel

Aangezien de ligger als isotroop materiaal is gemodelleerd is het verstandig om na te gaan of het kipgedrag wel overeenkomt met een handberekening. Deze handberekening is uitgevoerd in excel, waarbij de ligger belast werd met een constant moment. Door de ligger een beginexcentriciteit te geven van 20mm en vervolgens te zoeken naar evenwicht door een aantal iteraties uit te voeren, kan voor een belasting lager dan Mcrit evenwicht worden gevonden. De resultaten worden vergeleken in Figuur 6.7.

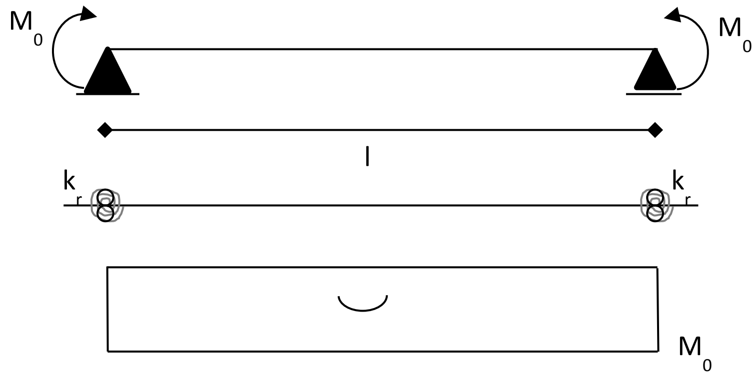


Figuur 6.7 Vergelijking tussen EEM berekening en de handmatige berekening in Excel

Zoals te zien is, komt de rotatie in het midden van de ligger netjes overeen met de resultaten uit DIANA. Zodoende kan ook geconcludeerd worden dat het model met isotroop materiaalgedrag en handmatig aangepaste waarde van It goede overeenkomsten laat zien met de handberekeningen in Excel.

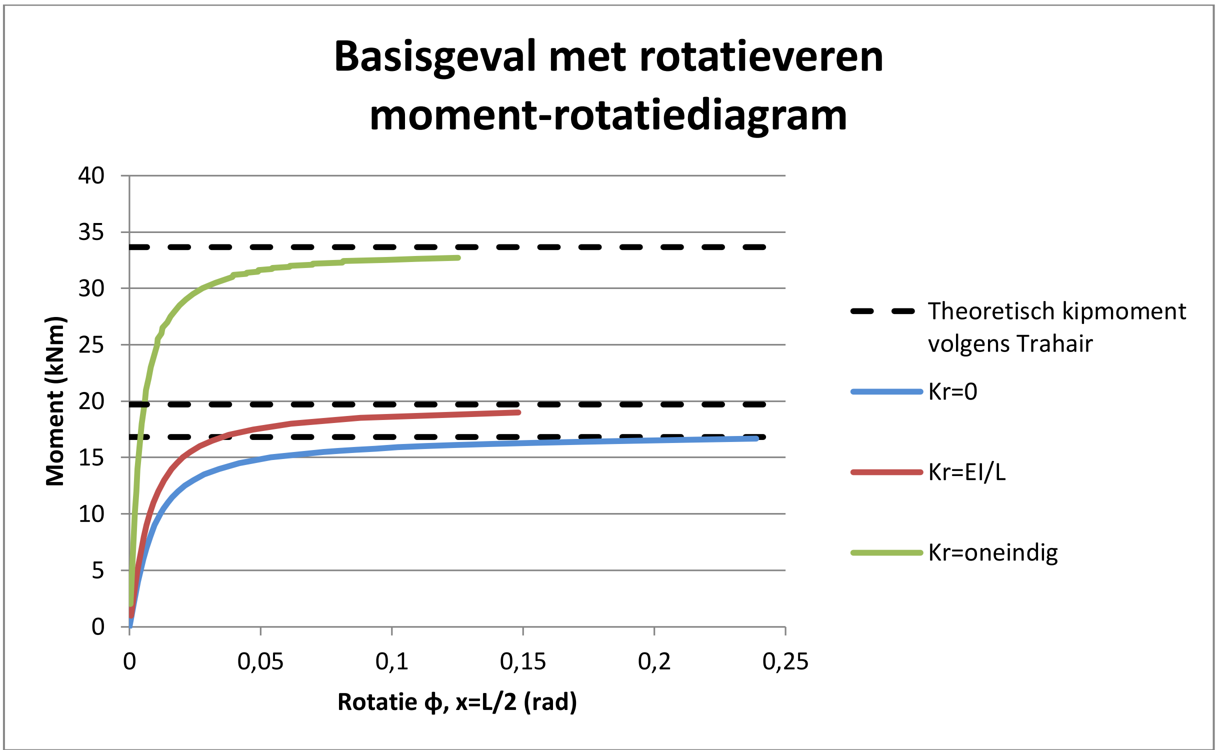
6.2.4 Basisgeval met rotatieveren

Om te bekijken wat de invloed is van een rotatiestijfheid in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen zal de ligger worden gemodelleerd met rotatieveren, zie Figuur 6.8. Dit is met name interessant omdat een doorgaande ligger enige rotatiestijfheid bezit ter plaatse van de gaffelopleggingen.



Figuur 6.8 Belastingsconfiguratie voor het basisgeval met rotatieveren

Er zal naar de twee uiterste situaties worden gekeken (k_r=0 en k_r=oneindig). Daarnaast zal er ook naar de situatie worden gekeken waarvoor geldt: $k_r = \frac{EI}{L}$, zoals eerder in hoofdstuk 4 is bekeken. De resultaten zijn te zien in Figuur 6.9 en Tabel 6.3.



Figuur 6.9 Basisgeval met rotatieveren, moment-rotatiediagram

Voor een rotatiestijfheid gelijk aan nul komt het kipmoment uiteraard overeen met de eerder gevonden waarde van 16,8 kNm (zie Figuur 6.5). Voor een rotatiestijfheid die naar oneindig gaat komt de oplossing overeen met Trahair: $\frac{16,8}{0.5} = 33,6\ kNm$, aangezien de kiplengte gehalveerd is. Dit komt overeen met de analytische afleiding en de oplossing met behulp van energievergelijkingen voor een dubbele gaffelinklemming.

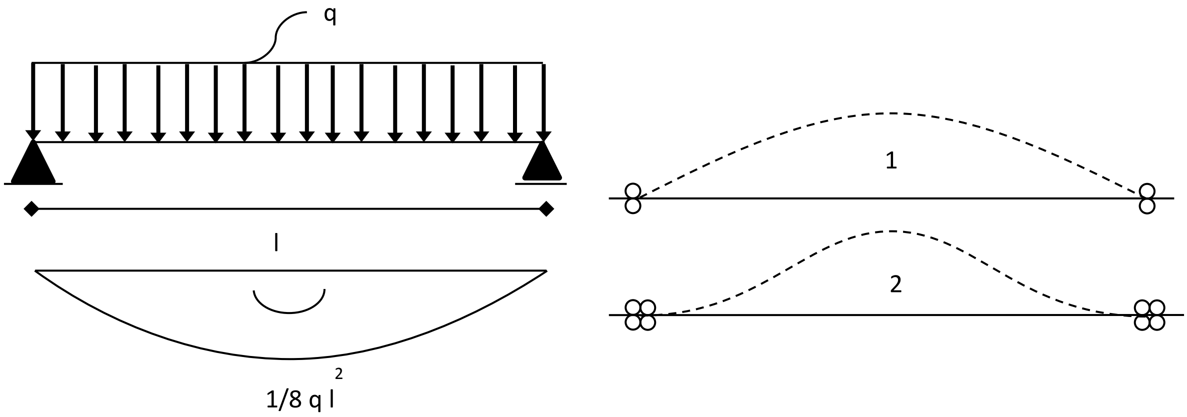
Het is nu interessant om te kijken naar de situatie met $k_r = \frac{EI}{L}$, zoals eerder bekeken in paragraaf 4.5. Deze rotatiestijfheid is een fictief gekozen stijfheid en komt niet direct overeen met een werkelijke belastingsconfiguratie. Volgens Trahair (met gelijke rotatiestijfheden) zou het kipmoment uit moeten komen op $\frac{16{,}8}{0.78} = 21{,}53\ kNm$, volgens zijn benadering nog hoger. Volgens de oplossing voor gelijke rotatiestijfheden, afgeleid in paragraaf 4.5 en overeenkomstig met de oplossing voor ongelijke rotatiestijfheden volgens Trahair, komt het kipmoment uit op $\frac{16{,}8}{0.855} = 19{,}65\ kNm$. In het moment-rotatiediagram is terug te zien dat het kipmoment inderdaad 19,65 kNm als horizontale asymptoot heeft, zodoende geeft de oplossing van Trahair voor gelijke rotatiestijfheden hier een te hoog kipmoment.

Rotatiestijfheid	Theorie (Trahair, ongelijke stijfheden)	EEM berekening
$\boldsymbol{k_r = 0}$	16,8 kNm	≈ 16,8 kNm
$\boldsymbol{k_r = \frac{EI}{L}}$	19,65 kNm	≈ 19,65 kNm
$\boldsymbol{k_r} = \infty$	33,6 kNm	≈ 33,6 kNm

Tabel 6.3 Resultaten voor het basisgeval voor verschillende rotatiestijfheden

6.3 Q-last

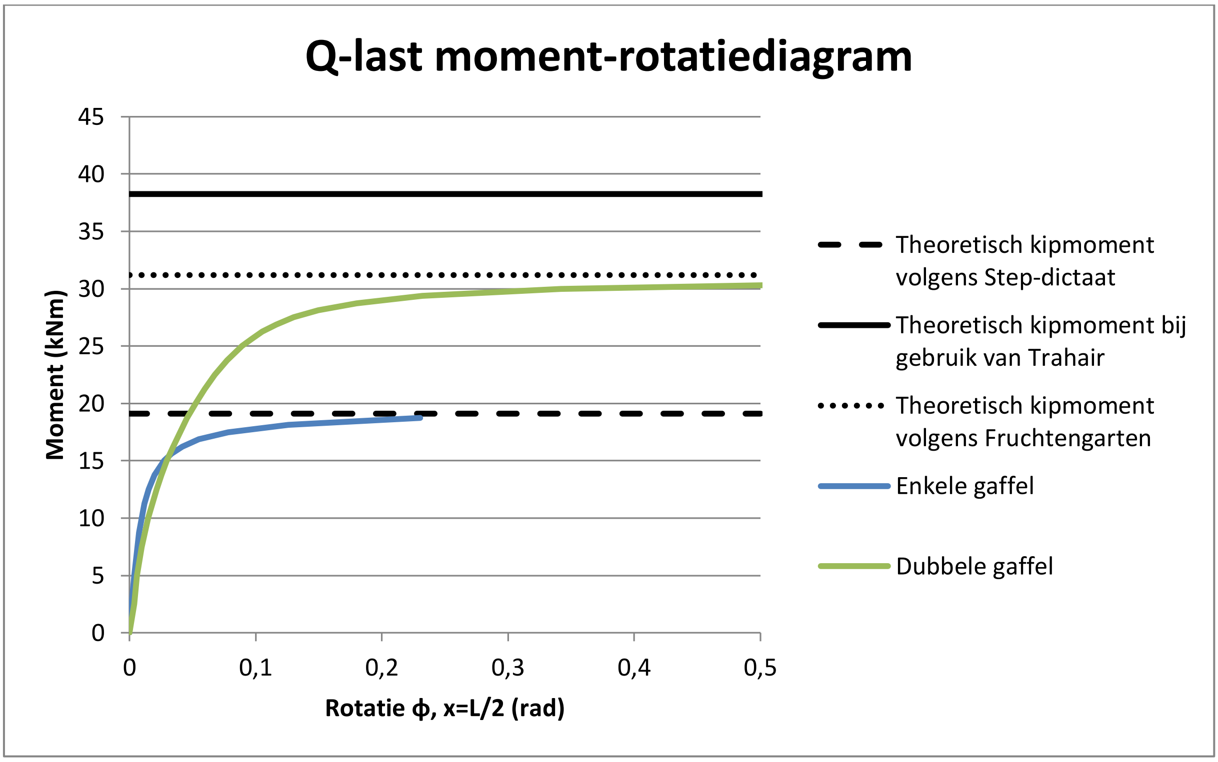
De belastingsconfiguraties weergegeven in Figuur 6.10 zullen hier nader worden bekeken. Situatie 1 betreft een ligger met een enkele gaffeloplegging op beide uiteinden. Situatie 2 betreft een dubbele gaffeloplegging op beide uiteinden, waardoor de rotatie in het x-y vlak ter plaatse van deze opleggingen is verhinderd.



Figuur 6.10 Belastingsconfiguratie met bijbehorende momentenlijn en bovenaanzichten.

De q-last zal worden aangebracht op de liggerelementen in het globale assenstelsel in negatieve z-richting, zodoende zal de q-last niet mee roteren als de ligger roteert in de GNL berekening. Dit komt overeen met een sneeuwbelasting, welke altijd in het verticale vlak werkt.

Er zal naar het kritieke kipmoment worden gekeken, zodoende zal het maximale moment in de ligger worden bepaald waarbij de ligger gaat kippen. Het moment in de middendoorsnede zal worden uitgezet tegen de rotatie om de liggeras in deze doorsnede. De belasting q kan worden teruggerekend met: $q = \frac{M}{\frac{1}{8} l^2}$ (uitgedrukt in kN/m).



Figuur 6.11 Kipgedrag van een ligger met een q-last op 2 steunpunten

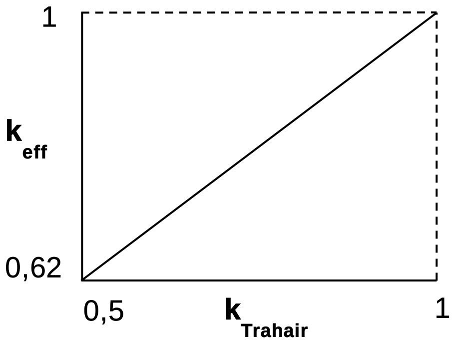
Voor een q-last geldt een equivalente momentfactor van 0.88, zodoende zou het kipmoment uit moeten komen op $\frac{16,8}{0.88} = 19{,}1\ kNm$. Een EEM berekening geeft een vergelijkbaar resultaat, zoals weergegeven in Figuur 6.11. Daarnaast is het kipgedrag van een ligger met een q-last met dubbele gaffeloplegging berekend. Zoals te zien in de grafiek kan het kipmoment hier niet eenvoudig worden aangepast met een inklemmingsfactor gelijk aan 0.5, dat levert een te hoog kipmoment op. Fruchtengarten geeft hier een kipmoment ter grootte van $\frac{16,8}{0.54} = 31{,}1\ kNm$, dit lijkt goed overeen te komen met het kipmoment uit deze EEM berekening.

6.3.1 Schatting van de effectieve kiplengte voor rotatieveren

Een ligger belast met een q-last met aan één zijde een oneindige rotatieveer levert volgens een EEM berekening een kipmoment ter grootte van 26 kNm. Voor deze situatie geldt volgens Trahair een inklemmingsfactor van 0.70 voor het basisgeval. De minimale inklemmingsfactor voor het basisgeval bedraagt 0.50, voor een q-last bedraagt de minimale inklemmingsfactor 0.62, berekend met de oplossing van Fruchtengarten. Met behulp van lineaire interpolatie, zie Figuur 6.12, kan voor deze situatie worden geschat dat inklemmingsfactor die van werkelijke invloed is op dit belastingsgeval gelijk is aan:

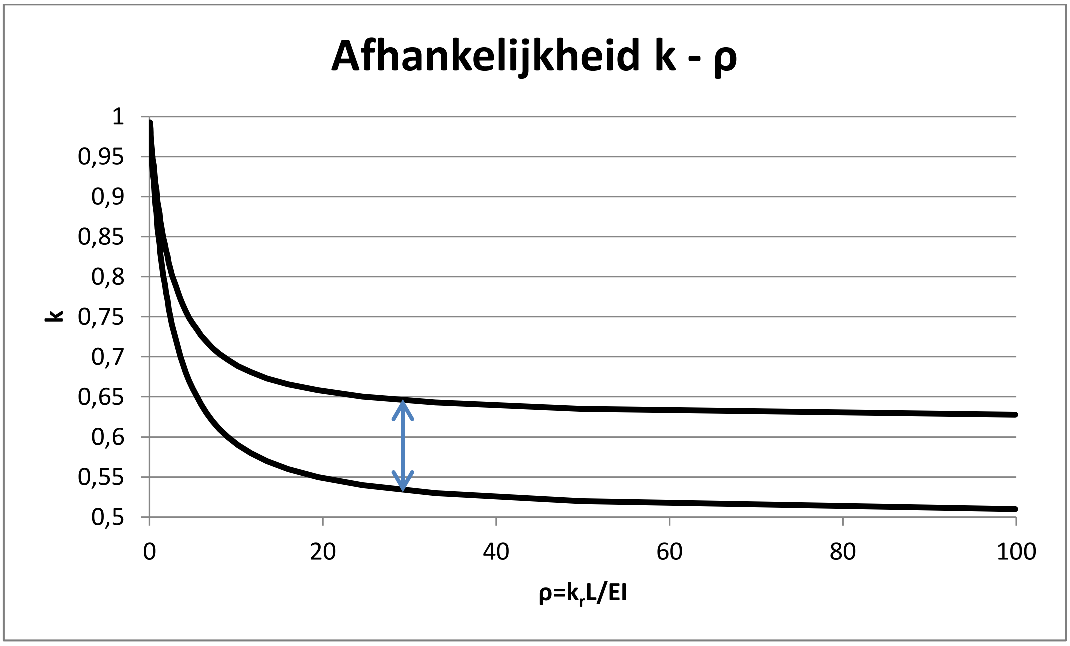
$$0.62 + \frac{0.7 - 0.5}{1 - 0.5} 0.38 = 0.772$$

Het kipmoment voor dit geval is dan gelijk aan: $\frac{16,8}{0.88 \cdot 0.772} = 24{,}7\ kNm$. Dit is een redelijke schatting van het werkelijke kipmoment. Voor een situatie met een inklemmingsfactor van 0.85 zal een werkelijke inklemmingsfactor gelden gelijk aan $0.62 + \frac{0.85-0.5}{1-0.5} 0.38 = 0.886$. Hiermee komt het kipmoment uit op $\frac{16,8}{0.88 \cdot 0.886} = 21,5\ kNm$. Een EEM berekening toont een overeenkomstig kipmoment aan, het moment-rotatiediagram hiervan zal niet expliciet worden weergegeven.



Figuur 6.12 Toepassen van lineaire interpolatie voor het schatten van de effectieve inklemmingsfactor

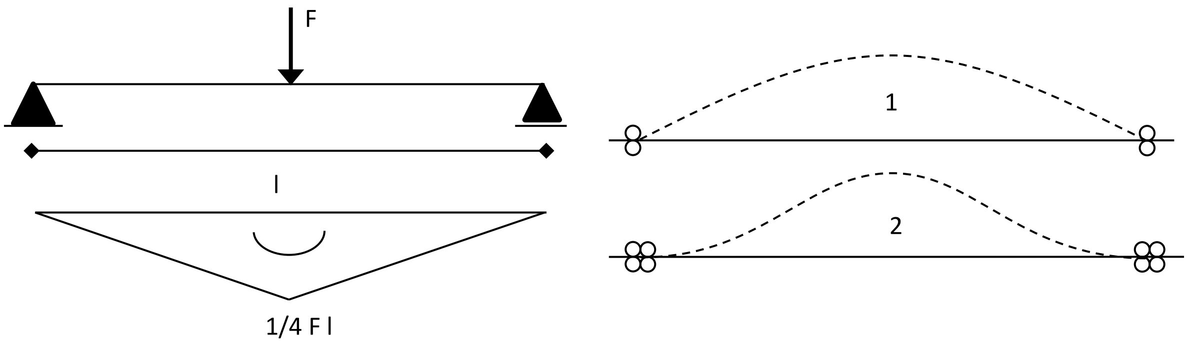
In werkelijkheid wordt de grafiek uit Figuur 4.11 opgeschoven door het toepassen van lineaire interpolatie tussen de effectieve inklemmingsfactor en de inklemmingsfactor volgens Trahair, dit is weergegeven in Figuur 6.13. Voor oneindig stijve rotatieveren zal de inklemmingsfactor niet langer de waarde 0.5 naderen, maar de waarde 0.62. Aangezien de grafiek enkel is afgeleid voor het basisgeval, kan niet worden bepaald of dit een veilige benadering geeft voor een ligger belast met een q-last. Dit zal in dit onderzoek echter niet verder worden onderzocht.



Figuur 6.13 Effect van het toepassen van lineaire interpolatie tussen de effectieve inklemmingsfactor en de inklemmingsfactor volgens Trahair

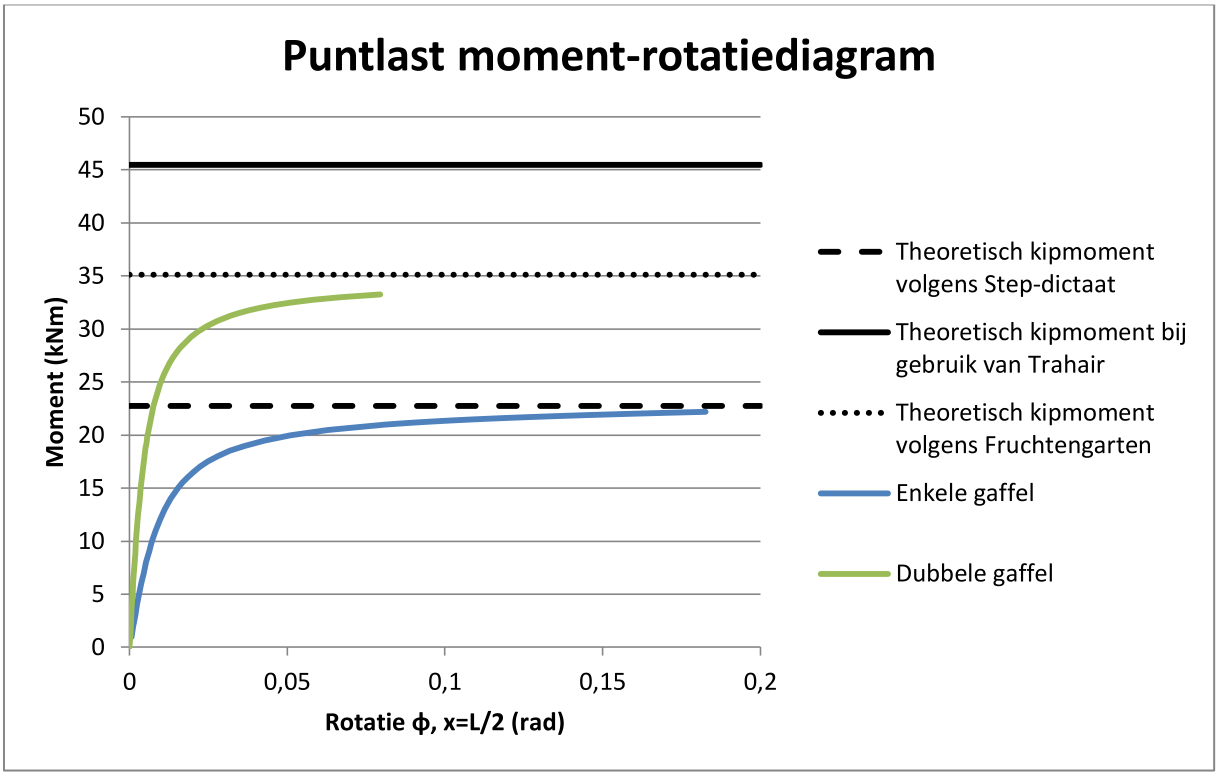
6.4 Puntlast

Een ligger belast met een puntlast met enkele gaffeloplegging (situatie 1) en dubbele gaffeloplegging (situatie 2) zullen in deze paragraaf worden bekeken. Deze belastingsconfiguraties zijn weergegeven in Figuur 6.14.



Figuur 6.14 Belastingsconfiguraties met bijbehorende momentenlijn en bovenaanzichten

Voor een ligger belast met een puntlast geldt een equivalente momentfactor ter grootte van 0.74, zodoende zou het kipmoment uit moeten komen op $\frac{16{,}8}{0.74} = 22{,}7\ kNm$. In Figuur 6.15 is een vergelijking gemaakt tussen het theoretische kipmoment en de resultaten die volgen uit een EEM berekening voor de situatie met enkele en dubbele gaffeloplegging. Voor een dubbele gaffeloplegging is duidelijk te zien dat het kipmoment niet overeenkomt met $\frac{16{,}8}{0.74 \cdot 0.5} = 45{,}4\ kNm$, waarbij een inklemmingsfactor van 0.5 is toegepast. Volgens Fruchtengarten zou het kipmoment uitkomen op $\frac{16{,}8}{0.48} = 35\ kNm$, dit levert een betere benadering van het kipmoment op.

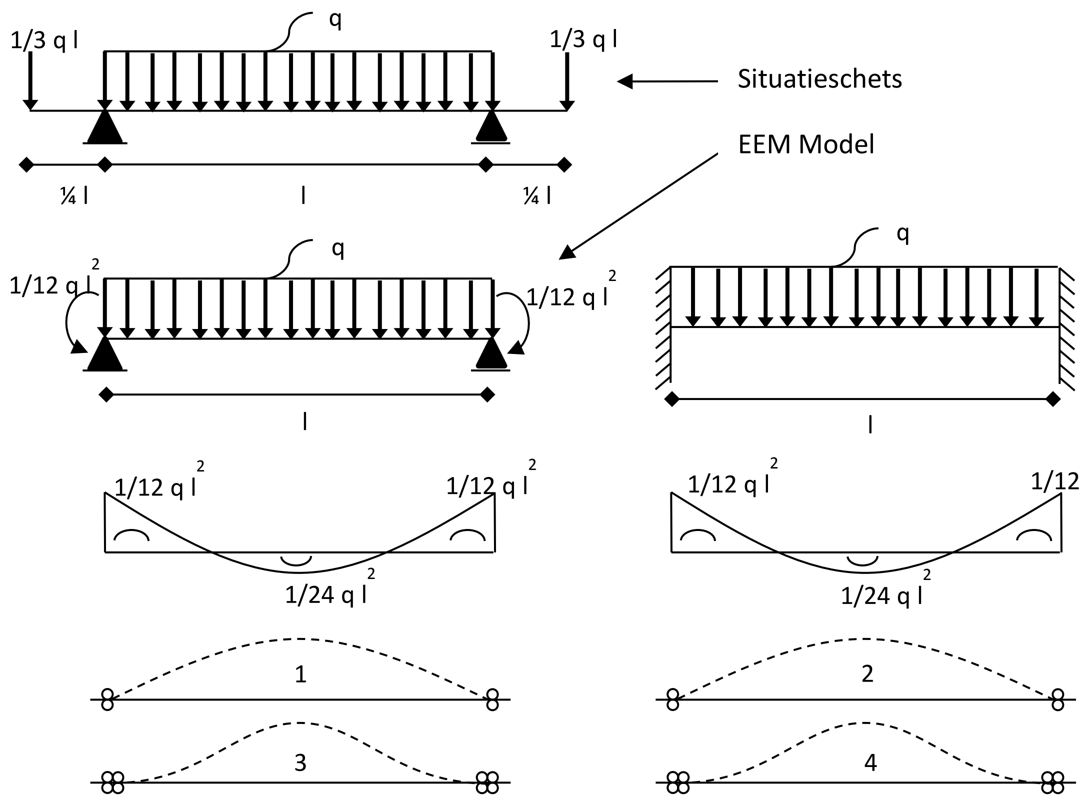


Figuur 6.15 Moment-rotatiediagram voor een ligger belast met een puntlast

6.5 Ingeklemde q-last met enkele en dubbele gaffelopleggingen

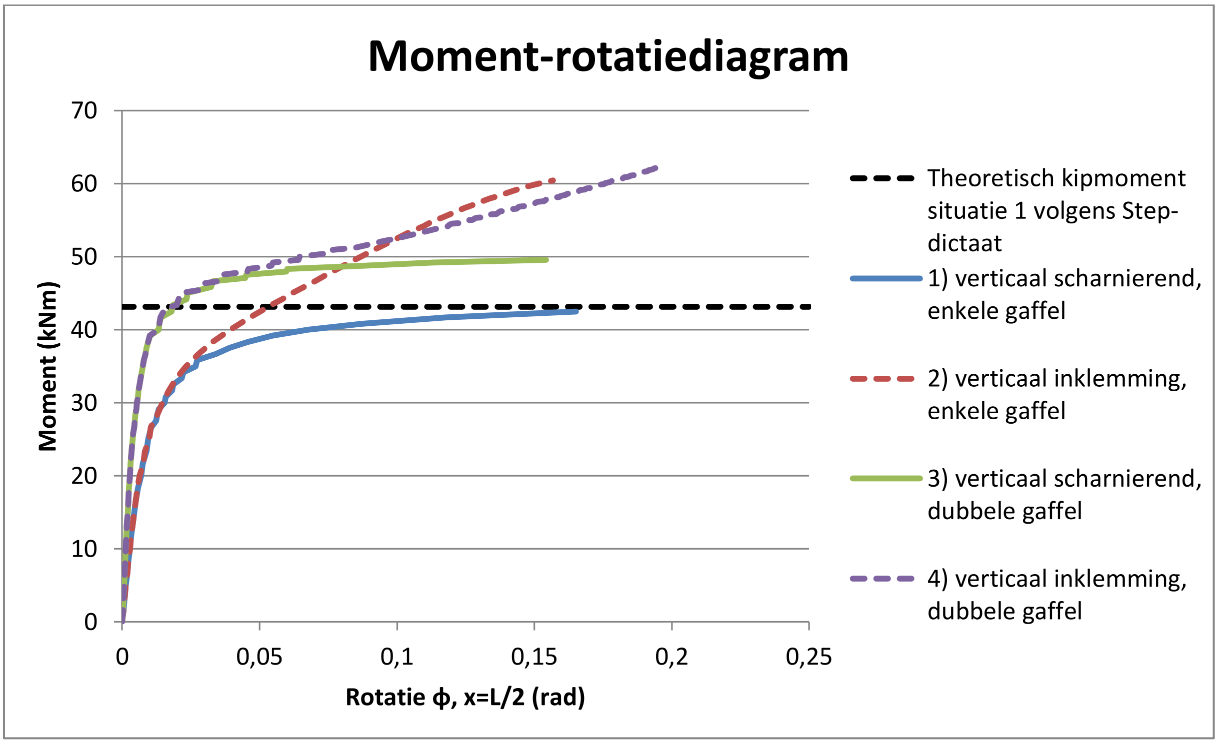
In deze paragraaf zal de invloed van een dubbele gaffeloplegging worden bekeken voor twee verschillende belastingsconfiguraties. In Figuur 6.16 is aan de linkerkant de situatie geschetst welke is afgeleid met behulp van energievergelijkingen. Door de ligger op 2 steunpunten te verlengen ontstaan 2 uitkragingen. In dit voorbeeld zijn de grootte van de puntlast en de lengte van de uitkraging dusdanig gekozen dat een negatief eindmoment ter grootte van $\frac{1}{12}ql^2$ ontstaat. Aan de rechterzijde in de figuur is de belastingsconfiguratie geschetst waarbij de ligger aan beide zijden verticaal is ingeklemd. Beide belastingsgevallen leveren dezelfde momentenlijn op, echter is het de vraag of het kipgedrag voor beide belastingsconfiguraties gelijk zal zijn.

In het bovenaanzicht kunnen voor beide belastingsconfiguraties nog twee verschillende situaties worden bekeken, met een enkele gaffeloplegging en met een dubbele gaffeloplegging. Een enkele gaffeloplegging blokkeert alleen de zijdelingse verplaatsing en de rotatie om de liggeras. Een dubbele gaffeloplegging blokkeert tevens de rotatie in het x-y vlak (horizontaal ingeklemd). De vier situaties zijn genummerd in Figuur 6.16. De resultaten van de EEM berekeningen voor de verschillende situaties zijn weergegeven in Figuur 6.17.



Figuur 6.16 Overzicht van de 4 situaties die zullen worden doorgerekend in DIANA

Voor de ligger welke scharnierend is opgelegd met een enkele gaffeloplegging (situatie 1) is de equivalente momentfactor gelijk aan 0.39, zie bijlage 1. Het theoretische kipmoment komt dus uit op: $\frac{16,8}{0,39} = 43,1\ kNm$. Dit theoretisch kipmoment komt goed overeen met het kipgedrag wat volgt uit de EEM berekening. Voor situatie 2, waarbij de scharnierende oplegging is vervangen door een inklemming, is het kipgedrag gelijk voor kleine rotaties. Daarna lijkt een zeer groot verstevigingsgebied zichtbaar, waardoor de grafiek niet naar een horizontale asymptoot nadert,



Figuur 6.17 Kipgedrag voor de vier verschillende mechanicaschema's

maar de vervormingen toenemen onder toenemende belasting. Het kipmoment lijkt dus zeer groot, echter is het al ongewenst dat de ligger zeer grote vervormingen laat zien. Bij een moment ter grootte van 50 kNm heeft de ligger een zijdelingse verplaatsing van ruim 11 cm. Het is de vraag welke vervormingen toelaatbaar zijn, voordat de bezwijkspanning wordt bereikt.

Voor situatie 3 is een duidelijke verhoging van het kipmoment zichtbaar in de grafiek, waarna deze een horizontale asymptoot nadert. Volgens Fruchtengarten is het kipmoment gelijk aan $\frac{16{,}8}{0{,}34} = 49{,}4\ kNm$, dit lijkt goed overeen te komen met dit resultaat. Er kan worden geconcludeerd dat dit in elk geval niet overeenkomt met de oplossing van Trahair voor het basisgeval met rotatieveren, wat tevens is afgeleid in paragraaf 4.5. Dan zou de inklemmingsfactor voor een dubbele gaffelinklemming gelijk aan 0.5 zijn en het kipmoment dus verdubbeld moeten zijn, de oplossing volgens Trahair kan dus niet voor andere belastingsgevallen dan het basisgeval worden gebruikt. De momentenfactor volgens Fruchtengarten levert wel een overeenkomstig resultaat.

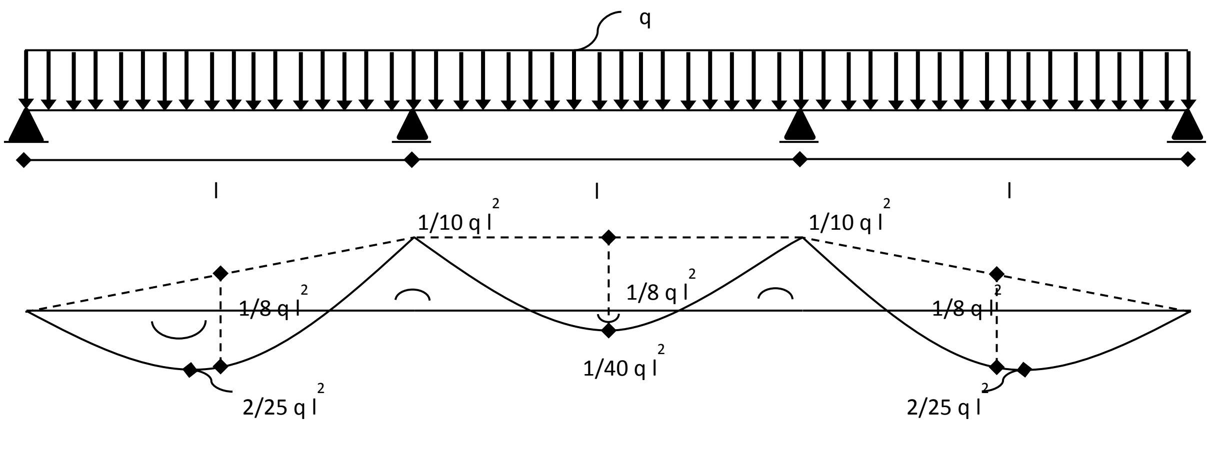
Als de ligger nu verticaal en horizontaal wordt ingeklemd (situatie 4) wordt tot het kipmoment van situatie 3 een overeenkomstig kipgedrag met deze situatie gevonden. Daarna is ook hier een verstevigingsgebied zichtbaar. Ook hier zal naar verwachting gelden dat de bezwijkspanning eerder is bereikt dan dat een horizontale asymptoot wordt gevonden. Voor deze situatie is in bijlage 2 een equivalente momentfactor van $\frac{1}{5{,}12} = 0{,}195$ gegeven. Het kipmoment zou daarmee op $\frac{16{,}83}{0{,}195} = 86\ kNm$ uitkomen. Dit kipmoment is met deze berekening niet behaald, aangezien DIANA na verloop van tijd geen evenwicht meer kon vinden. Aanpassingen in de stapgrootte of het maximum aantal iteraties zou hier verandering in aan kunnen brengen, maar dat wordt hier niet verder uitgevoerd. Het kipgedrag is lastig in te schatten, dus extrapolatie naar deze DIN waarde is dat ook. Wellicht dat het kipmoment beter zichtbaar wordt door een kleine beginexcentriciteit te kiezen, het blijft echter de vraag of een kipmoment ter grootte van 86 KnM dan zal worden behaald. Deze berekening zal hier ook niet worden uitgevoerd.

Het zou interessant zijn om een spanningstoetsing te doen op deze 2e orde berekening en de uitkomst te vergelijken met een toetsing met de instabiliteitsfactor na een 1e orde berekening. Het is de vraag of zulke grote verstevigingsgebieden zijn meegenomen in de instabiliteitsfactor aangezien het materiaal eerder bezwijkt door de grote vervormingen dan dat het werkelijke kipmoment is bereikt. De herkomst van de instabiliteitsfactor is onbekend, zodoende is het interessant een vergelijking te maken om te bekijken hoe conservatief deze factor is.

De verticale inklemming heeft duidelijk een positieve invloed op het kipgedrag van de ligger, aangezien voor situatie 2 en 4 een lang verstevigingsgebied zichtbaar is. Indien de rotatie van de ligger in het x-z vlak echter vrij kan optreden verliest de ligger eerder zijn stabiliteit. Het is daarom wenselijk een duidelijk onderscheidt te maken tussen deze twee situaties in de norm. Totdat het kipmoment van 86 kNm niet is aangetoond wordt de lezer geadviseerd gebruik te maken van de momentenfactor volgens Fruchtengarten gelijk aan 2.91 (voor geval 3.2 uit DIN [(6)]), zie tevens Tabel 3.2.

6.6 Doorlopende ligger

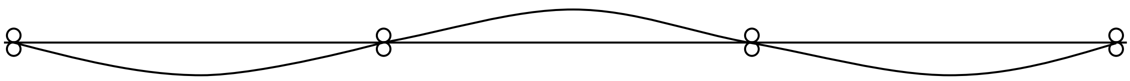
Als voorbeeld van een ligger waarbij ongelijke eindmomenten optreden in combinatie met een q-last zal worden gekeken naar een doorgaande ligger over 4 steunpunten. De 3 overspanningen met lengte l zullen worden onderzocht op kipinstabiliteit. Ter plaatse van de middelste 2 steunpunten zal een steunpuntsmoment optreden van $\frac{1}{10}ql^2$. In het midden van de middelste overspanning treedt een veldmoment op ter grootte van: $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)ql^2=\frac{1}{40}ql^2$. In de twee buitenste overspanningen is het maximale veldmoment gelijk aan: $\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha-\beta+\frac{1}{2}\right)^2-\alpha\right\}ql^2=\frac{2}{25}ql^2$. De belastingsconfiguratie en de bijbehorende momentenlijn zijn weergegeven in Figuur 6.18.



Figuur 6.18 Doorgaande ligger met bijbehorende momentenlijn

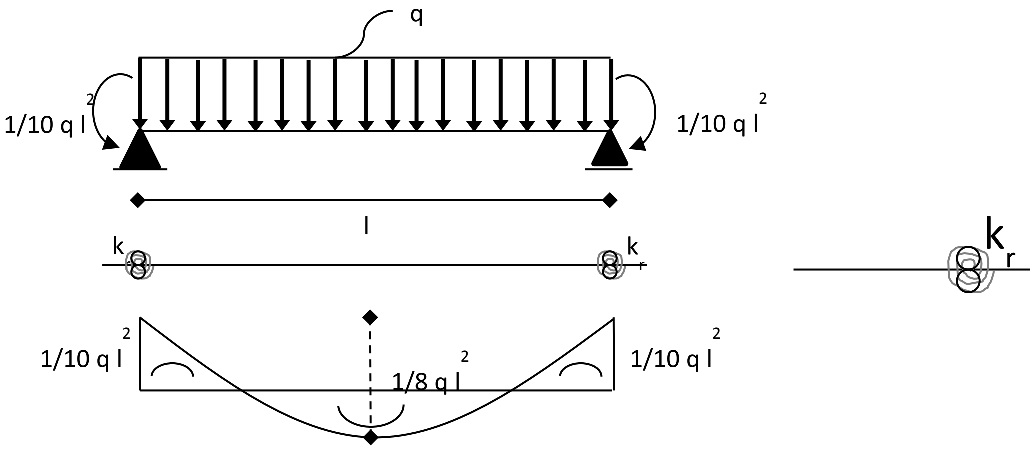
6.6.1 Middelste overspanning

Als eerste zal worden gekeken naar het kipgedrag van de middelste overspanning. De belastingsconfiguratie is weergegeven in Figuur 6.20. De eindmomentfactoren α en β zijn beide gelijk aan $\frac{1}{10}$. Dit levert een equivalente momentfactor op, volgens formule (5.64), van 0,211978. Ten opzicht van het basisgeval zal de ligger dus kippen bij een moment ter grootte van $\frac{16,83}{0.211978} = 79,4\ kNm$. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat de ligger vrij kan roteren in het x-y vlak ter plaatse van de steunpunten, terwijl in werkelijkheid deze rotatie wordt verhinderd door de doorgaande ligger. De situatie die dan ontstaat, is geschetst in Figuur 6.19.

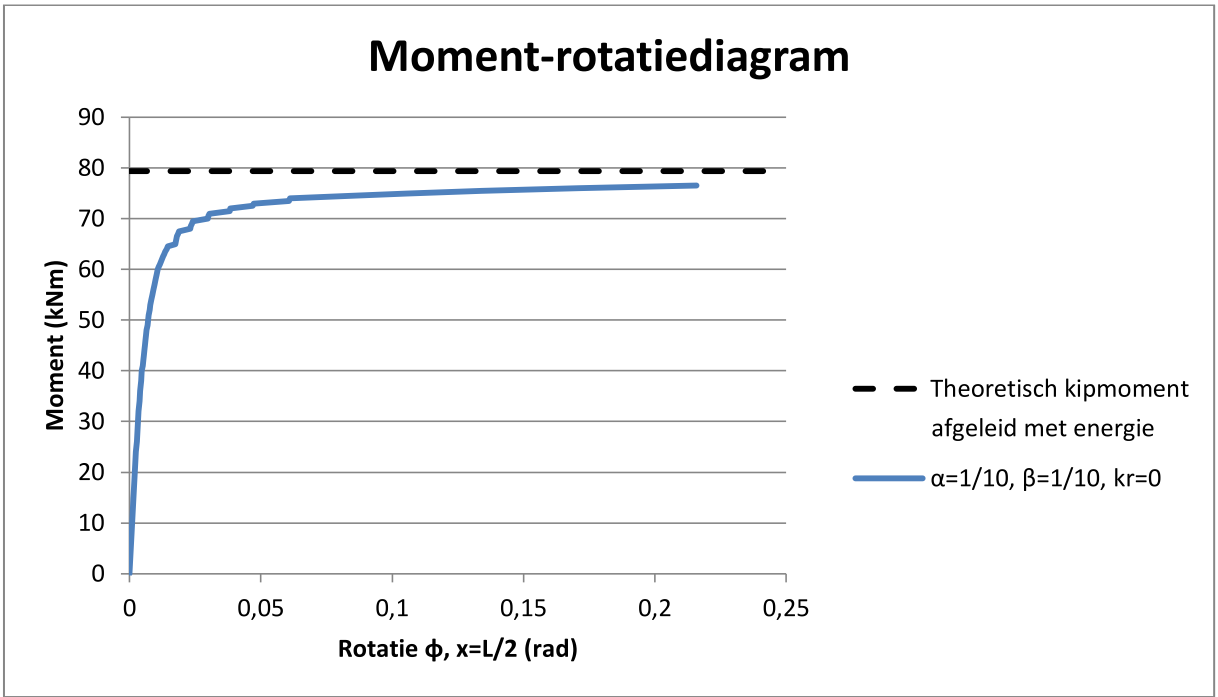


Figuur 6.19 Verhinderde rotatie in het horizontale vlak in een doorgaande ligger

Daarom zal de ligger worden gemodelleerd worden met twee rotatieveren ter plaatse van de steunpunten, zodat de rotatiestijfheid die de doorgaande ligger heeft kan worden meegenomen in de berekening. Ter plaatse van de steunpunten bevinden zich tevens gaffelopleggingen die de rotatie om de liggeras verhinderen.

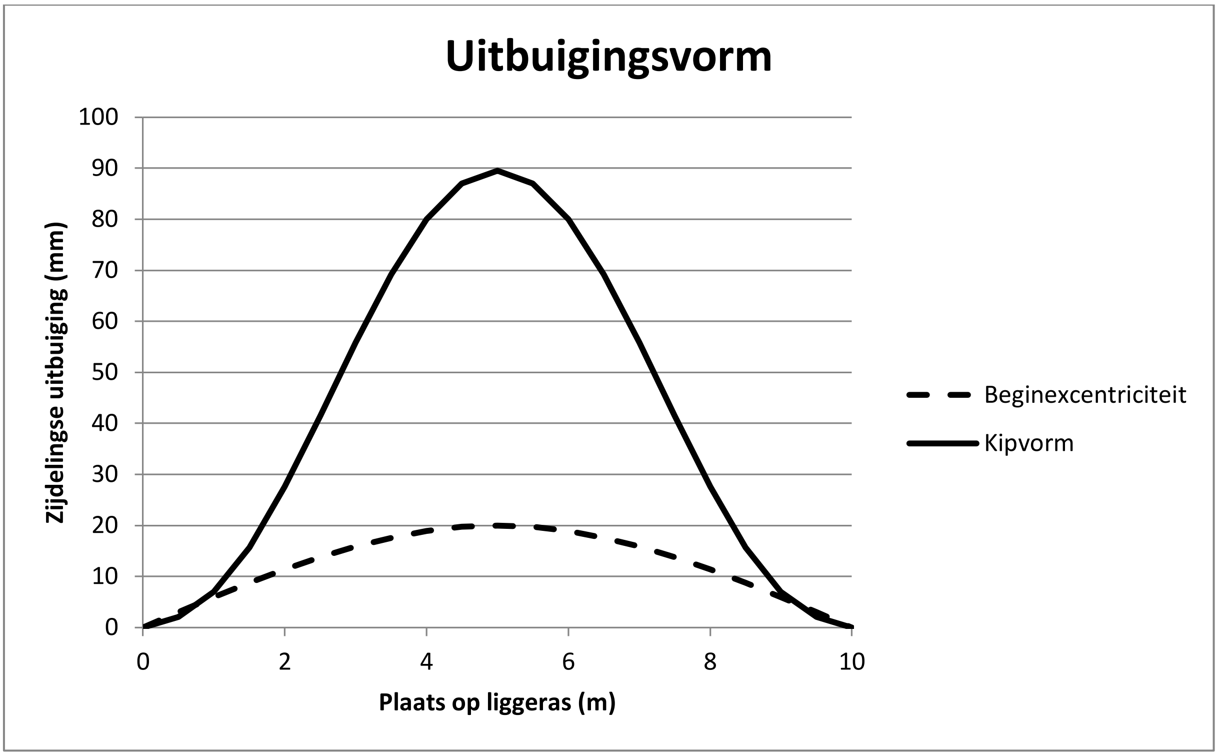


Figuur 6.20 Belastingsconfiguratie middelste overspanning met bovenaanzicht van gaffels en rotatieveren



Figuur 6.21 Moment-rotatiediagram voor belastingsconfiguratie met α=1/10, β=1/10, kr=0

Allereerst wordt er gekeken naar het kipmoment van de ligger zonder rotatieveren, oftewel met k_r=0. De ligger kan dan vrij roteren in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. De overige delen van de doorgaande ligger zijn in deze losse modellen niet gemodelleerd, zodoende wordt de uitbuigingsvorm van deze delen ook niet weergegeven. De resultaten staan weergegeven in Figuur 6.21. In het moment-rotatie diagram is te zien dat het kipmoment in goede overeenstemming is met het theoretische kipmoment wat met behulp van energievergelijkingen is afgeleid.



Figuur 6.22 Vergelijking tussen beginexcentriciteit en uitbuigingsvorm vlak voordat het kipmoment is bereikt.

Daarnaast is het interessant op te kijken naar de uitbuigingsvorm van de ligger als het kipmoment bijna is bereikt. In Figuur 6.22 is tevens de beginexcentriciteit van de ligger geplot, hierbij is goed te zien dat dit een sinusvorm is, waarbij de ligger vrij kan roteren in het horizontale vlak ter plaatse van de gaffeloplegging. De uitbuigingsvorm vlak voor het kippen ziet er echter heel anders uit. Dit wordt veroorzaakt door de negatieve eindmomenten op de ligger. Deze zorgen ervoor dat de ligger onder invloed van het veldmoment minder snel gaat kippen.

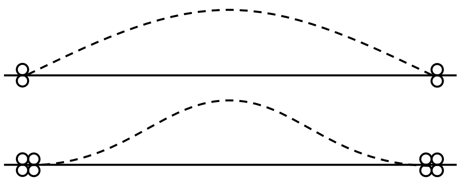
Nu de theoretische oplossing met behulp van energievergelijkingen met de belastingsconfiguratie vergeleken is zal ook worden gekeken naar dezelfde belastingsconfiguratie met rotatiestijfheden ongelijk aan nul. De rotatiestijfheid voor de doorgaande ligger kan eenvoudig afgeleid worden met behulp van vergeet-me-nietje 4 uit bijlage 6:

$$\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{Tl}{EI}$$

De uitdrukking kan vervolgens worden herschreven tot:

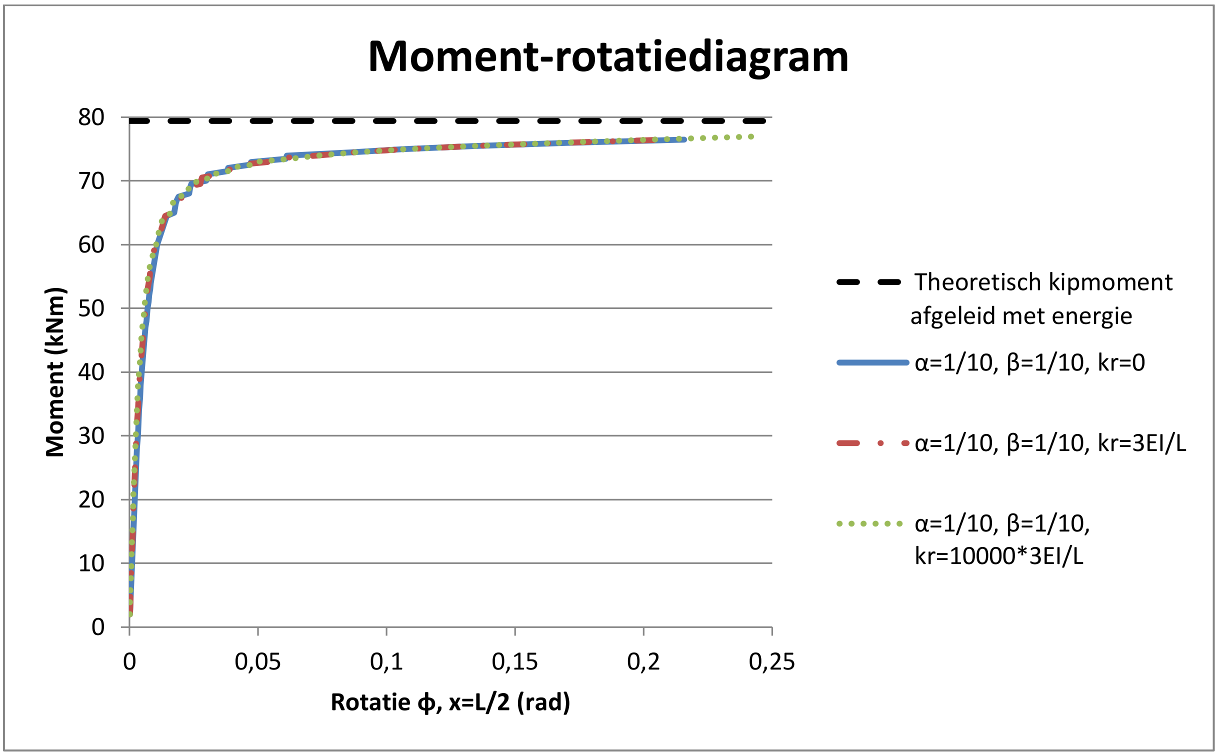
$$T = k_r \theta_2 \text{ met } k_r = \frac{3EI}{l}$$

Met deze rotatiestijfheid kan de invloed van een doorgaande ligger op het kipmoment worden bepaald. Daarnaast zal worden bekeken wat de invloed is van rotatieveren die vrijwel oneindig stijf zijn, dan ontstaat een situatie waarbij de ligger ter plaatse van de gaffelopleggingen niet kan roteren in het x-y vlak. In werkelijkheid is dit te vergelijken met een dubbele gaffeloplegging, zie Figuur 6.23.



Figuur 6.23 Bovenaanzicht met uitbuigingsvorm gaffeloplegging en dubbele gaffeloplegging

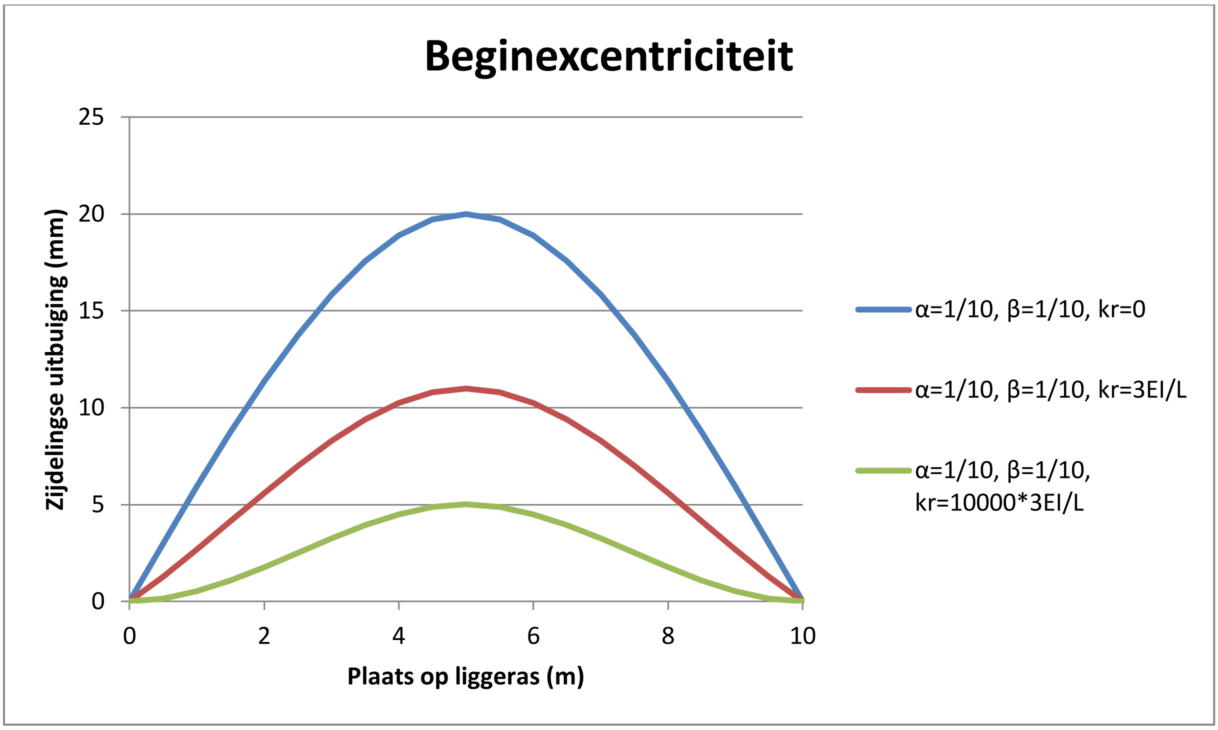
Om enorm grote getallen in de stijfheidsmatrix te voorkomen, is ervoor gekozen om voor oneindig stijve rotatieveren een waarde te kiezen die 10.000 maal zo groot is als de rotatiestijfheid van een doorgaande ligger. De resultaten zijn weergegeven in Figuur 6.24.



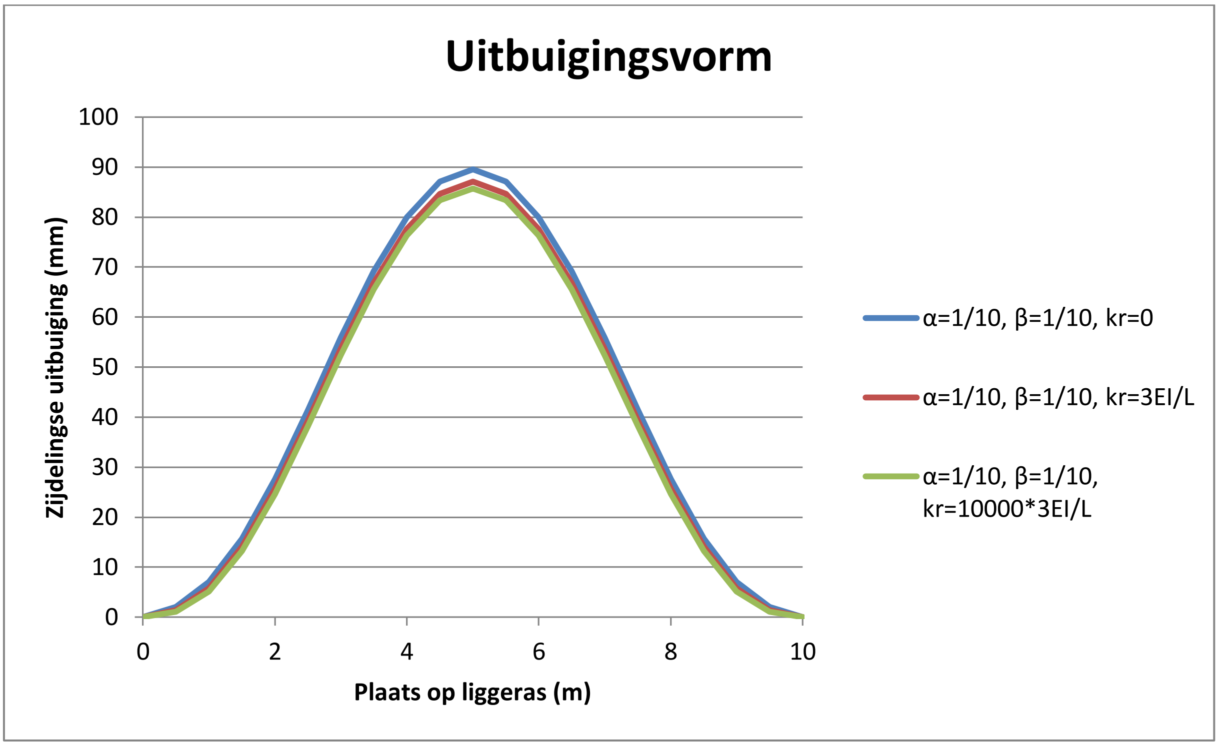
Figuur 6.24 Moment-rotatiediagram voor belastingsconfiguratie met α=1/10, β=1/10 en oplopende rotatiestijfheid kr

In het moment-rotatiediagram is geen grote toename te zien in het kipmoment. Dit is tegen de verwachting in, aangezien de rotatiestijfheden zijn toegenomen. De verandering van rotatiestijfheden is goed terug te zien in de beginexcentriciteit die de ligger aanneemt doordat er een kleine horizontale kracht op de ligger word geplaatst. De rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de steunpunten gaat naar nul toe als de rotatiestijfheid naar oneindig gaat.

Als nu wordt gekeken naar de uitbuigingsvorm vlak voordat het kipmoment is bereikt (Figuur 6.26) blijkt er weinig verschil te zijn in deze uitbuigingsvormen. Doordat er negatieve eindmomenten aanwezig zijn op de liggereinden is de uitbuigingsvorm zonder rotatieveren vrijwel gelijk aan de uitbuigingsvormen met toenemende rotatiestijfheid. Dit is dan ook de verklaring waarom het kipmoment, tegen de verwachting in, niet toeneemt bij toenemende rotatiestijfheid. Volgens Fruchtengarten, zie Tabel 3.4, is de invloed van oneindige rotatieveren voor een q-last met inklemmingen ook veel kleiner dan zonder inklemmingen. Dit belastingsgeval met eindmomenten gelijk aan $\frac{1}{10}ql^2$ staat daarin echter niet beschreven, maar zal dus een te verwaarlozen invloed hebben, met een minimale inklemmingsfactor vrijwel gelijk aan 1.



Figuur 6.25 Vergelijking beginexcentriciteit voor belastingsconfiguratie met α=1/10, β=1/10 en toenemende rotatiestijfheid kr, de beginexcentriciteit verschilt doordat de horizontale kracht constant is gehouden bij toenemende rotatiestijfheid

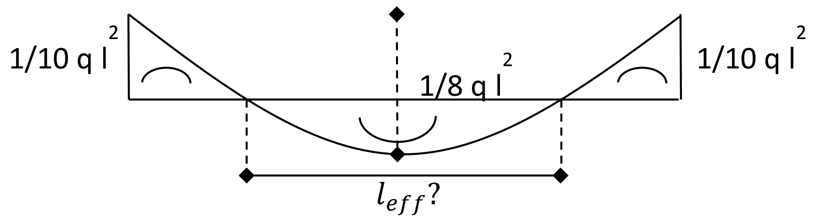


Figuur 6.26 Uitbuigingsvorm voor belastingsconfiguratie met α=1/10, β=1/10 en toenemende kr vlak voordat Mcrit is bereikt

Uiteraard is het kipmoment wel toegenomen door toevoeging van de negatieve eindmomenten, deze eindmomenten zijn alleen in de situatie van een doorgaande ligger aanwezig. Zodoende heeft de doorgaande ligger wel een voordeel als deze vergeleken wordt met een q-last op een ligger met twee steunpunten zonder eindmomenten. Bij deze berekening is de horizontale kracht, welke de beginexcentriciteit veroorzaakt, constant gehouden bij verhoging van de rotatiestijfheden. Hierdoor is de beginexcentriciteit niet constant, echter heeft dit zoals eerder in paragraaf 6.2.2 bepaald geen invloed op het kipmoment.

6.6.1.1 Vergelijking met de praktijk

In de praktijk zou een constructeur de effectieve kiplengte gelijk kunnen stellen aan de afstand tussen de momentennulpunten in de momentenlijn omdat door buiging tussen de nulpunten de ligger in één en dezelfde richting kromt. Dan ontstaat de situatie zoals geschetst in Figuur 6.27.



Figuur 6.27 Kan de effectieve kiplengte zomaar gelijk worden gesteld aan de afstand tussen de momentennulpunten?

Deze afstand kan eenvoudig worden berekend door de momentenlijn gelijk aan 0 te stellen:

$$\frac{1}{2}qx(l-x)-\frac{1}{10}ql^2=0 \tag{6.10}$$

Deze vergelijking heeft als oplossingen x=0.276L en x=0.724L. De afstand tussen de momentennulpunten bedraagt dus 0.45 L. Aangezien tussen de momentennulpunten een q-last aanwezig is kan voor een equivalente momentfactor van 0.88 worden gekozen. De totale effectieve kiplengte zou dan op $0.88 \cdot 0.45 = 0.396$ uitkomen.Het kipmoment volgens deze redenering komt uit op: $\frac{16.8}{0.396} = 42{,}4\ kNm$. Dit lijkt aan de veilig kant, maar als gekeken wordt naar de maximale belasting q waarbij dit kipmoment optreedt wordt er voor de kipbelasting gevonden:

$$M_{max}=\frac{1}{40}ql^2=42{,}4\ kNm\ \Rightarrow q=17\ kN/m \tag{6.11}$$

Voor deze ligger wordt volgens de vorige paragraaf voor de kipbelasting gevonden:

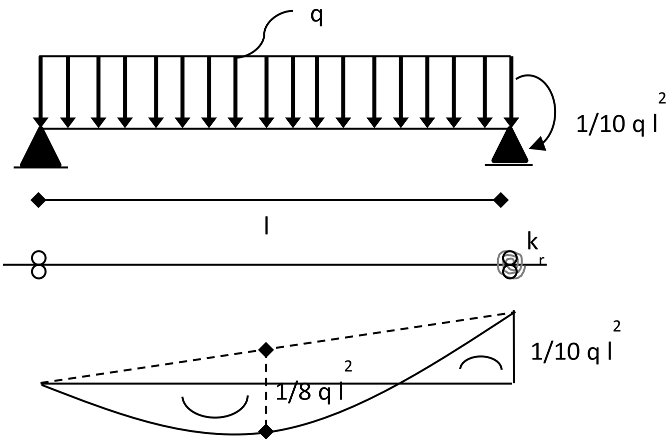
$$M_{max}=\frac{1}{10}ql^2=79{,}4\ kNm\ \Rightarrow q=8\ kN/m \tag{6.12}$$

De kipbelasting bepaald met de afstand tussen de momentennulpunten ligt dus ruim 2x zo hoog als de kipbelasting afgeleid met behulp van energievergelijkingen en geverifieerd met een EEM berekening. Het is derhalve af te raden methoden te gebruiken welke niet theoretisch zijn onderbouwd of geverifieerd met behulp van eindige elementen berekeningen.

Een verklaring voor de afwijking van de methode is dat er geen gaffelsteunen aanwezig zijn op de momentennulpunten, derhalve is de rotatie op die plaats ongelijk aan nul, terwijl volgens de uitgevoerde berekeningen wel een gaffelsteun aanwezig is op deze locaties. Doordat de ligger wel kan roteren op de momentennulpunten zal uiteraard een lagere kipbelasting worden gevonden.

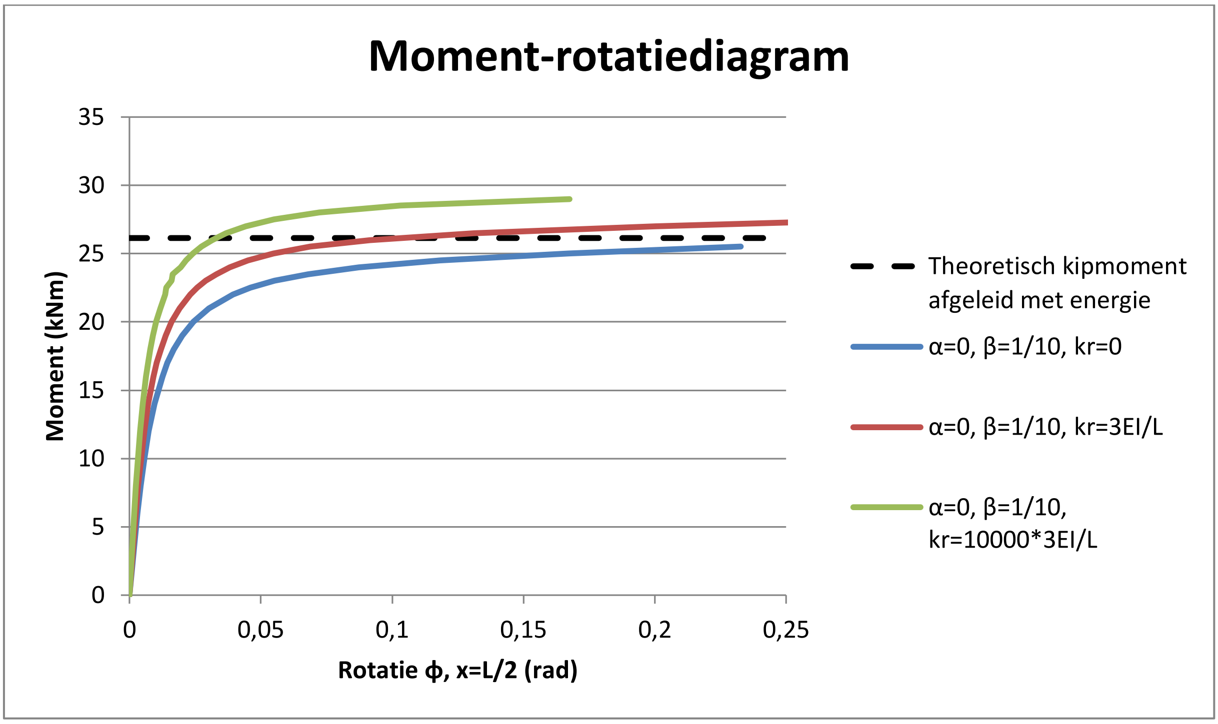
6.6.2 Buitenste overspanning

De linker overspanning uit Figuur 6.18 zal hier nader bekeken worden. De rechter overspanning is het spiegelbeeld hiervan en zal in resultaten ook het spiegelbeeld zijn. De buitenste overspanning heeft alleen een rotatieveer ter plaatse van het rechter steunpunt en heeft ongelijke negatieve eindmomenten. De momentenfactoren zijn: $\alpha = 0, \beta = \frac{1}{10}$. De belastingsconfiguratie is weergegeven in Figuur 6.28.



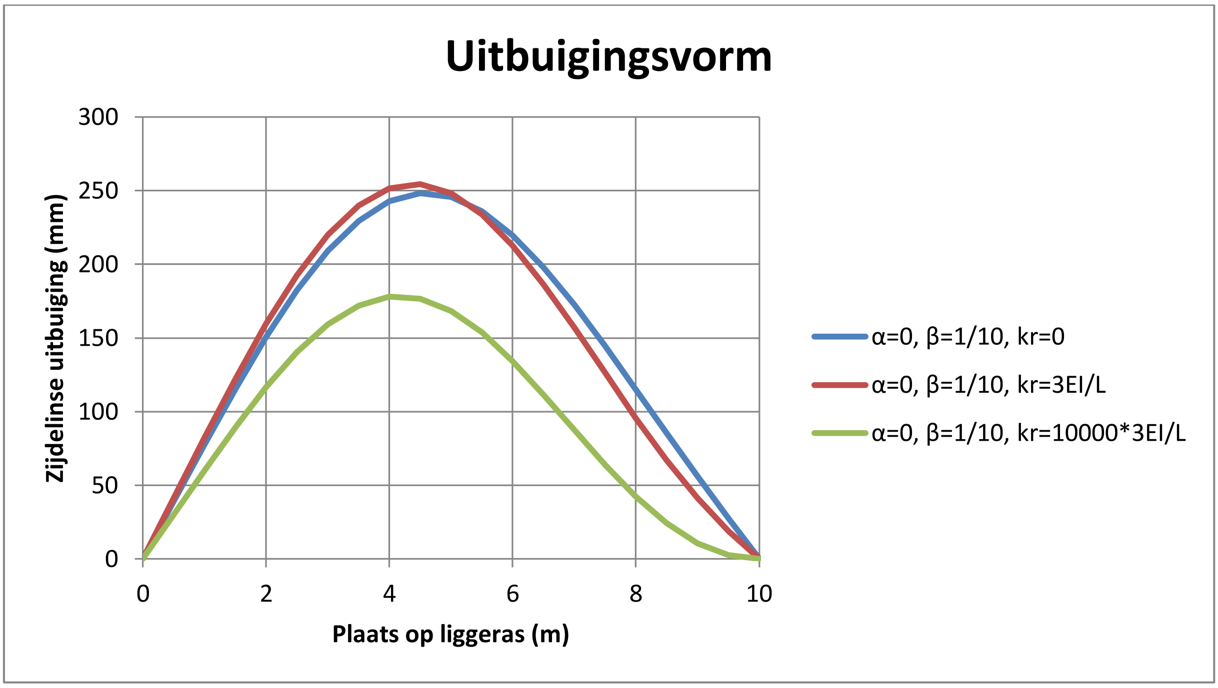
Figuur 6.28 Belastingsconfiguratie voor linker overspanning van de doorgaande ligger met bijbehorende momentenlijn

De equivalente momentfactor voor deze belastingsconfiguratie bedraagt volgens formule (5.64): 0,644. Het theoretische kipmoment voor deze ligger bedraagt dus $\frac{16{,}8}{0{,}644} = 26{,}1\ kNm$. Ook hier zullen 3 situaties bekeken worden: k_r=0, k_r=3EI/L en k_r=10000x3EI/L.



Figuur 6.29 Moment-rotatiediagram voor belastingsconfiguratie α=0, β=1/10

In Figuur 6.29 is goed te zien dat het kipmoment zonder rotatiestijfheid overeenkomt met de theoretische waarde. Voor toenemende rotatiestijfheid neemt het kipmoment toe tot tegen de 30 kNm. Kennelijk heeft de rotatiestijfheid hier wel invloed op het kipmoment. Dit is te verklaren met behulp van Figuur 6.30.



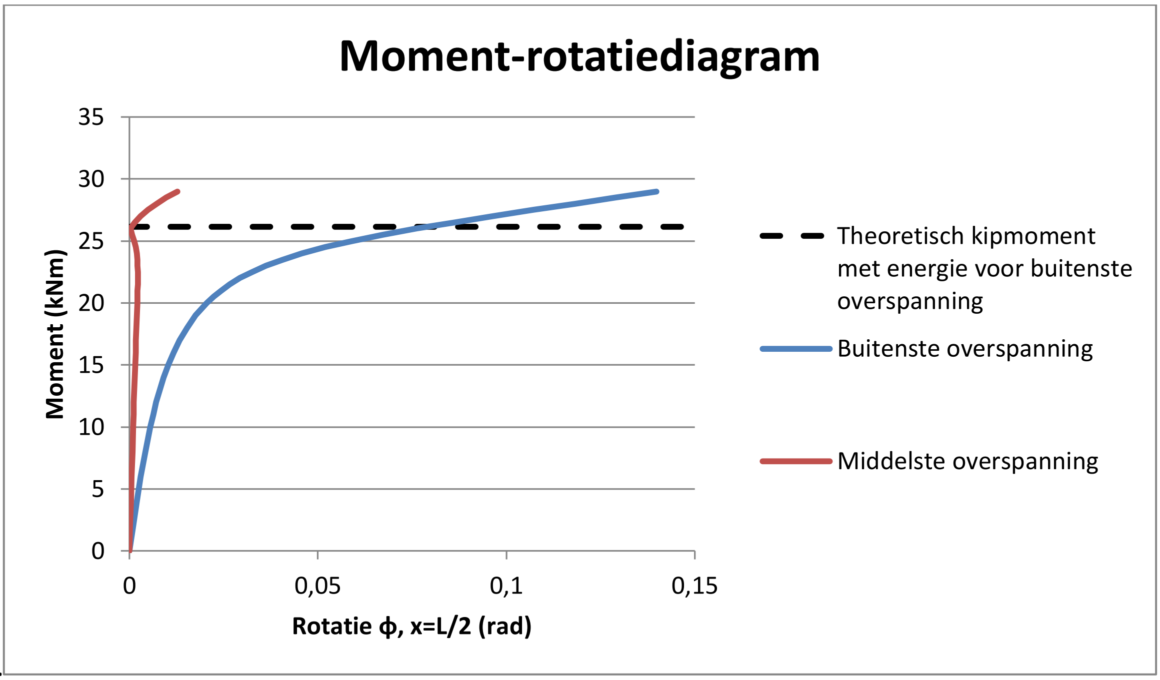
Figuur 6.30 Uitbuigingsvorm voor belastingsconfiguratie α=0, β=1/10

Hierin is goed te zien dat de ligger zonder rotatiestijfheid een uitbuigingsvorm heeft die vrijwel een sinus betreft, vlak voordat het kipmoment word bereikt. Bij toenemende rotatiestijfheid begint de uitbuigingsvorm steeds meer te lijken op de knikvorm van een eenzijdig ingeklemde kolom. Aangezien de uitbuigingsvormen bij deze belastingsconfiguratie wel degelijk verschillen voor wisselende rotatiestijfheden heeft dit ook invloed op de grootte van het kipmoment.

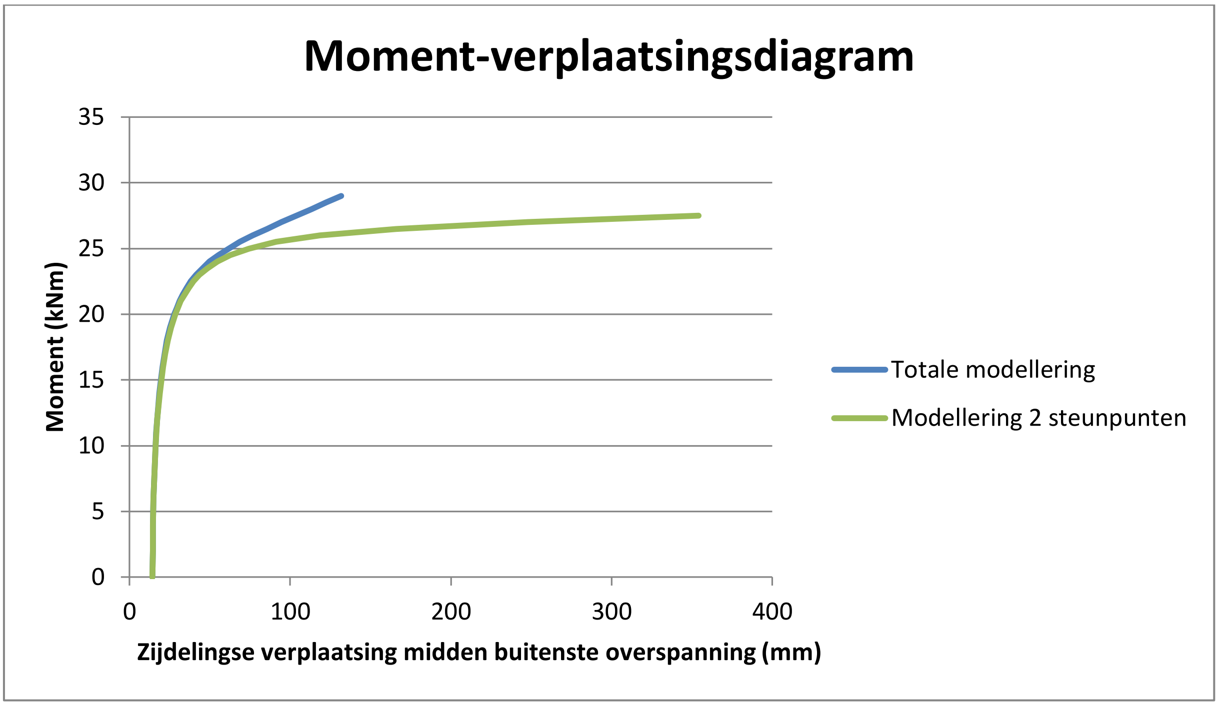
6.6.3 Modellering van de complete ligger

Nu het kipgedrag van de losse overspanningen bekend is, zal worden bekeken wat het kipgedrag van de complete ligger over 4 steunpunten is. De ligger zal over de complete lengte met een q-last worden belast. De resultaten zijn te zien in Figuur 6.31. Zoals de verwachting was, zou de buitenste overspanning als eerste gaan kippen, aangezien het kipmoment van de middelste overspanning veel hoger lag. Er is goed te zien dat de rotatie om de liggeras van de buitenste overspanningen groter is dan de rotatie in het midden van de middelste overspanning. De buitenste overspanning kipt, maar nadert niet naar een horizontale asymptoot. Dit wordt veroorzaakt door het feit dat de middelste overspanning nog niet instabiel geworden is, de buitenste overspanningen ontlenen hun evenwicht hieraan. Zodoende zal na het kippen van de buitenste overspanningen, de middelste ligger extra worden belast door momenten in het horizontale vlak ter plaatse van de middelste twee steunpunten. De rotatie in het horizontale vlak ter plaatse van deze steunpunten moet namelijk aan elkaar gelijk zijn, zodoende moet de middelste ligger volgen. Na verloop van tijd zal ook de middelste overspanning bezwijken. Het is echter al onwenselijk dat de buitenste overspanningen grote vervormingen laten zien, daarom kan de ligger het beste worden gecontroleerd op het kippen van de buitenste overspanningen.

Te zien is dat het kipmoment vrij goed overeenkomt met de theoretische waarde, het is lastig een exact punt aan te geven, maar op basis van een vergelijking van de zijdelingse verplaatsing in het midden van de buitenste overspanning kan worden geconcludeerd dat het kipmoment minstens net zo hoog ligt als bij de modellering op 2 steunpunten met werkelijke rotatiestijfheid, zie Figuur 6.32.



Figuur 6.31 Moment-rotatiediagram voor de complete doorgaande ligger

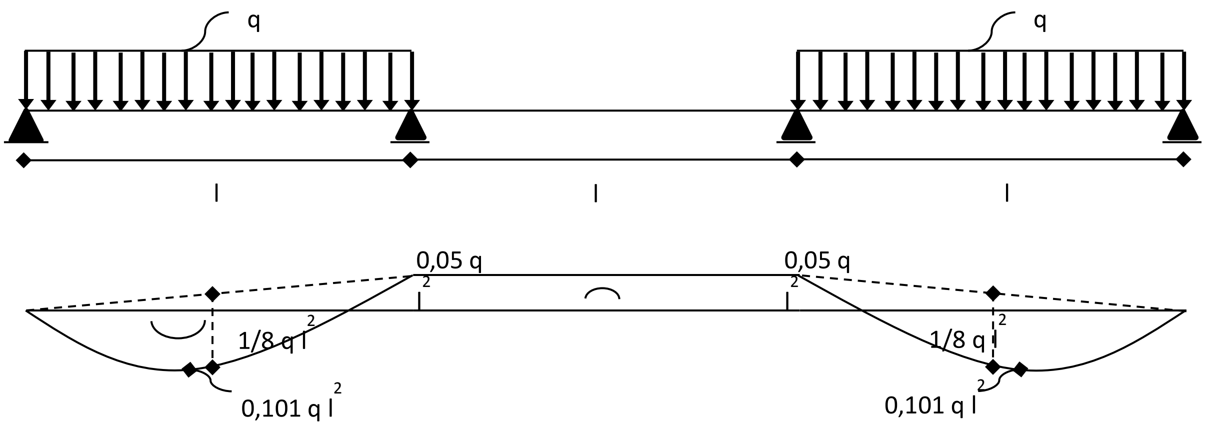


Figuur 6.32 Vergelijking zijdelingse verplaatsing tussen het totale model en de ligger op 2 steunpunten

Op Figuur 6.32 is tevens te zien dat de zijdelingse verplaatsing van de ligger vergelijkbaar is met het model op 2 steunpunten totdat de verplaatsingen groter worden en het kipmoment nadert. Daarna zorgt de middelste overspanning voor een verstevigingsgebied omdat dit de enigste overspanning is welke nog niet instabiel is geworden door het kippen van de overspanning. De buitenste overspanningen ontlenen hier hun evenwicht aan, dit is uiteraard niet zichtbaar is in de resultaten van de losse modellen op 2 steunpunten.

6.6.4 Belastingcombinaties

Tot nu toe is ervan uitgegaan dat de q-last aanwezig was op alle velden van de doorgaande ligger. Als echter alleen de buitenste overspanningen waren belast met een q-last dan zou de situatie geschetst in Figuur 6.33 zich voordoen.



Figuur 6.33 Belastingssituatie met alleen de buitenste velden belast

De equivalente momentfactor voor de buitenste overspanning bedraagt volgens formule (5.64) nu: m=0.853. Zodoende wordt een kipmoment ter grootte van $\frac{16,8}{0.853} = 19,7\ kNm$ gevonden. Hierbij is uitgegaan van vrije rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de steunpunten en is geen rekening gehouden met een rotatiestijfheid die in werkelijkheid wel aanwezig is. Een eindige elementen berekening levert een kipmoment op van 22 kNm. Hierin is het positieve effect van de rotatieveer terug te zien.

Het is belangrijk om te zien dat deze nieuwe belastingcombinatie een kleiner kipmoment oplevert dan in eerste instantie was berekend. Daarom is het van belang dat de meest ongunstige belastingcombinatie wordt gecontroleerd op kipinstabiliteit.

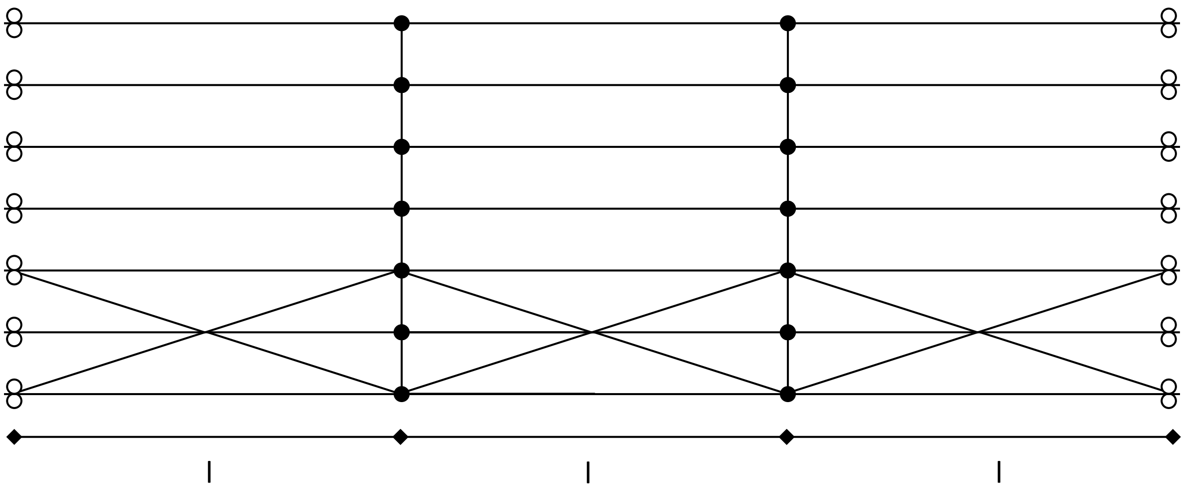
6.7 Ligger met zijdelingse kipsteunen

Zoals reeds eerder behandeld kan het kipmoment voor een ligger op 2 steunpunten vrij eenvoudig worden bepaald. Als het optredende moment door de belasting op de ligger echter groter is dan het kipmoment, zal naar een oplossing moeten worden gezocht om de stabiliteit van de ligger te garanderen. Zo zouden andere afmetingen, andere sterkteklasse of andere oplegcondities gezocht kunnen worden. Ervan uitgaande dat kip maatgevend is, is het niet wenselijk de afmetingen of sterkteklasse te vergroten aangezien dat niet de meest efficiënte oplossing is. Door de oplegcondities te veranderen kan de stabiliteit van de ligger wellicht wel worden gegarandeerd.

Bij een ligger op 2 steunpunten word ervan uitgegaan dat ter plaatse van de steunpunten gaffelopleggingen zijn geplaatst waardoor de rotatie om de liggeras wordt verhinderd. Als nu niet alleen bij de steunpunten maar ook op een of meerdere plaatsen in de overspanningen gaffels worden aangebracht, wordt ook daar de rotatie verhinderd. Hiermee wordt het ongesteunde deel van de ligger bijvoorbeeld gereduceerd tot L/3, wat het kipmoment aanzienlijk vergroot als uit mag worden gegaan van de nieuwe ongesteunde lengte L/3.

Figuur 6.34 Toepassing van zijdelingse kipsteunen bij de stationsoverkapping van Rotterdam centraal

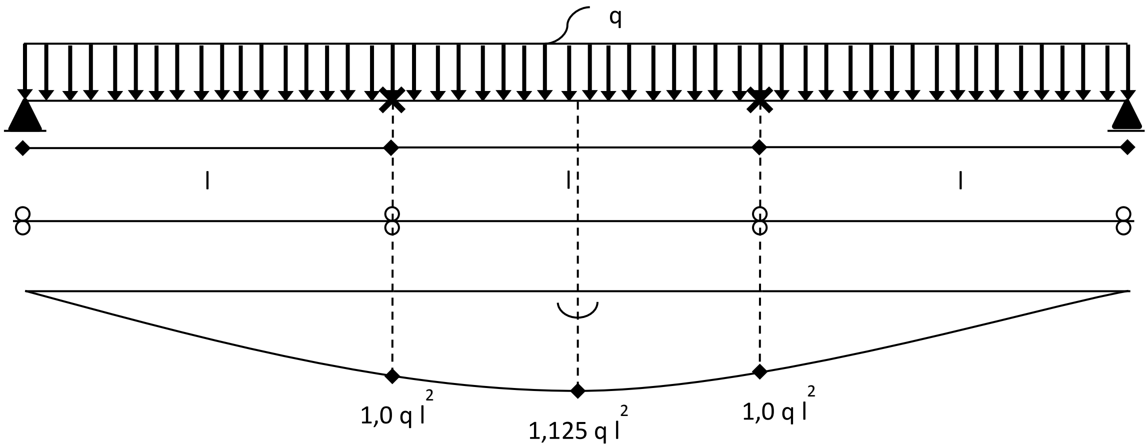
Om een gaffelconditie te garanderen moet de rotatie om de liggeras en de zijdelingse verplaatsing worden verhinderd. Dit kan worden verzekerd door aan de boven en onderzijde een kipsteun te plaatsen die de uitbuiging in de zijdelingse richting en de rotatie om te liggeras verhinderen. Deze kipsteunen zijn bijvoorbeeld toegepast in de stationsoverkapping van station Rotterdam Centraal. Op Figuur 6.34 is te zien dat op de afstanden 0.25L, 0.5L en 0.75L kipsteunen op de ligger zijn geplaatst. Afhankelijk van het aantal sporen wat overspannen moet worden, zijn in de stationsoverkapping 2 of 3 kipsteunen per ligger geplaatst. Het bovenaanzicht van een overspanning met 2 kipsteunen is te zien in Figuur 6.35.



Figuur 6.35 Bovenaanzicht liggers met kipsteunen op station Rotterdam centraal

Aangezien enkel kipsteunen, tussen alle onderlinge liggers, het gelijktijdig kippen van alle liggers kan veroorzaken zijn er kruisverbanden geplaatst. Deze zullen de horizontale krachten afvoeren naar de hoofdliggers.

In Figuur 6.36 is de belastingssituatie te zien voor een enkele ligger belast met een q-last en zijdelings gesteund door 2 kipsteunen op 1/3 en 2/3 van de overspanning. Deze situatie zal in de volgende paragrafen worden bestudeerd, daarbij wordt aangenomen dat de kipsteunen aan boven- en onderzijde kunnen worden opgevat als een volledige gaffelsteun.



Figuur 6.36 Schematisatie van een enkele ligger met 2 kipsteunen

6.7.1 Model voor buitenste ongesteunde delen

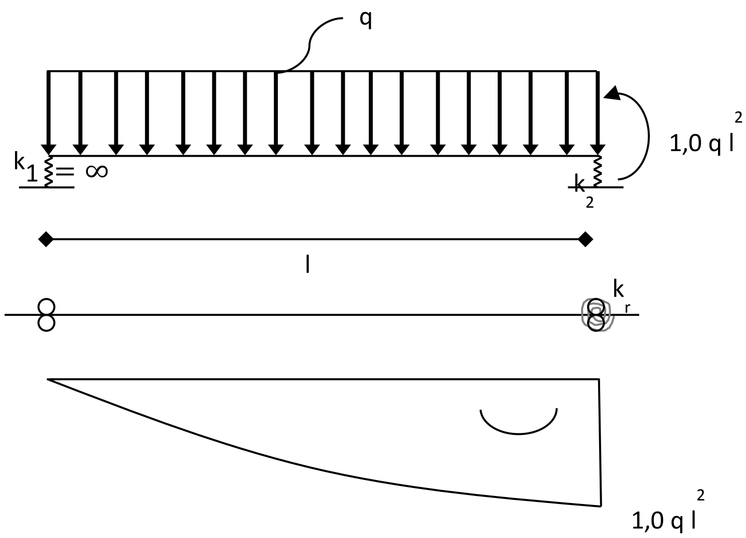
Er zal eerst worden gekeken naar het kipgedrag van de buitenste ongesteunde delen. Vanaf nu zal de lengte van een ongesteund deel de lengte l worden genoemd, zoals reeds aangegeven in Figuur 6.35. De momentenlijn van de ligger is bekend, zodoende kan het moment op 1/3 van de originele overspanning worden bepaald:

$$M\left(\frac{L}{3}\right) = \frac{1}{2}qx(l-x) = \frac{1}{2}q\frac{L}{3}\left(L-\frac{L}{3}\right) = \frac{1}{9}qL^2 = 1.0ql^2 \tag{6.13}$$

Het kipmoment zou bepaald kunnen worden met de oplossing voor liggers op 2 steunpunten met een q-last en ongelijke negatieve eindmomenten. Het verschil met de werkelijke situatie is echter dat er geen 2 vaste steunpunten zijn, aangezien alleen een kipsteun aanwezig is, en de verticale verplaatsing ter plaatse van de kipsteun niet verhinderd wordt. Dit zou theoretisch gezien geen invloed moeten hebben op het kipmoment, aangezien de differentiaalvergelijking voor de verticale verplaatsing is losgekoppeld van de differentiaalvergelijking die het kipgedrag beschrijft. Zolang het positieve eindmoment ter grootte van $1{,}0\ q\ l^2$ wordt meegenomen in de berekening zou dit dezelfde uitkomst moeten leveren. Met momentenfactoren α=0, β=-1 komt de equivalente momentfactor volgens formule (5.64) uit op 0.635 en daarmee het kipmoment op $\frac{16{,}83}{0.635} = 26{,}5\ kNm$.

Om de werkelijkheid (zonder steunpunt en met kipsteun) te vergelijken met het model op 2 steunpunten met eindmomenten zal het buitenste ongesteunde deel worden gemodelleerd als weergegeven in Figuur 6.37.

In het model zijn de opleggingen vervangen door translatieveren met veerstijfheden k_1 en k_2. Voor het linker ongesteunde deel zal k_1 naar oneindig gaan, aangezien dit een vaste oplegging betreft. In de modellering in DIANA is een waarde ingevuld die ten opzicht van k_2 zeer groot is om zeer grote getallen in de stijfheidsmatrix te voorkomen.



Figuur 6.37 Belastingssituatie voor buitenste ongesteunde delen met momentenlijn

De veerstijfheid k_2 volgt uit $V = k_2 \cdot w$, waarin V de dwarskracht is en w de zakking van de originele ligger. De dwarskracht is gelijk aan de eerste afgeleide van het moment:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{2}qL - qx \tag{6.14}$$

De zakking van de ligger kan worden opgelost uit de differentiaalvergelijking: $-EI\frac{d^2w}{dx^2} = M(x)$. Dit levert:

$$w(x) = \frac{1}{24}\frac{qx^4}{EI} - \frac{1}{12}\frac{qLx^3}{EI} + \frac{1}{24}\frac{qL^3x}{EI} \tag{6.15}$$

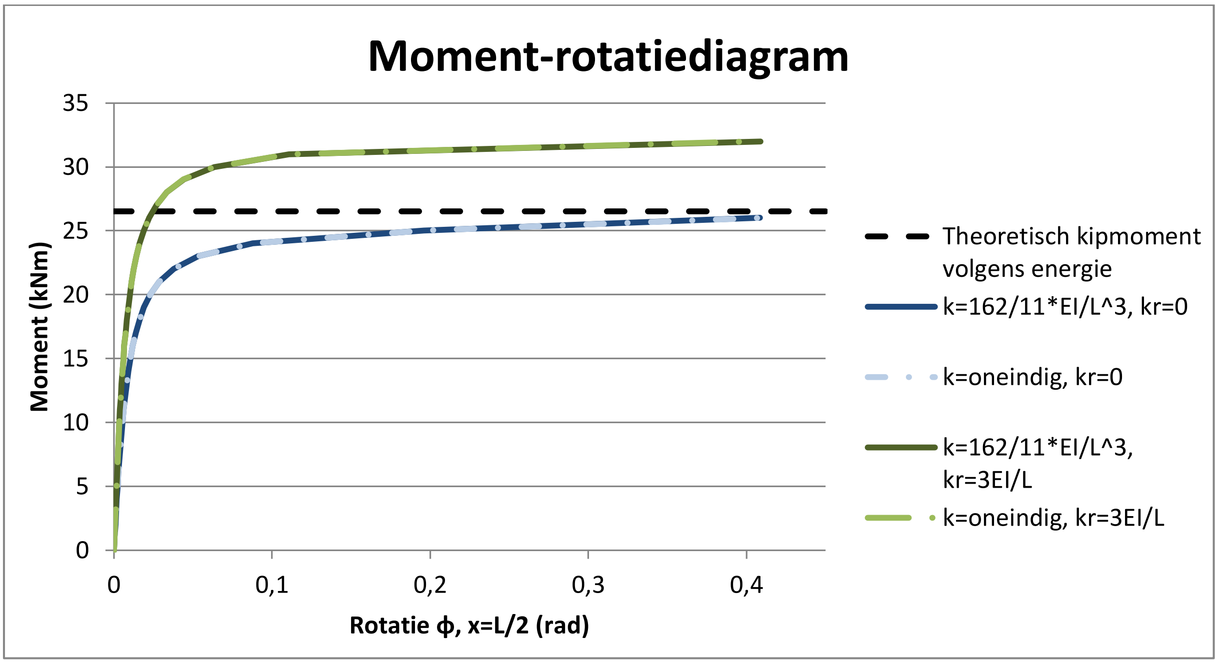
Vervolgens kan voor de veerstijfheid k_2 worden geschreven:

$$k_2 = \frac{V}{w} = \frac{12(L-2x)EI}{x(x^3 - 2Lx^2 + L^3)} \tag{6.16}$$

Op 1/3 van de overspanning L levert dat voor de veerstijfheid k_2:

$$k_2 = \frac{162}{11}\frac{EI}{L^3} \tag{6.17}$$

Deze stijfheid zal worden gebruikt in het model. Voor de rotatiestijfheid k_r zal wederom een waarde van 3EI/l worden gebruikt. De modellering is uitgevoerd voor zowel de situatie met oneindige veerstijfheid k_2 als de werkelijke veerstijfheid k_2, almede met en zonder werkelijke rotatiestijfheid ter plaatse van de kipsteun. De resultaten van deze 4 situaties zijn weergegeven in Figuur 6.38. Ook voor de zijdelingse verplaatsing zijn overeenkomstige resultaten te vinden. Hieruit valt af te leiden dat de situaties met en zonder oneindige translatieveer ter plaatse van de kipsteun aan elkaar gelijk zijn wat betreft het kipgedrag. De verticale verplaatsing zal uiteraard wel degelijk verschillen.

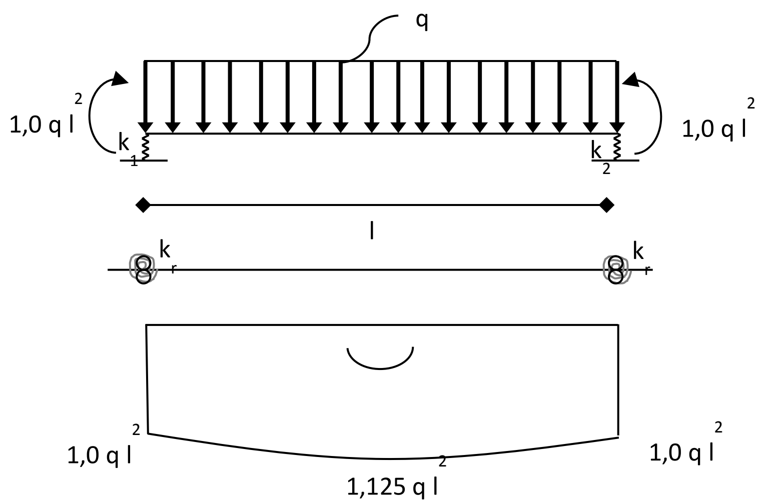


Figuur 6.38 Kipgedrag buitenste ongesteunde deel voor verschillende situaties

De situatie zonder rotatieveren levert hetzelfde kipmoment als eerder berekend volgens de theorie met een ligger op 2 steunpunten met ongelijke negatieve eindmomenten, afgeleid in paragraaf 5.9. Zoals verwacht ligt het kipmoment met rotatiestijfheid ter plaatse van de kipsteun nog iets hoger.

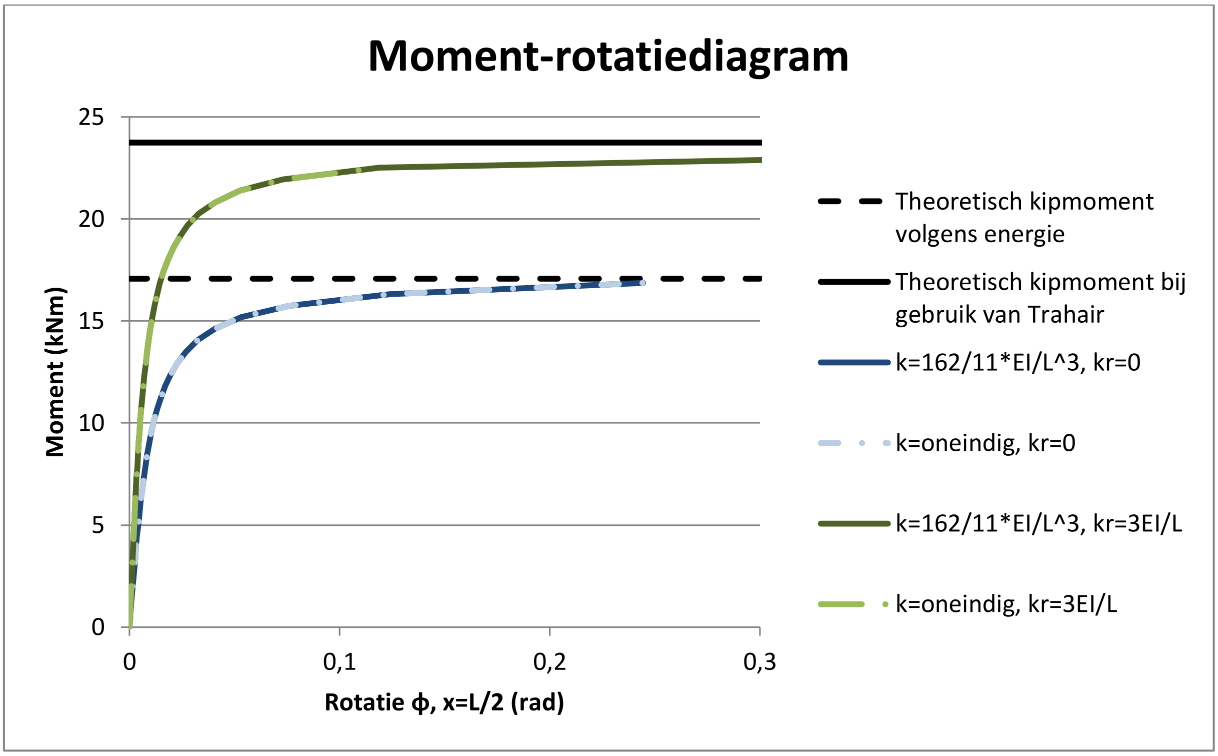
6.7.2 Model voor middelste ongesteunde deel

Voor het middelste ongesteunde deel geldt dat er aan beide kanten positieve eindmomenten aanwezig zijn. De translatiestijfheden voor beide veren zijn gelijk aan de eerder afgeleide stijfheid op L/3, zie vergelijking (6.17). In deze situatie bevinden zich aan beide uiteinden rotatieveren. Met momentenfactoren α=-1, β=-1 komt volgens formule (5.64) de equivalente momentfactor uit op 0.986 en daarmee het kipmoment op $\frac{16{,}8}{0.986} = 17{,}1\ kNm$. Met rotatiestijfheid kan het kipmoment worden geschat met behulp van een inklemmingsfactor gelijk aan 0.72 (volgens Trahair), aangezien het moment vrijwel uniform verloopt. De inklemmingsfactor is bepaald uit Figuur 3.3.



Figuur 6.39 Belastingssituatie middelste ongesteunde deel

Het kipmoment komt daarmee uit op $\frac{17,1}{0.72} = 23,75\ kNm$. Ook hier zal het model worden doorgerekend met zowel de werkelijke als de oneindig stijve translatieveren en zowel met als zonder rotatieveerstijfheid. De resultaten van deze 4 situaties zijn weergegeven in Figuur 6.40.



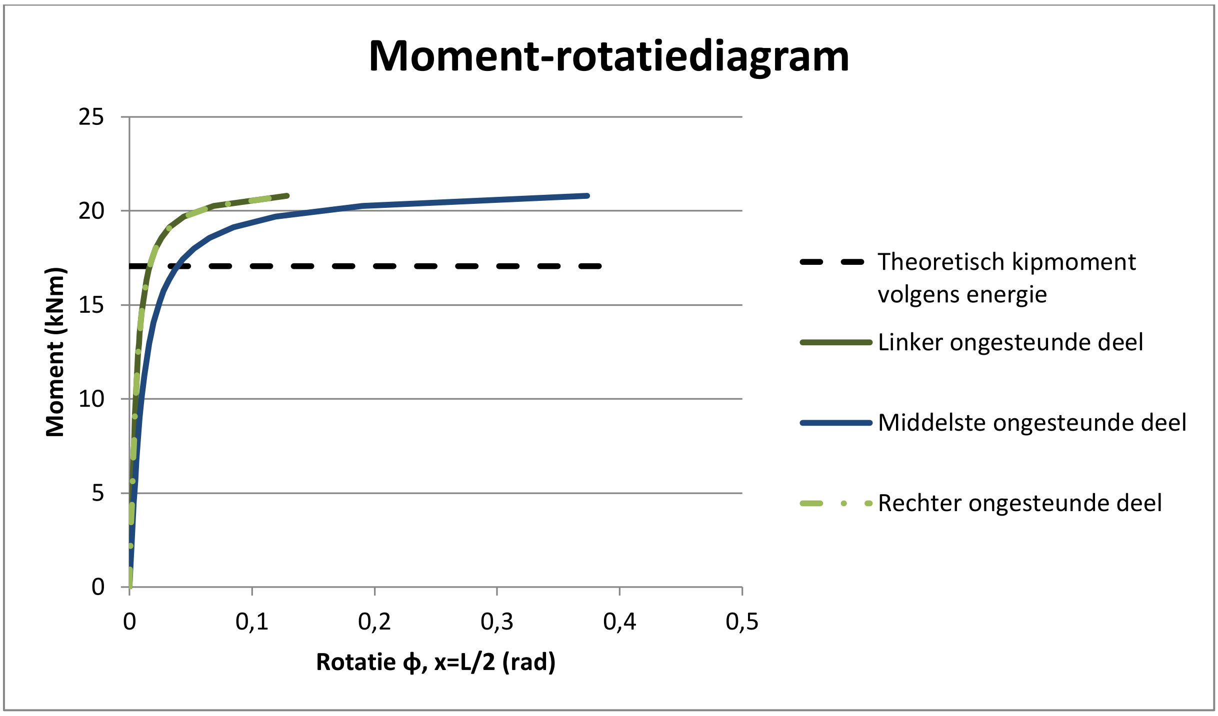
Figuur 6.40 Kipgedrag van het middelste ongesteunde deel

Hieruit valt wederom te concluderen dat de translatieveerstijfheid niet van invloed is op het kipgedrag van de ligger. Het theoretisch kipmoment, zonder rotatieveren, komt goed overeen met het kipmoment van de ligger. De rotatiestijfheid laat ook hier een positieve invloed zien op het kipmoment van de ligger en blijkt redelijk te voorspellen met behulp van de inklemmingsfactor volgens Trahair aangezien het moment vrijwel uniform verloopt over dit ongesteunde deel en dus vrijwel overeenkomt met het basisgeval. Voor de zijdelingse verplaatsing is overigens ook hier een vergelijkbare grafiek te tekenen.

6.7.3 Totale modellering

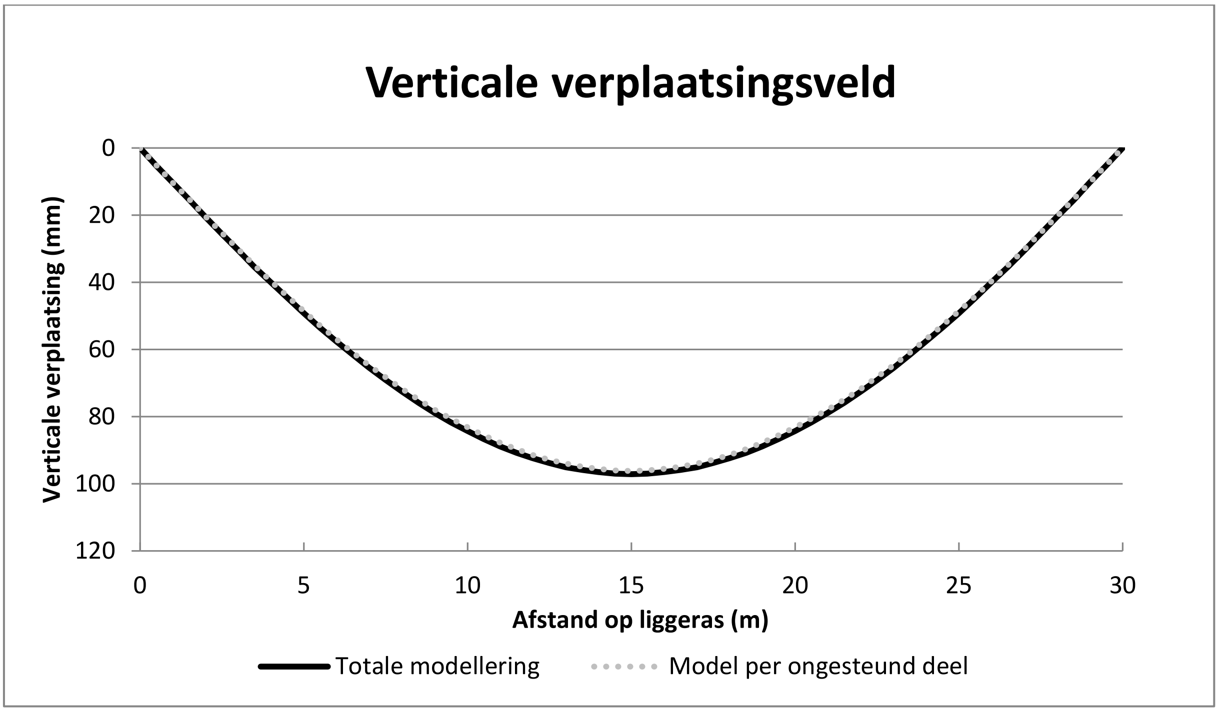
Ter controle van de voorgaande resultaten zal de totale ligger worden gemodelleerd met twee gaffelsteunen op 1/3 en 2/3 van de overspanning. Ter plaatse van de gaffelsteunen is de rotatie om de liggeras en de zijdelingse verplaatsing geblokkeerd. De resultaten zijn weergegeven in Figuur 6.41.

Hierin is goed te zien dat het middelste ongesteunde deel als eerste instabiel wordt, overeenkomstig met de theorie en de eerdere resultaten. De buitenste ongesteunde delen laten in eerste instantie een stijver gedrag zien, waarna deze ook instabiel worden aangezien deze aan het middelste ongesteunde deel vastzitten. Het kipmoment ligt ver boven de theoretische waarde zonder rotatiestijfheden, maar ligt lager dan de situatie met rotatiestijfheid in het ‘losse’-model, zie Figuur 6.40. Dit zou verklaard kunnen worden door het feit dat de rotatiestijfheid afneemt, aangezien het kipmoment van de buitenste ongesteunde delen relatief dicht bij het kipmoment van het middelste ongesteunde deel ligt. Bij de doorgaande ligger lag deze verhouding geheel anders, daardoor was daar zelfs een verstevigingsgebied zichtbaar, terwijl het kipmoment hier juist lager uitvalt dan bij het ‘losse’-model voor het ongesteunde deel.



Figuur 6.41 Resultaten van het totale model

Ter controle zal het verticale verplaatsingsveld van de complete modellering worden vergeleken met de verplaatsingsvelden van de losse modellen van de ongesteunde delen.



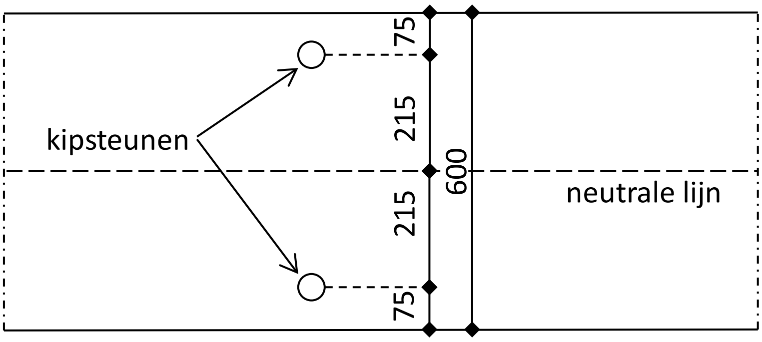
Figuur 6.42 Vergelijking van het verticale verplaatsingsveld van de verschillende modellen

Het resultaat is weergegeven in Figuur 6.42. Het verplaatsingsveld van de losse modellen komt goed overeen met het totale model. De berekende veerstijfheden voor de losse modellen waren dus correct.

6.8 Kipsteun in drukzone

In de vorige paragraaf is er vanuit gegaan dat een kipsteun aan de boven en onderzijde van de ligger opgevat kunnen worden als volledige gaffeloplegging. Er zal nu worden geverifieerd of dat wel het geval was. Tevens zal de invloed van een kipsteun aan alleen de bovenzijde (in de drukzone) van de ligger worden bekeken. De drukzone wordt namelijk zijdelings instabiel bij het kippen, terwijl de trekzijde vrij stabiel blijft. Het is echter de vraag of dit equivalent is aan een gaffeloplegging.

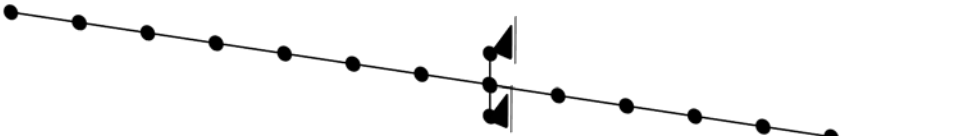
Er wordt hier vanuit gegaan dat de kipsteunen op een afstand van 215mm vanaf de neutrale lijn bevestigd zijn aan de ligger, zie Figuur 6.43.



Figuur 6.43 Positie van kipsteunen op de ligger

6.8.1 Aanpassingen aan model

Aangezien het model bestaat uit liggerelementen is het niet mogelijk de kipsteun direct op een bepaalde afstand van de neutrale lijn te plaatsen. Om toch hetzelfde effect te veroorzaken zijn daarom 2 elementen, met dezelfde eigenschappen als de houten ligger, toegevoegd aan het model ter plaatse van de kipsteunen. Deze elementen hebben een lengte gelijk aan de afstand tussen de kipsteun en de neutrale lijn.

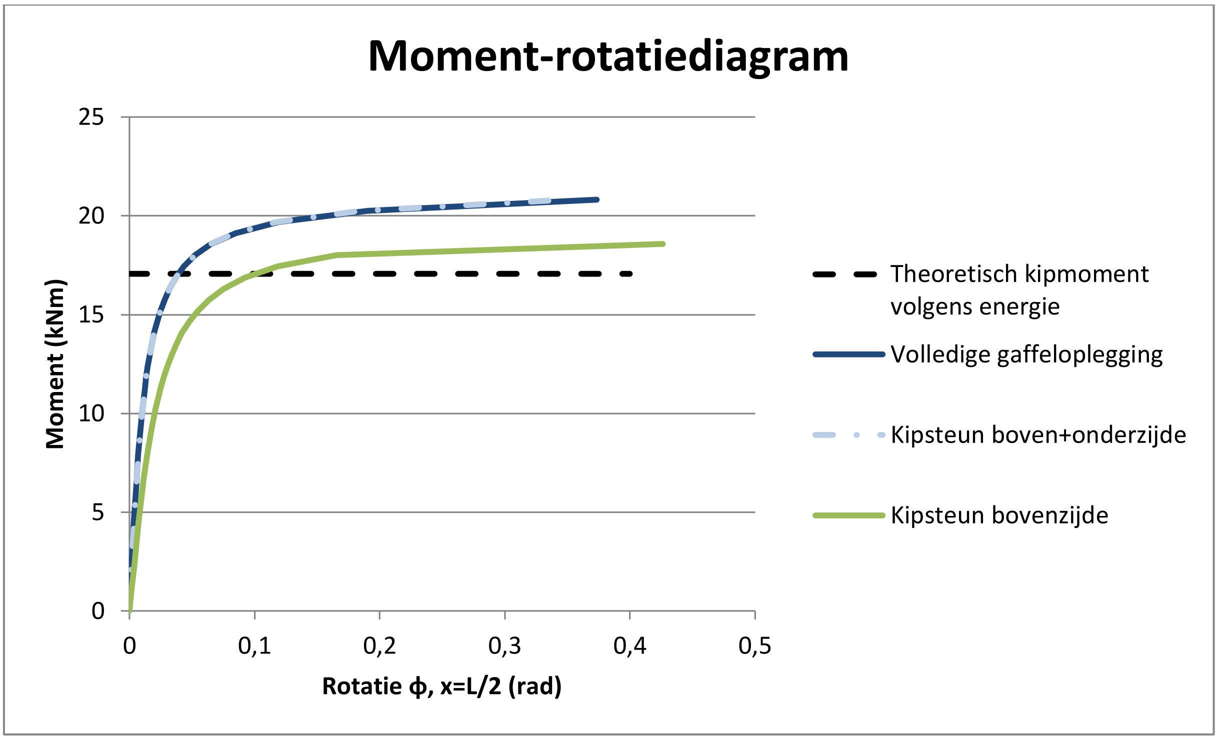


Figuur 6.44 Model met extra elementen ten behoeve van de kipsteunen

Deze elementen zijn vervolgens aan hun uiteinde opgelegd op een roloplegging, welke enkel de horizontale translatie verhinderd. In werkelijkheid zal de kipsteun zelf ook een eindige stijfheid hebben, echter wordt dit effect hier verwaarloosd.

6.8.2 Resultaten

De complete ligger uit de voorgaande paragraaf is aangepast met kipsteunen aan de boven en onderzijde van de ligger. De ligger zal worden doorgerekend met kipsteunen aan de boven en onderzijde van de ligger en met alleen een kipsteun aan de bovenzijde van de ligger. De resultaten worden vergelijken met de resultaten uit voorgaande paragraaf, zie Figuur 6.45. Hierin is de rotatie ϕ in het midden van het middelste ongesteunde deel uitgezet tegen het optredende maximale moment in de ligger.



Figuur 6.45 Vergelijking tussen gaffeloplegging en kipsteunen

Er valt te concluderen dat kipsteunen aan de boven en onderzijde van de ligger zijn op te vatten als een volledige gaffelsteun, aangezien de resultaten met elkaar overeenkomen. Een kipsteun ter plaatse van alleen de drukzone (bovenzijde) is echter niet equivalent aan een gaffelsteun, het kipmoment is duidelijk afgenomen. Dit kan verklaard worden door het feit dat de rotatie niet compleet is verhinderd ter plaatse van de druksteun, aangezien de ligger aan de onderzijde wel zijdelings kan verplaatsen. Overigens komt het kipmoment nog wel steeds hoger uit dan het theoretische kipmoment, wat zonder rotatieveren is afgeleid. Kennelijk is het positieve effect van de rotatieveer dus groter dan het negatieve effect van een kipsteun aan alleen de bovenzijde van de ligger. Hier kan men echter niet zonder meer voor elke situatie vanuit gaan, aangezien de plaats van de kipsteunen de rotatiestijfheid ter plaatse van de gaffelsteun beïnvloed. Daarmee kan het positieve effect van de rotatieveren dus ook kleiner zijn dan het negatieve effect van alleen een kipsteun aan de bovenzijde van de ligger.

6.9 Samenvattend

In dit hoofdstuk is met behulp van EEM berekeningen de methode van Trahair voor het basisgeval geverifieerd, daarbij levert de oplossing van Trahair voor gelijke rotatiestijfheden een te groot kipmoment op. Daarmee is de afwijking van de inklemmingsfactor tussen de afgeleide oplossing en Trahair voor gelijke rotatiestijfheden verklaard. Trahair levert voor andere belastingsgevallen dan het basisgeval ook een te groot kipmoment. Tevens zijn de equivalente momentenfactor volgens Fruchtengarten voor een belastingsconfiguraties met dubbele gaffelopleggingen geverifieerd. Voor situaties met eindige rotatiestijfheden is een schattingsmethode gepresenteerd, waarvoor niet kan worden bepaald of de schatting aan de veilige kant ligt.

De methode afgeleid in paragraaf 5.9 voor het bepalen van de equivalente momentfactor voor een q-last met ongelijke eindmomenten is geverifieerd voor een doorgaande ligger en een ligger met zijdelingse kipsteunen. De formule blijkt een veilige benadering te geven aangezien wordt uitgegaan van een vrije rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. Doorgaande liggers bezitten ter plaatse van de middelste steunpunten wel degelijk rotatiestijfheid, waardoor het kipmoment in werkelijkheid hoger zal uitvallen.

Tot slot is nagegaan wat de invloed is van kipsteunen aan de boven- en onderzijde van de ligger en aan alleen de bovenzijde van de ligger. Alleen de eerste situatie blijkt equivalent te zijn aan een volledige gaffelsteun.

7 Conclusies

7.1 Literatuurstudie

Uit de literatuurstudie naar het bepalen van de effectieve kiplengte is gebleken dat zowel het Step-dictaat [(4)], DIN [(6)] als de Eurocode [(3)] vergelijkbare waarden geven voor het bepalen van de effectieve kiplengte voor liggers op 2 steunpunten, met aan beide uiteinden gaffelopleggingen, voor een aantal standaard belastingsconfiguraties waarbij getoetst wordt na een geometrisch lineaire berekening met de instabiliteitsfactor k_{crit}. De Eurocode maakt over het algemeen gebruik van conservatievere waarden.

De verschillende momentenfactoren kunnen worden omgerekend naar de equivalente momentfactor, waardoor de effectieve kiplengte bepaald kan worden met: $l_{eff} = m\ l$. Voor een ligger belast met een q-last en aan beide zijden ingeklemd wordt er een afwijking gevonden tussen de momentenfactoren uit de DIN [(6)] en het Step-dictaat [(4)].

In de literatuur is geen methode gevonden waarmee de equivalente momentfactor kan worden bepaald.

7.2 Analytische oplossing geeft basisgeval

Op analytische wijze is geverifieerd dat voor het theoretische kipmoment van een ligger, belast met twee tegengestelde momenten op de uiteinden, opgelegd op een gaffeloplegging geldt:

$$M_{crit}=\frac{\pi}{l_{eff}}\sqrt{EI_{yy}GI_t} \tag{7.1}$$

waarvan de constanten reeds besproken zijn in hoofdstuk 2 en 4. Helaas kan geen analytische oplossing worden gevonden voor andere belastingssituaties dan het basisgeval.

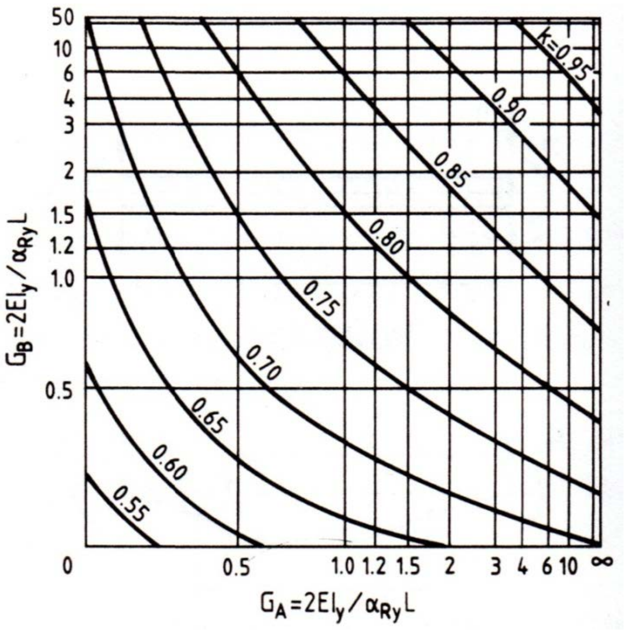
7.3 Analytische oplossing geeft basisgeval met rotatieveren

Uit de literatuurstudie naar het bepalen van de effectieve kiplengte voor belastingsconfiguraties met rotatieveren is gebleken dat volgens Trahair [(7)] gebruik kan worden gemaakt van de inklemmingsfactor voor het bepalen van de effectieve kiplengte. Op analytische wijze is geverifieerd dat voor het kipmoment geldt:

$$M_{crit}=\frac{\pi}{kl}\sqrt{EI_{yy}GI_t} \tag{7.2}$$

De inklemmingsfactor is tevens analytisch geverifieerd en kan worden bepaald uit Figuur 7.1.

Uit EEM berekeningen blijkt dat de oplossing van Trahair alleen toepasbaar is voor het basisgeval, voor andere belastingsgevallen levert Trahair een te hoog kipmoment.
De oplossing voor gelijke rotatiestijfheden volgens Trahair wijkt af van de analytische oplossing voor gelijke rotatiestijfheden uit paragraaf 4.5. Met behulp van EEM berekeningen is geverifieerd dat de oplossing voor gelijke rotatiestijfheden van Trahair een te hoog kipmoment levert. De analytische oplossing voor gelijke rotatiestijfheden komt overeen met de oplossing van Trahair voor ongelijke rotatiestijfheden en leveren beide goede overeenkomsten op met de EEM berekeningen.



Figuur 7.1 Bepalen k-factor aan de hand van de dimensieloze rotatiestijfheden G_A en G_B

7.4 Energiebeschouwing geeft equivalente momentfactor

Met behulp van een energiebeschouwing zijn de equivalente momentfactoren af te leiden voor verschillende belastingsconfiguraties. Voor de standaard belastingsconfiguraties blijkt deze methode overeenkomstige resultaten op te leveren als het Step-dictaat [(4)], DIN [(6)] en de Eurocode [(3)].

De afwijking tussen de DIN [(6)] en het Step-dictaat [(4)] voor een ligger belast met een q-last en aan beide zijden ingeklemd is tevens verklaard met behulp van een energiebeschouwing. In de DIN [(6)] staat foutief aangegeven dat er getoetst wordt in de einddoorsnede, de gegeven equivalente momentfactor is namelijk afgeleid voor de middendoorsnede, hierdoor valt de momentfactor een factor 2 hoger uit.

Met behulp van een energiebeschouwing is tevens de invloed van een belasting boven of onder het normaalkrachtencentrum op de effectieve kiplengte bepaald. De resultaten tonen goede overeenkomsten met de DIN [(6)] en de Eurocode [(3)], al levert de laatste voor sommige situaties erg conservatieve waarden.

7.5 Hoogtekaart geeft equivalente momentfactor

Voor een ligger belast met een q-last en ongelijke eindmomenten uitgedrukt in ql^2 is de equivalente momentfactor te bepalen uit Figuur 8.3. De equivalente momentfactor kan tevens bepaald worden met formule (8.1) voor waarden die buiten het bereik van de hoogtekaart vallen. Deze methode geeft een veilige benadering van de equivalente momentfactor, aangezien de constanten in de formule naar de veilige kant zijn afgerond. Bij deze methode is uitgegaan van vrije rotatie van de ligger in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. In werkelijkheid bezit een doorgaande ligger of een ligger met kipsteunen echter een zekere rotatiestijfheid ter plaatse van de gaffels, verificatie met EEM berekeningen toont aan dat hiervoor een hoger kipmoment geldt dan met de formule voorspelt wordt.

7.6 Belastingsconfiguraties met rotatieveren

De momentenfactoren voor oneindig stijve rotatieveren (dubbele gaffeloplegging) zijn afgeleid door Fruchtengarten [(8)] met EEM berekeningen. Verificatie van deze factoren met behulp van EEM berekeningen levert overeenkomstige resultaten op.

Voor een ligger belast met een q-last en zowel verticaal als horizontaal ingeklemd (verticale inklemming+dubbele gaffeloplegging) wijkt de momentenfactor af tussen Fruchtengarten [(8)] en de DIN [(6)]. Verificatie met EEM berekeningen toont aan dat Fruchtengarten is uitgegaan van vrije rotatie van de ligger in het verticale vlak ter plaatse van de steunpunten. Op die wijze worden overeenkomstige resultaten gevonden met de momentenfactor volgens Fruchtengarten. Als wordt uitgegaan van verhinderde rotatie in het verticale vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen kan niet worden aangetoond dat de momentenfactor uit de DIN correct is, vervolgonderzoek zou dat moeten aantonen.

Voor liggers met eindige rotatiestijfheden in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen is in paragraaf 6.3.1 een schattingsmethode gepresenteerd waarmee de effectieve inklemmingsfactor kan worden bepaald. Deze methode levert vrij goede overeenkomsten op met EEM berekeningen, echter is vervolgonderzoek noodzakelijk om vast te stellen of deze methode een veilige benadering geeft.

7.7 Kipsteunen

Uit EEM berekeningen voor een ligger op 2 steunpunten met zijdelingse kipsteunen valt te concluderen dat de effectieve kiplengte gereduceerd kan worden tot de lengte van het ongesteunde deel, als de kipsteunen zijn op te vatten als een volledige gaffelsteun waarbij de horizontale verplaatsing en de rotatie om de liggeras geblokkeerd zijn. Bovendien kan de effectieve kiplengte verder gereduceerd worden met behulp van de equivalente momentfactor voor niet-uniforme momentenverdelingen, zie formule (8.1).

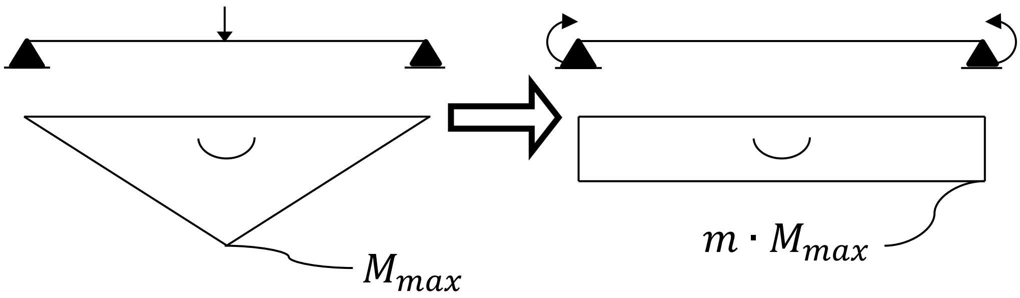
Een kipsteun aan de boven en onderzijde van de ligger, zijn qua kipgedrag equivalent aan een volledige gaffelsteun. Een kipsteun alleen ter plaatse van de gedrukte zone van de ligger verhindert de rotatie om de liggeras niet volledig en is qua kipgedrag ook niet equivalent aan een volledige gaffelsteun. Zodoende kan voor de situatie met alleen een kipsteun ter plaatse van de gedrukte zone de effectieve kiplengte niet worden gereduceerd tot de lengte van het ongesteunde deel, tenzij dit wordt aangetoond met een geometrisch niet lineaire berekening.

8 Aanbevelingen voor praktijk

8.1 Gebruik van equivalente momentfactor

Bij de toetsing van een houten ligger op kipinstabiliteit kan na een geometrisch lineaire berekening (1^e orde berekening), uitgaande van een lineair materiaalgedrag, gebruik worden gemaakt van de equivalente momentfactoren uit de literatuur (zie bijlage 1, 2 en 3) om de effectieve kiplengte te bepalen. Vervolgens wordt er bij de toetsing gebruik gemaakt van de instabiliteitsfactor k_{crit}.

De equivalente momentfactor vertaalt elk niet-uniform moment over de ligger naar uniform moment over de ligger, zoals geschematiseerd in Figuur 8.1. Vervolgens kan de effectieve kiplengte worden bepaald met: $l_{eff} = m\, l$.



Figuur 8.1 Schematisatie gebruik van equivalente momentfactor m

De equivalente momentfactor houdt geen rekening met eindige rotatiestijfheden in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen. Indien de invloed van eindige rotatieveren op de effectieve kiplengte ingeschat moet worden, wordt geadviseerd gebruik te maken van een geometrisch niet lineaire EEM berekening.

Indien de belasting boven of onder het normaalkrachtencentrum aangrijpt dient de effectieve kiplengte te worden aangepast. De aanpassing volgens de DIN [(6)] met behulp van de a_2-factor uit bijlage 2 levert hier de meest gunstige aanpassing op, de Eurocode [(3)] is voor de meeste situaties conservatiever.

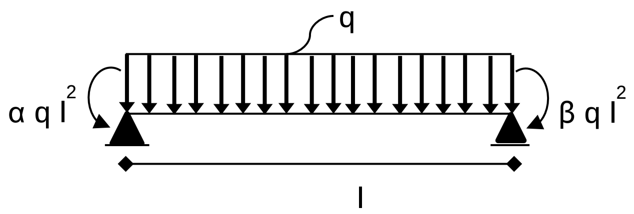
Voor een ligger belast met een q-last wordt aangeraden de momentenfactor gelijk aan 0.39 uit het Step-dictaat [(4)] te gebruiken, aangezien de DIN [(6)] hier een foutieve waarde levert. Voor een verticaal en horizontaal ingeklemde ligger belast met een q-last wordt geadviseerd de momentenfactor gelijk aan 2.91 volgens Fruchtengarten [(8)] te gebruiken totdat EEM berekeningen het tegendeel bewijzen, aangezien de waarde uit de DIN niet kan worden geverifieerd.

8.2 Methode voor een q-last met ongelijke eindmomenten

In aanvulling op de literatuur kan voor een ligger belast met een q-last en eindmomenten $\alpha q l^2$ en $\beta q l^2$ de equivalente momentfactor bepaald worden uit Figuur 8.3 of met behulp van formule:

$$m = \frac{\sqrt{0.0122 - 0.1086(\alpha + \beta) + 0.4347\alpha\beta + 0.2827(\alpha^2 + \beta^2)}}{|M_{max}|} \tag{8.1}$$

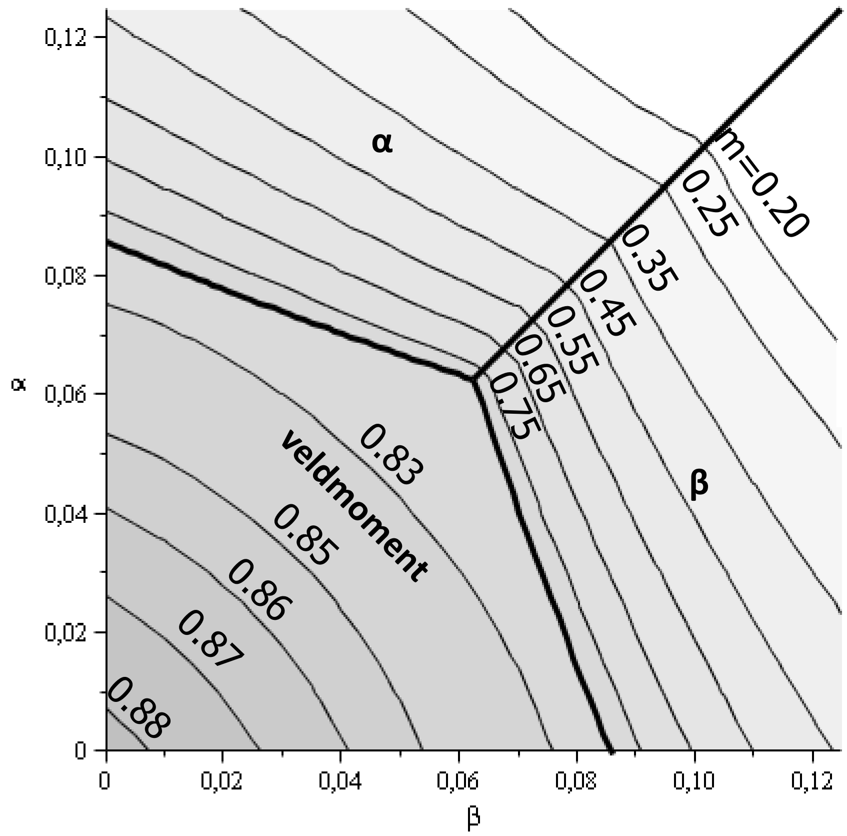
Hierin is M_{max} het in absolute zin optredende maximale moment in de ligger volgens een geometrisch lineare berekening. Ook hier dient vervolgens getoetst te worden met behulp van de instabiliteitsfactor k_{crit}. Deze methode is toepasbaar voor liggers op 2 steunpunten met eindmomenten, voor losse overspanningen in een doorgaande ligger en voor ongesteunde delen in een ligger met kipsteunen. Voor uitkragende liggers is deze methode niet geverifieerd.



Figuur 8.2 Ligger met een q-last en ongelijke eindmomenten

Deze methode geeft een veilige benadering van de equivalente momentfactor aangezien de constanten in de formule naar de veilige kant zijn afgerond.

Deze methode geeft tevens een veilige benadering van de equivalente momentfactor doordat de invloed van rotatiestijfheid in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen niet is meegenomen. De formule levert voor een doorgaande ligger of een ligger met kipsteunen dus een te laag kipmoment. Om de invloed van de rotatiestijfheid in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen wel mee te nemen in het kipgedrag wordt geadviseerd gebruik te maken van een geometrisch niet lineaire EEM berekening.



Figuur 8.3 Hoogtekaart voor het bepalen van de equivalente momentfactor voor belastingsconfiguraties met een q-last

8.3 Toetsing op kip met EEM software

Voor belastingsconfiguraties waarvoor de equivalente momentfactor niet kan worden bepaald met behulp van de literatuur of de methode aangereikt in de vorige paragraaf wordt geadviseerd gebruik te maken van een geometrisch niet lineaire EEM berekening, uitgaande van lineair materiaalgedrag. Daarbij dient de ligger gemodelleerd te worden met een beginexcentriciteit, op die manier kan worden volstaan met een spanningstoetsing en hoeft geen gebruik te worden gemaakt van de instabiliteitsfactor k_{crit}. Geometrisch niet lineaire EEM berekeningen laten zien dat het kipgedrag uitstekend gemodelleerd kan worden op deze manier en overeenkomsten oplevert met de literatuur.

Indien de invloed van rotatiestijfheid in het x-y vlak ter plaatse van de gaffelopleggingen op de effectieve kiplengte meegenomen wenst te worden is het tevens aan te raden gebruik te maken van een geometrisch niet lineaire EEM berekening.

8.4 Kipsteunen

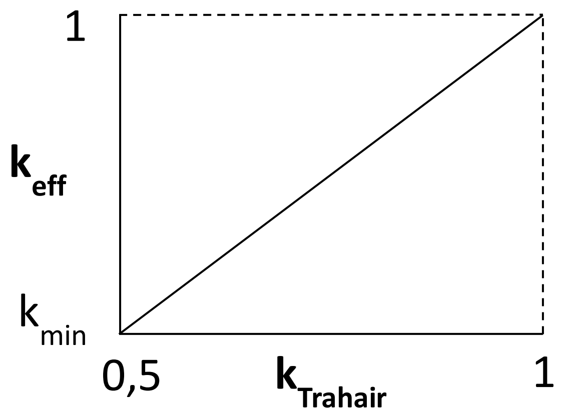
Bij het toepassen van kipsteunen aan de boven en onderzijde van de ligger kunnen de steunen worden opgevat als een gaffelsteun, waarbij de zijdelingse verplaatsing en de rotatie om te liggeras verhinderd zijn. Zodoende kan de effectieve kiplengte worden gereduceerd tot de lengte tussen de kipsteunen, waarna de effectieve kiplengte verder kan worden gereduceerd met behulp van de equivalente momentfactor voor de bijbehorende niet-uniforme momentenverdeling, zie paragraaf 8.2. Voor het toepassen van alleen kipsteunen ter plaatse van de gedrukte zone van de ligger wordt aangeraden gebruik te maken van een EEM berekening voor het bepalen van de invloed van deze kipsteunen op het kipgedrag van de ligger.

9 Aanbevelingen voor vervolgonderzoek

9.1 Effectieve inklemmingsfactor

Voor belastinggevallen waarbij de rotatie in het x-y vlak ter plaatse van de opleggingen wordt verhinderd door rotatieveren, is het aan te raden gebruik te maken van de factoren voor een dubbele gaffelinklemming volgens Fruchtengarten [8]. Op die manier kan een effectieve kiplengte worden berekend welke een goede schatting geeft van het werkelijke kipmoment, zie paragraaf 6.3.1. Er kan hier helaas niet worden vastgesteld of deze schatting altijd aan de veilige kan ligt, daarvoor is vervolgonderzoek noodzakelijk.

De effectieve kiplengte kan worden bepaald via de minimale inklemmingsfactor k_{min} uit Tabel 3.4. Deze waarde geldt voor een dubbele gaffelinklemming. Voor rotatieveren welke een eindige stijfheid bezitten kan de effectieve kiplengte worden bepaald door de inklemmingsfactor volgens Trahair [7] te bepalen (geldig voor het basisgeval). Door vervolgens tussen k_{min} en 1 een lineaire relatie tussen de effectieve kiplengte en de kiplengte volgens Trahair te veronderstellen, levert dit een eenvoudige schatting op voor de effectieve kiplengte, zie Figuur 9.1.



Figuur 9.1 Aanname van lineaire relatie tussen k_{eff} en $k_{trahair}$

De volgende relatie tussen $k_{trahair}$ en k_{eff} kan hierbij worden gebruikt:

$$k_{eff} = k_{min} + \frac{k_{trahair} - 0.5}{0.5}(1 - k_{min}) \tag{8.2}$$

Zodoende kan voor de effectieve kiplengte worden geschat $l_{eff} = k_{eff} \cdot m \cdot l$. Hierbij is de equivalente momentenfactor dus losgekoppeld van de oplegcondities in het x-y vlak. Dit heeft als voordeel dat de inklemmingsfactor volgens Trahair bepaald kan worden voor een situatie met eindige rotatiestijfheden en vervolgens de effectieve inklemmingsfactor kan worden bepaald. Helaas is de minimale inklemmingsfactor k_{min} niet voor alle belastinggevallen bepaald. Een effectieve inklemmingsfactor gelijk aan 1 zal altijd een veilige benadering geven van het kipmoment, aangezien dan wordt uitgegaan van vrije rotatie in het x-y vlak.

9.2 Instabiliteitsfactor k_{crit}

Om meerdere redenen is het aan te bevelen vervolgonderzoek uit te voeren naar de herkomst van de instabiliteitsfactor k_{crit}. Is de instabiliteitsfactor bijvoorbeeld nog geldig voor een verticaal en horizontaal ingeklemde ligger belast met een q-last? De vervormingen zijn daarbij al erg groot ver voordat de ligger zijn evenwicht verliest. Bovendien is hier niet duidelijk of het theoretische kipmoment volgende de DIN [(6)] behaald wordt. Totdat het tegendeel bewezen is wordt daarom aangeraden gebruik te maken van de momentenfactor volgens Fruchtengarten voor deze belastingsconfiguratie (gelijk aan 2.91).

Tevens is het interessant om de resultaten uit geometrisch niet lineaire EEM berekeningen te vergelijken met de resultaten na een geometrisch lineaire berekening en gebruik makend van de instabiliteitsfactor. Op die wijze kan worden ingeschat of de instabiliteitsfactor aan de conservatieve kant is.

Daarnaast zou de herkomst van de instabiliteitsfactor kunnen leiden tot een methode waarop eenvoudig getoetst kan worden op de 2^e orde evenwichtstoestand.

9.3 Vervolgstudies

Uit dit onderzoek blijkt dat op onderstaande onderwerpen vervolgstudies zijn aan te bevelen:

- Is er een theoretische afleiding te vinden met behulp van energievergelijkingen die de invloed van rotatieveren voor alle belastingsgevallen beschrijft? Bijvoorbeeld voor een q-last met ongelijke negatieve eindmomenten. Vergelijk dit met de geschatte effectieve inklemmingsfactor.
- Wat is de herkomst van de instabiliteitsfactor k_{crit}? Is dit een te conservatieve benadering? Vergelijk dit met EEM berekeningen.
- Is er een eenvoudige methode waarmee getoetst kan worden op de 2^e orde evenwichtstoestand van de ligger?
- Wat is de invloed van een verende gaffeloplegging ter plaatse van de uiteinden van de ligger?
- Komt het kipgedrag van een orthotroop gemodelleerde ligger overeen met de resultaten uit dit onderzoek?

10 Literatuurlijst

1. **Straten, Roeland van.** *De effectieve kiplengte van houten liggers.* juni 2011.

2. **Saleh, Khalid.** *De effectieve kiplengte van houten liggers.* Delft : sn, juni 2012.

3. *NEN-EN 1995-1-1: Ontwerp en berekening van houtconstructies.*

4. **Choo, B.S.** *STEP Lecture B3 Bending, Timber Engineering STEP 1.* The Netherlands : Centrum Hout, 1995.

5. **Kirby, P.A. en Nethercot, D.A.** *Design for structural stability.* St. Albans : Granada publishing, 1979.

6. *DIN EN 1995-1-1 NA: Bemessung und Konstruktion von Holzbauten.*

7. **Ttrahair, N.S.** *Flexural-Torsional Buckling of structures.* London : Spon, 1993.

8. **Fruchtengarten, Jairo en Fruchtengarten, Julio.** *About lateral torsional buckling of steel beams.* sl : Latin American Journal of Solids and Structures, 2006.

9. **Hartsuijker, Coenraad.** *Toegepaste mechanica, deel 2 Spanningen, vervormingen en verplaatsingen.* Schoonhoven : Academic Service, 2000.

10. **Hartsuijker, C. en Welleman, J.W.** *Dictaat CT2031: Module stabiliteit van het evenwicht.* Delft : sn, 2007.

11. **American Forest & Paper Association.** *Designing for lateral-torsional stability in wood members.* Washington : American Wood Council, 2003.

12. **Vries, P.A. de en Kuilen, J.W.G. van der.** *Dictaat CT2052 Houtconstructies.* Delft : sn, Maart 2010.

13. **Abspoel, R. en Bijlaard, F.S.K.** *Dictaat CT2052 Staalconstructies.* Delft : sn, Januari 2010.

14. **Timoshenko, Stephen P. en Gere, James M.** *Theory of elastic stability (second edition).* New York : Dover publications, 2009.

15. **Welleman, Hans.** *Dictaat CT3109: Module Arbeid en Energie.* Delft : sn, 2011.

16. **Vrouwenvelder, A.C.W.M.** *Reader CIE5144 Structural stability.* Delft : sn, 2003.

Nawoord

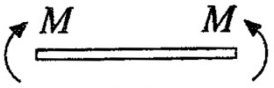
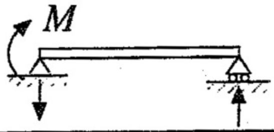
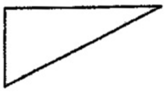
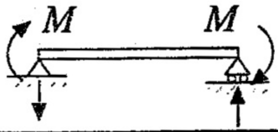
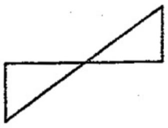
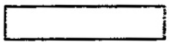
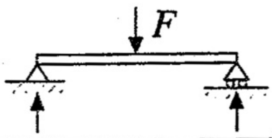
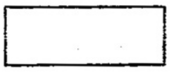
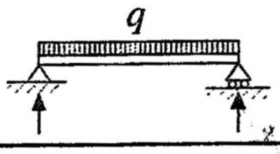
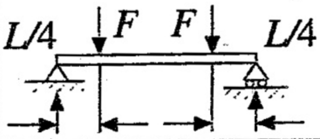
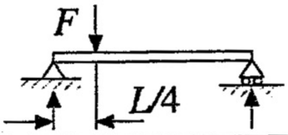
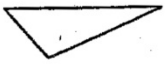
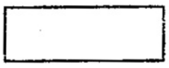
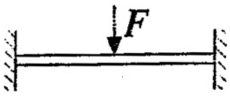
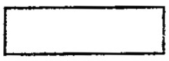
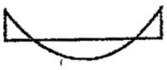
In dit verslag heeft u het eindresultaat van mijn onderzoek voor het extra deel afstudeerwerk kunnen lezen. Ik vond het leuk om voor een tweede maal aan de slag te gaan met dit onderwerp. Op die manier kan je gelijk beginnen met het onderzoek op een dieper niveau, dat is anders haast niet mogelijk in het tijdsbestek van één periode.

Ik heb vooraf de onderzoeksvragen iets te makkelijk ingeschat en heb geen rekening gehouden met tegenvallers. Het modelleren van de houten liggers vroeg meer tijd dan gepland, waardoor het niet meer realistisch was om alle onderzoeksvragen te behandelen. Desalniettemin heb ik, naar mijn idee, een belangrijke bijdrage geleverd aan het bepalen de effectieve kiplengte voor complexere belastingsgevallen.

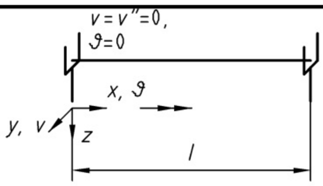
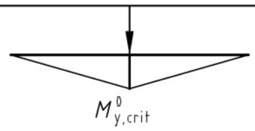
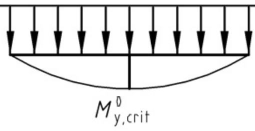
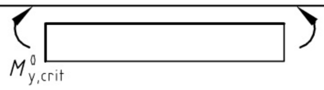
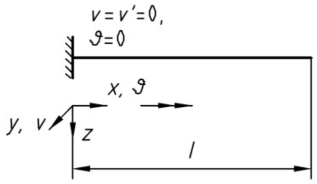
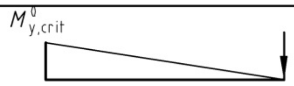
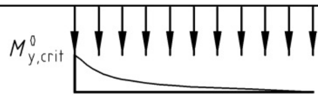
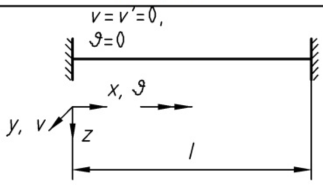
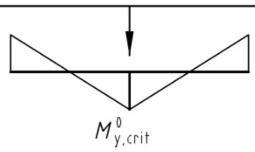
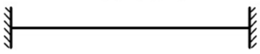
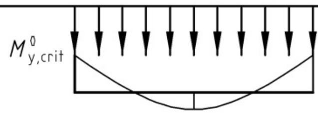
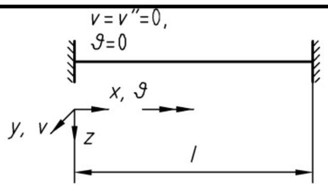
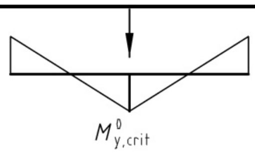
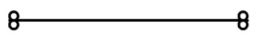
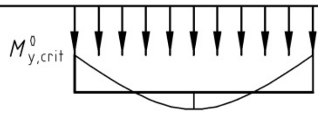
Het doen van zelfstandig onderzoek is erg leuk, aangezien elk belastingsgeval een nieuwe ontdekking is. Zo blijft het interessant om te weten wat er gebeurd als niet de standaard aannames worden gevolgd, maar wordt gekeken naar de invloed van nieuwe aspecten zoals de kipsteunen op de ligger. Zoals na elk onderzoek blijven er vervolgonderzoeken mogelijk, maar de drang om ook die vragen te beantwoorden wordt helaas ondermijnd door het gebrek aan tijd.

Ik kijk met een tevreden gevoel terug op mijn onderzoek en hoop dat de lezer van dit verslag een onderbouwde keus kan maken tussen enerzijds het bepalen van de effectieve kiplengte en daarmee het toetsen met behulp van de instabiliteitsfactor na een 1^e orde berekening of anderzijds het uitvoeren van een 2^e orde berekening waarna kan worden volstaan met een spanningstoetsing.

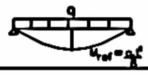
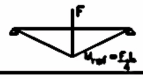
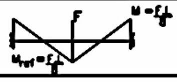
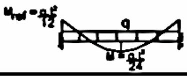
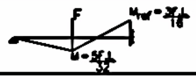
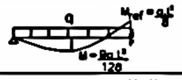
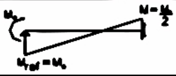
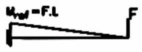
Bijlage 1: Equivalent uniform moment factors [4]

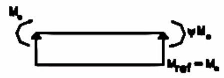
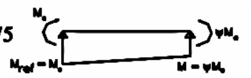
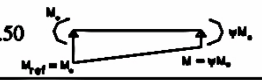
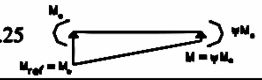
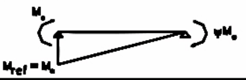
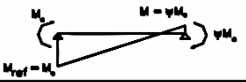
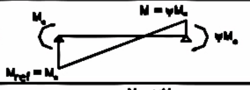
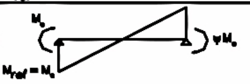
Beam & Loads	*Actual bending moment*	*m*	*Equivalent uniform moment*
		1,00	
		0,57	
		0,43	
		0,74	
		0,88	
		0,96	
		0,69	
		0,59	
		0,39	

Bijlage 2: DIN-factoren (6)

	System	Momentverlauf	a_1	a_2
1.1	 gabelgelagerter Einfeldträger		1,77	0
1.2			1,35	1,74
1.3			1,13	1,44
1.4	Draufsicht: 		1	0
2.1			1,27	1,03
2.2	Kragarm		2,05	1,50
3.1	 beidseitig eingespannter Träger		6,81	0,40
3.2	Draufsicht: 		5,12	0,40
4.1			1,70	1,60
4.2	Mittelfeld, Durchlaufträger  Draufsicht		1,30	1,60

Bijlage 3: Momentenfactor Fruchtengarten [8]

LOADING AND SUPPORT CONDITIONS	$C_b = M_{cr} / M_{0cr}$			
	SUPP. TYPE I	SUPP. TYPE II	SUPP. TYPE III	SUPP. TYPE IV
	(FIGURE 13)			
	1.14	1.44	1.85	2.20
	1.38	1.72	2.08	2.43
	1.74	2.13	1.90	2.45
	2.62	3.29	2.91	4.01
	1.81	2.03	1.94	2.25
	2.22	2.48	2.41	2.77
	2.47	2.61	2.58	2.73
	1.40			
	2.30			

END MOMENTS	$C_b = M_{cr} / M_{0cr}$			
	SUPP. TYPE I	SUPP. TYPE II	SUPP. TYPE III	SUPP. TYPE IV
$\psi = -1.00$ 	1.01	1.31	1.93	2.23
$\psi = -0.75$ 	1.16	1.50	2.27	2.54
$\psi = -0.50$ 	1.34	1.74	2.62	2.94
$\psi = -0.25$ 	1.57	2.04	3.06	3.44
$\psi = 0$ 	1.84	2.42	3.59	4.06
$\psi = 0.25$ 	2.17	2.90	4.16	4.79
$\psi = 0.50$ 	2.52	3.45	4.67	5.51
$\psi = 0.75$ 	2.79	3.97	4.87	5.94
$\psi = 1.00$ 	2.73	4.05	4.55	5.65

Bijlage 4: maple scripts

A) Analytisch oplossing

```
restart;
```

$$dsolve\left(G \cdot It \cdot diff\left(\text{phi}(x), x\$2\right) + \frac{\text{phi}(x) \cdot Mz^2}{EIz} = 0\right):$$

$\text{phi} := rhs(\%)$:

$x := 0 : eq1 := \text{phi} = 0$:

$x := l : eq2 := \text{phi} = 0 : x :=$'$x$':

$BC := [eq1, eq2]$:

$with(linalg) : Ccoef := genmatrix(BC, [\_C1, \_C2])$:

$Chareqn := det(Ccoef) = -\sin(\text{pi})$:

$My := solve(Chareqn, Mz)$;

$$\frac{\pi \sqrt{EIz}\ \sqrt{G}\ \sqrt{It}}{l} \tag{1.1}$$

B) Basisgeval met rotatieveren

restart;

$$eq := \frac{(\rho[1]+\mathrm{rho}[2])}{2}\,(1-\mathrm{x}\cot(x)) + \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)}{\frac{x}{2}} + \frac{\mathrm{rho}[1]\cdot\mathrm{rho}[2]}{4}\cdot x^2 = 1;$$

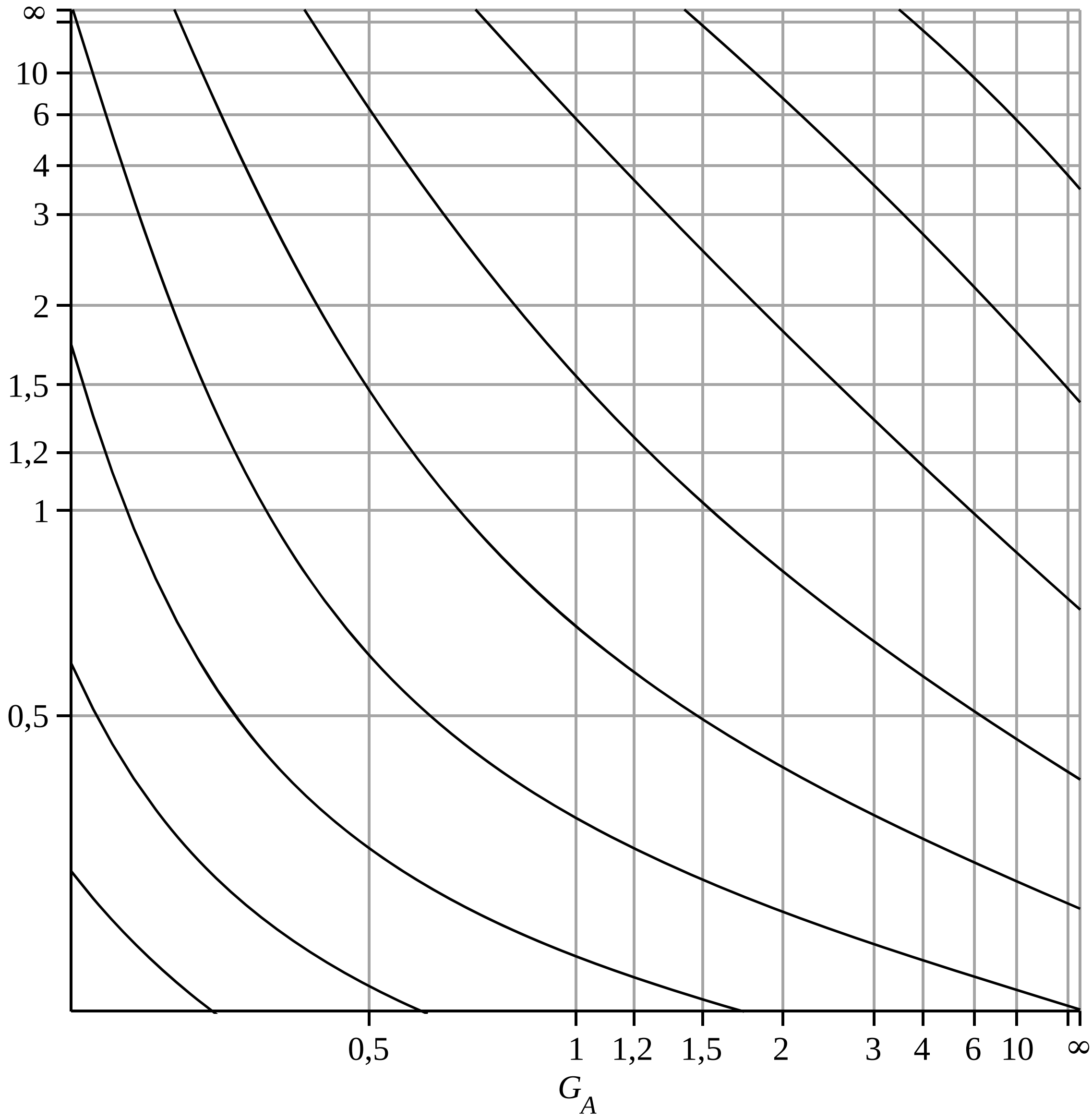
$$\frac{1}{2}\left(\rho_1+\rho_2\right)(1-x\cot(x)) + \frac{2\tan\left(\frac{1}{2}\,x\right)}{x} + \frac{1}{4}\,\rho_1\,\rho_2\,x^2 = 1 \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$x := \frac{\mathrm{Pi}}{k}:$$

$PL := Array(1..9) : with(plots) :$

for k **from** 0.55 **by** 0.05 **to** 0.95 **do** $solve(eq, \mathrm{rho}[2]) : rhot := \% : xsol := 0 : xsol := solve(denom(rhot) = 0, \mathrm{rho}[1]) : PL\left[\mathrm{round}\left(\left(\frac{k-0.50}{0.05}\right)\right)\right] := plot(\arctan(subs(\mathrm{rho}[1] = \tan(G[A]), rhot)), G[A] = \max(\arctan(xsol) + 0.00001, 0.00001)..1.57, 0.00001..1.57,$ *color* ='*black*', *axis* = [*gridlines* = [*subticks* = *false*], *gridlines* = [*subticks* = *false*]], *tickmarks* = [[arctan(0.5) ='0.5', arctan(1) ='1', arctan(1.2) ='1.2', arctan(1.5) ='1.5', arctan(2) ='2', arctan(3) ='3', arctan(4) ='4', arctan(6) ='6', arctan(10) ='10', arctan(50) ='50', arctan(1000) = '*infinity*'], [arctan(0.5) ='0.5', arctan(1) ='1', arctan(1.2) ='1.2', arctan(1.5) ='1.5', arctan(2) ='2', arctan(3) ='3', arctan(4) ='4', arctan(6) ='6', arctan(10) ='10', arctan(50) ='50', arctan(1000) ='*infinity*']]) :**end**

$display(\{PL[1], PL[2], PL[3], PL[4], PL[5], PL[6], PL[7], PL[8], PL[9]\});$



$m = 0.7323495152$ **(2.2)**

C) Puntlast op 1/2 L

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right) : \phi 2 := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right)\right) :$$

$$\theta a := \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{F}{2} \cdot x}{EI} \cdot (l - x)\, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi 2^2 \cdot \left(\frac{F}{4} \cdot l - \frac{F}{2} \cdot x\right)}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \mathrm{d}x}{l} :$$

$$w := \theta a \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{F}{2} \cdot x}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \mathrm{d}x :$$

$$E := \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi \cdot \frac{F}{2} \cdot x\right)^2}{2 \cdot EI} \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi 2 \cdot \left(\frac{F}{4} \cdot l - \frac{F}{2} \cdot x\right)\right)^2}{2 \cdot EI} \mathrm{d}x :$$

$$b := F \cdot w - E :$$

$$c := int\left(\frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \phi^2, x = 0 .. l\right) :$$

$$solve(c = b, M) :$$

$$m = \frac{\%[2]}{\frac{F}{4} \cdot l};$$

$$m = 0.7323495152 \qquad \textbf{(3.1)}$$

D) Puntlast op aL

restart;

$a := 0.25:$

$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right) : \phi 2 := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot (x + a \cdot l)\right):$

$$\theta a := \frac{1}{l}\left(\int_0^{a \cdot l} \frac{\phi^2 \cdot (1-a)\,F \cdot x}{EI} \cdot (l-x)\,dx + \int_0^{(1-a)\cdot l} \frac{\phi 2^2 \cdot ((1-a)\cdot F \cdot a \cdot l - F \cdot a \cdot x)}{EI} \cdot (l - a \cdot l - x)\,dx\right):$$

$$w := \theta a \cdot a \cdot l - \int_0^{a \cdot l} \frac{\phi^2 \cdot (1-a)\,F \cdot x}{EI} \cdot (a \cdot l - x)\,dx:$$

$$E := \int_0^{a \cdot l} \frac{(\phi \cdot (1-a) \cdot F \cdot x)^2}{2 \cdot EI}\,dx + \int_0^{(1-a)\cdot l} \frac{(\phi 2 \cdot ((1-a)\cdot F \cdot a \cdot l - F \cdot a \cdot x))^2}{2 \cdot EI}\,dx:$$

$b := F \cdot w - E:$

$c := int\left(\frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \phi^2, x = 0..l\right):$

$solve(c = b, M):$

$m = \frac{\%[2]}{(1-a)\cdot F \cdot a \cdot l};$

$$m = 0.6698326368 \tag{4.1}$$

E) Verdeelde belasting q

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right) :$$

$$\theta a := \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x)}{EI} \cdot (l - x)\, \mathrm{d}x}{l} :$$

$$w := \theta a \cdot a - \int_0^a \frac{\phi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x)}{EI} \cdot (a - x)\, \mathrm{d}x :$$

$$E := \int_0^l \frac{\left(\phi \cdot \frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x)\right)^2}{2 \cdot EI}\, \mathrm{d}x :$$

$$b := \int_0^l q \cdot w\, \mathrm{d}a - E :$$

$$c := int\left(\frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \phi^2, x = 0 ..l\right) :$$

$$solve(c = b, M) :$$

$$m = \frac{\%[2]}{\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2};$$

$$m = 0.8832348024 \tag{5.1}$$

F) Puntlast op afstand aL en bL

$restart;$

$a := 0.25 : b := 0.75 :$

$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right) : \phi 2 := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot (x + a \cdot l)\right) : \phi 3 := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot (x + b \cdot l)\right) :$

$$\theta a := \frac{1}{l}\left(\int_0^{a \cdot l} \frac{\phi^2 \cdot (2 - a - b)\, F \cdot x}{EI} \cdot (l - x)\, dx + \int_0^{(b-a) \cdot l} \frac{\phi 2^2 \cdot ((2 - a - b)\, F \cdot a \cdot l + (2 - a - b)\, F \cdot x - F \cdot x)}{EI} \cdot (l - a \cdot l - x)\, dx + \int_0^{(1-b) \cdot l} \frac{\phi 3^2 \cdot ((2 - a - b)\, F \cdot b \cdot l - F \cdot (b - a) \cdot l + (2 - a - b)\, F \cdot x - 2 \cdot F \cdot x)}{EI} \cdot (l - b \cdot l - x)\, dx\right) :$$

$$wa := \theta a \cdot a \cdot l - \int_0^{a \cdot l} \frac{\phi^2 \cdot (1 - a + 1 - b)\, F \cdot x}{EI} \cdot (a \cdot l - x)\, dx :$$

$$wb := \theta a \cdot b \cdot l - \int_0^{a \cdot l} \frac{\phi^2 \cdot (1 - a + 1 - b)\, F \cdot x}{EI} \cdot (b \cdot l - x)\, dx - \int_0^{(b-a) \cdot l} \frac{\phi 2^2 \cdot ((2 - a - b)\, F \cdot a \cdot l + (2 - a - b)\, F \cdot x - F \cdot x)}{EI} \cdot (b \cdot l - a \cdot l - x)\, dx :$$

$$E := \int_0^{a \cdot l} \frac{(\phi \cdot (1 - a + 1 - b) \cdot F \cdot x)^2}{2 \cdot EI}\, dx + \int_0^{(b-a) \cdot l} \frac{(\phi 2 \cdot ((2 - a - b)\, F \cdot a \cdot l + (2 - a - b)\, F \cdot x - F \cdot x))^2}{2 \cdot EI}\, dx + \int_0^{(1-b) \cdot l} \frac{(\phi 3 \cdot ((2 - a - b)\, F \cdot b \cdot l - F \cdot (b - a) \cdot l + (2 - a - b)\, F \cdot x - 2 \cdot F \cdot x))^2}{2 \cdot EI}\, dx :$$

$eq1 := F \cdot wa + F \cdot wb - E :$

$eq2 := int\left(\frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \phi^2, x = 0 .. l\right) :$

$solve(eq1 = eq2, M) :$

$$m = \frac{\%[2]}{\max((2-a-b)\cdot a,\ (2-a-b)\ b-(b-a))\cdot F\cdot l};$$

$$m = 0.9617842096 \tag{6.1}$$

G) Lineaire momentenlijn

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right) :$$

$$Mx := M1 - \frac{(1-\beta)}{l} \cdot M1 \cdot x :$$

$$\theta a1 := \frac{\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot Mx}{EI} \cdot (l - x)\, dx}{l} :$$

$$\theta a2 := \frac{\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot Mx}{EI} \cdot (x)\, dx}{l} :$$

$$E := \int_0^l \frac{(\phi \cdot Mx)^2}{2 \cdot EI}\, dx :$$

$$b := M1 \cdot \theta a1 + \beta \cdot M1 \cdot \theta a2 - E :$$

$$c := int\left(\frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \phi^2, x = 0 .. l\right) :$$

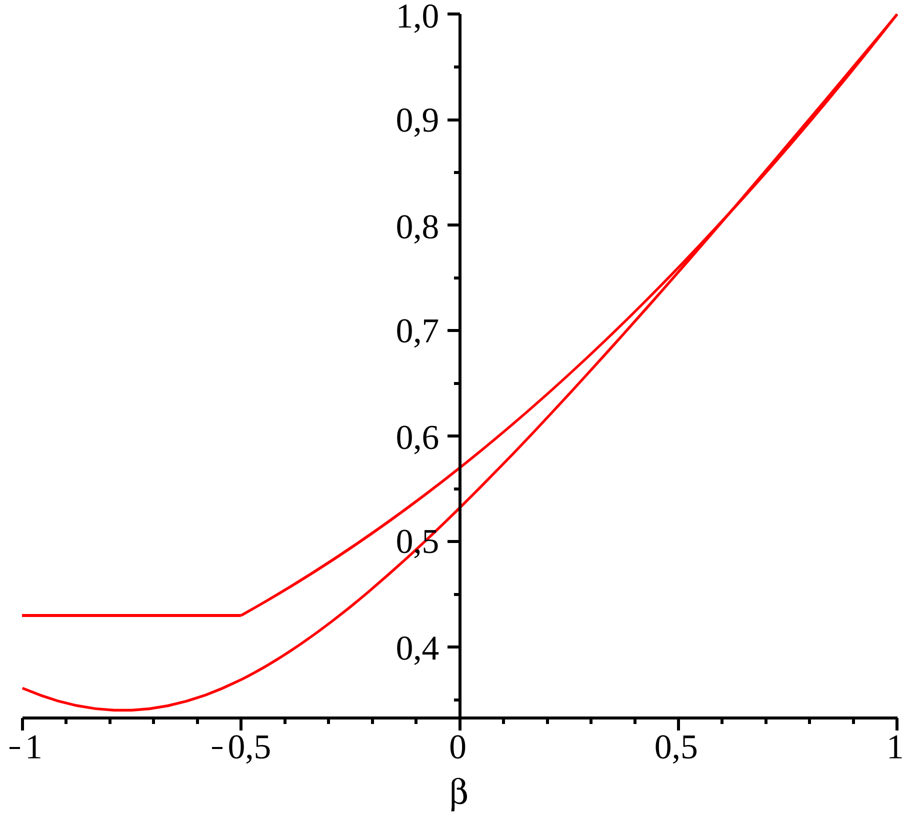
$solve(c = b, M)$:

$$m := \frac{\%[1]}{M1} :$$

$simplify(m)$;

$$0.000003603904500\sqrt{2.180021560\ 10^{10} + 3.347637582\ 10^{10}\ \beta + 2.171680029\ 10^{10}\ \beta^2} \qquad \textbf{(7.1)}$$

$with(plots) : GR1 := plot(m, \beta = -1 .. 1) : GR2 := plot(0.57 + 0.33 \cdot \beta + 0.1\ \beta^2, \beta = -0.5 .. 1) : GR3 := plot(0.43 + \beta \cdot 0, \beta = -1 .. -0.5) : display(\{GR1, GR2, GR3\});$


1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
-1
-0,5
0
0,5
1
β

H) q-last met eindmomenten

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{3.145}{l} \cdot x\right):$$

$$\theta a := \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x) - \beta \cdot q \cdot l^2\right)}{EI} \cdot (l - x)\, \mathrm{d}x}{l}:$$

$$w := \theta a \cdot a - \int_0^a \frac{\phi^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x) - \beta \cdot q \cdot l^2\right)}{EI} \cdot (a - x)\, \mathrm{d}x:$$

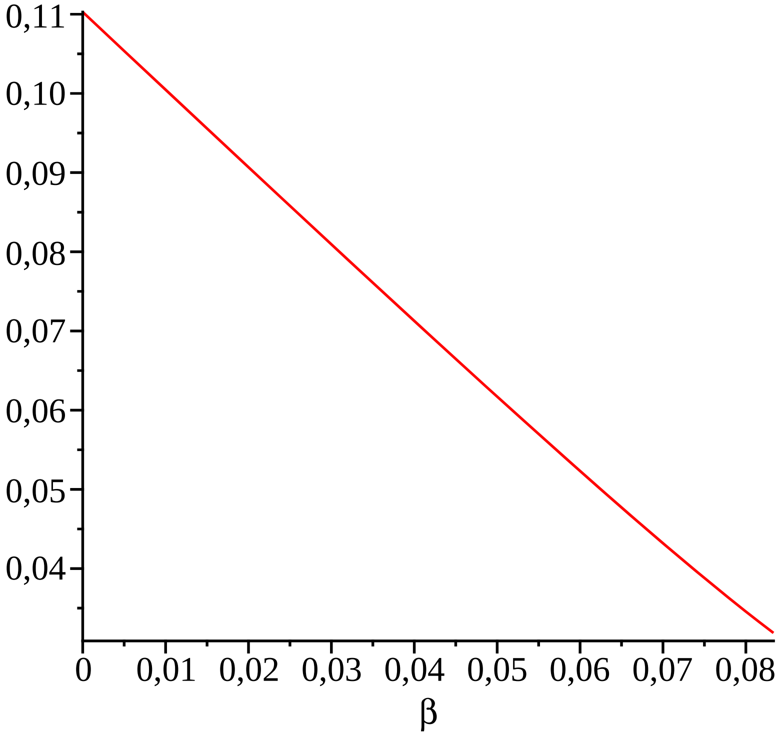
$$E := \int_0^l \frac{\left(\phi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot q \cdot x \cdot (l - x) - \beta \cdot q \cdot l^2\right)\right)^2}{2 \cdot EI}\, \mathrm{d}x:$$

$$b := \int_0^l q \cdot w\, \mathrm{d}a - E - 2 \cdot \beta \cdot q \cdot l^2 \cdot \theta a:$$

$$c := int\left(\frac{M^2}{EI} \cdot \phi^2, x = 0 .. \frac{l}{2}\right):$$

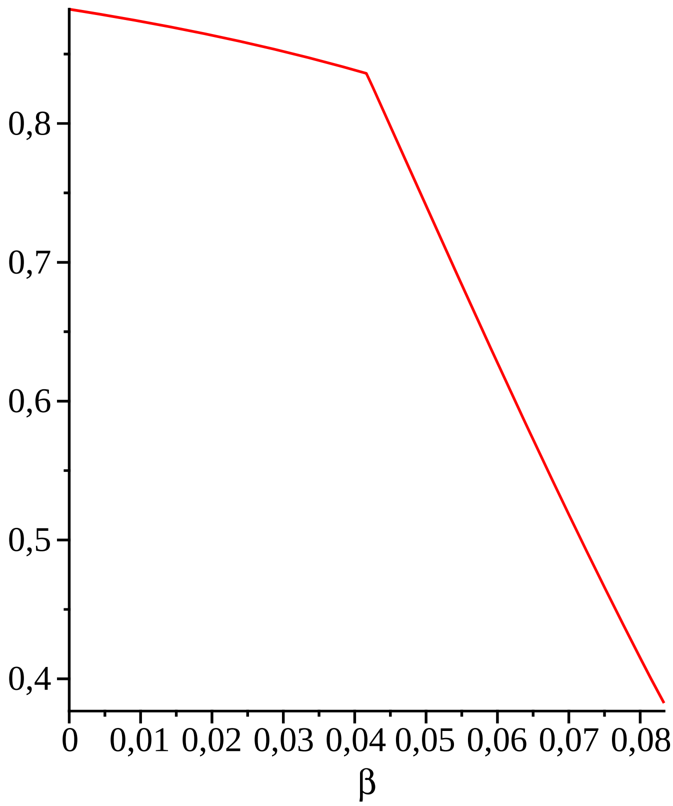
$$solve(c = b, M) : M := \%[1]:$$

$$plot\left(\frac{M}{q \cdot l^2}, \beta = 0 .. \frac{1}{12}\right);$$



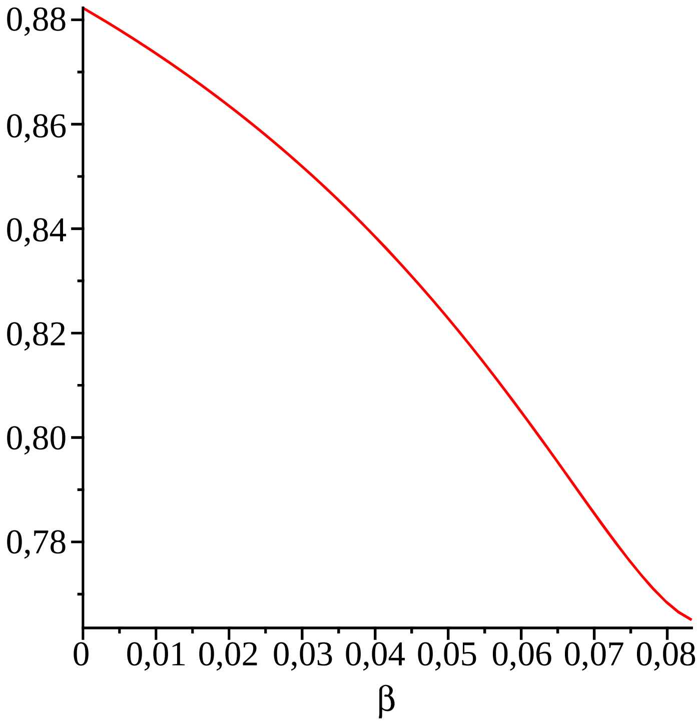
$$m := \frac{M}{\max\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{8} - \beta\right) \cdot q \cdot l^2} :$$

$$plot\left(m, \beta = 0 \,..\, \frac{1}{12}\right);$$



(8.1)

$$plot\left(\frac{M}{\left(\frac{1}{8}-\beta\right)\cdot q\cdot l^2},\ \beta=0..\frac{1}{12}\right);$$



I) Puntlast F met eindmomenten

$restart;$

$a := 0.5:$

$\phi := \sin\left(\frac{3.145}{l}\cdot x\right) : \phi 2 := \sin\left(\frac{3.145}{l}\cdot(x+a\cdot l)\right) :$

$$\theta a := \frac{1}{l}\left(\int_0^{a\cdot l} \frac{\phi^2\cdot((1-a)\,F\cdot x-\beta\cdot F\cdot l)}{EI}\cdot(l-x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{(1-a)\cdot l} \frac{\phi 2^2\cdot((1-a)\cdot F\cdot a\cdot l-F\cdot a\cdot x-\beta\cdot F\cdot l)}{EI}\cdot(l-a\cdot l-x)\,\mathrm{d}x\right) :$$

$$w := \theta a\cdot a\cdot l - \int_0^{a\cdot l} \frac{\phi^2\cdot((1-a)\,F\cdot x-\beta\cdot F\cdot l)}{EI}\cdot(a\cdot l-x)\,\mathrm{d}x :$$

$$-\frac{4.185784164\ 10^{-11}\,F\,l^3\,(1.939422277\ 10^9\,\beta-3.248243902\ 10^8)}{EI} + \frac{2.092892082\ 10^{-11}\,F\,l^3\,(3.994991177\ 10^8-2.093744971\ 10^9\,\beta)}{EI} + \frac{2.092892082\ 10^{-11}\,F\,l^3\,(1.778621773\ 10^9\,\beta-2.491861699\ 10^8)}{EI} \quad \textbf{(9.2)}$$

$$E := \int_0^{a\cdot l} \frac{(\phi\cdot((1-a)\,\cdot F\cdot x-\beta\cdot F\cdot l))^2}{2\cdot EI}\,\mathrm{d}x + \int_0^{(1-a)\cdot l} \frac{(\phi 2\cdot((1-a)\cdot F\cdot a\cdot l-F\cdot a\cdot x-\beta\cdot F\cdot l))^2}{2\cdot EI}\,\mathrm{d}x :$$

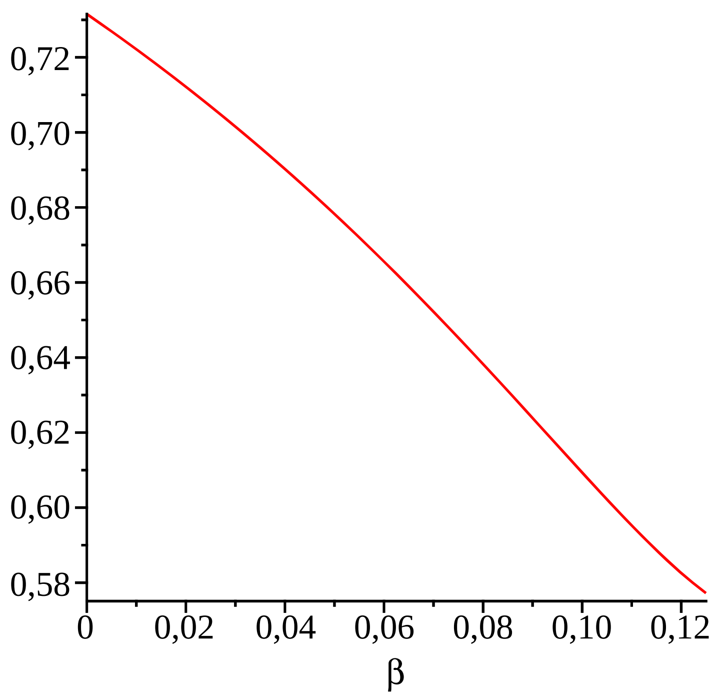
$b := F\cdot w - E - 2\cdot\beta\cdot F\cdot l\cdot\theta a :$

$c := int\left(\frac{M^2}{EI}\cdot\phi^2, x=0..\frac{l}{2}\right) :$

$solve(c=b, M) :$

$$m := \frac{\%[1]}{\max\left(\beta, \frac{1}{4}-\beta\right)\cdot F\cdot l} :$$

$plot\left(m, \beta=0..\frac{1}{8}\right);$


0,72
0,70
0,68
0,66
0,64
0,62
0,60
0,58
0
0,02
0,04
0,06
0,08
0,10
0,12
β

J) q-last met ongelijke eindmomenten

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{\mathrm{Pi}}{l} \cdot x\right):$$

$$Mx := \frac{1}{2} q \cdot x \cdot (l - x) - \mathrm{psi} \cdot q \cdot l^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \mathrm{beta} \cdot q \cdot l^2 \cdot \frac{x}{l}:$$

$$\theta a := \frac{\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot Mx}{EI} \cdot (l - x)\, \mathrm{d}x}{l} : \theta b := \frac{\int_0^l \frac{\phi^2 \cdot Mx}{EI} \cdot (x)\, \mathrm{d}x}{l}:$$

$$w := \theta a \cdot a - \int_0^a \frac{\phi^2 \cdot Mx}{EI} \cdot (a - x)\, \mathrm{d}x:$$

(10.1)

$$E := \int_0^l \frac{(\phi \cdot Mx)^2}{2 \cdot EI}\, dx:$$

$$b := \int_0^l q \cdot w\, \mathrm{d}a - E - \beta \cdot q \cdot l^2 \cdot \theta b - \psi \cdot q \cdot l^2 \cdot \theta a:$$

(10.2)

$$c := \frac{M^2}{2 \cdot EI} \cdot \int_0^l \phi^2\, \mathrm{d}x:$$

solve$(c = b, M)$:

$$m := (\%[1]) \Big/ \left(\max\left(\mathrm{Heaviside}(0.5 - \mathrm{abs}(\mathrm{psi} - \mathrm{beta})) \cdot \left(\frac{1}{2}(\mathrm{psi} - \mathrm{beta} + 0.5)^2 - \mathrm{psi}\right), \mathrm{abs}(\mathrm{beta}), \mathrm{abs}(\mathrm{psi})\right) \cdot q \cdot l^2\right);$$

$$\frac{1}{60} \left(\sqrt{30} \left(120 \psi \beta \pi^2 - 60 \psi^2 \pi^2 - 30 \psi \pi^2 + 45 - 30 \beta \pi^2 - 10 \beta \pi^4 - 60 \beta^2 \pi^2 + \pi^4 + 40 \beta^2 \pi^4 + 40 \psi^2 \pi^4 - 10 \psi \pi^4 + 40 \psi \beta \pi^4\right)^{1/2}\right) \Big/ \left(\pi^2 \max\left(\mathrm{Heaviside}(0.5 - |-\psi + \beta|) \left(\frac{1}{2}(\psi - \beta + 0.5)^2 - \psi\right), |\beta|, |\psi|\right)\right) \quad \mathbf{(10.3)}$$

$$mfactor := \frac{\sqrt{30}}{60 \cdot \pi^2} \left(-30 \psi \pi^2 + 120 \psi \beta \pi^2 - 60 \psi^2 \pi^2 + 45 + \pi^4 - 60 \beta^2 \pi^2 - 10 \psi \pi^4 - 10 \beta \pi^4 + 40 \psi \beta \pi^4 + 40 \beta^2 \pi^4 - 30 \beta \pi^2 + 40 \psi^2 \pi^4\right)^{1/2}:$$

evalf$(mfactor)$;

$$0.009249316304 \left(5080.716171 \beta \psi + 3304.187379 \psi^2 - 1270.179043 \psi + 142.4090911 - 1270.179043 \beta\right.$$

$$+\,3304.187379\,\beta^2\big)^{1/2}$$

$benadering := 0.009249316305^2 \cdot \big(-1270.179043\,\psi + 5080.716171\,\psi\,\beta + 3304.187379\,\psi^2 + 142.4090911 + 3304.187379\,\beta^2 - 1270.179043\,\beta\big);$

$$0.4346545170\,\beta\,\psi + 0.2826727416\,\psi^2 - 0.1086636293\,\psi + 0.01218307668 - 0.1086636293\,\beta + 0.2826727416\,\beta^2 \quad \textbf{(10.5)}$$

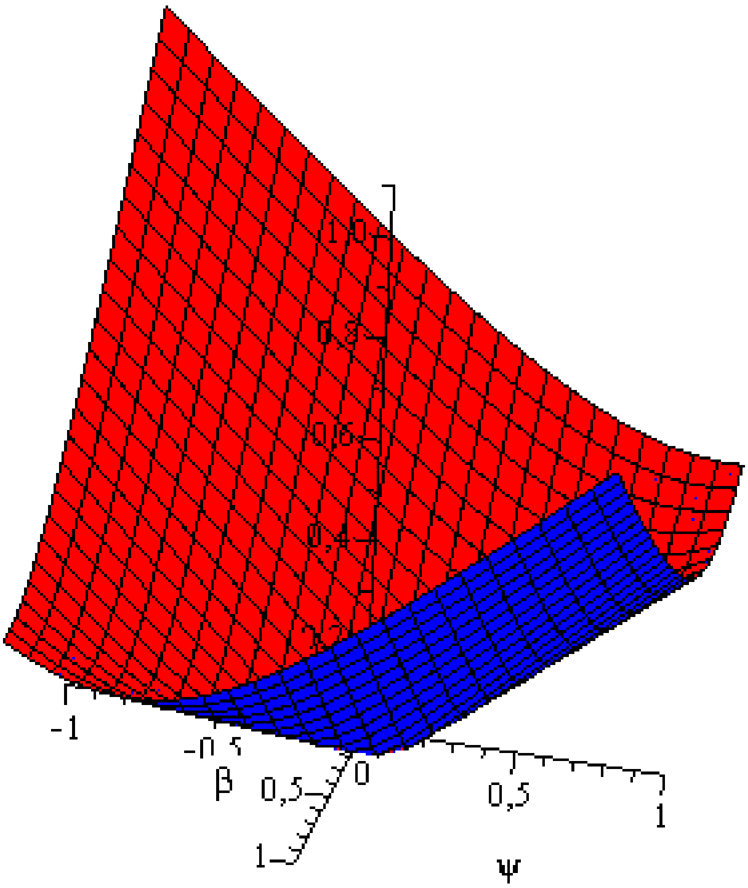
$benadering := 0.0123 - 0.1087\,\psi - 0.1087\,\beta + 0.2827\,\psi^2 + 0.4347\,\psi\,\beta + 0.2827\,\beta^2;$

$$0.0123 - 0.1087\,\psi - 0.1087\,\beta + 0.2827\,\psi^2 + 0.4347\,\beta\,\psi + 0.2827\,\beta^2 \quad \textbf{(10.6)}$$

with(*plots*) : *domein* := 1 :

(10.7)

D1 := *plot3d*(*mfactor*, beta = −*domein* ..*domein*, psi = −*domein* ..*domein*, *color* ='*blue*') :
D2 := *plot3d*(sqrt(*benadering*), beta = −*domein* ..*domein*, psi = −*domein* ..*domein*, *color* ='*red*') :
display({*D1*, *D2*});



$with(plots)$:

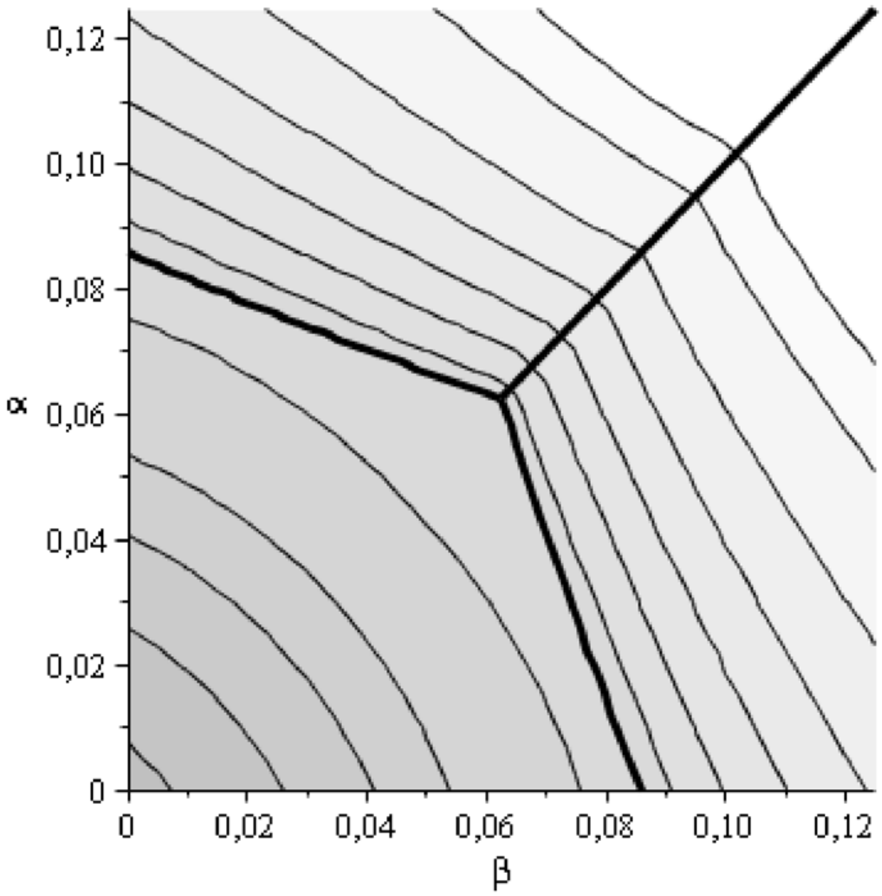
(10.8)

$bmin := 0 : bmax := \frac{1}{8} : pmin := 0 : pmax := \frac{1}{8}$:

$D6 := contourplot(m, \text{beta} = bmin\,..bmax, \text{psi} = pmin\,..pmax, contours = [0.20, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.83, 0.85, 0.86, 0.87, 0.88], filledregions = true, coloring = [\text{"White"}, \text{"grey"}])$:

$D1 := plot\left(\left(\beta + \frac{3}{2} - \sqrt{4\,\beta + 2}\right), \text{beta} = \max(-0.25, bmin)\,..\,\frac{1}{16}, pmin\,..pmax, color = 'red', thickness = 3\right) : D2 := plot\left(\left(\beta + \frac{1}{2} - 2\sqrt{\beta}\right), \text{beta} = \frac{1}{16}\,..\min(0.25, bmax), pmin\,..pmax, color = 'red', thickness = 3\right) : D3 := plot(0.5 + \text{beta}, \text{beta} = bmin\,..\max(-0.25, bmin), pmin\,..pmax, color = 'red', thickness = 3) : D4 := plot(-0.5 + \text{beta}, \text{beta} = bmin\,..\min(0.25, bmax), pmin\,..pmax, color = 'red', thickness = 3) : D5 := plot\left(\text{beta}, \text{beta} = \frac{1}{16}\,..bmax, pmin\,..pmax, color = 'red', thickness = 3\right)$:

$display(\{D1, D2, D3, D4, D5, D6\})$;



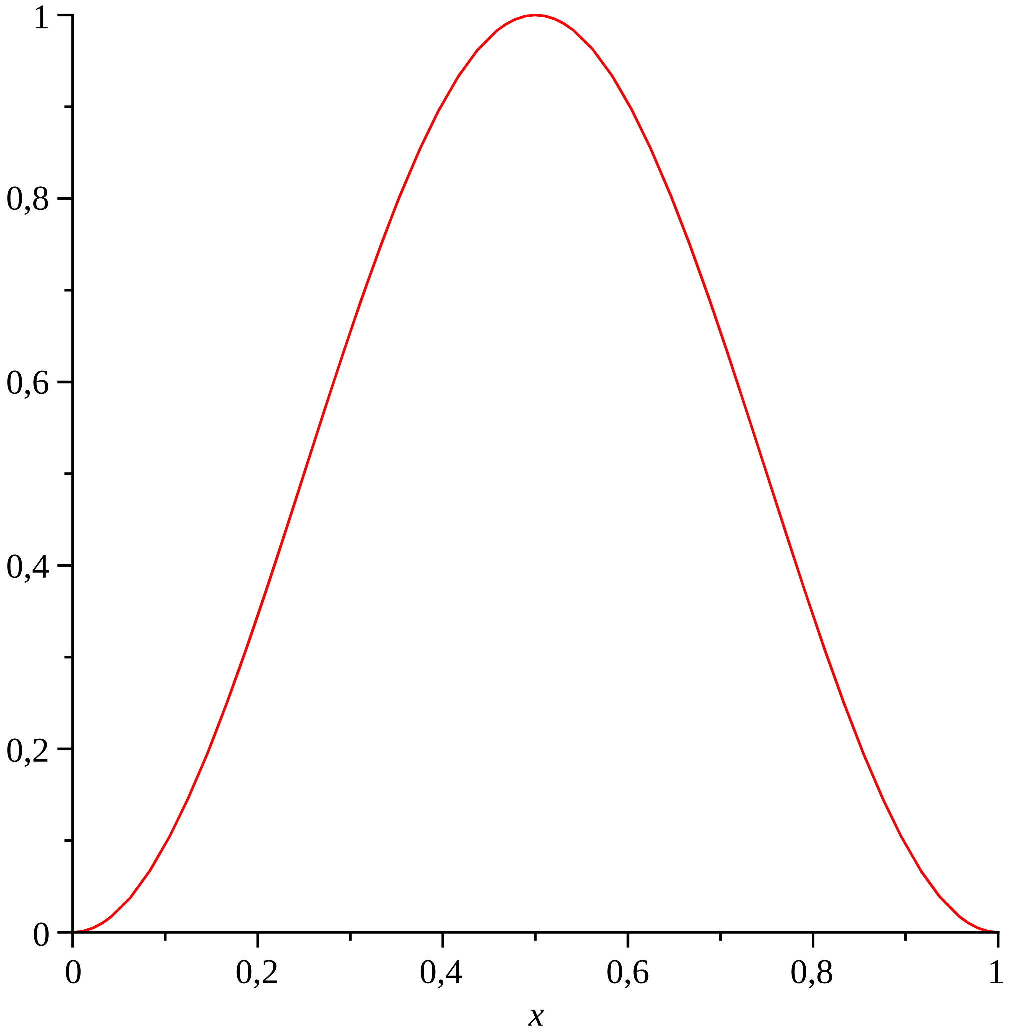
K) Basisgeval met dubbele gaffelopleggingen

restart;

$$\text{phi} := \text{alpha}\cdot\left(\frac{\cos\left(\frac{\text{Pi}}{k\cdot l}\cdot x-\frac{\text{Pi}}{2\cdot k}\right)-\cos\left(\frac{\text{Pi}}{2\cdot k}\right)}{1-\cos\left(\frac{\text{Pi}}{2\cdot k}\right)}\right) : k := 0.5 :$$

#let op een verandere k-waarde heeft geen juiste invloed op het kipmoment aangezien de rotatie in het x-y vlak verhinderd is.Verander deze waarde dus NIET zonder aanpassingen in de rest van het script te doen.

$plot(subs(\{l=1, \text{alpha}=1, k=0.5\}, \text{phi}), x=0..1);$



$My := \text{phi}\cdot M0 - Mhor :$

$w := \text{theta}[c]\cdot l - int\left(\frac{\text{My}}{EIyy}\cdot(l-x), x=0..l\right) = 0 :$

$\text{theta}[c] := solve(w, \text{theta}[c]) :$

$Mhor := solve(\text{theta}[c]=0, Mhor) :$

$w := \text{theta}[a]\cdot l - int\left(\phi\frac{My}{EIyy}\cdot(l-x), x=0..l\right) = 0 :$

$\text{theta}[a] := solve(w, \text{theta}[a]) :$

$$eq := int\left(\frac{(My)^2}{2 \cdot EIyy}, x = 0 \,..l\right) + int\left(\frac{(GIt \cdot diff(\text{phi}, x))^2}{2 \cdot GIt}, x = 0 \,..l\right) = 2 \cdot M0 \cdot \text{theta}[a] :$$

(11.1)

$solve(eq, M0) :$
$evalf(\%[1]);$

$$\frac{6.283185307 \sqrt{GIt\, EIyy}}{l} \qquad \textbf{(11.2)}$$

L) Belasting boven NC

restart;

$$\phi := \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) : \phi 2 := \alpha \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} \cdot \left(x + \frac{l}{2}\right)\right) :$$

$$\theta a := \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{Fnc}{2} \cdot x}{EI} \cdot (l - x)\, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi 2^2 \cdot \left(\frac{Fnc}{4} \cdot l - \frac{Fnc}{2} \cdot x\right)}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) dx}{l} :$$

$$w := \theta a \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{Fnc}{2} \cdot x}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) dx :$$

$$E := \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi \cdot \frac{Fnc}{2} \cdot x\right)^2}{2 \cdot EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi 2 \cdot \left(\frac{Fnc}{4} \cdot l - \frac{Fnc}{2} \cdot x\right)\right)^2}{2 \cdot EI} dx :$$

$$eq1 := Fnc \cdot w - E = int\left(\frac{GJ}{2} \cdot diff(\phi, x)^2, x = 0..l\right) :$$

$$Fnc := solve(eq1, Fnc) : Fnc := \%[2];$$

$$\frac{4\sqrt{3}\,\pi^2 \sqrt{(6 + \pi^2)\, GJ\, EI}}{(6 + \pi^2)\, l^2} \tag{12.1}$$

$$\theta a := \frac{\displaystyle\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{Ft}{2} \cdot x}{EI} \cdot (l - x)\, dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi 2^2 \cdot \left(\frac{Ft}{4} \cdot l - \frac{Ft}{2} \cdot x\right)}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) dx}{l} :$$

$$w := \theta a \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\phi^2 \cdot \frac{Ft}{2} \cdot x}{EI} \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) dx :$$

$$E := \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi \cdot \frac{Ft}{2} \cdot x\right)^2}{2 \cdot EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\phi 2 \cdot \left(\frac{Ft}{4} \cdot l - \frac{Ft}{2} \cdot x\right)\right)^2}{2 \cdot EI} dx :$$

$$eq2 := Ft \cdot w + \frac{Ft \cdot h \cdot \alpha^2}{4} - E = int\left(\frac{GJ}{2} \cdot diff(\phi, x)^2, x = 0..l\right) :$$

$$solve(eq2, Ft) : \mathrm{Ft} := \%[2];$$

$$-\frac{4\left(6\,h\,\pi^2\,EI-\sqrt{36\,h^2\,\pi^4\,EI^2+18\,\pi^4\,GJ\,EI\,l^2+3\,\pi^6\,GJ\,EI\,l^2}\right)}{\left(6+\pi^2\right)\,l^3} \tag{12.2}$$

$expand\left(simplify\left(\frac{Ft}{Fnc}\right)\right);$

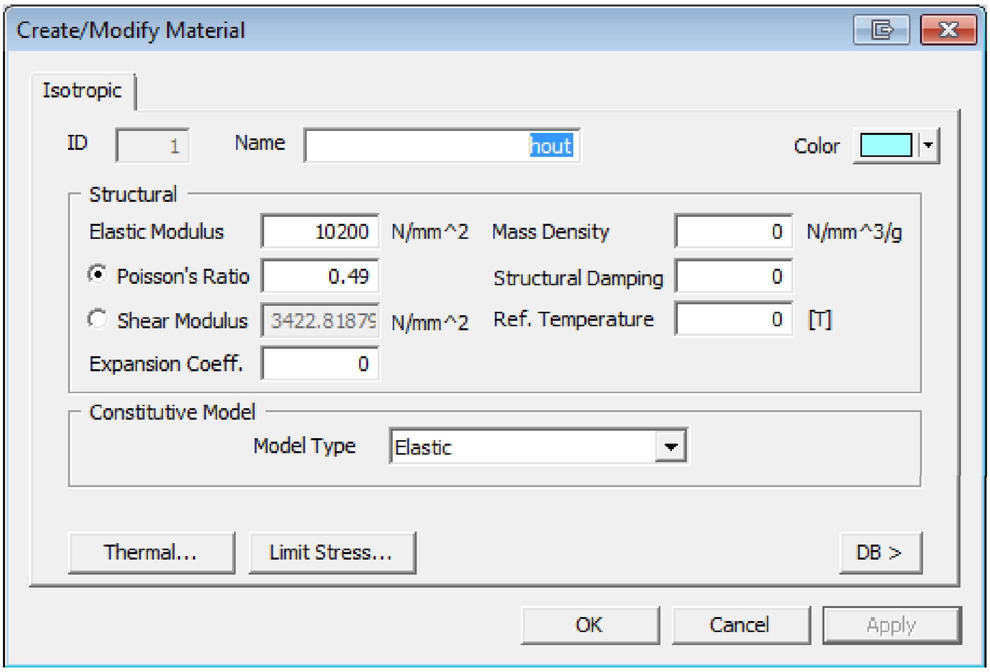
$$-\frac{2\sqrt{3}\;h\,EI}{l\sqrt{6+\pi^2}\;\sqrt{EI\,GJ}}+\frac{\sqrt{12\,h^2\,EI^2+6\,EI\,GJ\,l^2+EI\,\pi^2\,GJ\,l^2}}{l\sqrt{6+\pi^2}\;\sqrt{EI\,GJ}} \tag{12.3}$$

$evalf\left(\frac{2\cdot \mathrm{sqrt}(3)}{\mathrm{sqrt}\left(\pi^2+6\right)}\cdot 2\right);$

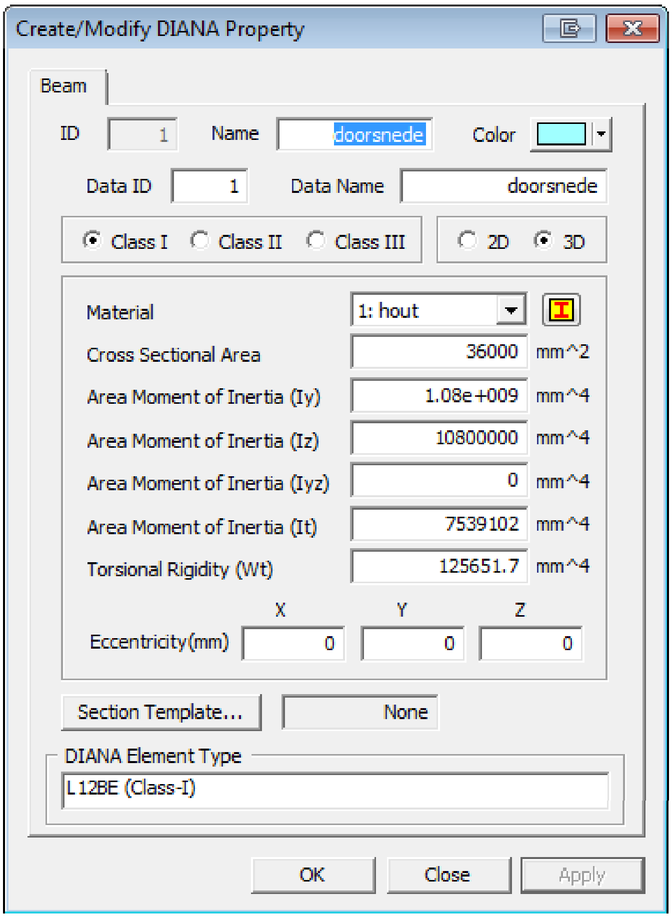
$$1.739152112 \tag{12.4}$$

Bijlage 5: DIANA modellering

De materiaaleigenschappen zijn via analysis >> material >> create >> isotropic als volgt toegevoegd:

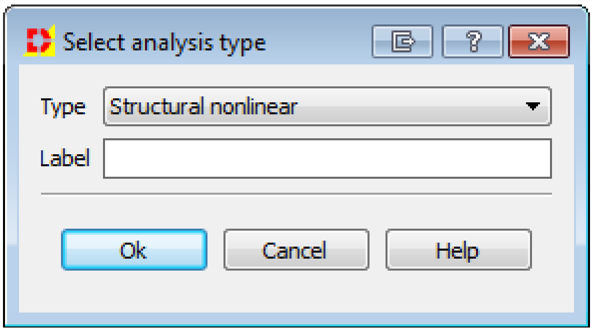


De doorsnede eigenschappen zijn via analysis >> property >> create >> 1D >> beam als volgt toegevoegd:

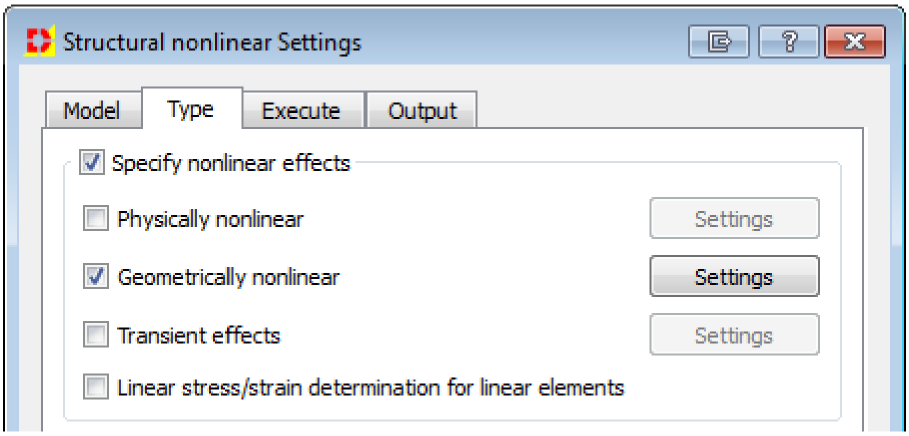


Opleggingen zijn toegevoegd via analysis >> BC >> constraint. Let op: je moet eerst nog wel een BC Set aanmaken waaronder deze oplegging(en) vallen. Belastingen kunnen worden aangebracht via analysis >> load, hierbij moet je opletten dat je de hoofdbelasting in een ander belastingsgeval onderbrengt via analysis >> load >> set.

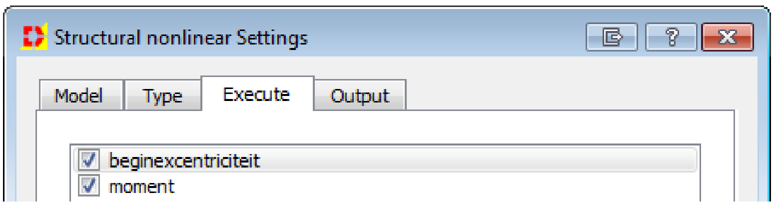
Nadat de ligger gemodelleerd is kan met de werkelijke berekening worden begonnen via analysys >> DIANA. Vervolgens wordt MeshEdit opgestart. Via analysis >> run kan de berekening worden geconfigureerd. Kies hier voor ‘structural nonlinear’.



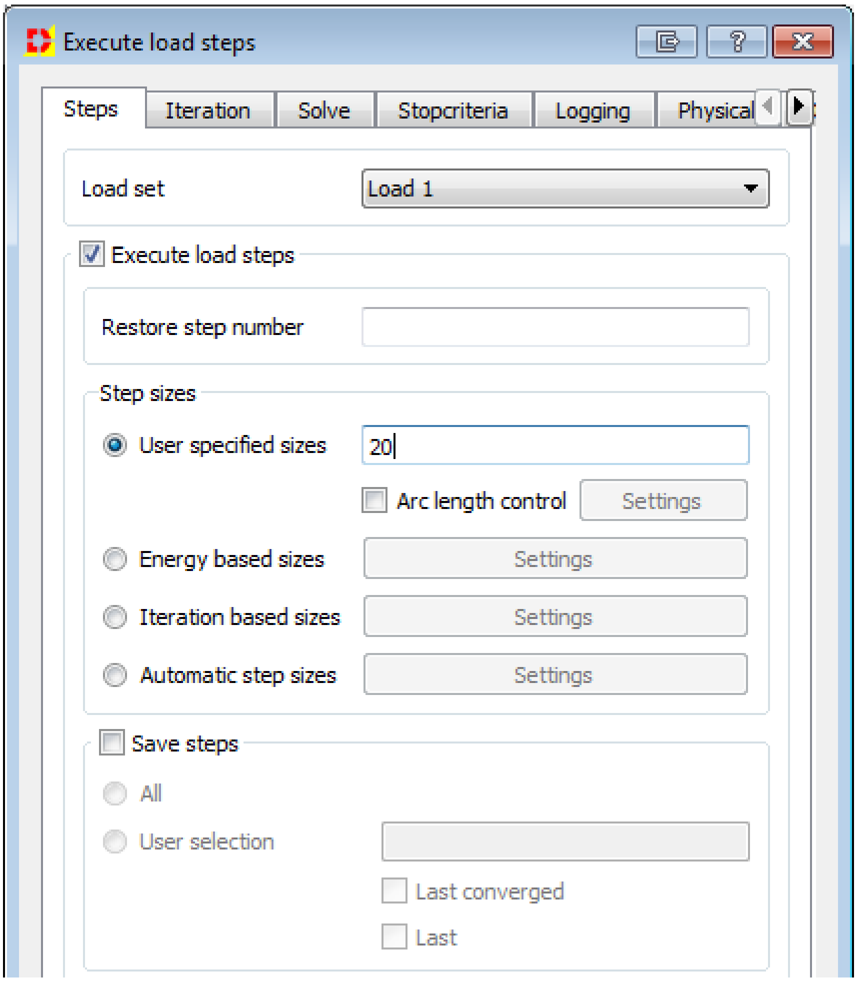
Klik vervolgens met de rechtermuisknop op ‘edit’ om de berekening te configureren. Dan opent zich het volgende scherm:



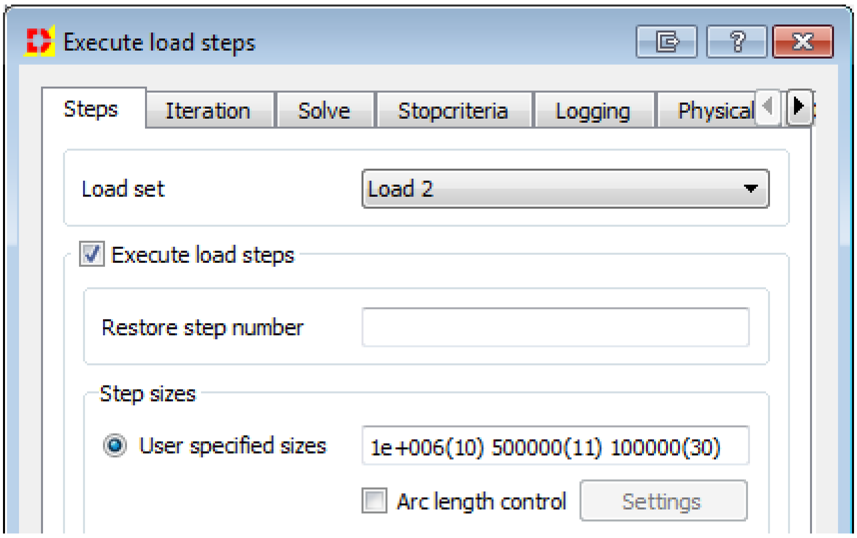
Het is belangrijk om alleen de geometrisch niet lineaire berekening aan te vinken. Onder het tabblad Execute dienen beide belastingsgevallen apart te worden toegevoegd:



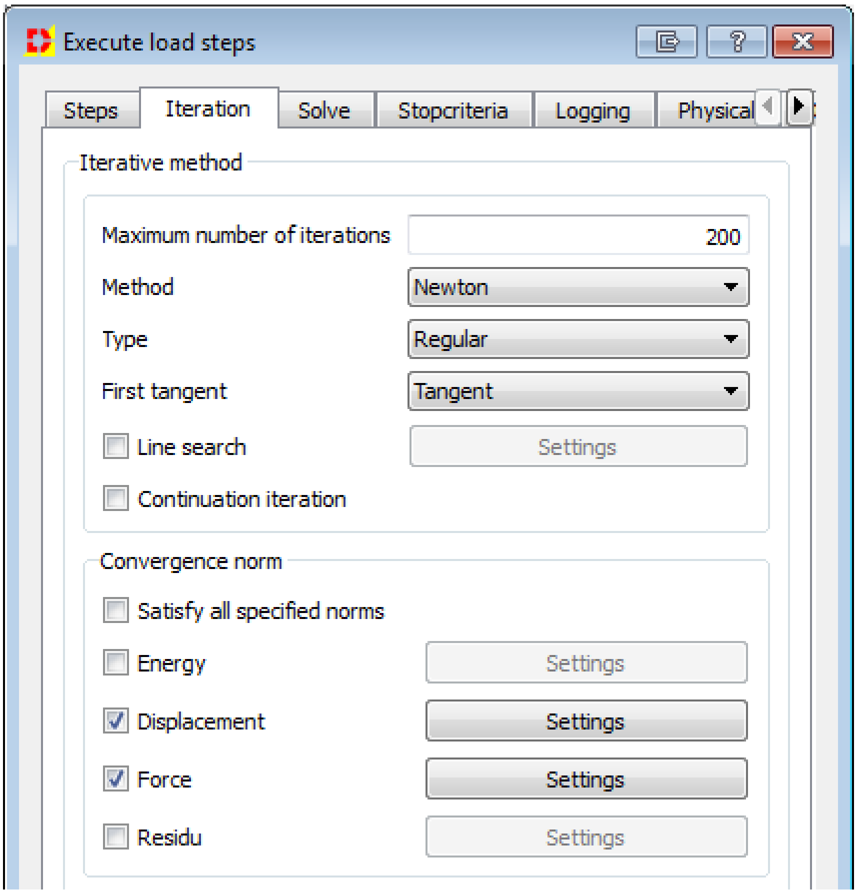
Via settings kunnen de belastingstappen, iteraties ed worden geregeld. De beginexcentriciteit kan alsvolgt worden ingevuld:



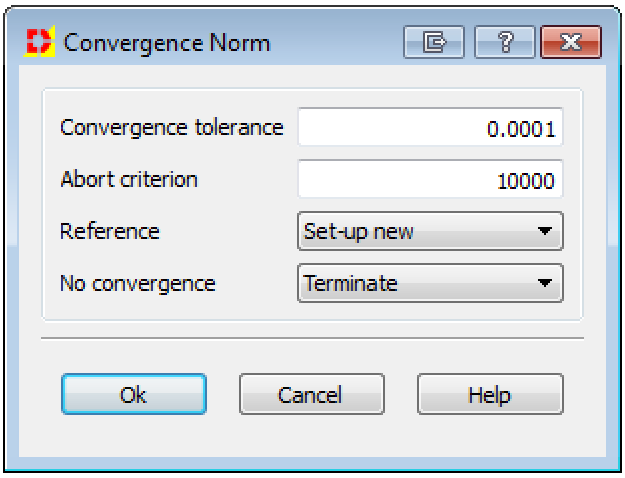
Voor de andere belasting is het afhankelijk van de grootte van het kipmoment wat de belastingstappen zijn. Voor het basisgeval zijn de volgende waarden ingevuld:



Onder het tabblad ‘iteration’ kan het aantal iteraties en de convergentienormen worden bepaald.

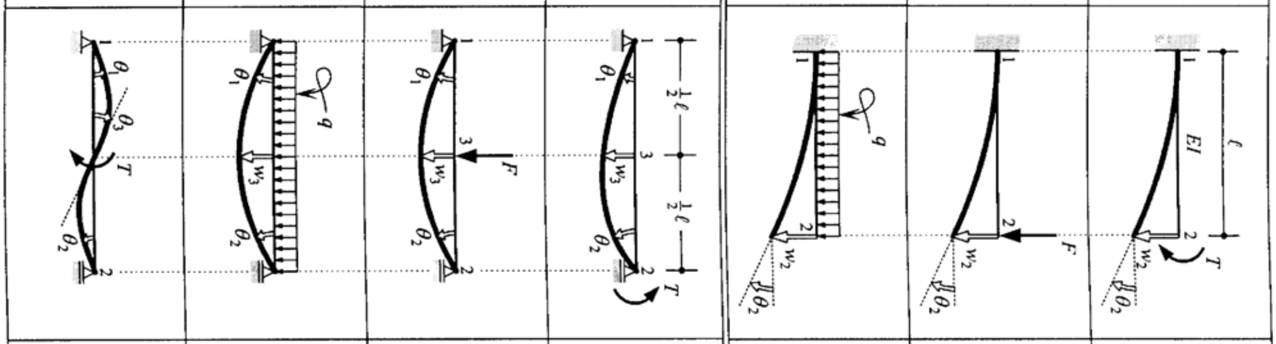


Er kan wel een behoorlijk aantal iteraties nodig zijn voordat evenwicht wordt gevonden. Dit is mede afhankelijk van de stapgrootte. Het is aan te raden de convergentiecriteria aan te passen via settings net zolang totdat de resultaten geen verschillen meer weergeven.



Onder het tabblad 'output' dient mogelijkerwijs te worden aangegeven elke output gewenst is, aangezien de gebruikers soms iets anders wenst dan de standaard output. Via 'run' kan de berekening vervolgens worden gestart. Het is belangrijk om de output file te screenen op errors en aantal iteraties zodat een goed beeld van de berekening kan worden gevormd.

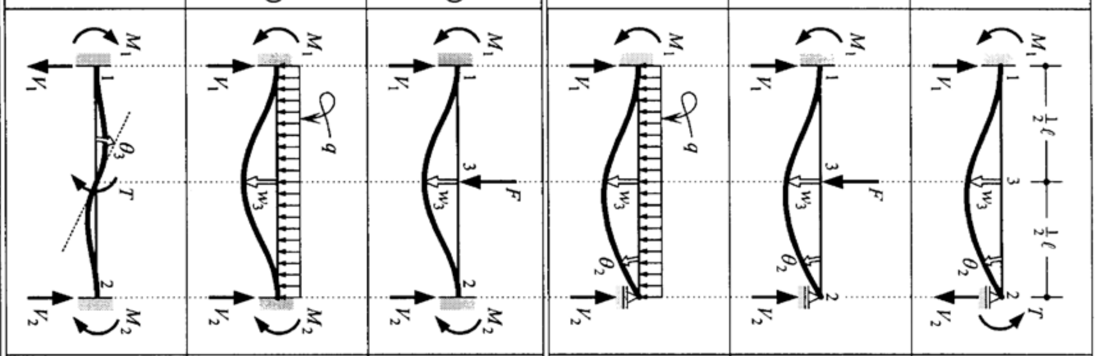
Bijlage 6: Vergeet-me-nietjes



(1)	$\theta_2 = \frac{T\ell}{EI}$; $w_2 = \frac{T\ell^2}{2EI}$
(2)	$\theta_2 = \frac{F\ell^2}{2EI}$; $w_2 = \frac{F\ell^3}{3EI}$
(3)	$\theta_2 = \frac{q\ell^3}{6EI}$; $w_2 = \frac{q\ell^4}{8EI}$
(4)	$\theta_1 = \frac{1}{6}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_2 = \frac{1}{3}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell^2}{EI}$
(5)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{16}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{48}\frac{F\ell^3}{EI}$
(6)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$
(a)	$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{24}\frac{T\ell}{EI}$; $\theta_3 = \frac{1}{12}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$

vrij opgelegde ligger (statisch bepaald) *vergeet-mij-nietjes*

statisch onbepaalde ligger (tweezijdig ingeklemd) *statisch onbepaalde ligger (enkelzijdig ingeklemd)*



(7)	$\theta_2 = \frac{1}{4}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{32}\frac{T\ell^2}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{2}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$
(8)	$\theta_2 = \frac{1}{32}\frac{F\ell^2}{EI}$; $w_3 = \frac{7}{768}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = \frac{3}{16}F\ell$; $V_1 = \frac{11}{16}F$; $V_2 = \frac{5}{16}F$
(9)	$\theta_2 = \frac{1}{48}\frac{q\ell^3}{EI}$; $w_3 = \frac{1}{192}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = \frac{1}{8}q\ell^2$; $V_1 = \frac{5}{8}q\ell$; $V_2 = \frac{3}{8}q\ell$
(10)	$w_3 = \frac{1}{192}\frac{F\ell^3}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{8}F\ell$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}F$
(11)	$w_3 = \frac{1}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{12}q\ell^2$; $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}q\ell$
(b)	$\theta_3 = \frac{1}{16}\frac{T\ell}{EI}$; $w_3 = 0$ $M_1 = M_2 = \frac{1}{4}T$; $V_1 = V_2 = \frac{3}{2}\frac{T}{\ell}$

Enkele formules voor prismatische liggers met buigstijfheid EI.
T, F en q zijn belastingen door resp. een koppel, kracht en gelijkmatig verdeelde belasting.
M_i en V_i zijn het buigend moment en de dwarskracht op einddoorsnede i van de ligger ten gevolge van de oplegreacties.