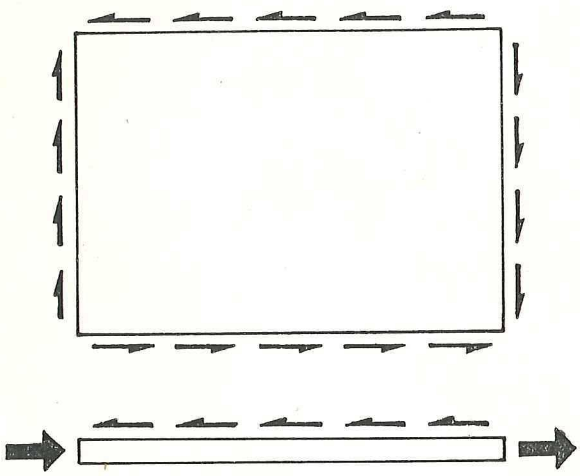
afstudeerverslag

Het staaf-paneel-model

Een alternatief voor de staafwerkmethode voor het ontwerpen van gewapend beton

September 1993

P.C.J. Hoogenboom



TU Delft
Technische Universiteit Delft

Faculteit der Civiele Techniek

Pierre

Het staaf-paneel-model

Een alternatief voor de staafwerkmethode voor het ontwerpen van gewapend beton

afstudeerverslag

P.C.J. Hoogenboom

begeleiders

prof.dr.ir. J. Blaauwendraad
dr.ir. J.G. Rots
ing. H.H. van Schaik
dr.ir. C. van der Veen

september 1993

Woord vooraf

Dit verslag is een onderdeel van het afstudeerwerk voor de studie Civiele Techniek aan de Technische Universiteit Delft.

Een succesvolle methode om ingewikkelde constructies te modelleren is de eindige-elementen methode (FEM). Al enige jaren wordt bij de vakgroep Grondslagen Constructieleer onderzoek gedaan naar het modelleren van constructies met eenvoudige elementen. Dit onderzoek wordt gedaan onder de naam discrete-elementenmethode (DEM) waarbij men nastreeft met minder soft- en hardware dezelfde resultaten als de eindige-elementenmethode te bereiken. Een invalshoek daarbij is het beschouwen van een in zijn vlak belaste plaat als een samenstel van veren en panelen.

Het afstudeerproject is gebaseerd op een concept van prof. Blaauwendraad om de discrete-elementenmethode toe te passen op in het vlak belaste constructies van gewapend beton. Het DEM-model wat hiervoor het meest geschikt lijkt neemt normaalspanningen op met staven en schuifspanningen met panelen. Het model is zodanig uitgewerkt dat het is te hanteren als een staafwerkmodel met panelen.

Staafwerkmodellen worden vaak aangeduid met de afkorting STM (strut-and-tie-model). Voor het hier ontwikkelde model hebben we de naam staaf-paneel-model gekozen. De afkorting is SPM wat tevens staat voor de Engelse naam stringer panel model.

Het is hier op zijn plaats de begeleiders te bedanken voor de adviezen en sturende kritiek die tot het huidige resultaat van het afstudeerproject hebben geleid.

Inhoud

Symbolen

a	scheurafstand
b	lengtemaat
A	oppervlakte van de doorsnede van een staaf
A_c	oppervlakte van het beton in de doorsnede van een staaf
A_s	oppervlakte van het staal in de doorsnede van een staaf
Asx	oppervlakte van het staal in de x-richting van een paneel
Asy	oppervlakte van het staal in de y-richting van het paneel
$\mathbf{B}_p$	kinematische vector van een paneel
$\mathbf{B}_s$	kinematische matrix van een staaf
$\mathbf{D}_p$	gelineariseerde stijfheid van een paneel
$\mathbf{D}_s$	gelineariseerde stijfheid van een staaf
e_1, e_2	gegeneraliseerde verplaatsingen van een staaf
e_1', e_2'	projectie van een naburig punt in het N_1-vlak op het e_1-e_2-vlak
e_1'', e_2''	projectie van een naburig punt in het N_2-vlak op het e_1-e_2-vlak
e_1^o, e_2^o	rekgrootheden direct berekend uit de verplaatsingen van een staaf
E_c	elasticiteitsmodulus van het beton
E_s	elasticiteitsmodulus van het staal
f	willekeurige functie van één variabele
f_{c1}	grootste hoofdspanning van het beton van een paneel
f_y	vloeispanning van de wapening (positieve waarde)
f_{cr}	treksterkte van het beton
f'_c	druksterkte van het beton (negatieve waarde)
F	belasting
F_p	kracht op een paneel
F_s	kracht op een staaf
g	gegeneraliseerde verplaatsing van een paneel
G	glijdingsmodulus van een paneel
$\mathbf{K}^e$	elementstijfheidsmatrix
l	lengte van een staaf
n	verhouding van de elasticiteitsmoduli van staal en beton
N	normaalkracht in een staaf (al dan niet constant over de lengte)
N_c	kracht op een staaf zonder wapening waarbij deze bezwijkt op druk
N_{cr}	kracht op een staaf bij het ontstaan van de eerste scheur
N_r	fictieve grootheid gerelateerd aan N_{cr}
N_y	kracht op een staaf waarbij de drukwapening vloeit
N_{yr}	kracht op een staaf waarbij de getrokken wapening vloeit
N_1, N_2	normaalkrachten in de uiteinden van een staaf
N_1', N_2'	beschrijving van een naburig punt in het N_1-vlak
N_1'', N_2''	beschrijving van een naburig punt in het N_2-vlak
o	graad van statisch onbepaaldheid van een staaf-paneel-model
p	aantal panelen van een staaf-paneel-model
s	aantal doorgaande staven van een staaf-paneel-model
t	dikte van een paneel
u	verplaatsing
v	aantal oplegreacties van een staaf-paneel-model
z	zakking van een ligger

α	verhouding van hoogte en lengte van een paneel
β	verhouding van lengte en hoogte van een paneel
γ	afschuifhoek van een paneel
ΔN	increment van N_1 of N_2
Δ_x	afmeting van een paneel in de x-richting
Δ_y	afmeting van een paneel in de y-richting
ϵ_1	grootste hoofdrek van het beton van een paneel
ε	gemiddelde rek van een staaf als functie van de normaalkracht
ε_c	rek in beton als de extreme betondrukspanning optreedt
ε_s	rek van het staal ter plaatse van een scheur in het beton
ε_x	gemiddelde rek van een paneel in de x-richting
ε_y	gemiddelde rek van een paneel in de y-richting
$\underline{\varepsilon}$	gemiddelde rek van de staaf als functie van de lengte
ξ	dempingsmaat van het rekenproces
ρ	verhouding van de oppervlakken van staal en beton in een staaf
σ	spanning in het beton
τ	schuifspanning in het paneel
ϕ	gemiddelde staafdiameter van de wapening
ψ	hoek die de richting van de kleinste of grootste hoofdspanning aangeeft

Samenvatting

Het staaf-paneel-model is ontwikkeld als gereedschap voor het ontwerpen van constructies van gewapend beton. Als zodanig lijkt het in veel opzichten op de staafwerkmethode.
Een in het vlak belaste plaat wordt gemodelleerd met een staaf-paneel-model als een samenstel van staven die alleen normaalspanningen opnemen en panelen die alleen schuifspanningen opnemen. De wisselwerking tussen een staaf en een paneel is een constante schuifspanning in de interface. Wanneer we de plaat opvatten als een gedrongen ligger van gewapend beton, dan worden de hoofdwapening en het beton met normaalspanningen voorgesteld door de staven terwijl de verdeelde wapening en het beton met schuifspanningen worden voorgesteld door de panelen.
In dit verslag is het fysisch niet-lineair gedrag van de staven afgeleid van een staaf van gewapend beton. Het fysisch niet-lineair gedrag van het paneel is gebaseerd op de modified compression field theory. De resultaten zijn samengevat op pagina 27. Om de vergelijkingen op te lossen is een computerprogramma geschreven. Het gebruikte algoritme is gebaseerd op de verplaatsingsmethode met een iteratieve correctie van de gelineariseerde constitutieve vergelijkingen (secant-stijfheid).
Het staaf-paneel-model is getoetst aan drie gedrongen liggers waarvan experimentele resultaten of eindige-elementenresultaten beschikbaar waren. Het blijkt dat met een grof model zowel de krachtsverdeling als de vervormingen al heel betrouwbaar worden weergegeven. De berekende bezwijkbelasting wordt goed voorspeld. De manier van bezwijken wordt nog niet altijd correct voorspeld. Het model geeft tevens een indicatie van de scheurwijdte bij de hoofdwapening.
De voldoende nauwkeurigheid van de resultaten in combinatie met zijn flexibiliteit en eenvoud maken het staaf-paneel-model een veelbelovend hulpmiddel voor het ontwerpen van constructief beton.

Summary

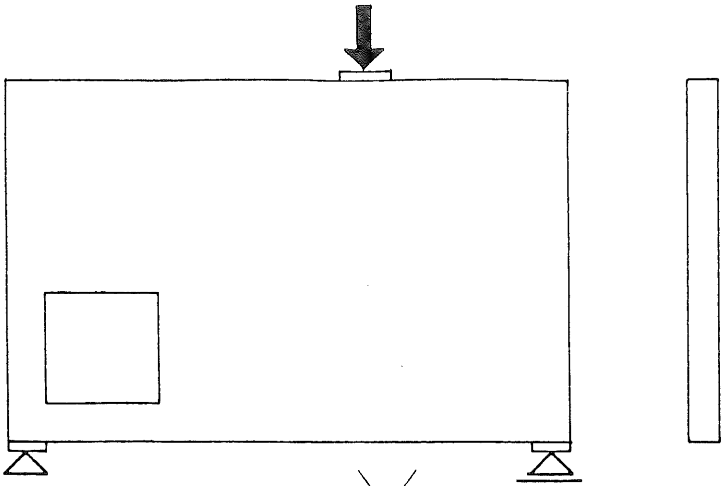
The stringer panel model is developed to be a tool for the design of structural concrete. As such it has many analogies with strut-and-tie-models.

A plate loaded in its plane is modelled with a stringer panel model as a system of stringers which only resist normal stresses and panels which only resist shear stresses. The interaction between a stringer and a panel is a constant interface shear stress. When we think of this plate as a deep beam of reinforced concrete, then the main reinforcement and the concrete with normal stresses are represented by the stringers while the distributed reinforcement and the concrete with shear stresses are represented by the panels.

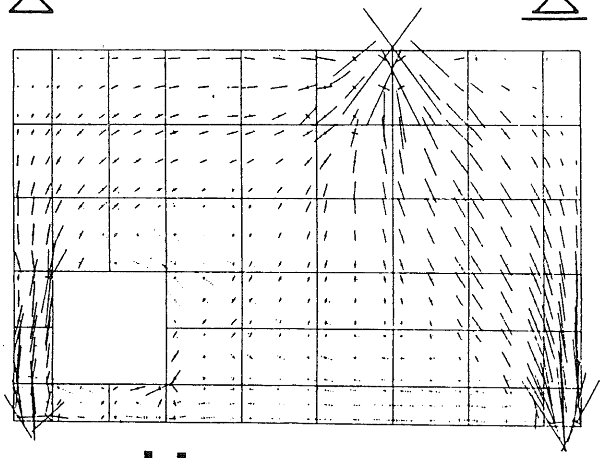
In this thesis the physical non-linear behaviour of the stringer is derived from a reinforced concrete bar. The non-linear behaviour of the panel is based on the modified compression field theory. The results are summarized on page 27. To solve the equations a computer program has been written. The algorithm used is based on the displacement method with iterative corrections to the linearised constitutive equations (secant stiffness).

The stringer panel model is tested on three deep beams for which experimental results or finite element results were available. It shows that with a coarse model both the distribution of stresses and the displacements are represented reliably. The calculated collapse load is predicted accurately. The actual mode of collapse is not yet always predicted correctly. The model also gives a indication of the crack width at the main reinforcement.

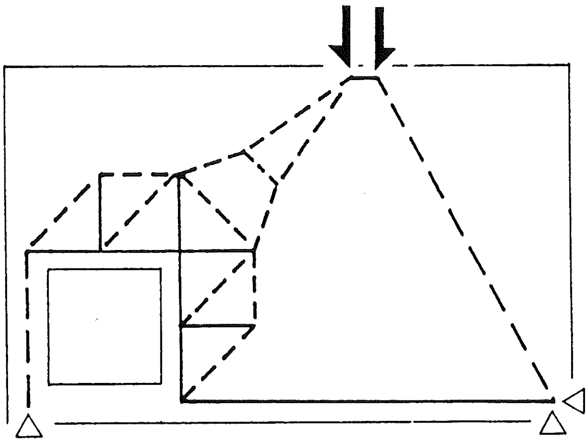
The sufficient accuracy of the results in combination with its flexibility and simplicity makes the stringer panel model a promising aid for the design of structural concrete.



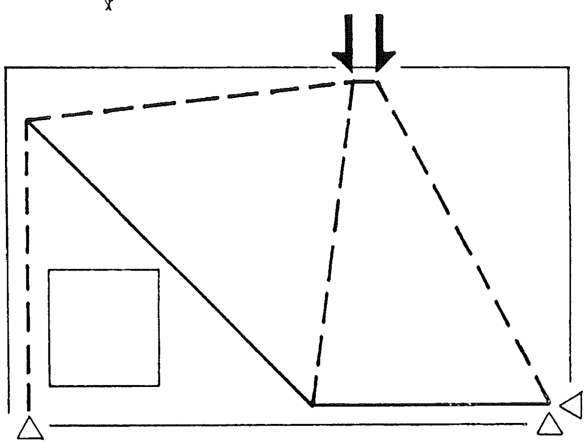
a) de belasting



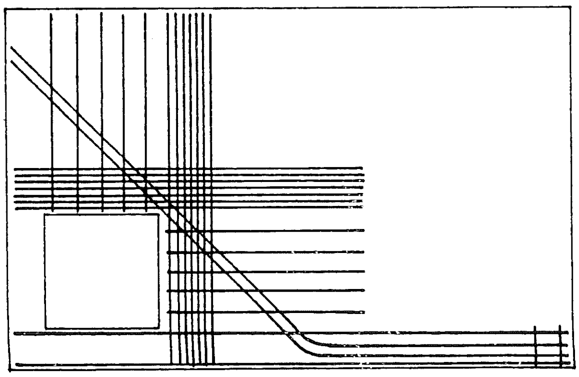
b) de elastische hoofdspanningen



c) staafwerkmodel 1



d) staafwerkmodel 2



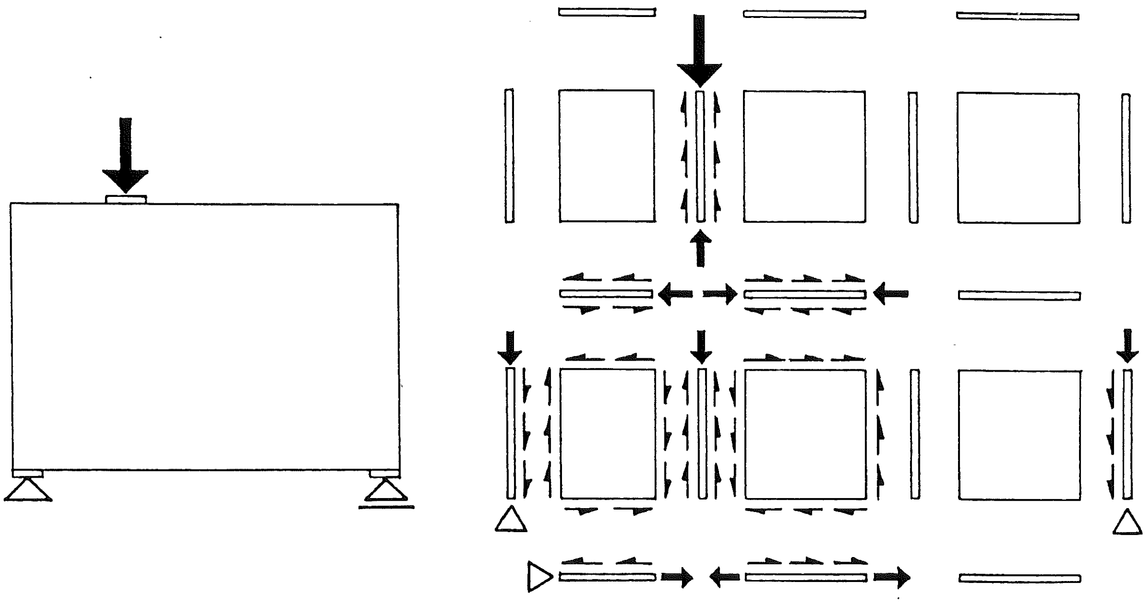
e) de hoofdwapening

figuur 1: Een ontwerpproces met een staafwerkmodel

1 Inleiding

Het staaf-paneel-model is ontwikkeld als gereedschap voor het ontwerp van in het vlak belaste constructies van gewapend beton. Het model is gebaseerd op de discrete-elementen-methode maar heeft in het gebruik veel overeenkomsten met de staafwerkmethode.
In dit hoofdstuk wordt eerst het gangbare ontwerpproces met staafwerkmodellen beschreven aan de hand van een voorbeeld. Vervolgens wordt het staaf-paneel-model geïntroduceerd. Tenslotte worden de mogelijkheden van het staaf-paneel-model aangegeven die in het afstudeerwerk zijn onderzocht.

Het voorbeeld wat we kiezen is de gedrongen ligger met een groot gat (zie figuur 1a). Voor deze ligger heeft Schlaich de wapening bepaald met een staafwerkmodel.[1]
Van de constructie wordt een lineair-elastische berekening gemaakt volgens de eindige-elementenmethode voor het bepalen van de hoofdspanningen (zie figuur 1b). Bij eenvoudige constructies zal een ervaren constructeur deze stap achterwege laten. Als de constructie statisch onbepaald is zullen met deze berekening tevens de oplegreacties worden bepaald. Schlaich ontwerpt vervolgens twee statisch bepaalde staafwerkmodellen (figuur 1c en 1d). Voor een eenvoudige uitvoering van het vlechtwerk worden de modellen zodanig gekozen dat de wapening zoveel mogelijk orthogonaal is. Na vergelijking met het lineaire spanningsveld blijkt dat een combinatie van deze modellen de trajectoriën het beste volgt. Hij besluit dat elk model de helft van de belasting draagt. Vervolgens worden de staafkrachten berekend, de betonspanningen gecontroleerd, de wapening gekozen en de knooppunten gedetailleerd. In figuur 1e is de op deze wijze bepaalde hoofdwapening getekend. De aanvullende wapening is niet weergeven.

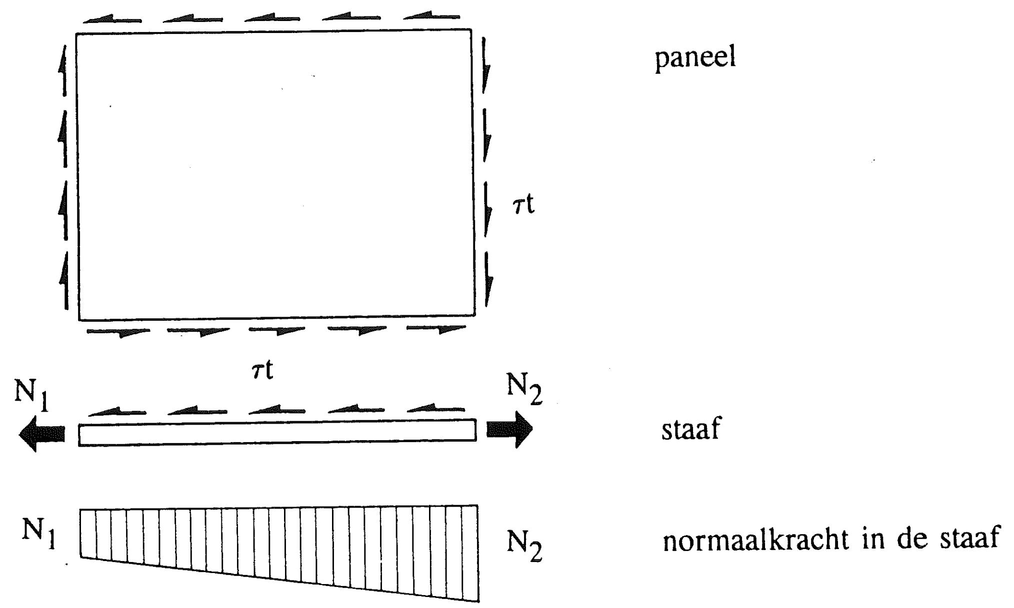


a b

figuur 2: Een in het vlak belaste plaat gemodelleerd met een staaf-paneel-model

[1] Schlaich, p.119-126 (zie pagina 53 van dit verslag)

Om het staaf-paneel-model te introduceren beschouwen we een in zijn vlak belaste plaat opgelegd op twee steunpunten zoals is weergegeven in figuur 2a. Deze plaat kan worden gemodelleerd volgens de discrete-elementenmethode als een samenstel van staven en panelen (zie figuur 2b).
In de staven treedt slechts normaalkracht N op. In de panelen treedt slechts een constante schuifspanning τ op (zie figuur 3). De wisselwerking tussen een staaf en de aangrenzende panelen bestaat uit een constante schuifkracht τt, waarin t de dikte van het paneel is. De normaalkracht in de staaf varieert daardoor lineair over de lengte. Staven die in elkaars verlengde liggen dragen een normaalkracht over.
De spanningen en krachten op de staven en de panelen zijn in evenwicht.



figuur 3: Krachten en spanningen op staaf en paneel

Bij statisch bepaalde modellen kunnen we de krachten eenvoudig met de hand uitrekenen. De graad van statisch onbepaaldheid van het staaf-paneel-model is te bepalen met de volgende formule.

$$o = p + v - s$$

o graad van statisch onbepaaldheid
p aantal panelen
v aantal oplegreacties
s aantal doorgaande staven

Een doorgaande staaf bestaat uit een aantal staven die in elkaars verlengde liggen. Het model in figuur 2 heeft drie horizontale doorgaande staven en vier verticale doorgaande staven. De graad van statisch onbepaaldheid is derhalve 6+3-7=2.
Als het model niet statisch bepaald is hangt de verdeling van de krachten af van de stijfheden van de onderdelen. In het algemeen zal dan een computerberekening nodig zijn om de verplaatsingen en de krachten te bepalen.

Het staaf-paneel-model kan worden gebruikt om de lineair-elastische hoofdspanningen te berekenen zoals in het voorbeeld van de gedrongen ligger met een groot gat is gedaan met de eindige-elementenmethode. De staaf-paneel-berekening zal minder nauwkeurig zijn dan een vergelijkbare berekening volgens de eindige-elementenmethode, maar door de panelen te vervangen door staven kan op een eenvoudige manier een staafwerkmodel worden gegenereerd. We stellen ons de vraag in hoeverre het staaf-paneel-model kan worden gebruikt in een ontwerpproces om tot de juiste keuze van het staafwerkmodel te komen.

Als we het staaf-paneel-model vergelijken met de wapeningstekening van figuur 1e dan is het niet moeilijk om staven te zien in de wapening rond het gat, en daarnaast panelen te denken. We stellen ons dan ook de vraag of het mogelijk is het gedrag van gedrongen betonconstructies te beschrijven met een staaf-paneel-model. Voor de getrokken staven moet dan de stijfheid van de wapening inclusief tension-stiffening in rekening worden gebracht. Voor de gedrukte staven moet de rekstijfheid van het gedrukte beton worden gekozen. Ook voor de panelen moet een gescheurde stijfheid in rekening worden gebracht.

2 Een elastische beschouwing

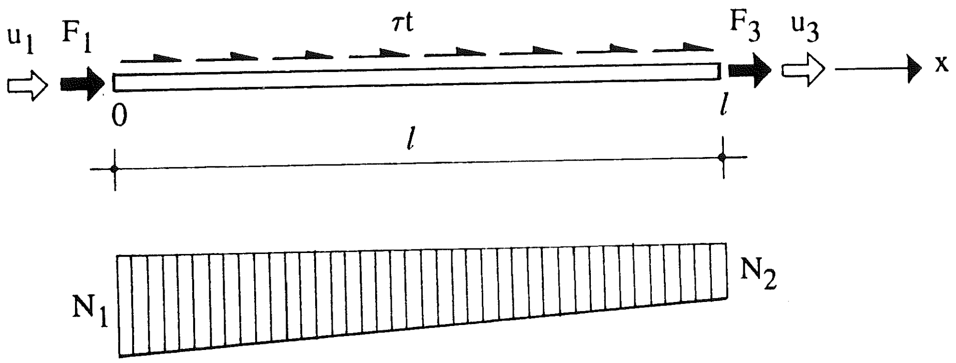
In dit hoofdstuk wordt het model verkend door uit te gaan van een lineair-elastisch materiaal. De stijfheidsmatrices van de staaf en het paneel worden afgeleid. Vier staven en een paneel worden vervolgens opgevat als één element. Hiermee wordt gekeken hoe snel de verplaatsingen convergeren als een constructie wordt gemodelleerd met meer elementen. Ook wordt gekeken in hoeverre de voorspelde hoofdspanningsrichtingen betrouwbaar zijn. Tot slot wordt met de resultaten van dit hoofdstuk een staafwerkmodel voor een gedrongen ligger ontworpen.

2.1 Afleiding van de stijfheidsmatrices

Een elegante manier om de stijfheidsmatrix van de staaf af te leiden is door middel van complementaire energie. De uitdrukking voor de complementaire energie van de staaf luidt:

$$E_{compl} = \int_{x=0}^{l} \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA}dx - F_1 u_1 - F_3 u_3 - \int_{x=0}^{l} \tau t u dx$$

De gebruikte symbolen zijn weergegeven in figuur 4. F_1 en F_3 zijn de krachten op de staafeinden en u_1 en u_3 zijn de verplaatsingen van de staafeinden. N is de normaalkracht in de staaf en τt is de schuifkracht per eenheid van lengte langs de staaf. De totale schuifkracht langs de staaf noemen we F_2. In het volgende hoofdstuk worden de grootheden formeel gedefinieerd.



figuur 4: Het staafelement

De volgende relaties kunnen uit de figuur worden afgeleid.

$$N = N_1 - \frac{x}{l}(N_1 - N_2)$$
$$F_1 = -N_1$$
$$F_3 = N_2$$
$$F_2 = N_1 - N_2 \qquad \tau t = \frac{N_1 - N_2}{l}$$

Substitutie hiervan in de uitdrukking voor de complementaire geeft:

$$E_{compl} = \int_{x=0}^{l} \frac{1}{2EA} \left[N_1 - x \frac{N_1 - N_2}{l} \right]^2 dx + N_1 u_1 - N_2 u_3 - \int_{x=0}^{l} \frac{N_1 - N_2}{l} u \, dx$$

Omdat (N1-N2)/l in de laatste term onafhankelijk is van x kan deze voor de integraal worden gebracht. Het blijkt nu zinvol de volgende grootheid te definiëren.

$$u_2 = \frac{1}{l} \int_{x=0}^{l} u(x) \, dx$$

Hiermee wordt de gemiddelde verplaatsing u_2 van de staaf gekozen als vrijheidsgraad. Substitutie hiervan en uitwerking van de integraal leidt tot de volgende uitdrukking.

$$E_{compl} = \frac{l}{6EA}(N_1^2 + N_1 N_2 + N_2^2) + N_1 u_1 - N_2 u_3 - N_1 u_2 + N_2 u_2$$

De complementaire energie moet stationair zijn met betrekking tot variaties van de spanning. De afgeleiden van de uitdrukking naar N_1 en N_2 moeten derhalve nul zijn.

$$\frac{\partial E_{compl}}{\partial N_1} = \frac{l}{6EA}(2N_1 + N_2) + u_1 - u_2 = 0$$

$$\frac{\partial E_{compl}}{\partial N_2} = \frac{l}{6EA}(N_1 + 2N_2) - u_3 + u_2 = 0$$

In matrix notatie:

$$\frac{l}{6EA} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Voorvermenigvuldigen van beide leden met de inverse van de linker matrix geeft:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Als we beide leden voorvermenigvuldigen met de getransponeerde van de rechter matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{6EA}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

blijkt in het linker lid een uitdrukking voor de krachten te ontstaan.

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 \\ N_1 - N_2 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -6 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Hiermee is het gewenste verband tussen de krachten en de verplaatsingen afgeleid.
Met de definities

$$\mathbf{D} = \frac{6EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

kan het bovenstaande resultaat ook als volgt worden uitgedrukt.

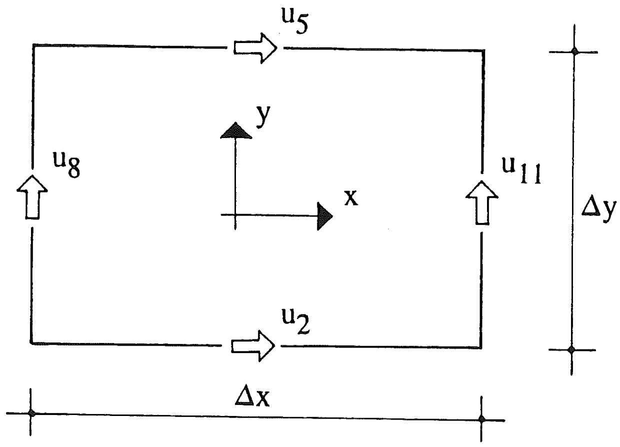
$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \mathbf{DB} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T\mathbf{DB} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

De volgende definitie ligt nu voor de hand.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

De grootheden e_1 en e_2 zijn nul bij een starre verplaatsing van de staaf. Bovendien beschrijven ze de vervormingen van de staaf volledig.
De gevolgde afleiding met behulp van complementaire energie laat weinig ruimte voor keuzes. Op een natuurlijke manier ontstaat de kinematische matrix **B** die de relatie legt tussen de verplaatsingen u_1, u_2 en u_3 en de gegeneraliseerde verplaatsingen e_1 en e_2. Bovendien legt deze matrix **B** in getransponeerde vorm het verband tussen de belastingen F_1, F_2 en F_3 en de spanningsgrootheden N_1 en N_2. De constitutieve matrix **D** maakt de lineair-elastische beschrijving compleet door het verband te leggen tussen de spanningsgrootheden N_1 en N_2 en de gegeneraliseerde verplaatsingen e_1 en e_2.

Een andere keuze die impliciet is gemaakt is de uitdrukking voor de vrijheidsgraad u_2. Een keuze die bij een afleiding volgens een directe methode meer voor de hand ligt zou kunnen zijn $u_2 = u(l/2)$. Beide keuzes zijn gelijkwaardig als alleen naar de staaf wordt gekeken. De vraag is of de verplaatsing van de rand van het aangrenzende paneel het beste overeenkomt met de gemiddelde verplaatsing van de staaf of met de verplaatsing halverwege de staaf. Met het oog op de niet-lineaire stijfheid in het volgende hoofdstuk kan de rek in de staaf plaatselijk sterk toenemen zonder dat de verplaatsing in het midden beïnvloed wordt. Daarom lijkt de gemiddelde verplaatsing een betere maat.



figuur 5: Het paneelelement

De lineair-elastische stijfheidsmatrix van het paneel wordt afgeleid in de literatuur.[1] De randen van het paneel ondergaan een starre verplaatsing die kunnen worden beschreven met de vrijheidsgraden u_2, u_5, u_8, en u_{11}. Het resultaat is:

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_5 \\ F_8 \\ F_{11} \end{bmatrix} = Gt \begin{bmatrix} \beta & -\beta & 1 & -1 \\ -\beta & \beta & -1 & 1 \\ 1 & -1 & \alpha & -\alpha \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \beta &= \frac{\Delta x}{\Delta y} \end{aligned}$$

In figuur 5 zijn de notaties weergegeven. G is de glijdingsmodulus van het paneelmateriaal. In het volgende hoofdstuk worden de grootheden formeel gedefinieerd. De relatie kan als volgt worden ontbonden.

$$\begin{bmatrix} F_2 \\ F_5 \\ F_8 \\ F_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathbf{B} &= [-\Delta x, \Delta x, -\Delta y, \Delta y] \\ \mathbf{D} &= \frac{Gt}{\Delta x \Delta y} \end{aligned}$$

$\tilde{B} = [\mu, -\mu, \eta, -\eta]$ of $\tilde{B} = [-\mu, \mu, -\eta, \eta]$

$\tilde{D} = Gt$

$\mu^2 = \frac{\Delta x}{\Delta y} \quad \eta^2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

[1] Blaauwendraad, p.2.4-2.5

Zoals figuur 6 laat zien kunnen vier staven en een paneel worden gecombineerd tot één element met 12 vrijheidsgraden. Om de vervorming ten gevolge normaalkracht op het element juist te beschrijven moet de oppervlakte van een staaf gelijk zijn aan de halve breedte van het paneel maal de dikte van het paneel. Met deze keuze

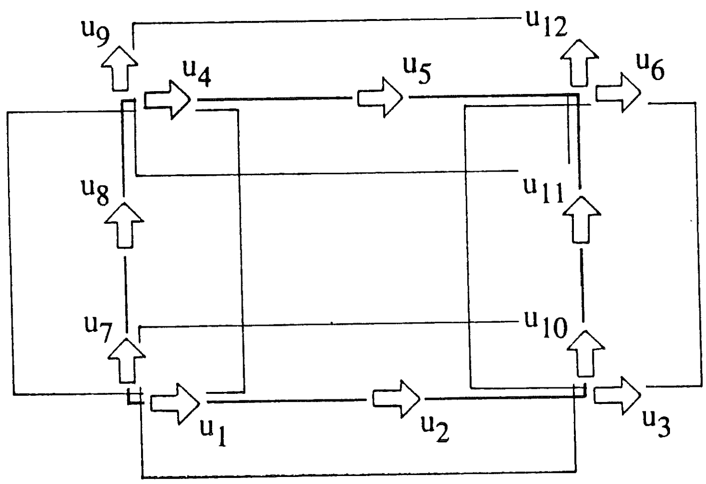
$$A_x = \frac{1}{2}\Delta y\, t$$

$$A_y = \frac{1}{2}\Delta x\, t$$

$$G = \frac{1}{2}E$$

ontstaat de volgende symmetrische stijfheidsmatrix die het verband geeft tussen de krachten F_1 tot en met F_{12} en de verplaatsingen u_1 tot en met u_{12}.

$$\frac{Et}{2}\begin{bmatrix}
4\alpha & -6\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6\alpha & 12\alpha+\beta & -6\alpha & 0 & -\beta & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
2\alpha & -6\alpha & 4\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 4\alpha & -6\alpha & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\beta & 0 & -6\alpha & 12\alpha+\beta & -6\alpha & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\alpha & -6\alpha & 4\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\beta & -6\beta & 2\beta & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -6\beta & 12\beta+\alpha & -6\beta & 0 & -\alpha & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & -6\beta & 4\beta & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\beta & -6\beta & 2\beta \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & -6\beta & 12\beta+\alpha & -6\beta \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\beta & -6\beta & 4\beta
\end{bmatrix}$$

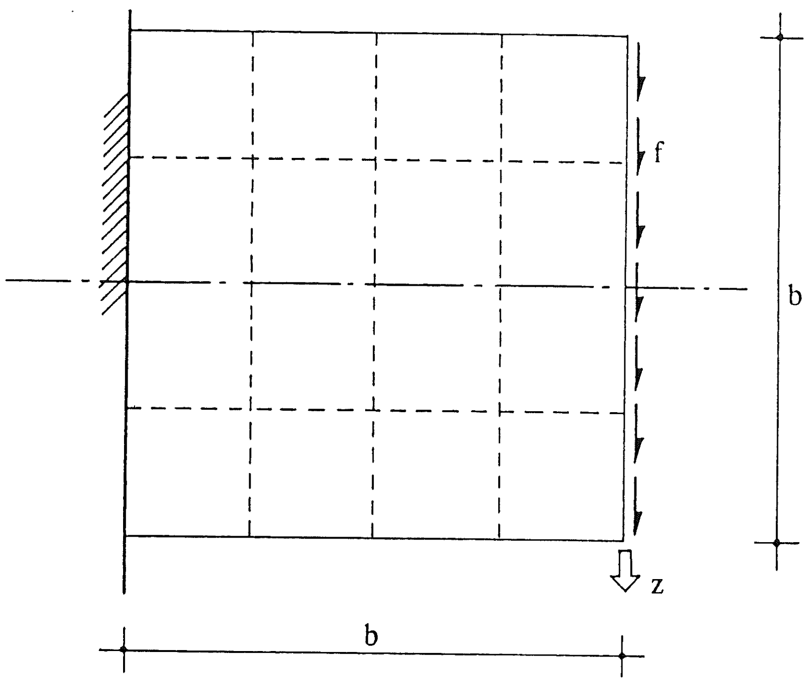


figuur 6: Het 12-vrijheidsgraden-element

2.2 Convergentie van de resultaten in relatie tot de fijnheid van de elementen verdeling

Met het hierboven afgeleide 12-vrijheidsgraden-element is een computerprogramma geschreven waarmee een aantal berekeningen is uitgevoerd. De matrix op de vorige pagina kan ook worden afgeleid voor een dwarscontractiecoëfficiënt ν ongelijk nul. In de volgende berekeningen van dit hoofdstuk is een dwarscontractie $\nu = 0{,}3$ aangehouden. Met deze keuze wordt de verhouding van de stijfheden van staaf en paneel vastgelegd.

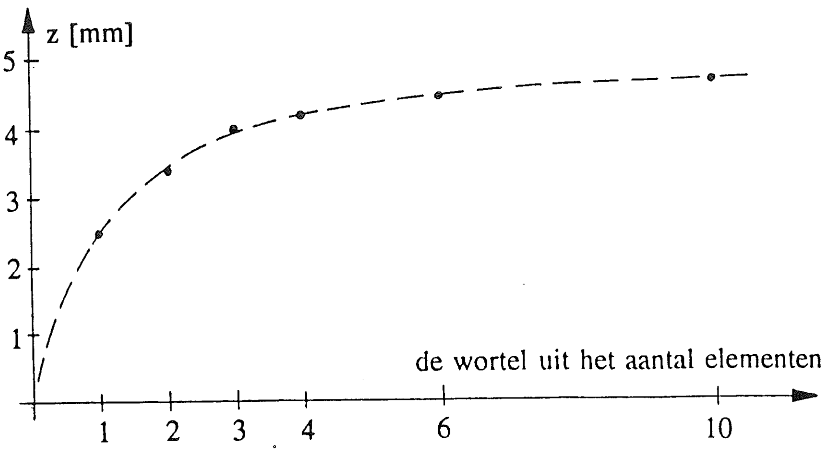
Het blijkt dat een starre verplaatsing van het element in de x- of in de y-richting geen knoopkrachten tot gevolg heeft. Starre rotatie blijkt alleen zonder knoopkrachten plaats te vinden zolang de verplaatsingen klein zijn. Dit is een gebruikelijke benadering die bijvoorbeeld ook optreedt bij het constant shear element volgens de eindige-elementen-methode. Een constante normaalspanning in de x- of in de y-richting leidt tot de juiste vervormingen. Dit bevestigt dat de in rekening gebrachte oppervlakte voor de staven een correcte keuze was. Tevens wordt een constante schuifspanning op het element exact beschreven. Hiermee is aan de convergentie-eisen van de patch test voldaan.
Als een buigend moment op het element wordt gezet zijn de verplaatsingen ongeveer drie maal zo klein als de verplaatsingen die de elasticiteitstheorie voorspelt.



b = 4000 mm
f = 500 N/mm
ν = 0,3
t = 100 mm
E = 30000 N/mm^2

figuur 7: Een in het vlak belaste plaat

Om de convergentie-snelheid vast te stellen is de plaat van figuur 7 berekend met een steeds fijnere elementenverdeling. De plaat is aan de linker zijde ingeklemd en aan de rechterzijde belast met een constante schuifkracht van 500 kN/m. Bij elke verdeling is de constructie gemodelleerd met vierkante elementen van gelijke afmetingen. Toegepast zijn 1, 4, 9, 16, 36 en 100 elementen met 12 vrijheidsgraden. In figuur 7 is met de streeplijnen een verdeling van 16 elementen aangegeven. Voor de berekening is het model vereenvoudigd door gebruik te maken van de keersymmetrie van de belasting ten opzichte van de constructie. In figuur 8 is de verplaatsing van de rechter onderhoek uitgezet als functie van het aantal elementen. Het blijkt dat voor een nauwkeurigheid van 12% tenminste 9 elementen nodig zijn.



figuur 8: De convergentie van de verplaatsing

Met de spanningen in de staven en het paneel van het element kunnen de hoofdspanningsrichtingen in het midden van het element worden benaderd. De normaalspanning in de x-richting in het midden van de plaat kan worden benaderd door het gemiddelde van de spanning in de middens van de staven in de x-richting.

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{2}\left(\frac{F_3 - F_1}{2A} + \frac{F_6 - F_4}{2A}\right) = \frac{E}{2\Delta x}(u_3 - u_1 + u_6 - u_4)$$

Hetzelfde kan worden gedaan voor de normaalspanning in de y-richting in het midden van het element.

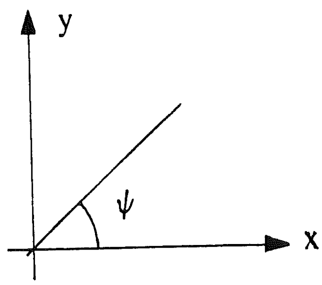
$$\sigma_{yy} = \frac{1}{2}\left(\frac{F_9 - F_7}{2A} + \frac{F_{12} - F_{10}}{2A}\right) = \frac{E}{2\Delta y}(u_9 - u_7 + u_{12} - u_{10})$$

Voor de schuifspanning in het paneel geldt:

$$\sigma_{xy} = \frac{F_{11}}{t\Delta y} = G\left(\frac{u_5 - u_2}{\Delta y} + \frac{u_{11} - u_8}{\Delta x}\right)$$

Gesubstitueerd in de uitdrukking voor de hoofdspanningsrichting

$$\mathrm{tg}\,2\psi = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

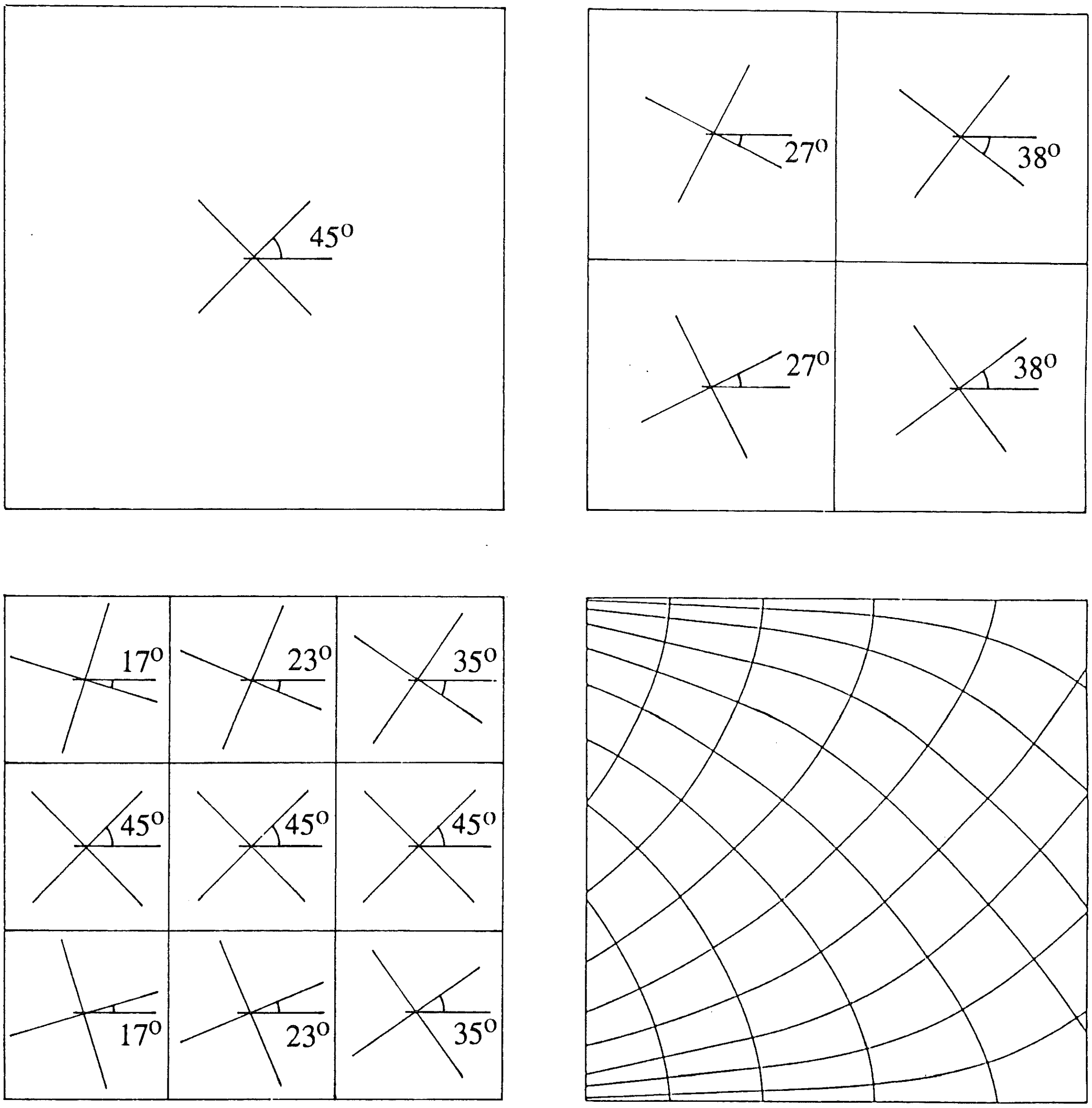


geeft dit:

$$\mathrm{tg}\,2\psi = \frac{2}{1+\nu}\,\frac{\dfrac{u_{11} - u_8}{\Delta x} + \dfrac{u_5 - u_2}{\Delta y}}{\dfrac{u_3 - u_1 + u_6 - u_4}{\Delta x} - \dfrac{u_9 - u_7 + u_{12} - u_{10}}{\Delta y}}$$

Hierin is ψ de hoek tussen de x-as van het paneel en een hoofdspanningsrichting (linksom is positief).

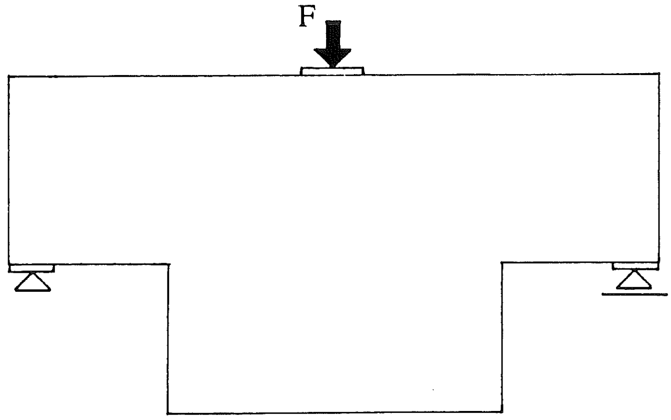
De convergentie van de hoofdspanningsrichtingen is onderzocht bij de berekening van de plaat van figuur 7a. De spanningstrajectoriën van de belaste plaat zijn getekend rechtsonder in figuur 9 op basis van een berekening volgens de eindige-elementenmethode met 100 constant shear elementen. In dezelfde figuur zijn de hoofdspanningsrichtingen uitgezet bij een modellering met 1, 4 en 9 elementen met 12 vrijheidsgraden. In het algemeen worden de hoofdspanningsrichtingen opvallend nauwkeurig weergegeven. De dwarscontractie blijkt een verwaarloosbare invloed te hebben.



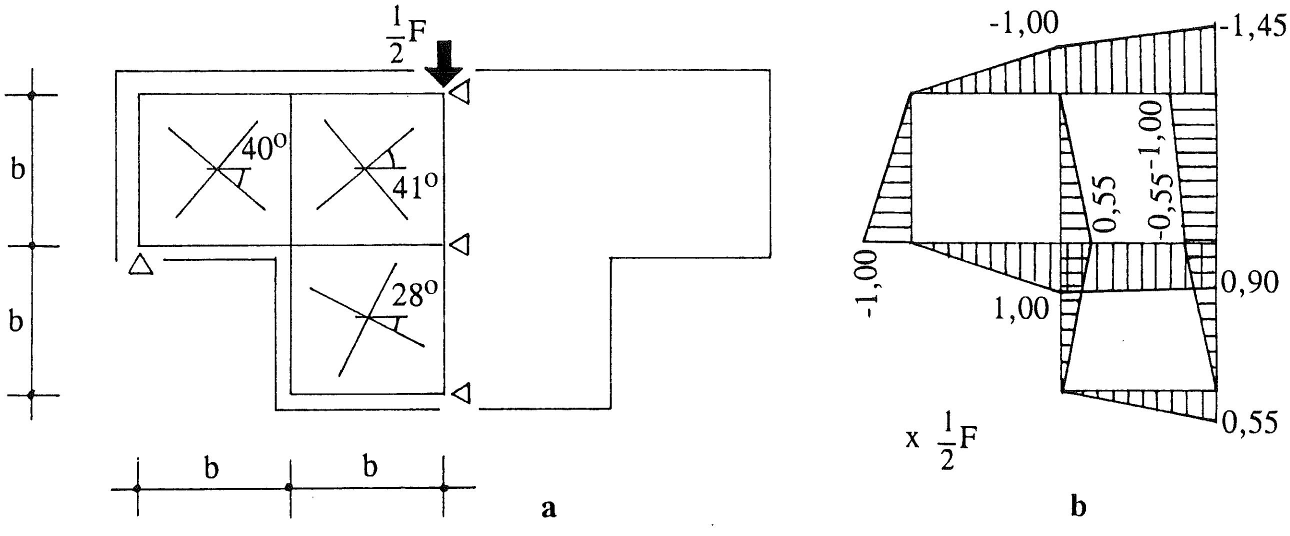
figuur 9: Convergentie van de hoofdspanningsrichtingen

2.3 Keuze van een staafwerkmodel met behulp van een staaf-paneel-model

Beschouw de symmetrische ligger in figuur 10: Om de lineair-elastische krachtsverdeling in deze ligger vast te stellen is met drie elementen een staaf-paneel-berekening gemaakt. In figuur 11a zijn het staaf-paneel-model en de berekende hoofdspanningsrichtingen weergegeven. In figuur 11b zijn de staafkrachten getekend. Het schuifpaneel linksboven moet alle dwarskracht (0,5F) opnemen. De twee andere panelen verdelen deze dwarskracht in de verhouding 45% (boven) tot 55% (beneden).



figuur 10: De gedrongen ligger



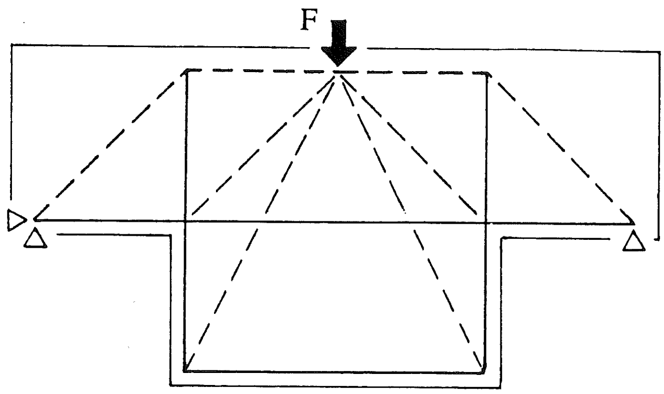
figuur 11: De elastische staaf-paneel-berekening

De krachtsverdeling van figuur 11b is alleen afhankelijk van de verhouding tussen de elasticiteitsmodulus E van de staven en glijdingsmodulus G van de panelen.

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) = 2,6$$

Zelfs de afmeting b speelt geen rol bij de berekening van de staafkrachten. Bij de berekening is een dwarscontractie $\nu = 0{,}3$ gehanteerd. Als de ligger wordt uitgevoerd in gewapend beton is een betere keuze voor de dwarscontractiecoëfficiënt $\nu = 0{,}2$. Het effect op de staafkrachten in figuur 11b is een verandering van minder dan 3%.

De voorspelde hoofdspanningsrichtingen kunnen worden gebruikt om een staafwerkmodel te kiezen (figuur 12).



figuur 12: Het staafwerkmodel volgend uit de hoofdspanningsrichtingen

Het is mogelijk om de constructie met meer elementen te modelleren zodat in meer punten de hoofdspanningsrichtingen bekend zijn. Dit heeft alleen zin als tevens een verfijnder staafwerkmodel wordt gekozen.
Het voorbeeld laat zien dat met een staaf-paneel-berekening een lineair-elastische eindige-elementenberekening overbodig is. Bovendien kan het staafwerkmodel eenvoudig worden gemaakt door panelen te vervangen door staven. In combinatie met een computerprogramma kan deze methode een krachtig hulpmiddel zijn bij het ontwerpen van constructies van gewapend beton.

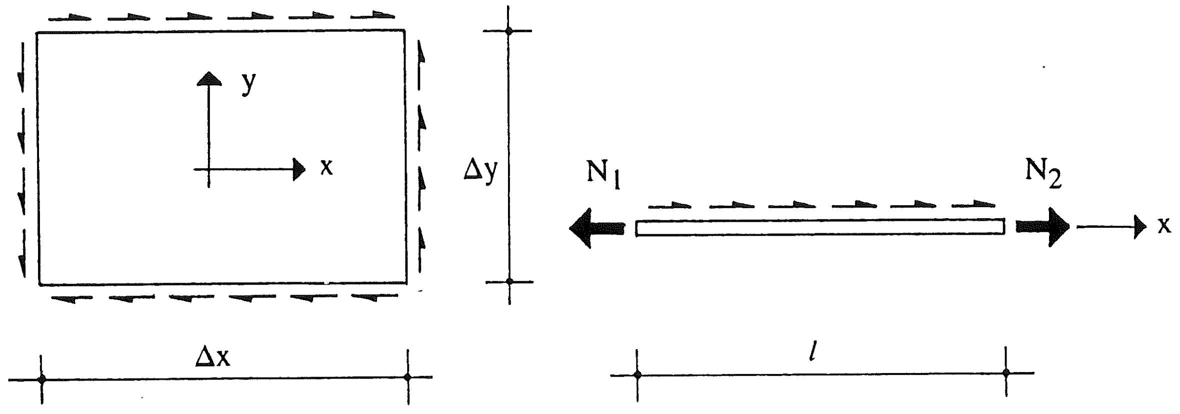
In het vervolg zal het 12-vrijheidsgraden-element niet meer worden gebruikt. Een staaf-paneel-model zal derhalve worden samengesteld uit losse staven en panelen. De reden hiervoor is dat we menen dat de constructeur in staat is de in rekening te brengen oppervlakte van de staven zelf in te schatten. Juist omdat de constructeur zijn kennis van gewapend beton gebruikt om het staaf-paneel-model te ontwerpen zal het mogelijk zijn met een grovere elementenverdeling te werken dan gebruikelijk is bij de eindige-elementenmethode.

3 Het model

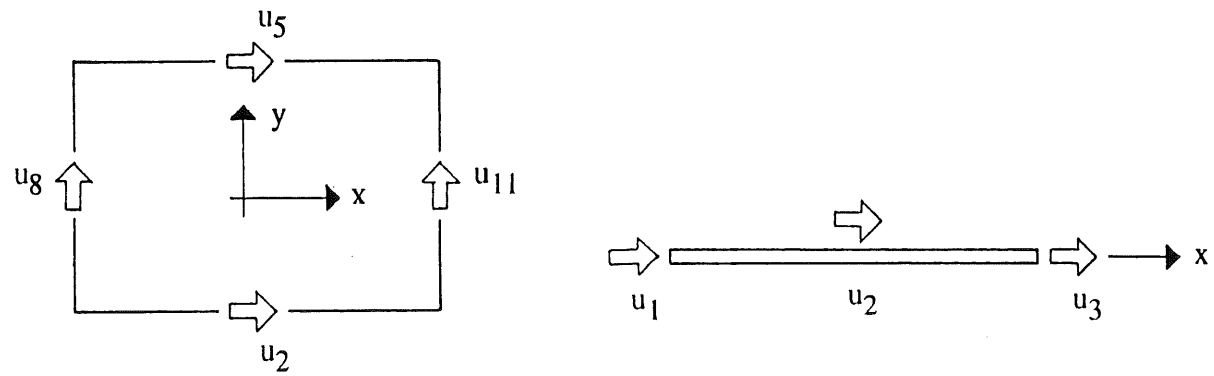
In dit hoofdstuk wordt het staaf-paneel-model gedefinieerd in paragraaf 3.1. Deze paragraaf is een formele samenvatting van hoofdstuk 2. Vervolgens wordt het niet-lineaire constitutieve gedrag afgeleid in de paragrafen 3.2 tot en met 3.4.

3.1 Definities

Het paneel heeft de afmetingen Δx in de x-richting, Δy in de y-richting en een dikte t (zie figuur 13). Een homogene spanningstoestand treedt op door een constante schuifspanning τ op de rand. De staaf heeft de lengte l, een doorsnede A en kan zowel in de x- als in de y-richting van het paneel worden geplaatst. Een centrisch aangrijpende constante schuifspanning leidt tot een lineair verlopende normaalkracht die aan de uiteinden de waarden N_1 en N_2 heeft. In het model zijn de spanningen en krachten tussen staven, panelen, uitwendige belastingen en oplegreacties in evenwicht.



figuur 13: Definitie van staaf en paneel



figuur 14: Verplaatsingen van staaf en paneel

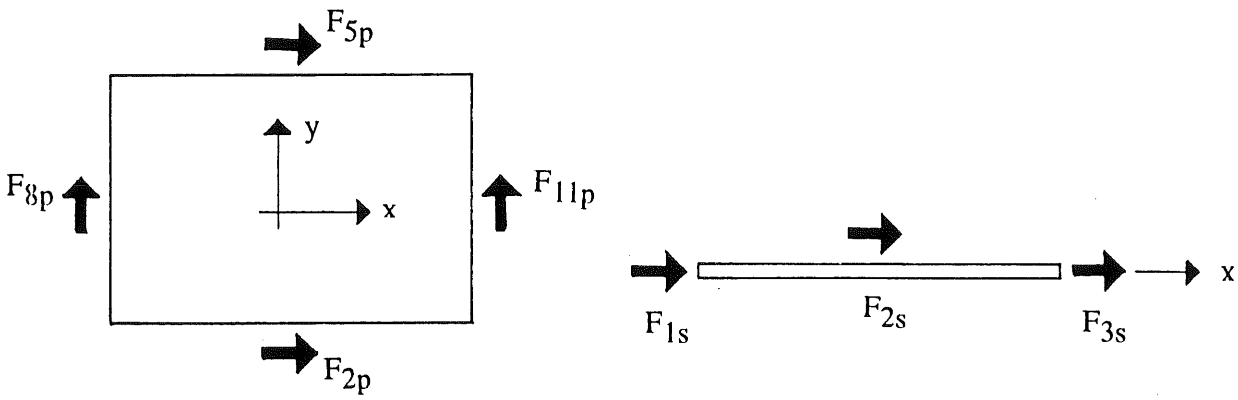
De randen van het paneel krijgen elk een constante verplaatsing u_2, u_5, u_8 en u_{11} in de richting van de desbetreffende rand (zie figuur 14). De uiteinden van de staaf verplaatsen over een afstand u_1 en u_3 in de richting van de staaf. Het verloop van de verplaatsing u(x) over de lengte van de staaf is onbekend. De gemiddelde verplaatsing van de staaf u_2 is gelijk aan de verplaatsing van het aansluitende paneel.

$$u_2 = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{l} u(x)\,dx \tag{1}$$

Daar waar de staven in het model op elkaar aansluiten is hun verplaatsing gelijk.
Om het evenwicht tussen staven en panelen te beschrijven worden de volgende krachten gedefinieerd: (zie figuur 15)

$$\begin{aligned} F_{2p} &= -\tau\,\Delta x\, t \\ F_{5p} &= \tau\,\Delta x\, t \\ F_{8p} &= -\tau\,\Delta y\, t \\ F_{11p} &= \tau\,\Delta y\, t \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} F_{2p} \\ F_{5p} \\ F_{8p} \\ F_{11p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Delta x \\ \Delta x \\ -\Delta y \\ \Delta y \end{bmatrix} \tau\, t \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F_{1s} &= -N_1 \\ F_{2s} &= N_1 - N_2 \\ F_{3s} &= N_2 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} F_{1s} \\ F_{2s} \\ F_{3s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$



figuur 15: Krachten op staaf en paneel

De vervorming van het paneel kan worden beschreven met één gegeneraliseerde verplaatsing $g=\Delta x \Delta y \gamma$ waarin γ de afschuifhoek is.

$$\gamma = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{u_{11} - u_8}{\Delta x} + \frac{u_5 - u_2}{\Delta y}$$

Ofwel:

$$g = [-\Delta x \;\; \Delta x \;\; -\Delta y \;\; \Delta y\,] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} \tag{4}$$

De vervorming van de staaf kan met twee rek-grootheden worden beschreven.

$$e_1 = u_2 - u_1$$
$$e_2 = u_3 - u_2$$

$e_2 + e_1 = u_3 - u_1 = \Delta l$

Ofwel:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

De relaties kunnen als volgt in schema worden gebracht:

$$\begin{bmatrix} F_2p \\ F_5p \\ F_8p \\ F_{11}p \end{bmatrix} \quad \tau t \quad g \quad \begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} F_{1s} \\ F_{2s} \\ F_{3s} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T_p \qquad \mathbf{D}_p \qquad \mathbf{B}_p \qquad\qquad\qquad \mathbf{B}^T_s \qquad \mathbf{D}_s \qquad \mathbf{B}_s$$

Hierin zijn de volgende kinematische matrices gedefinieerd.

$$\mathbf{B}_p = [\; -\Delta x \;\; \Delta x \;\; -\Delta y \;\; \Delta y \;] \qquad\qquad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

De onbekende constitutieve relaties worden in de volgende paragrafen afgeleid.

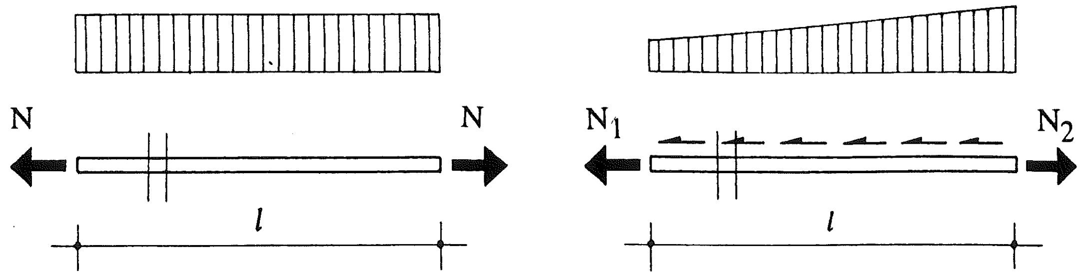
$$\tau t(g) \qquad\qquad \begin{matrix} e_1(N_1, N_2) \\ e_2(N_1, N_2) \end{matrix}$$

Voor de numerieke berekening zijn ook de gelineariseerde constitutieve relaties van belang.

$$\tau t = \mathbf{D}_p \, g \qquad\qquad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_s \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

3.2 Constitutieve relatie van een staafdeeltje

Voordat de constitutieve relatie van de staaf kan worden afgeleid moet eerst het gemiddelde constitutieve gedrag van een infinitesimaal deeltje van een staaf van gewapend beton worden bepaald. Daartoe wordt gekeken hoe een staaf van gewapend beton vervormt ten gevolge van een constante normaalkracht. Deze relatie op basis van de gemiddelde rek wordt toegekend aan elk deeltje van de staaf. In de volgende paragraaf wordt aangenomen dat de relatie ook geldt voor een deeltje van een staaf met een in de lengte variërende normaalkracht.



constante normaalkracht variërende normaalkracht

figuur 16: De normaalkracht in de staaf

Beschouw een staaf van gewapend beton belast aan de uiteinden met een trekkracht N. Aangezien het staal en het beton dezelfde verlenging krijgen zijn de gemiddelde rek van het staal en de gemiddelde rek van het beton gelijk. In het ongescheurde stadium is de rek in elk deeltje gelijk aan de gemiddelde rek. Hierdoor zal in het staal de spanning $\sigma_s = E_s\varepsilon$ en in het beton de spanning $\sigma_c = E_c\varepsilon$ optreden. De normaalkracht is derhalve:

$$N = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s$$

In het bovenstaande zijn de volgende symbolen gebruikt:

$\varepsilon = \Delta l / l$ de gemiddelde rek van de staaf
E_c de elasticiteitsmodulus van het beton
E_s de elasticiteitsmodulus van het staal
A_c de oppervlakte van het beton in de doorsnede
A_s de oppervlakte van het staal in de doorsnede

Substitutie van $\sigma_c = E_c\varepsilon$ en $\sigma_s = E_s\varepsilon$ in de vorige relatie geeft:

$$N = \varepsilon(E_c A_c + E_s A_s)$$

Met de definitie van de kentallen,

$\rho = A_s/A_c$ de verhouding van de oppervlakten van staal en beton
$n = E_s/E_c$ de verhouding van de elasticiteitsmoduli van staal en beton

kan dit worden herschreven als

$$N = \varepsilon E_c A_c (1 + \rho n).$$

Het beton scheurt als de trekspanning $f_{cr} = E_c\varepsilon_{cr}$ wordt overschreden. Hiermee is de kracht N_{cr} waarbij de eerste scheur in de staaf optreedt als volgt te bepalen.

$$N_{cr} = f_{cr} A_c (1 + \rho n)$$

Met het bovenstaande kan de rek als functie van de normaalkracht wordt uitgedrukt.

$$\varepsilon = \frac{N}{E_c A_c (1+\rho n)} \qquad 0 \leq N < N_{cr}$$

Zodra de staaf scheurt zal de stijfheid afnemen. Eurocode 2[1] hanteert de volgende relatie voor het bepalen van de gemiddelde rek ε na scheuren:

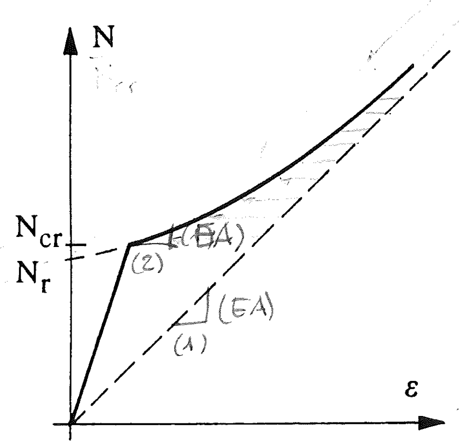
$$\varepsilon = \varepsilon_s \left[1 - \left(\frac{N_{cr}}{N} \right)^2 \right]$$

Hierin zijn de volgende symbolen gebruikt.

ε_s	de rek van het staal in de scheur
N_{cr}	de kracht in de wapening bij het ontstaan van de eerste scheur ter plaatse van de scheur
N	de kracht in de wapening ter plaatse van een scheur

De term $\varepsilon_s N_{cr}^2/N^2$ brengt de tension-stiffening van het beton in rekening. Deze empirische formule leidt tot zeer goede resultaten bij de scheurwijdteberekening[2]. Echter, op het moment dat het beton scheurt ($N = N_{cr}$) voorspelt de relatie dat geen rek optreedt. Dit is strikt genomen onjuist omdat dan immers een (kleine) elastische rek aanwezig is. Daarom is de uitdrukking als volgt aangepast.

$$\varepsilon = \varepsilon_s \left[1 - \left(\frac{N_r}{N} \right)^2 \right] \qquad N_r = \frac{N_{cr}}{\sqrt{1+\rho n}}$$



figuur 17: Tension-stiffening van de gescheurde staaf

Omdat ρn veel kleiner dan 1 is, zal de verbeterde relatie vrijwel hetzelfde resultaat geven. Zoals figuur 17 laat zien treedt nu een continue overgang tussen het elastische en het

---

[1] ENV, art. 4.4.2.4 (4.81) p.171

[2] Braam, p.21

gescheurde stadium op.
De rek van het staal in een scheur bedraagt

$$\varepsilon_s = \frac{N}{E_s A_s} \ .$$

Hiermee is gemiddelde rek in het gescheurde stadium als volg uit te drukken:

$$\varepsilon = \frac{N^2 - N_r^2}{E_s A_s N} \qquad N_{cr} \leq N < N_{yr}$$

Zodra de spanning in het staal de vloeispanning f_y bereikt zal de normaalkracht N niet meer toenemen. De waarde is nu:

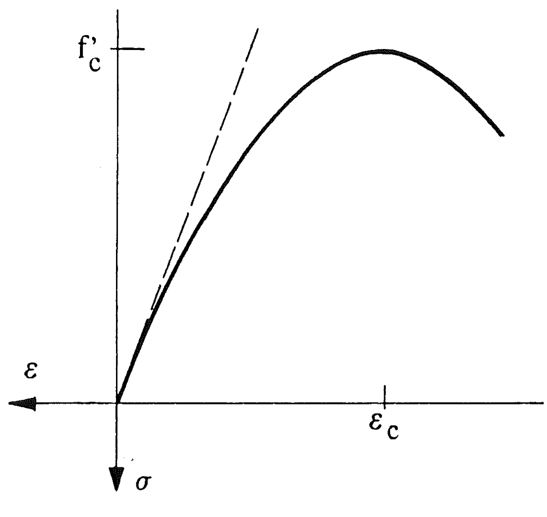
$$N_{yr} = A_s f_y$$

Hiermee is het gedrag van de getrokken staaf vastgelegd. Vervolgens wordt de constitutieve relatie van de gedrukte staaf bepaald.
Voor de één-assige drukspanning in beton hanteert Collins de volgende parabolische uitdrukking.[1]

$$\frac{\sigma}{f'_c} = 2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}\right)^2$$

Hierin zijn de volgende symbolen gebruikt:

σ	de betonspanning
f'_c	de extreme betonspanning (negatieve waarde)
ε	de optredende rek
ε_c	de rek als $\sigma = f'_c$ (negatieve waarde)



figuur 18: Spanning-rek-relatie van gedrukt beton

[1] Collins, p.64

Voor druksterkten tot ongeveer 40 N/mm^2 is dit een redelijke benadering. In figuur 18 is de spanning tegen de rek uitgezet. Een eigenschap van deze uitdrukking is dat de rek ε_c bij bezwijken gelijk is aan twee maal de elastisch rek bij de bezwijkspanning.

$$\varepsilon_c = 2 \frac{f'_c}{E_c}$$

Als de staaf uitsluitend uit beton zou bestaan is de kracht N waarbij deze op druk bezwijkt gelijk aan

$$N_c = f'_c A_c.$$

Omdat de betonspanning in dit geval een negatieve waarde heeft, heeft ook N_c een negatieve waarde. In een aantal gevallen zal de staaf wel wapening bevatten. De normaalkracht in de staaf bedraagt dan

$$N = \sigma_s A_s + \sigma A_c.$$

Zolang de drukwapening niet vloeit geldt voor de staalspanning $\sigma_s = E_s \varepsilon$.
Substitutie hiervan en de bovenstaande relatie van Collins geeft:

$$N = E_s A_s \varepsilon + f'_c A_c \left[2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right]$$

Dit is een kwadratische vergelijking in ε. Na enig herleiden worden de wortels gevonden.

$$\varepsilon = \varepsilon_c \left[1 + \rho n \pm \sqrt{(1+\rho n)^2 - \frac{N}{N_c}} \right]$$

Alleen de grootste wortel is fysisch relevant (ε_c heeft een negatieve waarde). Zolang de wapening niet vloeit wordt hiermee de rek van de gedrukte staaf:

$$\varepsilon = \varepsilon_c \left[1 + \rho n - \sqrt{(1+\rho n)^2 - \frac{N}{N_c}} \right] \qquad N_y \leq N < 0$$

Op het moment dat de rek (stuik) is bereikt waarbij het staal vloeit terwijl het beton nog niet is bezweken, is de normaalkracht N gelijk aan N_y.

$$-\frac{f_y}{E_s} = \varepsilon_c \left[1 + \rho n - \sqrt{(1+\rho n)^2 - \frac{N_y}{N_c}} \right]$$

$$N_y = N_c \left[-\left(1+\rho n + \frac{f_y}{E_s \varepsilon_c}\right)^2 + (1+\rho n)^2 \right] \quad = -N_{yr} \left[\frac{1+\rho n}{\rho n} + \frac{1}{4\rho n^2} \frac{N_{yr}}{N_c} \right]$$

$$\frac{N_{yr}}{2\rho n N_c}$$

De uitdrukking voor N_y die hieruit kan worden afgeleid is tamelijk gecompliceerd. Het blijkt efficiënter om bij de evaluatie van de formules te toetsen of de rek ε de vloeirek van het staal overschrijdt ($-f_y/E_s < \varepsilon < 0$ in plaats van $N_y < N < 0$). Voor de eenvoud van de notatie wordt hier echter N_y gehandhaafd zonder de expliciete uitdrukking te geven.

Als de drukwapening wel vloeit maar het beton nog niet is bezweken is de normaalkracht in de staaf

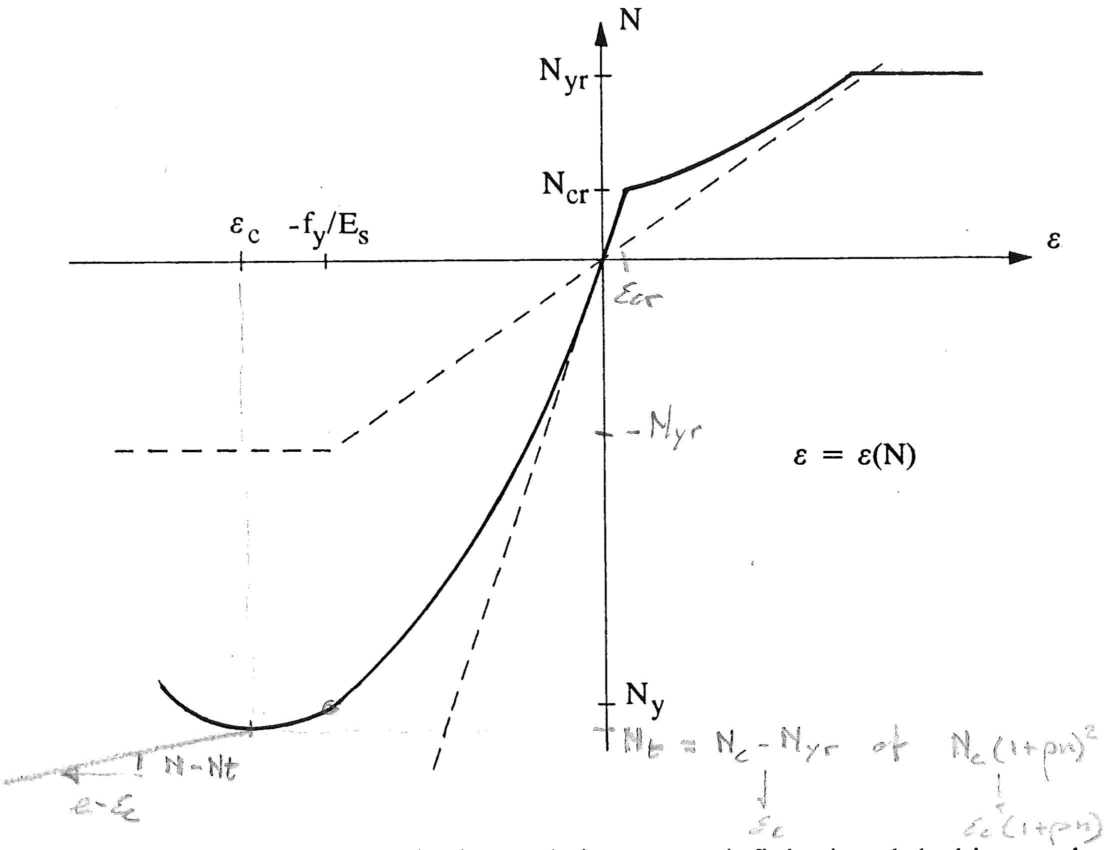
$$N = -f_y A_s + \sigma A_c$$

Hierin is de vloeispanning f_y van het staal een positieve waarde. Substitutie van de relatie van Collins voor de betonspanning σ geeft:

$$N = -f_y A_s + f'_c A_c \left(2\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right)^2 \right)$$

Ook dit is een kwadratische vergelijking in ε. De uitdrukking voor de rek wordt nu:

$$\varepsilon = \varepsilon_c \left(1 - \sqrt{1 - \frac{N_{yr} + N}{N_c}} \right) \qquad N < N_y$$



figuur 19: De constitutieve relatie van een infinitesimaal deeltje van de staaf

De constitutieve relatie ε(N) van een staaf van gewapend beton met een constante normaalkracht wordt hieronder samengevat.

$$
\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_c \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{N+N_{yr}}{N_c}}\right) & N \leq N_y \\ \varepsilon_c \left(1 + \rho n - \sqrt{(1+\rho n)^2 - \dfrac{N}{N_c}}\right) & N_y < N \leq 0 \\ \dfrac{N}{E_c A_c (1+\rho n)} & 0 < N \leq N_{cr} \\ \dfrac{N^2 - N_r^2}{E_s A_s N} & N_{cr} < N \leq N_{yr} \\ \dfrac{N_{yr}^2 - N_r^2}{E_s A_s N_{yr}} + \dfrac{N - N_{yr}}{L} & N > N_{yr} \end{cases} \qquad (8)
$$

$$
\varepsilon' = \begin{cases} \dfrac{1}{E_c A_c \sqrt{1 - \dfrac{N+N_{yr}}{N_c}}} \\ \dfrac{1}{E_c A_c \sqrt{(1+\rho n)^2 - \dfrac{N}{N_c}}} \\ \dfrac{1}{E_c A_c (1+\rho n)} \\ \dfrac{N^2 + N_r^2}{E_s A_s N^2} \\ \dfrac{1}{L} \end{cases}
$$

In figuur 19 is deze relatie getekend. Als de volgende gegevens van de staaf bekend zijn, ligt de relatie volledig vast.

A_c	de oppervlakte van het beton in de doorsnede van de staaf
E_c	de elasticiteitsmodulus van het beton
f'_c	druksterkte van het beton (negatieve waarde)
f_{cr}	treksterkte van het beton (positieve waarde)
A_s	de oppervlakte van het staal in de doorsnede van de staaf
E_s	de elasticiteitsmodulus van het staal
f_y	de vloeigrens van het staal (positieve waarde)

3.3 Constitutieve relatie van de staaf

In deze paragraaf worden de rekparameters e_1 en e_2 als functie van de spanningsparameters N_1 en N_2 afgeleid. In bijlage 2 zijn de mathematische tussenstappen van de afleiding uitgeschreven.

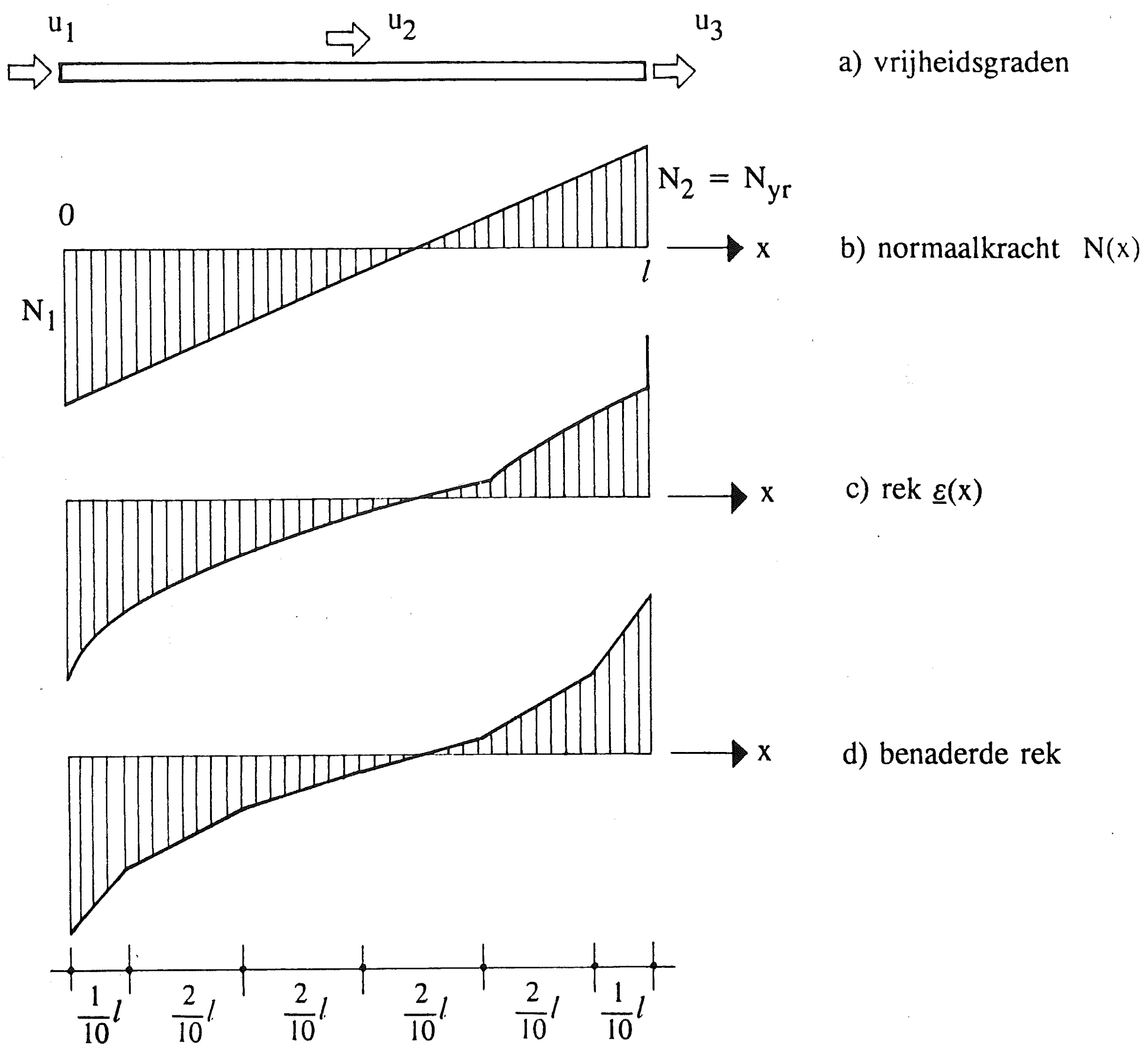
Een extreme vorm van de normaalkrachtenlijn N(x) is in figuur 20b getekend: Aan de rechter zijde van de staaf vloeit de wapening terwijl aan de linker zijde het beton bijna bezwijkt op druk. In figuur 20c is met de in de vorige paragraaf vastgestelde relatie ε(N) de bijbehorende vervormingslijn $\underline{\varepsilon}(x) = \varepsilon(N)$ getekend. Zoals straks zal blijken moet deze relatie worden geïntegreerd. Een analytische integratie is niet eenvoudig ondermeer omdat bij het rechter uiteinde van de staaf over een infinitesimale lengte de rek onbegrensd groot is. De situatie doet sterk denken aan een Dirac-distributie. Om niet te verzanden in mathematische problemen wordt gekozen voor een numerieke integratie.

Figuur 20d laat zien dat de kromme goed te benaderen is met zes rechte lijnstukken. Aan de uiteinden van de staaf wordt een kleinere afstand tussen de integratiepunten gekozen omdat de kromming daar het grootst is. Het probleem van de onbegrensde rek over een infinitesimaal deeltje lost hier op doordat de rek over een grotere lengte wordt gespreid. Dit is zelfs beter in overeenstemming met de werkelijkheid omdat het staal niet zal vloeien in één punt maar over een lengte van ongeveer twee maal de diameter van de wapening. De afstand tussen de integratiepunten aan de uiteinden van de staaf zou hieraan kunnen worden aangepast. Vooralsnog wordt hier van af gezien.

Analoog aan de samengestelde trapeziumregel kan nu een integratieformule worden afgeleid.

$$\int_0^l f(x)\,dx \approx \frac{l}{5}\left[\frac{1}{4}f(0)+\frac{3}{4}f(\tfrac{1}{10}l)+f(\tfrac{3}{10}l)+f(\tfrac{5}{10}l)+f(\tfrac{7}{10}l)+\frac{3}{4}f(\tfrac{9}{10}l)+\frac{1}{4}f(l)\right] \tag{9}$$

Hierin is f een willekeurige functie waarvoor bijvoorbeeld de rek ε kan worden gekozen.



figuur 20: De benadering van de rek

De verplaatsing u(x) kan als volgt worden uitgedrukt in de rek.

$$u(x) = u_1 + \int_{\bar{x}=0}^{x} \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x} \tag{10}$$

Met (1), (10) en (5) kan eenvoudig worden afgeleid dat voor e_1 geldt.

$$e_1 = \frac{1}{l}\int_0^l\int_0^x \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,dx \tag{11}$$

$e_2 = \frac{1}{l}\int_0^l \int_x^l \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,dx$

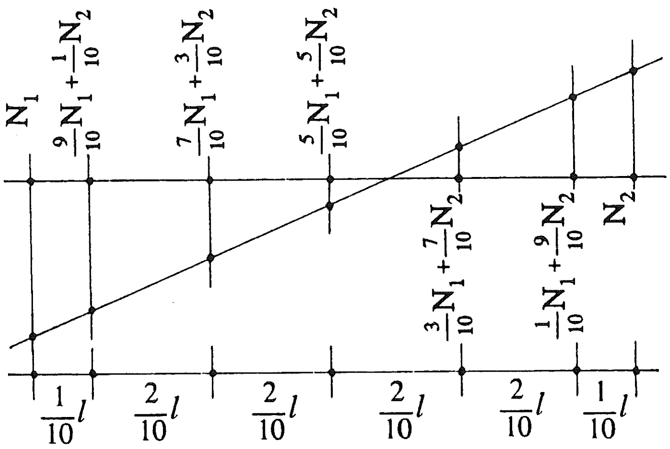
$e_1 = \int_0^l \underline{\varepsilon}(x)\left[1-\frac{x}{l}\right]dx \qquad e_2 = \int_0^l \underline{\varepsilon}(x)\,\frac{x}{l}\,dx$

Door toepassing van (9) op (11) kan e_1 worden benaderd.

$$e_1 \approx \frac{l}{400}[19\varepsilon(N_1)+51\varepsilon(\tfrac{9}{10}N_1+\tfrac{1}{10}N_2)+56\varepsilon(\tfrac{7}{10}N_1+\tfrac{3}{10}N_2)+40\varepsilon(\tfrac{5}{10}N_1+ \\ +\tfrac{5}{10}N_2)+24\varepsilon(\tfrac{3}{10}N_1+\tfrac{7}{10}N_2)+9\varepsilon(\tfrac{1}{10}N_1+\tfrac{9}{10}N_2)+\varepsilon(N_2)] \qquad (12)$$

Figuur 21 laat zien hoe de argumenten van de functie ε kunnen worden geïnterpreteerd. Op dezelfde wijze kan e_2 worden benaderd.

$$e_2 \approx \frac{l}{400}[\varepsilon(N_1)+9\varepsilon(\tfrac{9}{10}N_1+\tfrac{1}{10}N_2)+24\varepsilon(\tfrac{7}{10}N_1+\tfrac{3}{10}N_2)+40\varepsilon(\tfrac{5}{10}N_1+ \\ +\tfrac{5}{10}N_2)+56\varepsilon(\tfrac{3}{10}N_1+\tfrac{7}{10}N_2)+51\varepsilon(\tfrac{1}{10}N_1+\tfrac{9}{10}N_2)+19\varepsilon(N_2)] \qquad (13)$$



figuur 21: De normaalkracht in de integratiepunten

Als in formule (12) N_1 en N_2 worden verwisseld en e_1 wordt vervangen door e_2 ontstaat formule (13). Deze symmetrie-eigenschap, die ook direct volgt uit het feit dat de staaf prismatisch en homogeen is, wordt gebruikt om de relaties eenvoudiger te noteren.

$$e = \frac{l}{400}[19\varepsilon(N_1)+51\varepsilon(\tfrac{9}{10}N_1+\tfrac{1}{10}N_2)+56\varepsilon(\tfrac{7}{10}N_1+\tfrac{3}{10}N_2)+40\varepsilon(\tfrac{5}{10}N_1+ \\ +\tfrac{5}{10}N_2)+24\varepsilon(\tfrac{3}{10}N_1+\tfrac{7}{10}N_2)+9\varepsilon(\tfrac{1}{10}N_1+\tfrac{9}{10}N_2)+\varepsilon(N_2)]$$

$$e_1 \approx e(N_1, N_2)$$
$$e_2 \approx e(N_2, N_1)$$

Als de elastische relatie $\varepsilon = N/EA$ wordt gesubstitueerd in (11) wordt gevonden:

$$e_1 = \frac{l}{EA}[\tfrac{1}{3}N_1+\tfrac{1}{6}N_2]$$

Substitutie van dezelfde relatie in (12) geeft:

$$e_1 \approx \frac{l}{EA}\left[\frac{661}{2000}N_1 + \frac{339}{2000}N_2\right]$$

De benaderde factoren wijken minder dan twee procent af. In het elastische stadium is de overeenkomst derhalve bijzonder goed. Buiten het elastische stadium zal de benadering minder goed maar nog steeds heel bruikbaar zijn vanwege de goede overeenkomst tussen de rek en de benaderde rek in figuur 20.

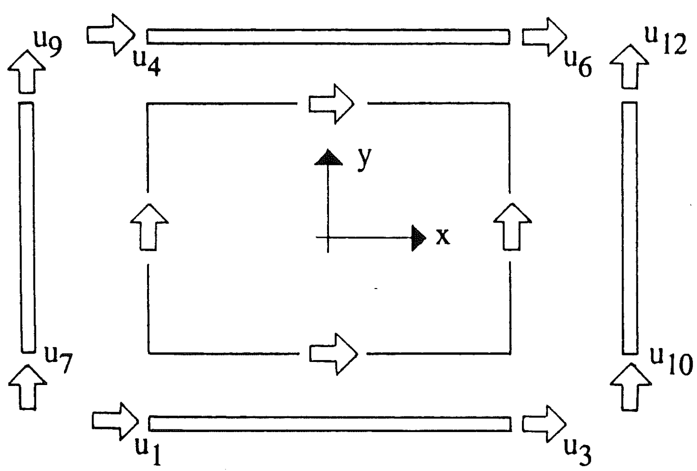
3.4 Constitutieve relatie van het paneel

In 1981 hebben Vecchio en Collins een groot aantal experimenten gedaan op panelen van gewapend beton. De panelen werden in het vlak belast zodanig dat een homogene spanningstoestand ontstond. Op basis van de resultaten is de modified compression field theory ontwikkeld die het gedrag van deze panelen nauwkeurig beschrijft. De theorie legt het verband tussen de spanningen σ_x, σ_y, τ en de rekken ε_x, ε_y, γ. In bijlage I is beschreven hoe de glijdingsmodulus $G = \tau/\gamma$ volgens de modified compression field theory wordt berekend.

$$G = G(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma)$$

Strikt volgens de definitie van het staaf-paneel-model bezit het paneel geen weerstand tegen de rekken ε_x en ε_y. De rekken blijken echter wel een grote invloed te hebben op de glijdingsmodulus. Daarom is de gemiddelde rek van de aan het paneel grenzende staven gebruikt om deze invloed in rekening te brengen. (zie figuur 22)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2}\frac{u_3 - u_1}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{u_6 - u_4}{\Delta x} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2}\frac{u_9 - u_7}{\Delta y} + \frac{1}{2}\frac{u_{12} - u_{10}}{\Delta y} \end{aligned} \qquad (14)$$



figuur 22: De rekken van het paneel

Een alternatief is om de glijdingsmodulus als functie van de spanningen σ_x en σ_y in de staven te berekenen. $G = G(\sigma_x, \sigma_y, \gamma)$. Deze inverse toepassing van de modified compression field

theory maakt dat de berekening aanzienlijk langer duurt. Omdat er geen reden is om aan te nemen dat de spanningen de verzwakking beter in rekening brengen dan de rekken is voor de bovenstaande beschrijving gekozen.
De constitutieve relatie $\mathbf{D}_p$ van het schuifpaneel is als volgt in de glijdingsmodulus G uit te drukken.

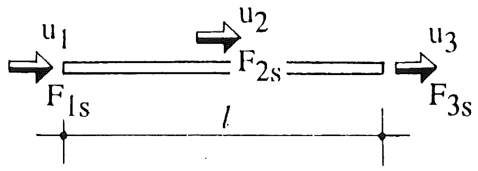
$$\mathbf{D}_p = \frac{G t}{\Delta x \, \Delta y} \tag{15}$$

3.5 Samenvatting

Hieronder worden de belangrijkste vergelijkingen uit hoofdstuk 2 samengevat.

$$\begin{bmatrix} F_{1s} \\ F_{2s} \\ F_{3s} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_s^T \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

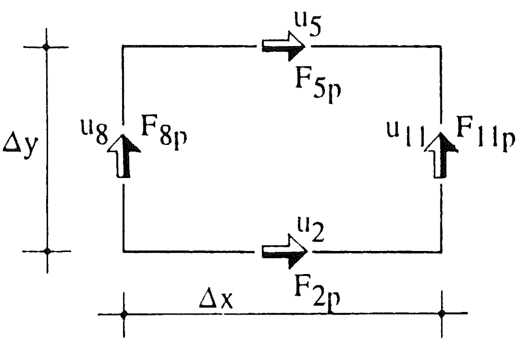


$$e_1 = e(N_1,N_2)$$
$$e_2 = e(N_2,N_1)$$

$$e(N_1,N_2) = \frac{l}{400}[19\varepsilon(N_1) + 51\varepsilon(\frac{9}{10}N_1+\frac{1}{10}N_2) + 56\varepsilon(\frac{7}{10}N_1+\frac{3}{10}N_2) + 40\varepsilon(\frac{5}{10}N_1 + $$
$$+\frac{5}{10}N_2) + 24\varepsilon(\frac{3}{10}N_1+\frac{7}{10}N_2) + 9\varepsilon(\frac{1}{10}N_1+\frac{9}{10}N_2) + \varepsilon(N_2)]$$

$$\begin{bmatrix} F_{2p} \\ F_{5p} \\ F_{8p} \\ F_{11p} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p^T \tau t \qquad \mathbf{B}_p = [-\Delta x \;\; \Delta x \;\; -\Delta y \;\; \Delta y]$$

$$g = \mathbf{B}_p \begin{bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \end{bmatrix}$$



$$\tau t = \frac{Gt}{\Delta x \Delta y} g$$

$G = G(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma)$ volgens de modified compression field theory

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{u_3-u_1}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{u_6-u_4}{\Delta x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\frac{u_9-u_7}{\Delta y} + \frac{1}{2}\frac{u_{12}-u_{10}}{\Delta y}$$

$$\gamma = \frac{g}{\Delta x \Delta y}$$

4 De numerieke oplossing

Als het staaf-paneel-model wat van een constructie is gemaakt inwendig statisch bepaald is, kunnen de staaf- en paneelkrachten eenvoudig met de hand worden berekend. Met wat meer inspanning kunnen ook de niet-lineaire verplaatsingen worden bepaald. In veel gevallen echter, zal de constructie statisch onbepaald zijn zodat een computerberekening noodzakelijk is voor het bepalen van de krachten en verplaatsingen.

Om de vergelijkingen geformuleerd in hoofdstuk 3 op te lossen, kunnen vier methoden worden gevolgd.

1 volledig iteratief
2 itereren van de stijfheid
3 incrementeel
4 incrementeel-iteratief

Met methode 1 wordt bedoeld een successieve substitutie van de resultaten van een vergelijking in de volgende vergelijking in de verwachting dat een steeds nauwkeuriger resultaat wordt bereikt.
Methode 2 maakt gebruik van het feit dat de alleen de constitutieve relatie niet lineair is. Als een lineaire stijfheid wordt ondersteld kan door het oplossen van een lineair stelsel vergelijkingen een betere schatting van deze stijfheid worden bepaald.
Bij methode 3 wordt de incrementele beschrijving van de constitutieve relatie gebruikt om de toename van de verplaatsing te berekenen ten gevolge van de toename van de belasting.
Methode 4 is de meest gebruikelijke in de niet-lineaire numerieke mechanica. Essentieel hierbij is de inwendige krachtenvector die wordt bepaald uit de verplaatsingen. In elke iteratie wordt het verschil tussen de uitwendige belasting en de inwendige krachten gebruikt om het verplaatsingsincrement te berekenen.

Voor toepassing in de constructiepraktijk is het van belang dat de methode bijzonder robuust is: De eindgebruiker moet zich niet hoeven bezig houden met convergentieproblemen en numerieke nauwkeurigheid.
Om het staaf-paneel-model snel te kunnen evalueren is in het onderzoekstadium vooral de eenvoud van de methode van belang. Met het oog hierop is voor methode 2 gekozen. Dit biedt bovendien de mogelijkheid om de onvolkomenheden van deze ongebruikelijke methode vast te stellen.

Bij de gekozen oplosmethode wordt derhalve in eerste instantie de lineair-elastische stijfheid ondersteld waarmee door middel van de verplaatsingenmethode de verplaatsingen en krachten worden berekend. Vervolgens wordt hiermee een nieuwe schatting voor de stijfheid gemaakt waarmee opnieuw de verplaatsingen en krachten worden berekend. Na ongeveer vijf maal herhalen van deze berekening blijkt de stijfheid nauwelijks meer te veranderen zodat de oplossing is bereikt. In schema ziet de berekening er uit als in figuur 23.

- invoer
- initialisaties
- herhaal zolang de stijfheden $\mathbf{D}_s$ en $\mathbf{D}_p$ veranderen
  - initialisaties
  - herhaal voor alle staven
    - maak de elementstijfheidsmatrix (figuur 27)
    - sommeer in de systeemstijfheidsmatrix
  - herhaal voor alle panelen
    - maak de elementstijfheidsmatrix (figuur 24)
    - sommeer in de systeemstijfheidsmatrix
  - los de verplaatsingen op
- uitvoer

figuur 23: Berekening van een staaf-paneel-model

---

bereken de afschuifhoek γ en de rekken in de aangrenzende staven

$$\gamma = \frac{u_{11} - u_8}{\Delta x} + \frac{u_5 - u_2}{\Delta y}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{u_3 - u_1}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{u_6 - u_4}{\Delta x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2}\frac{u_9 - u_7}{\Delta y} + \frac{1}{2}\frac{u_{12} - u_{10}}{\Delta y}$$

---

bereken de glijdingsmodulus $G(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma)$

$$\mathbf{D}_p = Gt/(\Delta x \Delta y)$$

---

bereken de relatieve afwijking met de oude G

---

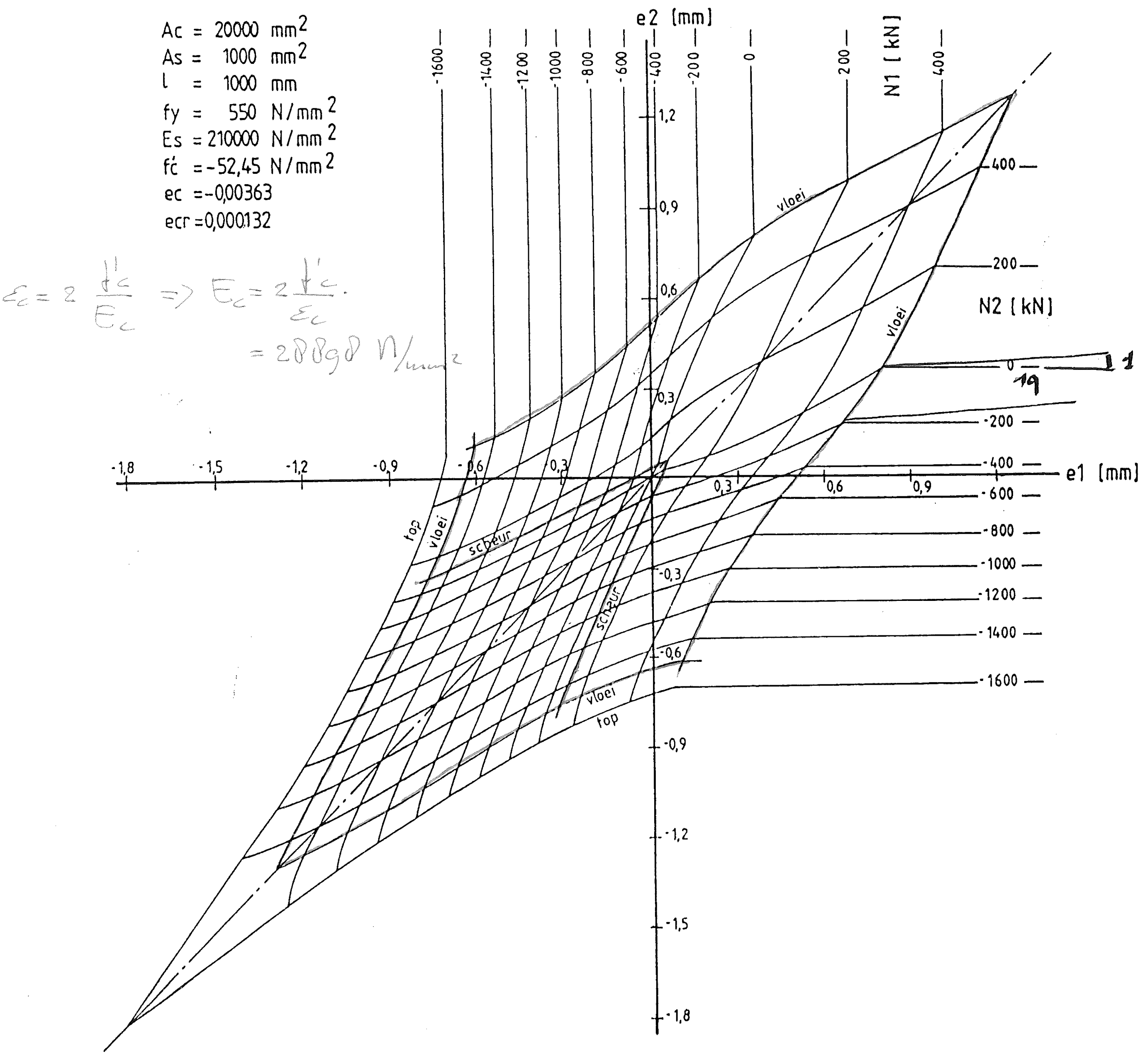
bereken de elementstijfheidsmatrix

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T{}_p \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p$$

figuur 24: Berekening van de paneelstijfheidsmatrix

In het programma worden in iedere iteratie de elementstijfheidsmatrices van de panelen en de elementstijfheidsmatrices van de staven berekend.
In het geval van een paneel is deze berekening eenvoudig: Met de berekende verplaatsingen worden de rekken bepaald. De rekken worden gebruikt om met de modified compression field theory de glijdingsmodulus te berekenen, en met de stijfheid en de kinematische relatie wordt de elementstijfheidsmatrix bepaald. In figuur 24 is het programma-structuur-diagram weergegeven.
In het geval van een staaf is de berekening van de elementstijfheidsmatrix minder voor de hand liggend: Als de rekgrootheden e_1, e_2 en de spanningsgrootheden N_1, N_2 bekend zijn, bevat de gelineariseerde constitutieve relatie van de staaf vier onbekenden a, b, c en d.

$$N_1 = a\, e_1 + b\, e_2$$
$$N_2 = c\, e_1 + d\, e_2$$



figuur 25: De niveaukrommen van de constitutieve relatie van de staaf

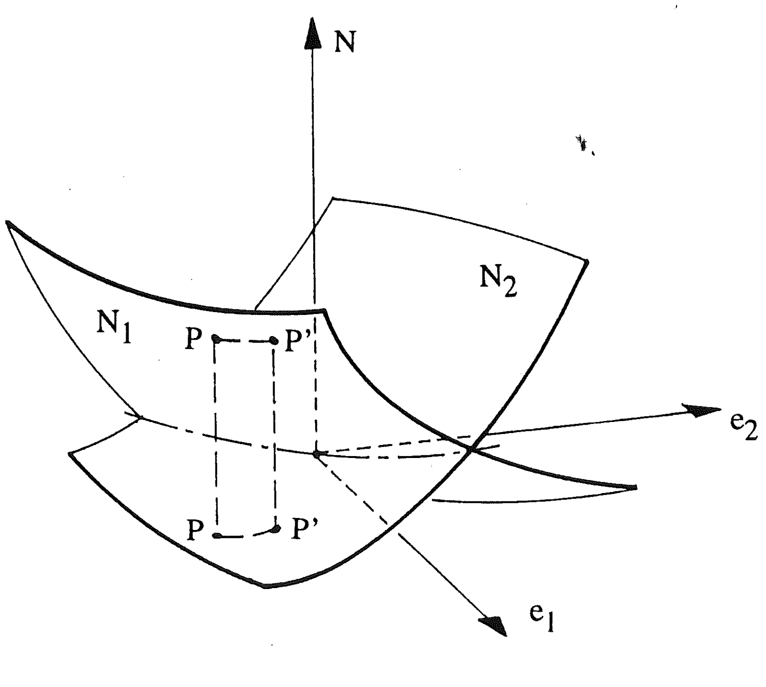
Om deze onbekenden eenduidig te kunnen bepalen zijn vier vergelijkingen nodig. Als ook de spanningsgrootheden in een naburig punt N_1', N_2' met de bijbehorende rekken e_1', e_2' bekend zijn kunnen deze vergelijkingen worden opgelost.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= a\, e_1 + b\cdot e_2 \\
N_1' &= a\, e_1' + b\, e_2' \\
N_2 &= c\, e_1 + d\, e_2 \\
N_2' &= c\, e_1' + d\, e_2'
\end{aligned}
$$

In figuur 25 is de constitutieve relatie van een specifieke staaf weergegeven. De grafiek kan gelezen worden als twee gekromde oppervlakken N_1 en N_2 die zich bevinden boven het vlak waarin de assen e_1 en e_2 zich bevinden. In het symmetrie-vlak snijden de gekromde vlakken elkaar. In figuur 26 zijn een deel van het N_1-vlak en een deel van het N_2-vlak geschetst. De gelineariseerde constitutieve relatie kan worden gedacht als twee vlakken die de gekromde N-vlakken benaderen. De punten die een vlak vastleggen zijn de oorsprong, het punt op het gekromde vlak waar we om willen lineariseren en een naburig punt. Figuur 26 laat zien dat een goede keuze voor het naburige punt op het gekromde N_1-vlak niet vanzelf leidt tot een goede keuze voor het naburige punt op het N_2-vlak. De beste linearisering wordt derhalve verkregen door niet één maar twee naburige punten te kiezen.

$$
\begin{aligned}
N_1 &= a\, e_1 + b\, e_2 \\
N_1' &= a\, e_1' + b\, e_2' \\
N_2 &= c\, e_1 + d\, e_2 \\
N_2'' &= c\, e_1'' + d\, e_2''
\end{aligned}
$$

Voor het punt (N_1', N_2') is gekozen $(N_1, N_2+\Delta N)$ terwijl voor (N_1'', N_2'') is gekozen $(N_1+\Delta N, N_2)$, waarin ΔN voldoende klein is. Bestudering van figuur 25 leert dat elk van deze keuzes leidt tot de kleinste afwijking tussen een gekromd N-vlak en het vlak wat deze benadert in de buurt van het punt waar om wordt gelineariseerd.



figuur 26: Linearisering van de N-vlakken door drie punten per vlak.

De gelineariseerde constitutieve relatie wordt hiermee:

$$
\begin{aligned}
a &= (e_2\, N_1' - e_2' N_1)/(e_2\, e_1' - e_2'\, e_1)\\
b &= (e_1' N_1 - e_1\, N_1')/(e_2\, e_1' - e_2'\, e_1)\\
c &= (e_2\, N_2'' - e_2'' N_2)/(e_2\, e_1'' - e_2'' e_1)\\
d &= (e_1'' N_2 - e_1\, N_2'')/(e_2\, e_1'' - e_2'' e_1)
\end{aligned}
$$

In de buurt van het niveau $N_1=0$ of $N_2=0$ wordt de gelineariseerde relatie door deze keuze onbepaald: De drie punten (0,0), (e_1,e_2) en (e_1',e_2') of (e_1'',e_2'') waardoor het vlak is bepaald, liggen dan bijna op een lijn. De naburige punten worden daarom in dat geval anders gekozen: $(N_1',N_2') = (N_1+\Delta N, N_2-\Delta N)$ of $(N_1'',N_2'') = (N_1-\Delta N, N_2+\Delta N)$. Uit figuur 25 wordt bovendien duidelijk dat de gelineariseerde stijfheidsmatrix niet singulier zal worden.

bereken de spanningsgrootheden N_1 en N_2 uit de verplaatsingen u met de oude stijfheid $\mathbf{D}_s$

$$
\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_s^{oud}\ \mathbf{B}_s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
$$

bereken de rekken

$$
\begin{aligned}
&N_1' = N_1 &\quad& N_1'' = N_1+\Delta N &\quad& \Delta N = N_{cr}/3\\
&N_2' = N_2+\Delta N && N_2'' = N_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&e_1 = e(N_1,N_2) &\quad& e_1' = e(N_1',N_2') &\quad& e_1'' = e(N_1'',N_2'')\\
&e_2 = e(N_2,N_1) && e_2' = e(N_2',N_1') && e_2'' = e(N_2'',N_1'')
\end{aligned}
$$

bepaal de nieuwe stijfheidsmatrix $\mathbf{D}_s$

$$
\begin{aligned}
a &= (e_2\, N_1' - e_2' N_1)/(e_2\, e_1' - e_2'\, e_1)\\
b &= (e_1' N_1 - e_1\, N_1')/(e_2\, e_1' - e_2'\, e_1)\\
c &= (e_2\, N_2'' - e_2'' N_2)/(e_2\, e_1'' - e_2'' e_1)\\
d &= (e_1'' N_2 - e_1\, N_2'')/(e_2\, e_1'' - e_2'' e_1)
\end{aligned}
$$

bepaal het relatieve verschil van de opgetreden rekken e_1^o, e_2^o en de gewenste rekken e_1, e_2

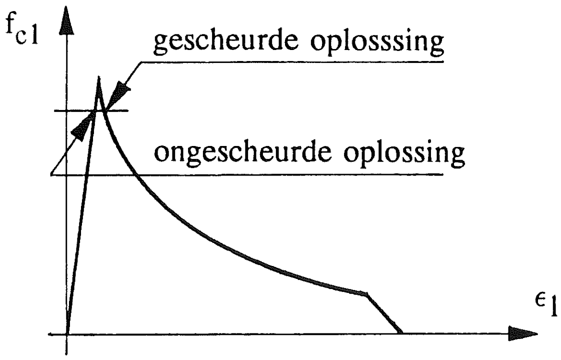
$$
\begin{bmatrix} e_1^o \\ e_2^o \end{bmatrix} = \mathbf{B}_s \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
$$

bereken de elementstijfheidsmatrix

$$
\mathbf{K}^e = \mathbf{B}^T{}_s \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s
$$

figuur 27: De berekening van de staafstijfheidsmatrix

De berekening van de elementstijfheidsmatrix van de staaf gaat nu als volgt: Uit de verplaatsingen worden de spanningsgrootheden N_1 en N_2 berekend met de tot dan toe gebruikte lineaire constitutieve relatie. Met de werkelijke constitutieve relatie worden de rekgrootheden $e_1(N_1,N_2)$ en $e_2(N_1,N_2)$ bepaald. Bovendien worden de grootheden e_1', e_2', e_1'' en e_2'' bepaald. Met de bovenstaande uitdrukking kan dan de gelineariseerde constitutieve relatie a, b, c, d worden bepaald, waarna de elementstijfheidsmatrix kan worden berekend. In figuur 27 is het programma-structuur-diagram weergegeven.



figuur 28: Twee oplossingen bij dezelfde belasting

Het is niet altijd het geval dat een oplossing de enige oplossing is. Bij dezelfde belasting blijkt het mogelijk te zijn een oplossing te vinden waarbij het paneel net gescheurd is of waarbij het paneel bijna gescheurd is. De oorzaak ligt in de modified compression field theory waar geen één-één-duidige constitutieve relatie tussen de grootste hoofdrek ϵ_1 en de grootste hoofdspanning f_{c1} bestaat (zie figuur 28). In de gevallen waarin dit is geconstateerd, is het verschil in de verplaatsingen van beide oplossingen ongeveer één procent.

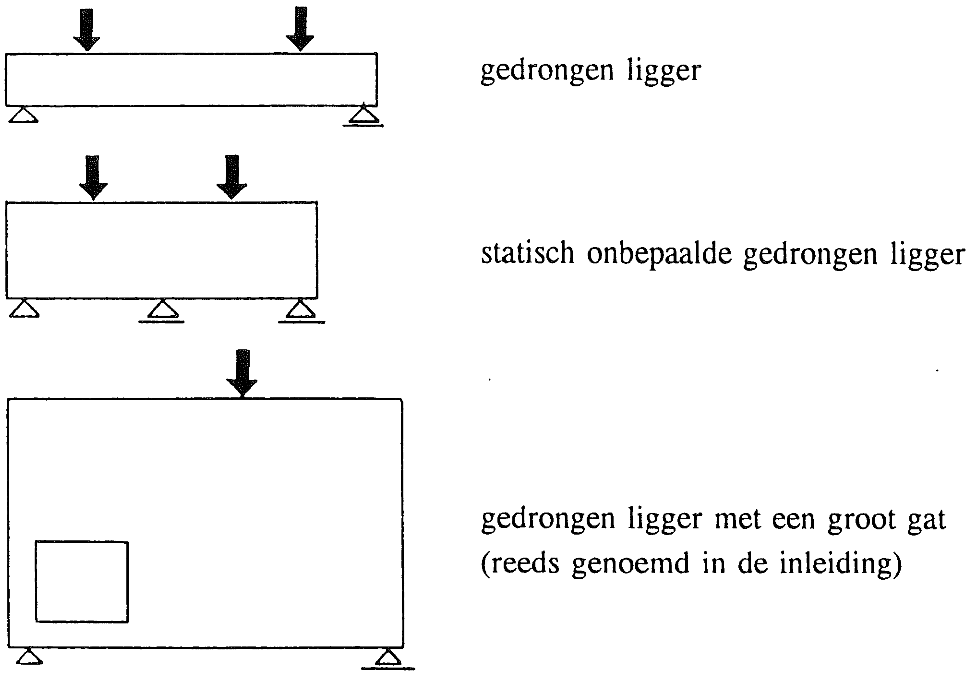
In een enkel statisch onbepaald geval zal de oplosmethode langzaam of niet convergeren als de staaf- en paneelkrachten sterk afhankelijk zijn van de stijfheid van een element: Als de stijfheid afneemt, neemt de kracht op dat element af door herverdeling. Daardoor zal de stijfheid weer toenemen zodat de kracht weer toeneemt. Het resultaat is dat de oplossing gaat oscilleren om de juiste waarde. Een eenvoudige remedie is een numerieke demping van de stijfheid.

$$\mathbf{D}_{nieuw} = \xi \, \mathbf{D}_{oud} + (1-\xi)\, \mathbf{D}_{juist} \qquad 0 \leq \xi < 1$$

De nieuwe stijfheid in de betreffende iteratie wordt nu bepaald door het gewogen gemiddelde van de berekende juiste stijfheid en de oude stijfheid.

5 Constructieberekeningen

In dit hoofdstuk worden berekeningen met staaf-paneel-modellen gemaakt van drie constructies. Achtereenvolgens worden een gedrongen ligger, een gedrongen ligger op drie steunpunten en een gedrongen ligger met een gat gemodelleerd (zie figuur 29). De resultaten van de eerste twee berekeningen worden vergeleken met experimentele resultaten. De laatste berekening wordt vergeleken met een niet-lineaire eindige-elementenberekening.



figuur 29: De constructies waarmee het staaf-paneel-model is getoetst

5.1 Gedrongen ligger op twee steunpunten

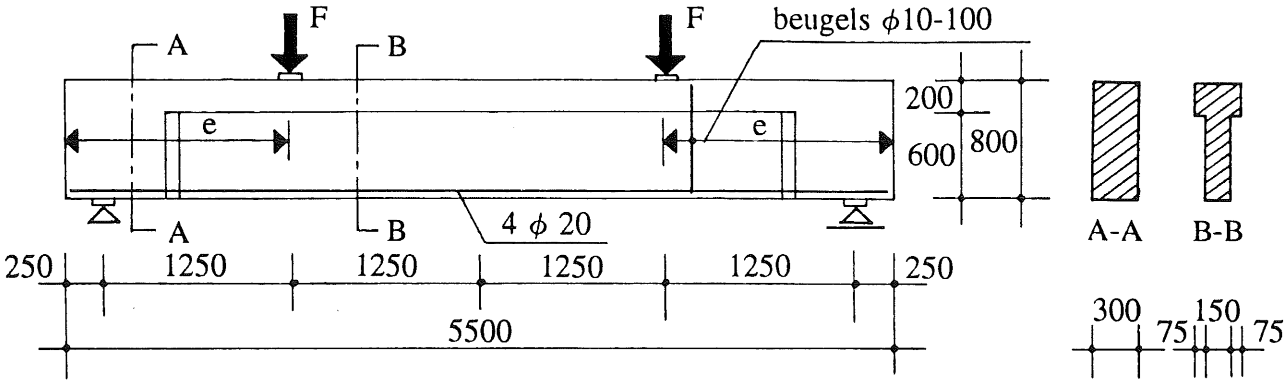
In 1990 heeft Braam vierpuntsbuigproeven uitgevoerd op vijftien gedrongen liggers die hij nummerde van één tot vijftien.[1] De experimenten werden gedaan om de invloed van de lijfwapening op de scheurwijdte vast te stellen. Eén ligger is volledig tot bezwijken belast, waarbij bleek dat de gebruikelijke liggertheorie een uitstekende beschrijving van het bezwijkmoment geeft.[2] Van de ligger met nummer één is een staaf-paneel-model gemaakt. Met het model zijn de doorbuiging, bezwijk-belasting en scheurwijdten bij de hoofdwapening berekend en vergeleken met de resultaten van Braam. Omdat ligger één geen lijfwapening heeft ontstaan bij het experiment grote scheurwijdten in het lijf. Daarom is ook van de ligger met nummer twee, die wel lijfwapening heeft, een staaf-paneel-berekening gemaakt.

[1] Braam, p.59-74

[2] Persoonlijke mededelingen van Welleman en Van der Veen

Ligger één

Ligger één is een T-ligger met afmetingen en wapening volgens figuur 30. De ligger is op twee punten opgelegd en belast met twee puntlasten F. Ter plaatse van de opleggingen is de ligger versterkt met een hamerstuk. Vanwege de symmetrie van de constructie en de belasting hoeft slechts de helft van de ligger te worden gemodelleerd.

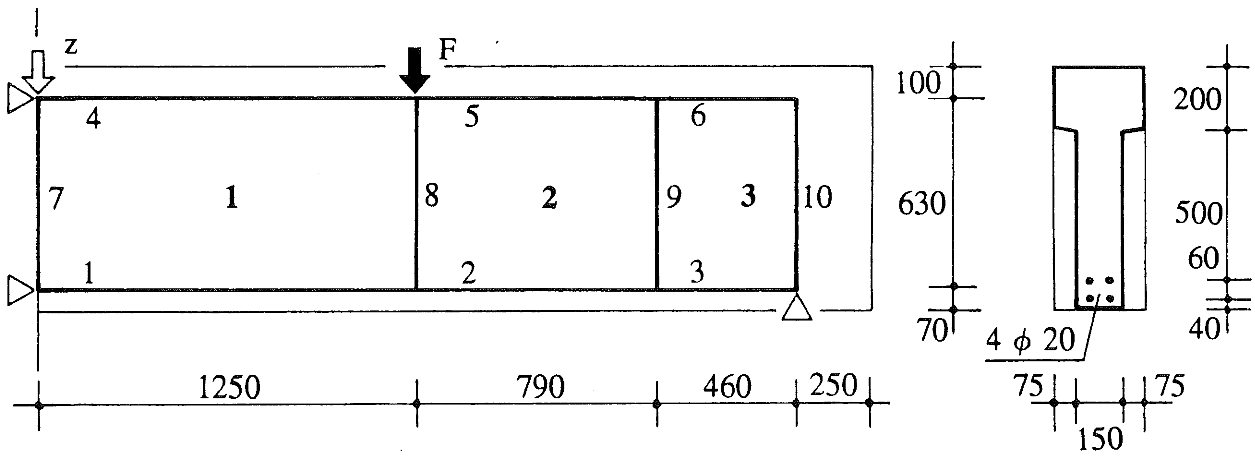


figuur 30: Afmetingen en wapening van de T-ligger met nummer één

staaf	A_c [mm^2]	A_s [mm^2]
1	140 x 150	4 ϕ 20
2	140 x 150	4 ϕ 20
3	140 x 300	4 ϕ 20
4	200 x 300	
5	200 x 300	
6	200 x 300	
7	250 x 150	
8	250 x 150	5 ϕ 10
9	250 x 150	5 ϕ 10
10	250 x 300	5 ϕ 10

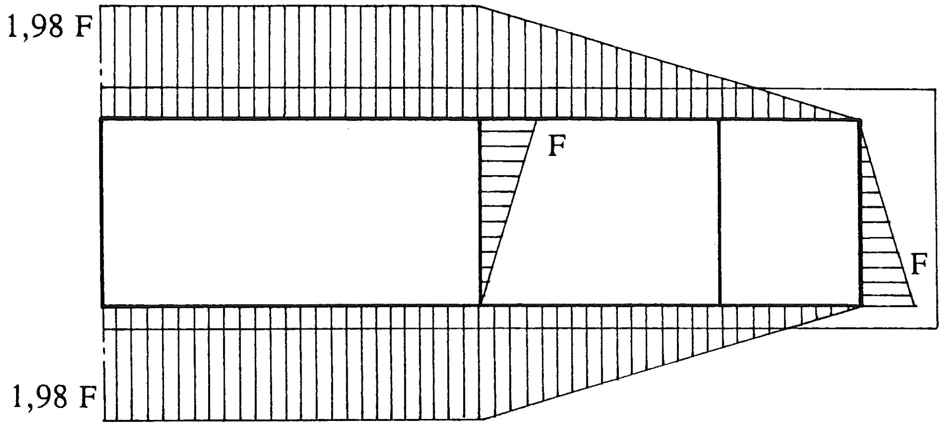
paneel	A_{sx} [mm^2]	A_{sy} [mm^2]	t [mm]
1			150
2		2 ϕ 10-100	150
3		2 ϕ 10-100	300

f_{cr} = 3,82 N/mm^2
f'_c = -52,5 N/mm^2
E_c = 28900 N/mm^2
f_y = 550 N/mm^2
E_s = 210000 N/mm^2

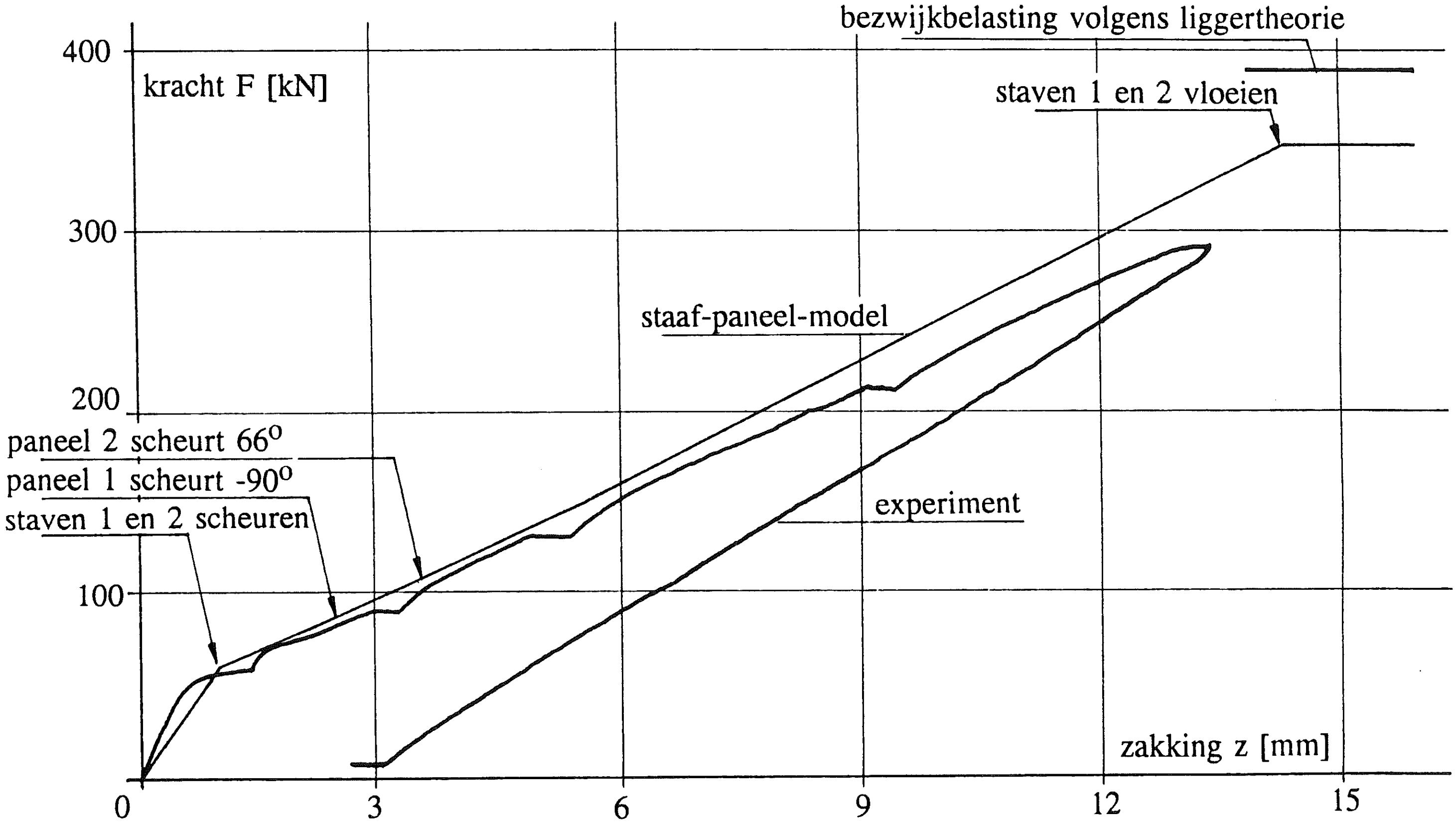


figuur 31: Het staaf-paneel-model van ligger één

De geometrie van het staaf-paneel-model is weergegeven in figuur 31. Verticale staven worden onder meer gekozen ter plaatse van de oplegging, de puntlast en ter plaatse van het midden van de overspanning. De laatst genoemde staaf is noodzakelijk om de verplaatsing van het midden van de overspanning te kunnen berekenen. Het dikte verschil tussen hamerstuk en lijf wordt gemodelleerd door aan weerszijden van de overgang een paneel te kiezen. De verticale staaf 9 tussen deze panelen zal spanningsloos blijven en geeft geen bijdrage aan de vervormingen. Eigenlijk kan deze staaf worden weggelaten.



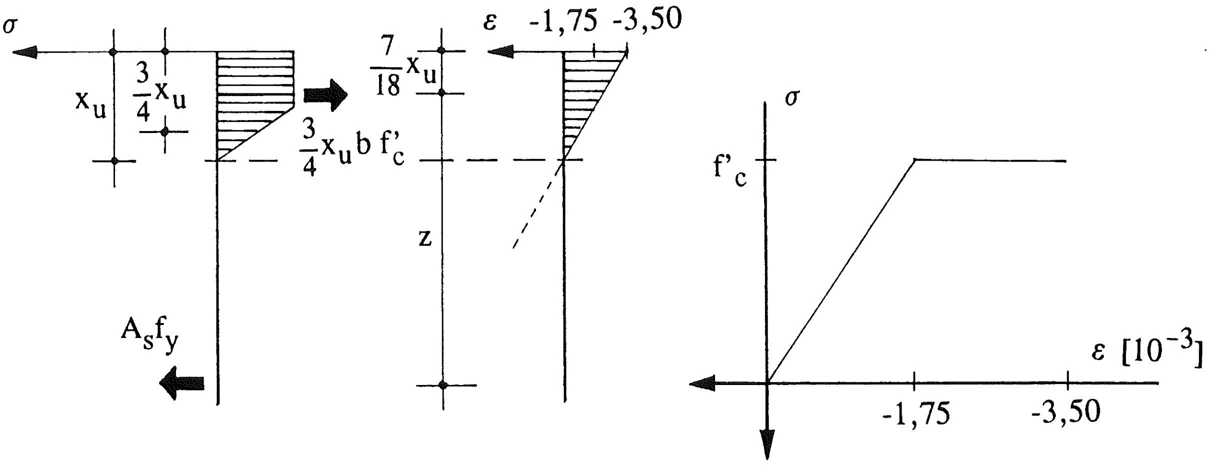
figuur 32: De normaalkrachten in de staven van het model



figuur 33: Het last-zakkingsdiagram met kenmerkende waarden

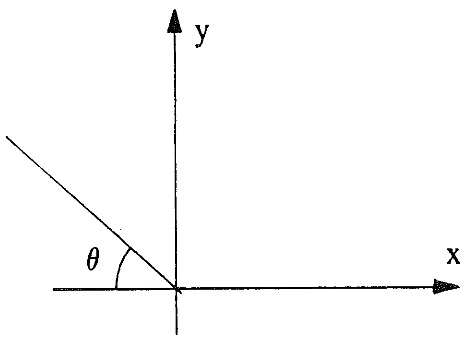
De onderrand van het staaf-paneel-model wordt ter plaatse van het hart van de wapening gekozen. De hoeveelheid staal bedraagt vier staven met een diameter van 20 mm.
De afmetingen van het beton zijn van belang voor de tension-stiffening. Gekozen wordt voor

een hoogte van 140 mm. Een hoogte voor de trekband die in de voorschriften wordt gehanteerd is 2,5(h-d). Hierin is h de hoogte van de ligger en d de afstand van de bovenzijde van de ligger tot het zwaartepunt van de wapening. Deze formule leidt tot een hoogte van 175 mm. De waarde heeft echter weinig invloed in het bezwijkstadium omdat dan de tension-stiffening gering is. De bovenrand krijgt de afmetingen van de flens, namelijk 200 x 300 mm^2. De plaats van de bovenrand wordt gekozen op 100 mm van de bovenzijde van de ligger ter plaatse van de zwaartelijn van de flens. Hiermee ligt de arm tussen de getrokken en de gedrukte rand vast. Deze afstand is van grote invloed op de bezwijklast. De afmetingen van de verticale staven hebben invloed op de hoofdspanningsrichting in het paneel. De afmetingen staan vermeld in de tabel bij figuur 31.
Het model is doorgerekend met de computer. In figuur 32 is het verloop van de normaalkracht in de staven van het model weergegeven. De normaalkracht is evenredig met de belasting omdat het model statisch bepaald is. In figuur 33 is het last-zakkingsdiagram tezamen met het experimentele resultaat van Braam weergegeven. Zoals de figuur laat zien heeft Braam de ligger niet tot bezwijken belast. De bezwijklast is daarom berekend met de gebruikelijke liggertheorie. In figuur 34 zijn de uitgangspunten van deze theorie weergegeven. De bezwijkbelasting bedraagt 390 kN. De hoogte van de betondrukzone x_u is dan 59 mm.



figuur 34: De spanningen en rekken volgens de liggertheorie

In figuur 33 is achter de mededeling dat het paneel scheurt aangegeven onder welke hoek dat gebeurt. Dit is volgens de modified compression field theory de hoek tussen het negatieve deel van de x-as en de richting van de kleinste hoofdspanning. Daarbij geldt dat rechtsom positief is. Aangezien alle panelen in dit hoofdstuk gelijk georiënteerd zijn geldt de hoek van scheuren die hieronder is aangegeven.



Door variatie van het model blijkt dat een betere aansluiting bij de bezwijklast is te vinden door de betondrukzone kleiner, en de arm groter te kiezen. Een betere aansluiting bij de elastische stijfheid is te bereiken met een grotere drukzone en een groter meewerkend oppervlak van het beton in de onderrand.

Bij de berekening van een staaf-paneel-model wordt in elke staaf de gemiddelde rek ε bepaald. Deze rek kan worden gebruikt om de gemiddelde scheurwijdte ter plaatse van de hoofdwapening te berekenen. In figuur 35 wordt de rek die bij het experiment is gemeten vergeleken met de rek in de onderrand van het staaf-paneel-model van ligger één. De overeenstemming is heel bevredigend.

belasting F [kN]	89	129	209	289
verlenging van de onderrand [mm][1] gemeten op 90 mm van de onderkant (de meetlengte bedraagt 2 x 2,4 m)	2,96	4,61	7,88	10,99
rek bij experiment ε $[10^{-3}]$	0,62	0,96	1,64	2,29
rek bij staaf-paneel-model ε $[10^{-3}]$	0,47	0,83	1,49	2,11
afwijking [%] (ten opzichte van het staaf-paneel-resultaat)	32	16	10	9

figuur 35: De gemiddelde rek ter plaatse van de hoofdwapening

Gebruikelijk wordt de scheurwijdte berekend door de gemiddelde rek te vermenigvuldigen met de scheurafstand.

$$w = 0{,}74 \; a \; \varepsilon$$

0,74 rafelfactor
a scheurafstand en het feit dat het beton onder trek staat.

De factor 0,74 verdisconteert het optreden van kleine scheurtjes die naast de hoofdscheur optreden.[2] De gemiddelde scheurafstand wordt hier berekend volgens Eurocode 2.[3]

$$a = 50 + 0{,}25 \; \phi/\rho \quad [\text{mm}]$$

ϕ de gemiddelde staafdiameter [mm]
ρ verhouding tussen staaloppervlak en betonoppervlak

[1] Braam, tabel 7.3

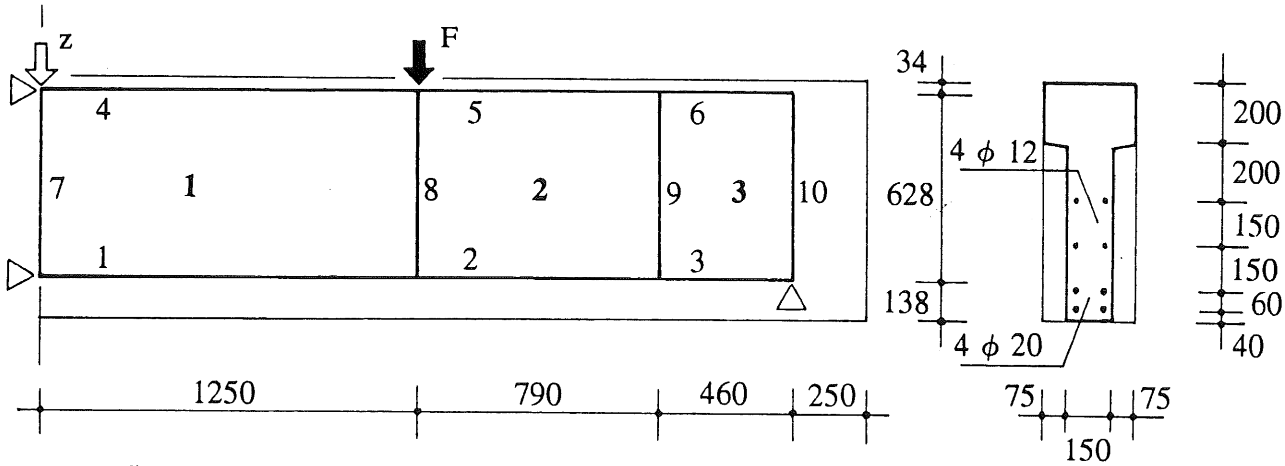
[2] Braam, p.76-78

[3] ENV, p.172

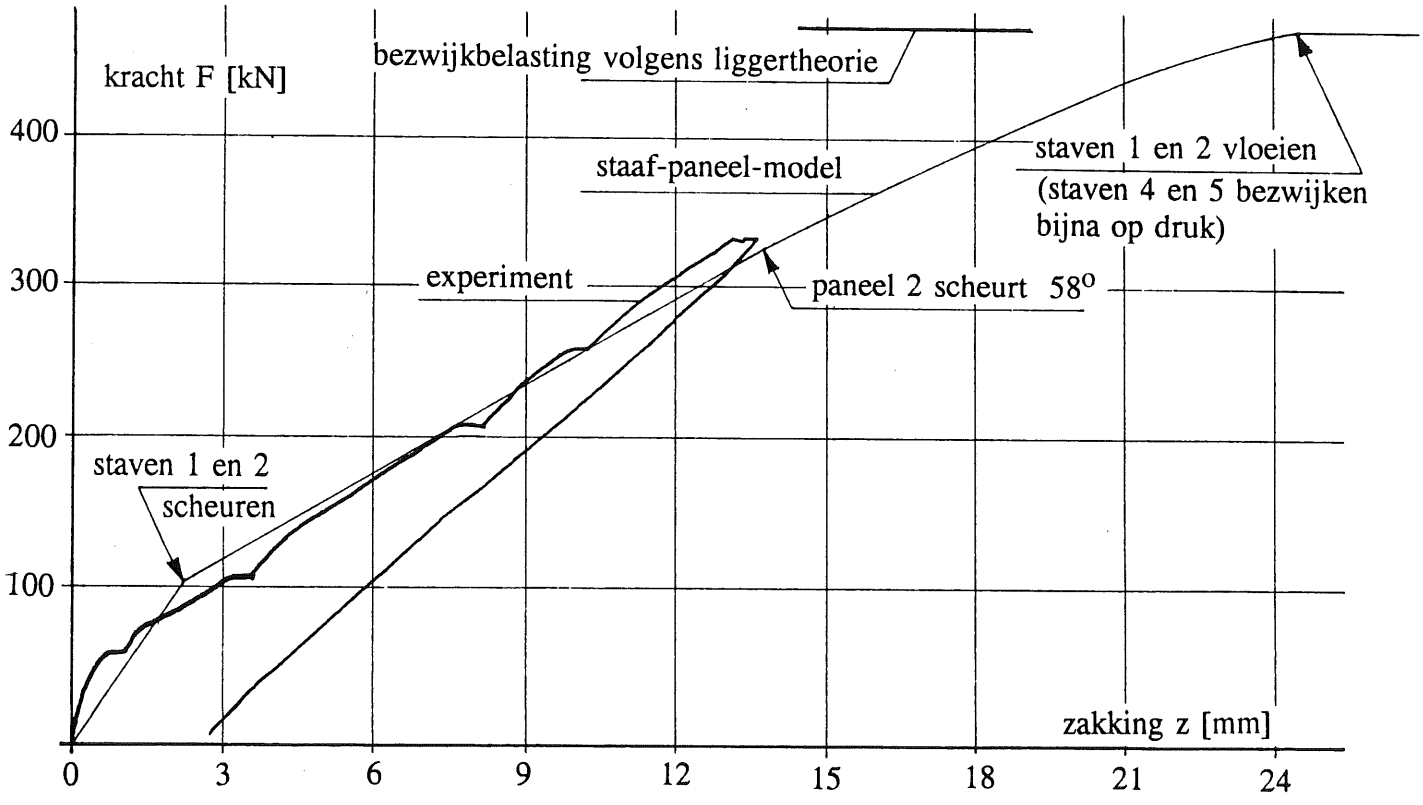
staaf	A_c [mm²]	A_s [mm²]
1	280 x 150	4 ϕ 20, 4 ϕ 12
2	280 x 150	4 ϕ 20, 4 ϕ 12
3	280 x 300	4 ϕ 20, 4 ϕ 12
4	66 x 300	
5	66 x 300	
6	66 x 300	
7	250 x 150	
8	250 x 150	
9	250 x 150	
10	250 x 300	

paneel	A_{sx} [mm²]	A_{sy} [mm²]	t [mm]
1			150
2		2 ϕ 10-100	150
3		2 ϕ 10-100	300

f_{cr} = 3,81 N/mm²
f'_c = -47,9 N/mm²
E_c = 30600 N/mm²
f_y = 550 N/mm²
E_s = 210000 N/mm²



figuur 36: Het staaf-paneel-model van ligger twee



figuur 37: Het last-zakkingsdiagram van ligger twee

De correctie-factoren die de aanhechting van de wapening en de verdeling van de rek verdisconteren zijn weggelaten. Met deze relaties berekent het programma een scheurwijdte in de onderrand van 0,15 mm bij een belasting van 209 kN. Bij het experiment werd in dit geval een gemiddelde scheurwijdte van 0,10 mm geconstateerd ter plaatse van de hoofdwapening.[1] Geconcludeerd kan worden dat in dit geval in de gebruikstoestand (209 kN) de voorspelde rek 10% te klein is terwijl de voorspelde scheurwijdte 33% te groot is. De nauwkeurigheid van de scheurwijdteberekening zou derhalve aanzienlijk kunnen worden verbeterd door een nauwkeuriger model voor de scheurafstand te hanteren.

Ligger twee
Uit de experimenten van Braam bleek dat de wapening van de hierboven berekende ligger niet voldoet omdat grote scheurwijdten in het lijf ontstaan. Een betere wapening is die van de ligger met nummer twee waarbij behalve de vier langsstaven van de vorige ligger ook vier staven met een diameter van 12 mm zijn aangebracht. De plaats van de staven is aangegeven in de doorsnede van figuur 36. Ook de materiaalparameters van ligger twee verschillen van die van ligger één. Voor ligger twee is een staaf-paneel-model gemaakt waarbij is getracht de bezwijk-belasting goed te beschrijven. De hoogte van de betondrukzone is daarom berekend met de liggertheorie: x_u = 88 mm. Hiermee is voor de hoogte van de gedrukte rand van het model 0,75 x_u = 66 mm gekozen, en voor de afstand van de bovenzijde van de ligger tot het hart van de staven van de bovenrand is 0,39 x_u = 34 mm gekozen (figuur 36).
De lijfwapening kan zowel toegekend worden aan de panelen als aan de staven. Aangezien de ligger voornamelijk op buiging is belast is gekozen om de flankwapening bij de onderrand te rekenen en de staven in de onderrand ter plaatse van het zwaartepunt van de wapening te kiezen.
Het berekende last-zakkingsdiagram is weergegeven in figuur 37. Door de keuzes voor de staven in de bovenrand is de bezwijkbelasting van het staaf-paneel-model gelijk aan die volgens de liggertheorie. Het blijkt dat de lijfwapening eenvoudig in de berekening kan worden betrokken. Als de berekening had uitgewezen dat de ligger op afschuiving zou zijn bezweken had de lijfwapening beter aan de panelen kunnen worden toegekend.

Uit het voorgaande kan worden geconcludeerd dat de doorbuigingen en het bezwijken op buiging van deze liggers goed kan worden beschreven met een staaf-paneel-model. Het bezwijken op afschuiving is hiermee nog niet getoetst.

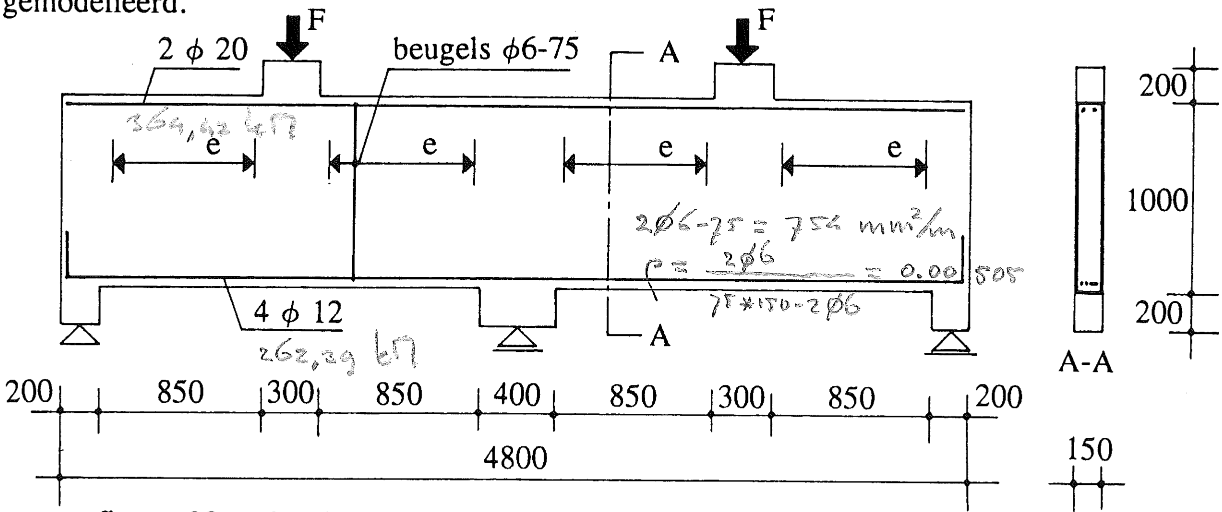
---

[1] Braam, figuur 6.9b

5.2 Gedrongen ligger op drie steunpunten

In 1992 heeft Asin veertien gedrongen liggers op drie steunpunten beproefd[1]. De experimenten werden uitgevoerd om de randvoorwaarden vast te stellen waarbij de constructie voldoende deformatie-capaciteit heeft om een ontwerp met een staafwerkmodel mogelijk te maken. Voor één van deze liggers is een staaf-paneel-model gemaakt. Met het model is de doorbuiging berekend die vervolgens is vergeleken met de resultaten van Asin.

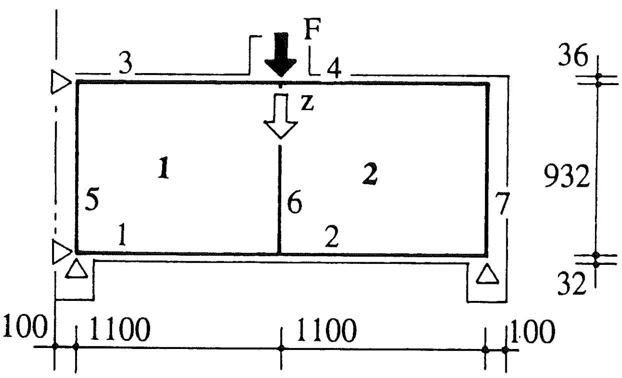
De gedrongen ligger is weergegeven in figuur 38. De hoofdwapening bestaat aan de onderzijde uit vier staven met een diameter van 12 mm en aan de bovenzijde uit 2 staven met een diameter van 20 mm. Op de plaatsen waar de ligger zal kunnen afschuiven zijn beugels aangebracht. De constructie is uitwendig statisch onbepaald zodat ook het staaf-paneel-model statisch onbepaald is. De stijfheid is derhalve van invloed op de krachtsverdeling. De constructie en de belasting zijn symmetrisch zodat slechts de rechter helft van de ligger is gemodelleerd.



figuur 38: Afmetingen en wapening van de ligger op drie steunpunten

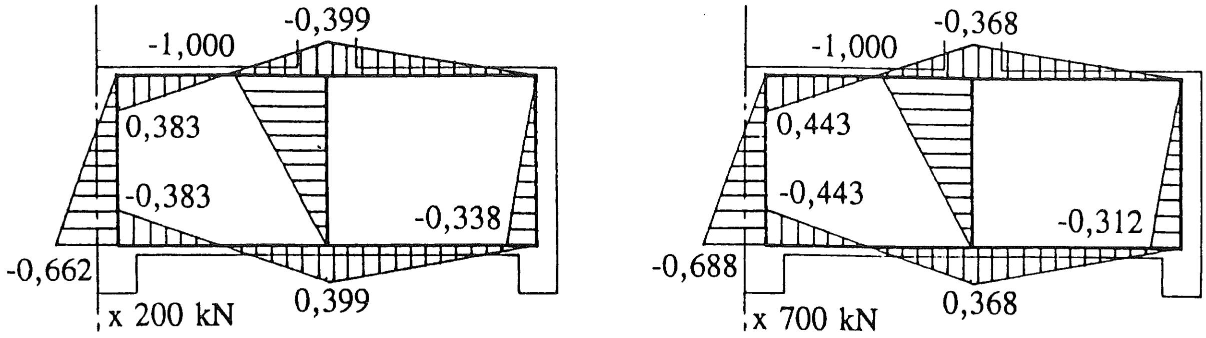
staaf	A_c [mm^2]	A_s [mm^2]
1	200 x 150	4 φ 12
2	200 x 150	4 φ 12
3	200 x 150	2 φ 20
4	200 x 150	2 φ 20
5	350 x 150	
6	600 x 150	
7	350 x 150	

paneel	A_{sx} [mm^2]	A_{sy} [mm^2]
1		22 φ 6
2		22 φ 6



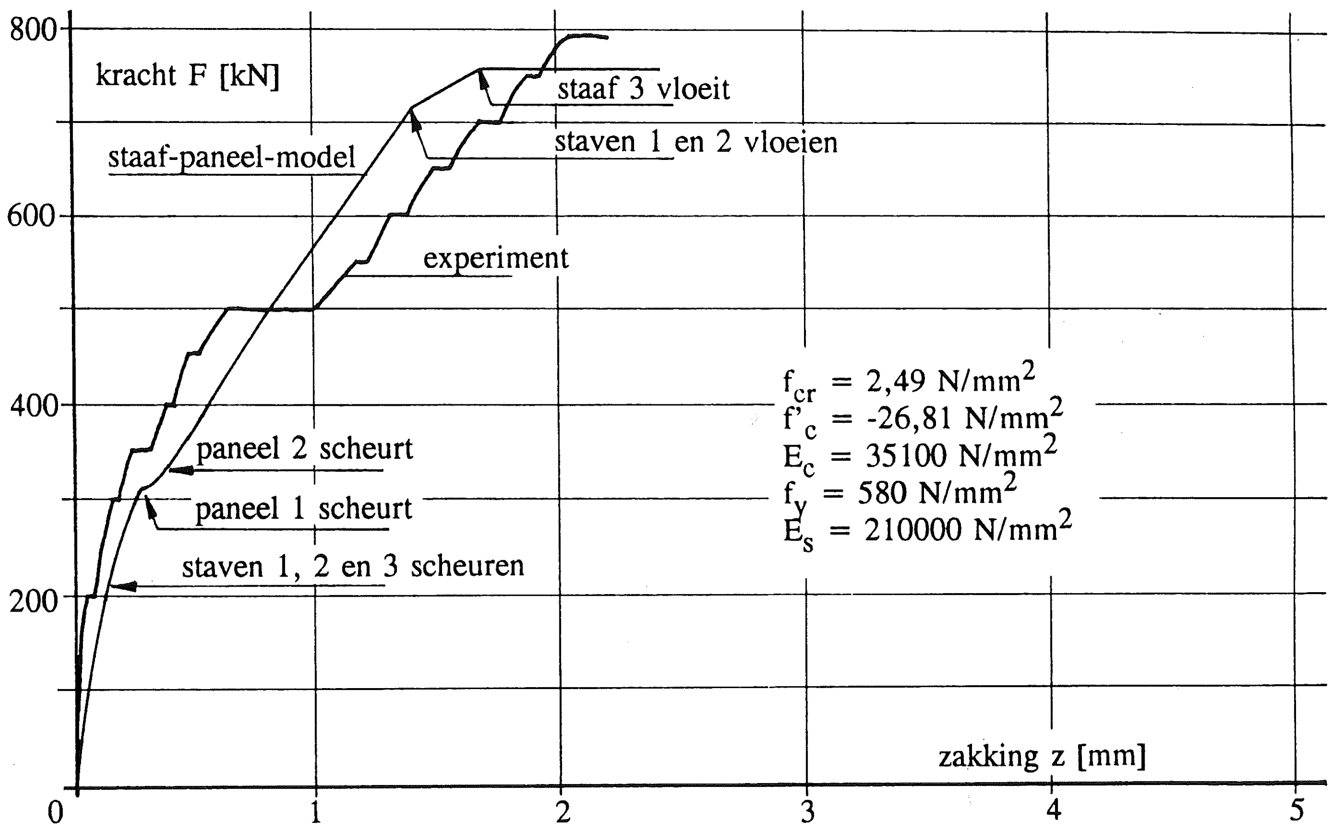
figuur 39: Staaf-paneel-model van de ligger op drie steunpunten

[1] Asin, p.45-58



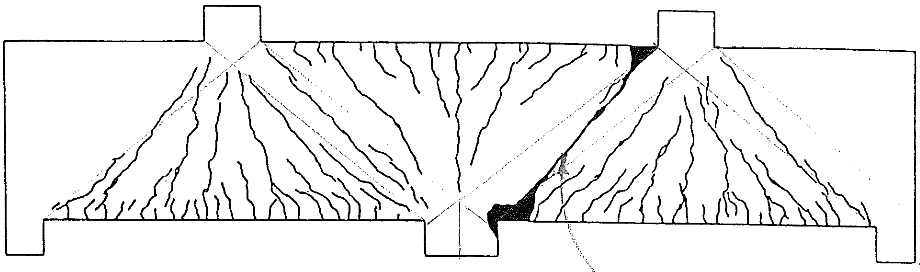
figuur 40: De staafkrachten in het model

De afmetingen van het staaf-paneel-model zijn afgebeeld in figuur 39. Het hart van de horizontale staven is gekozen ter plaatse van de wapening. Omdat in deze staven plaatselijk een drukkracht optreedt, is de keuze van het in rekening te brengen betonoppervlak belangrijk. Gekozen is voor een drukzone met een hoogte van 200 mm. Voor het gebruiksstadium lijkt dit een verantwoorde waarde. Op het moment van bezwijken zal de hoogte kleiner zijn en ook voor de tension-stiffening is de waarde waarschijnlijk te groot.
In figuur 40 is het berekende verloop van de normaalkracht in de staven weergegeven bij een belasting van 200 kN en 700 kN. Er blijkt slechts een geringe herverdeling op te treden.



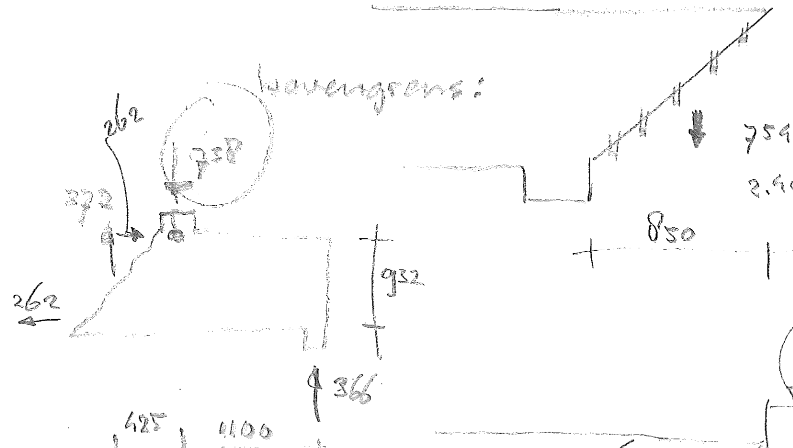
figuur 41: Het last-zakkingsdiagram

Het last-zakkings-diagram is weergegeven in figuur 41. In dezelfde grafiek is het experimentele resultaat uitgezet. Een opvallend verschil is dat het staaf-paneel-model voorspelt dat de wapening in de onderrand zal vloeien, terwijl in werkelijkheid voornamelijk een afschuifbreuk ontstaat (zie figuur 42). Zelfs als de staven worden versterkt zodat de belasting tot het dubbele van de bezwijkbelasting kan worden opgevoerd, bezwijkt het paneel niet. Geconcludeerd kan derhalve worden dat de manier waarop het paneel is gemodelleerd nog niet voldoet. Ondanks deze tekortkoming is de berekende bezwijkbelasting aan de veilige kant.



figuur 42: Het scheurpatroon bij bezwijken

splijtscheur door de staaf

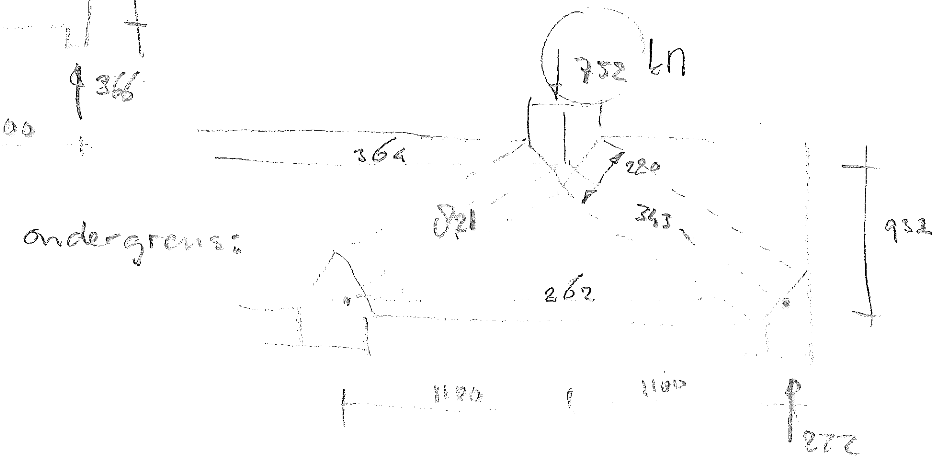


wapening

$754\ mm^2/m * 0.85 * 580 = 372\ kN$

$2.49\ N/mm^2 * 150 * 850 = \underline{317}\ kN$

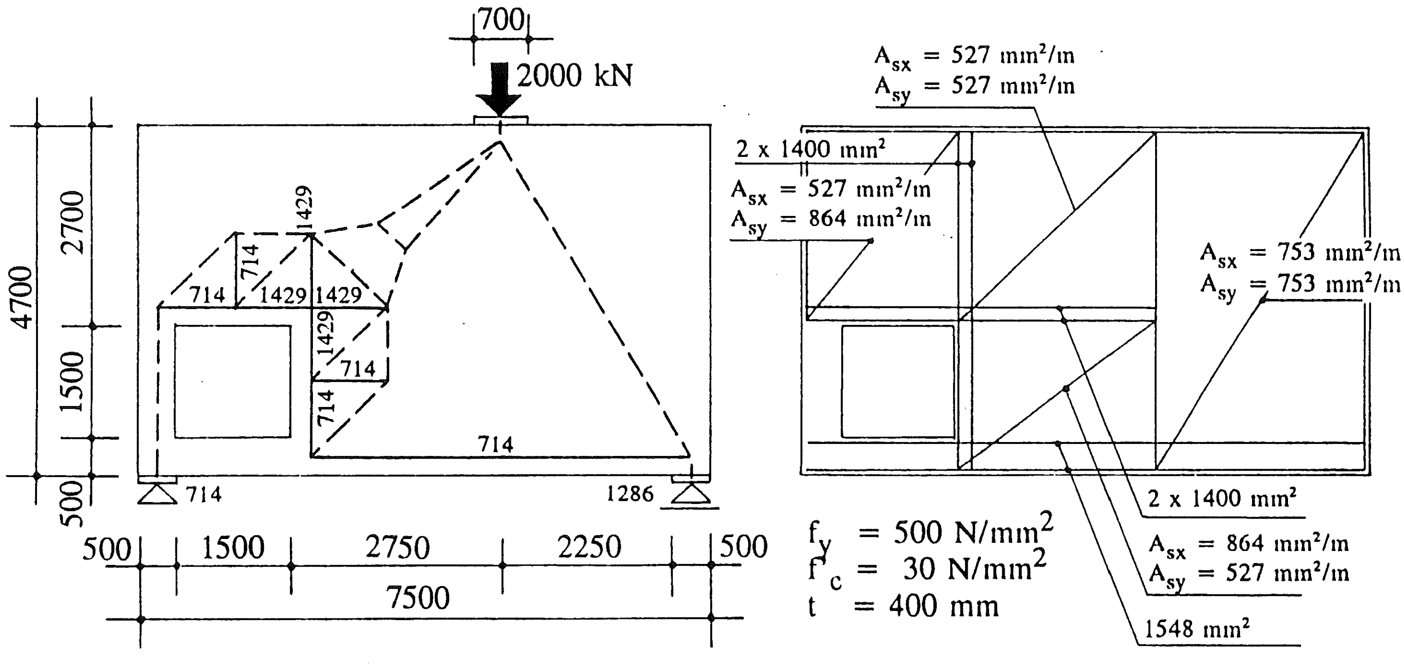
(beton



5.3 Gedrongen ligger met een gat

In 1987 publiceerden Schlaich en anderen een rekenvoorbeeld van een gedrongen ligger met een groot gat.[1] (Deze ligger is ook in de inleiding vermeld.) Met de berekening werd het gebruik van staafwerkmodellen geïllustreerd. Lourenço heeft de gekozen staafwerkmodellen bestudeerd door voor de constructie verschillende niet-lineaire berekeningen volgens de eindige-elementenmethode te maken.[2] Eén van de berekeningen van Lourenço kan zeer goed worden gebruikt om het staaf-paneel-model te toetsen.

Het staafwerkmodel wat we hier beschouwen is weergegeven in figuur 43. Het is oorspronkelijk één van de twee modellen die Schlaich voor de constructie heeft ontworpen. Lourenço heeft de geometrie iets gewijzigd en heeft andere materiaalparameters gekozen. Met de hoofdwapening volgens Schlaich, weergegeven in figuur 43, voorspelt het model een bezwijkbelasting van ongeveer 2000 kN. (Maatgevend is de wapening rond het gat.) In figuur 43 is tevens de verdeelde wapening volgens Lourenço weergegeven. De verdeelde wapening is bedoeld om scheurwijdten te beperken ten gevolge van bijvoorbeeld krimp maar is bovendien noodzakelijk omdat zonder deze wapening een eindige-elementenberekening niet convergeert.



figuur 43: Het deel-model van Schlaich volgens Lourenço met de wapening

Op basis van de wapeningstekening van figuur 43 zijn twee staaf-paneel-modellen ontworpen. Bij het eerste model zijn de keuzes van geometrie en staafoppervlakken gebaseerd op het veronderstelde spanningsverloop in het elastische stadium. Bij het tweede model zijn deze keuzes gebaseerd op het bezwijkstadium.

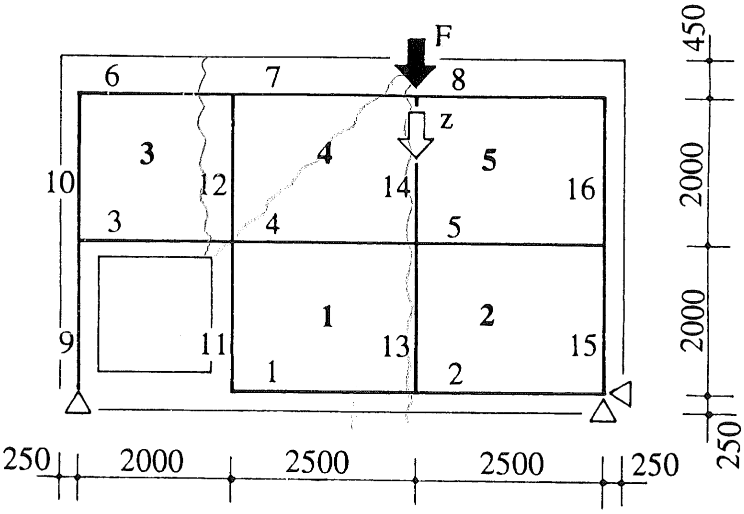
---

[1] Schlaich, p.119-126

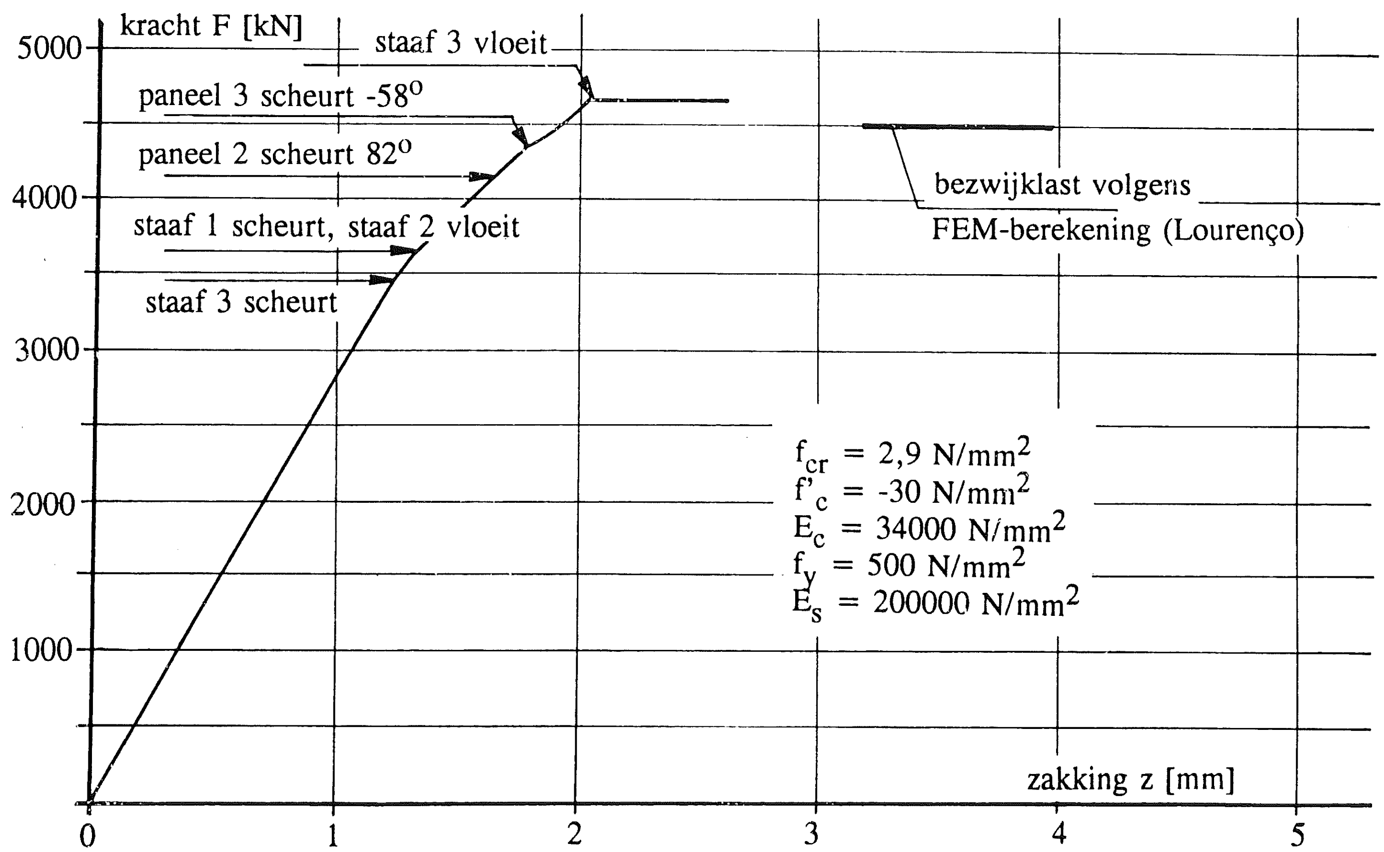
[2] Lourenço, p.4.20-4.29

staaf	A_c [mm^2]	A_s [mm^2]
1	1000 x 400	2410
2	1000 x 400	2300
3	1000 x 400	3330
4	1500 x 400	4190
5	2000 x 400	1510
6	1200 x 400	
7	1200 x 400	
8	1200 x 400	
9	500 x 400	
10	700 x 400	610
11	1000 x 400	3330
12	1500 x 400	4190
13	2250 x 400	1280
14	1100 x 400	640
15	550 x 400	380
16	1100 x 400	750

paneel	A_{sx} [mm^2]	A_{sy} [mm^2]
1	1730	1190
2	1510	1690
3	1050	1730
4	1050	1190
5	1510	1690



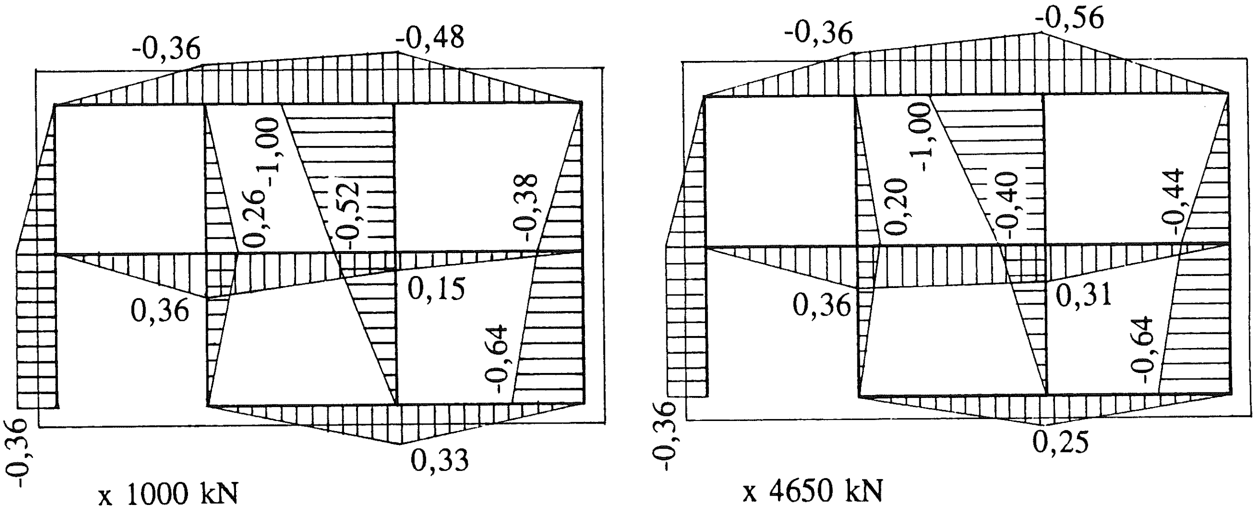
figuur 44: Model één gebaseerd op de wapening van Lourenço



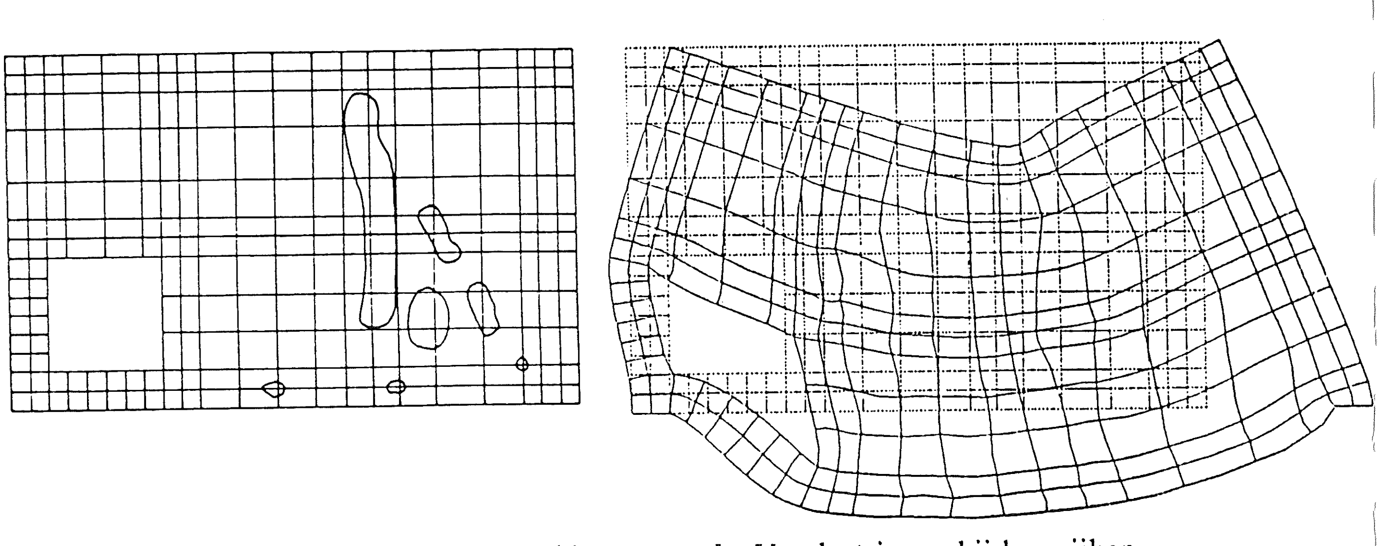
figuur 45: Het last-zakkingsdiagram van staaf-paneel-model één

Model één

Het eerste staaf-paneel-model is weergegeven in figuur 44. Bij de keuzes voor de plaats van de staven en de in rekening te brengen betonoppervlakken is getracht de elastische spanningen in het beton zo goed mogelijk te representeren. Voor staaf 7 bijvoorbeeld is verondersteld dat de resultante van de horizontale drukspanningen op 450 mm van de bovenzijde van de ligger aangrijpt. Als meewerkende breedte van de drukzone wordt een hoogte van 1200 mm geschat. Het staaloppervlak van staaf 1 bijvoorbeeld is bepaald door de hoofdwapening in de onderrand (1548 mm^2) op te tellen bij de horizontale verdeelde wapening (864 mm^2/m) over een breedte van 1 m (1548+864x1=2412). Op dezelfde manier is het staaloppervlak van staaf 4 bepaald door behalve de hoofdwapening (2x1400 mm^2) ook de horizontale verdeelde wapening 1 m boven en 1 m onder de staaf in rekening te brengen (2800+527x1+864x1=4191). Bij de keuze van de betonoppervlakken van de verticale staven 15 en 16 is rekening gehouden de met de spreiding van de oplegreactie in het beton.



figuur 46: De normaalkrachten in de staven van staaf-paneel-model één

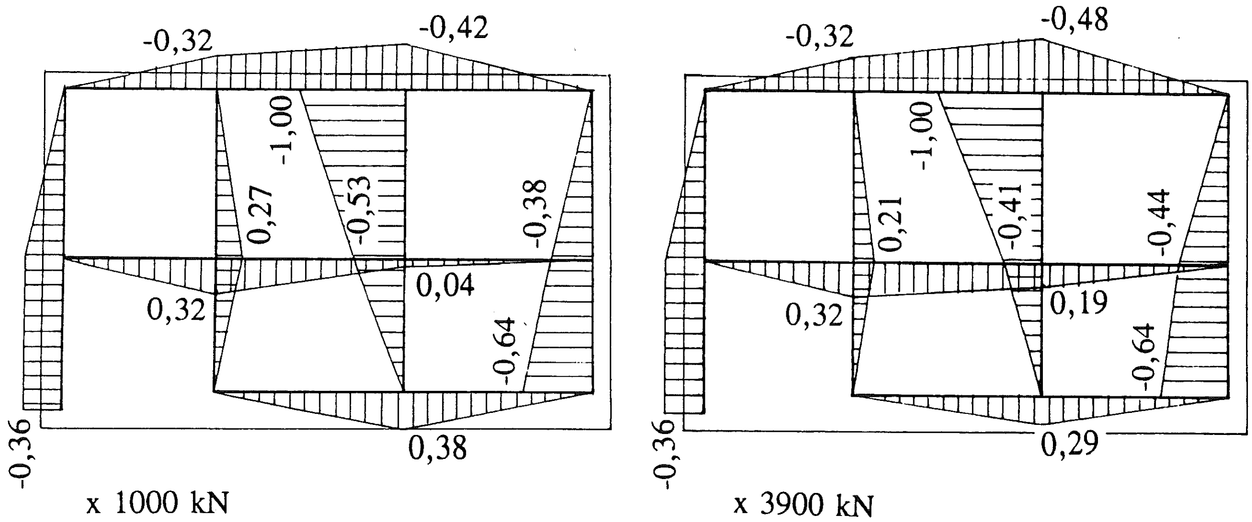


a Gebieden met grote horizontale rekken **b** Verplaatsingen bij bezwijken

figuur 47: De niet-lineaire berekening met de eindige-elementenmethode

Het last-zakkingsdiagram is berekend en aangevuld met opmerkingen over het gedrag van het model (zie figuur 45). De bezwijkbelasting bedraagt 4650 kN.[1] Opvallend is dat staaf 2 vloeit direct nadat deze gescheurd is. Waarschijnlijk is het aandeel van het beton in de trekstaven overschat. In figuur 46 is de normaalkracht in de staven weergegeven bij 1000 kN en bij 4650 kN.
Lourenço vindt met een niet-lineaire berekening een bezwijklast van 4500 kN door verbrijzelen van het beton bij de rechter ondersteuning. In figuur 47 zijn de resultaten van de eindige-elementenberekening weergegeven. Links in de figuur zijn de gebieden weergegeven met grote horizontale positieve rekken op het moment van bezwijken. Duidelijk is te zien dat voordat de ligger bezwijkt de horizontale wapening vloeit ter plaatse van het midden van de overspanning. Rechts in figuur 47 zijn de verplaatsingen getekend op het moment van bezwijken.

Model twee
Bestudering van het eindige-elementenresultaat leert dat de bovenrand van het staaf-paneel-model te laag is gekozen voor het bezwijkstadium. Dit volgt ook uit een evenwichtsbeschouwing met de liggertheorie. Bovendien lijken bij nader inzien de toegekende betonoppervlakken in de getrokken staven te groot om de tension-stiffening van de verdeelde wapening goed te beschrijven. In figuur 49 is het tweede model weergegeven. De figuur laat zien dat tevens de staven in de onderrand hoger zijn gekozen omdat de bijdrage van de verdeelde wapening zorgt dat de resultante van de trekspanningen niet in het zwaartepunt van de hoofdwapening zal liggen.
In figuur 49 is het resultaat van de berekening uitgezet tezamen met het resultaat van ligger één. Hiermee kan een indruk worden verkregen van de gevoeligheid van het staaf-paneel-model voor wijzigingen van de invoer. Ondanks de grote verschillen tussen de twee modellen zijn de verschillen in de rekenresultaten resultaten beperkt. Door de ervaringen met eerdere berekeningen wordt verwacht dat model twee het beste is. De lage waarde voor de bezwijklast is voor een deel te wijten aan het ontbreken van hardening van de wapening in de staven. Dit is een conservatieve benadering die bij de afleiding van de staaf is toegepast. In figuur 48 is de krachtsverdeling van model twee weergegeven. De staafkrachten wijken niet veel af van die in figuur 46. Beide modellen voorspellen een meer dan evenredige toename van krachten in de staven 4 en 5.

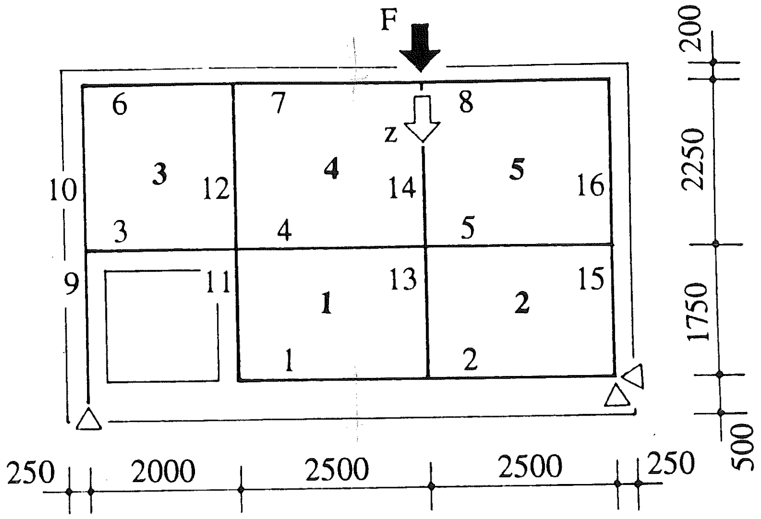


figuur 48: De normaalkrachten in model twee

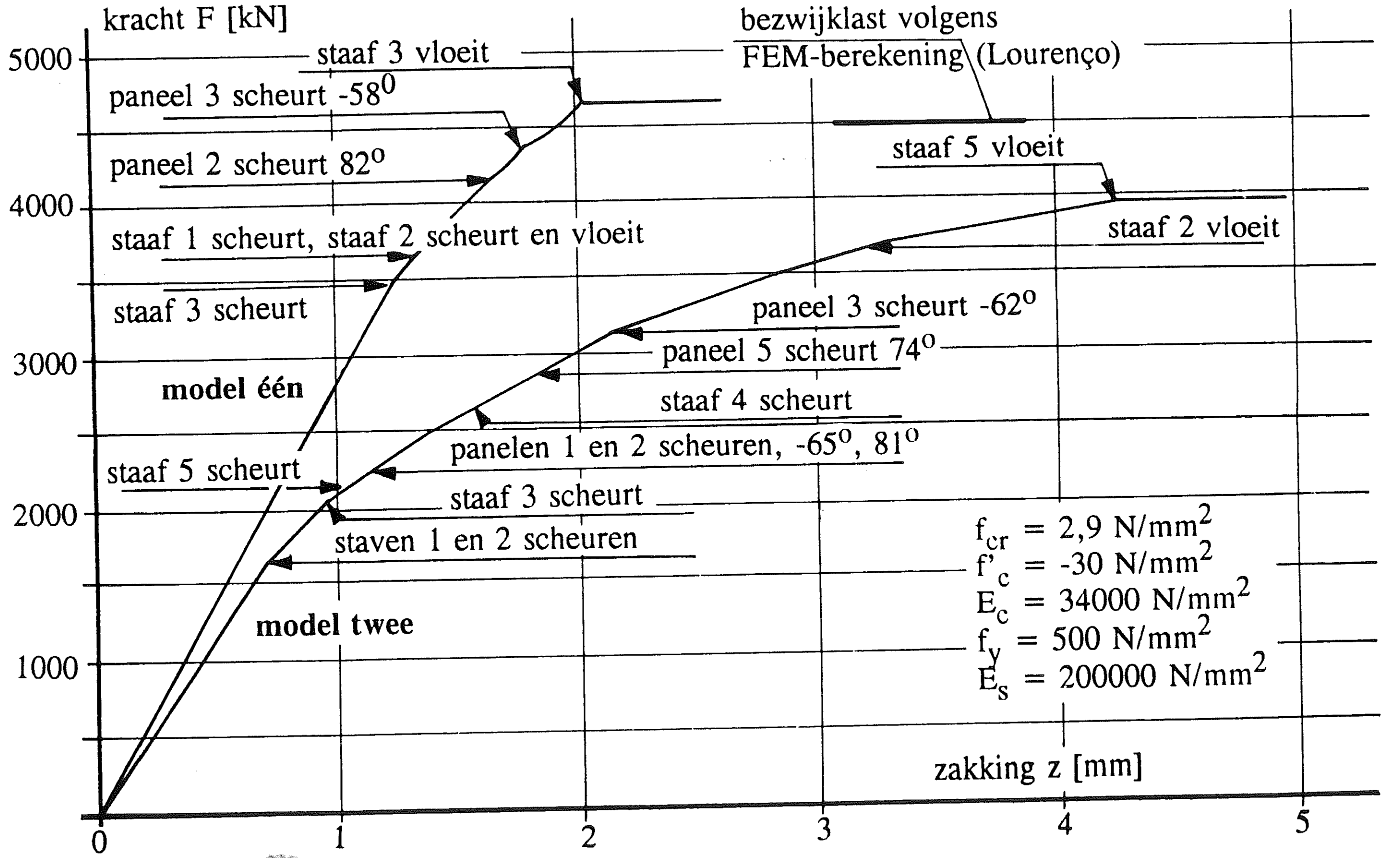
[1] Als de verdeelde wapening niet in rekening wordt gebracht bedraagt de bezwijklast volgens het staaf-paneel-model ongeveer 2500 kN.

staaf	A_c [mm^2]	A_s [mm^2]
1	500 x 400	2410
2	500 x 400	2300
3	500 x 400	3330
4	650 x 400	4190
5	330 x 200	1510
6	400 x 400	
7	400 x 400	
8	400 x 400	
9	500 x 400	
10	700 x 400	610
11	1000 x 400	3330
12	1500 x 400	4190
13	2250 x 400	1280
14	1100 x 400	640
15	550 x 400	380
16	1100 x 400	750

paneel	A_{sx} [mm^2]	A_{sy} [mm^2]
1	1730	1190
2	1510	1690
3	1050	1730
4	1050	1190
5	1510	1690



figuur 48: Model twee gebaseerd op de wapening van Lourenço



figuur 49: Het last-zakkingsdiagram van het model twee

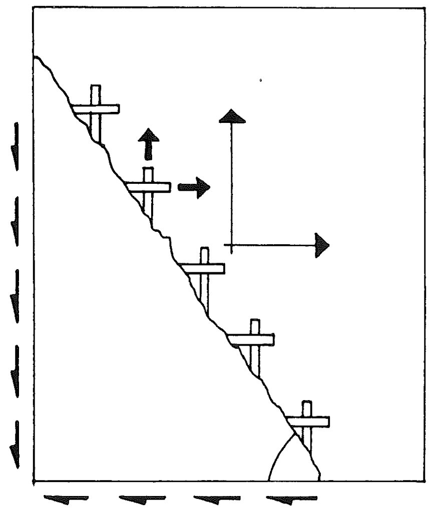
Ongetwijfeld zal de deskundige lezer het niet eens zijn met een aantal van de keuzes die bij het ontwerp van de modellen zijn gemaakt. Het is echter van belang ons te realiseren dat niet elke keuze van invloed is op het rekenresultaat. Vaak bleek door variatie van de grootte van het oppervlak van een staaf dat het effect op de verplaatsingen bijzonder gering was zodat geen verdere aandacht aan de keuze van dit oppervlak is besteed. Bovendien zijn voor een goede berekening van de krachtsverdeling niet de feitelijke waarden van de stijfheden van belang maar slechts de verhoudingen van de stijfheden. Daarom is het belangrijk op een consequente manier de oppervlakken aan de staven toe te kennen. Een eventuele fout hierbij heeft alleen gevolgen voor de berekende doorbuiging van de constructie.

De hoofdwapening van de ligger is met een staafwerkmodel ontworpen voor een belasting van 2000 kN. Voornamelijk door de verdeelde wapening blijkt de bezwijkbelasting ongeveer 4500 kN te bedragen. Het verdient derhalve aanbeveling de verdeelde wapening bij het ontwerp van het staafwerkmodel te betrekken.

Geconcludeerd kan worden dat met kennis van zaken een staaf-paneel-model kan worden ontworpen dat het constructiegedrag goed beschrijft maar dat ook met minder deskundige keuzes een heel redelijke benadering wordt verkregen van de bezwijklast.

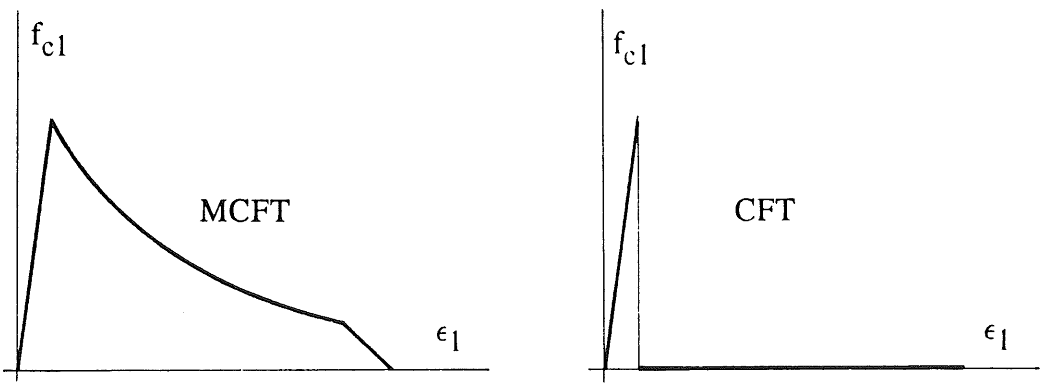
6 Aanbevelingen

In de modellering van het paneel lijken verbeteringen mogelijk. Bij de berekende constructies zou een afschuifbreuk kunnen worden beschreven door in aanvulling op de modified compression field theory het evenwicht in het gescheurde paneel te controleren (zie figuur ~~52~~ 51).



figuur ~~52~~ 51: Controle van het evenwicht in het gescheurde paneel

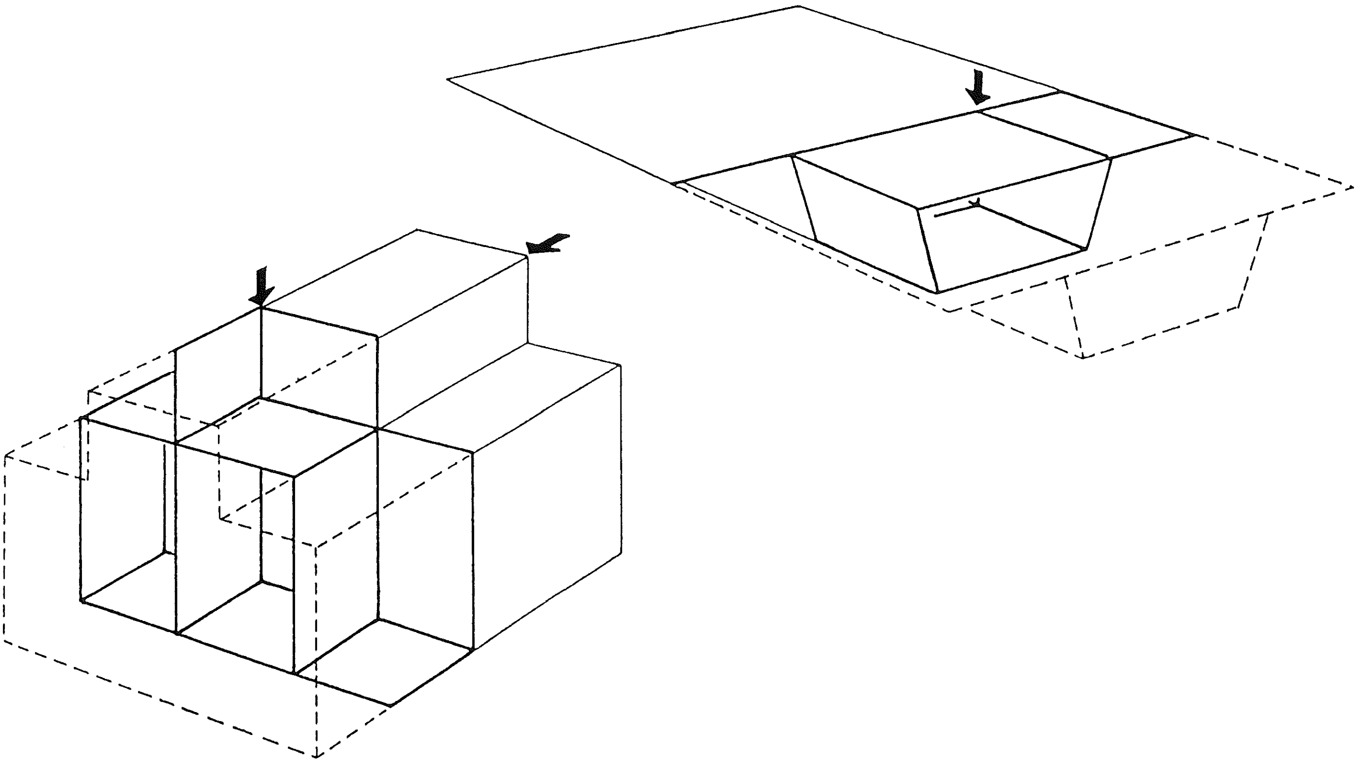
De berekening van het paneel zou sterk vereenvoudigen als de compression field theory (CFT) wordt gebruikt in plaats van de modified compression field theory (MCFT). Bij de CFT wordt aangenomen dat zodra het beton is gescheurd geen trekkracht wordt opgenomen loodrecht op de richting van de scheur (zie figuur ~~53~~ 52). In dat geval wordt altijd voldaan aan het evenwicht in de scheur. Gezien de nauwkeurigheden die worden nagestreefd lijkt dit een verantwoorde benadering.



figuur ~~53~~ 52: Constitutieve relaties van getrokken beton

De flexibiliteit van het staaf-paneel-model is groter dan de voorgaande formele berekeningen doen vermoeden. Het is bijvoorbeeld mogelijk om panelen plaatselijk te vervangen door of te combineren met diagonaal-staven. Zo is de schuine wapeningsstaaf in figuur 1e te modelleren als een diagonaal die "op" een paneel is geplaatst. Ook wordt er gedacht aan de ontwikkeling van niet-rechthoekige panelen en niet-prismatische staven zodat ook constructies met scheve hoeken kunnen worden gemodelleerd.

De toepassing van het staaf-paneel-model is niet beperkt tot liggers. Ook ruimtelijke constructies bestaand uit gestapelde wanden kunnen worden gemodelleerd. Bijvoorbeeld een caissonfundering van een brug, of een kokerligger belast op afschuiving en wringing (zie figuur 54). Als de kokerligger met een staafwerkmodel wordt berekend dan is het belangrijk de juiste helling van de diagonaal-staven te kiezen. Voor de keuze van de helling van de drukstaven zijn grafieken ontwikkeld. Het staaf-paneel-model daarentegen bepaalt zelf onder welke richting de panelen zullen scheuren. Vergeleken met een eindige-elementenberekening valt op dat het aantal staven en panelen een fractie is van het aantal elementen wat nodig zou zijn. Misschien nog wel belangrijker dan de geringe invoer is de geringe uitvoer zodat zonder allerlei nabewerkingen het rekenresultaat kan worden beoordeeld.



figuur 54: Constructies die met een ruimtelijk staaf-paneel-model gemodelleerd kunnen worden

De huidige constitutieve relaties van het staaf-paneel-model zijn elastisch. Dat wil zeggen dat zelfs als een constructie tot bijna bezwijken wordt belast, het model voorspelt dat na ontlasten weer de onvervormde beginsituatie optreedt. Dit komt niet overeen met de werkelijkheid. Voor cyclische belastingen zal derhalve een constitutieve relatie voor de staaf en het paneel moeten worden afgeleid die rekening houdt met het belastingverleden. Waarschijnlijk is een incrementele relatie daarvoor geschikter dan een relatie op basis van totale grootheden.
Een meer voor de hand liggende numerieke oplosmethode voor het model is in dat geval een incrementeel-iteratieve berekening.

7 Conclusies

Het staaf-paneel-model blijkt geschikt voor het analyseren van gedrongen liggers van gewapend beton. In het algemeen is de methode een bruikbare aanpak voor het analyseren van twee-dimensionale constructies in constructief beton.

De methode is ook goed te gebruiken bij driedimensionale stapelingen van wanden, zoals gebeurt in caissons en kokerliggers.

Als lineair-elastisch model geeft het staaf-paneel-model een uitstekende benadering van de hoofdspanningsrichtingen.

Bij een steeds fijnere modellering convergeren de elastische resultaten naar de exacte oplossing als het betonoppervlak van een staaf gelijk is aan de som van de halve breedte maal de dikte van de aangrenzende panelen.

Een staaf-paneel-model is eenvoudig te veranderen in een staafwerkmodel door panelen te vervangen door diagonaal-staven.

De niet-lineaire constitutieve relatie van de staven blijkt goed te voldoen. Het bezwijken van de panelen wordt niet goed beschreven door de modified compression field theory. De niet-lineaire stijfheid van de panelen is wel bruikbaar.

Het blijkt mogelijk om goede niet-lineaire resultaten te verkrijgen door een verantwoorde keuze van de geometrie van het model en de oppervlakken van de staven. Met name de plaats van de drukstaven is een belangrijke keuze.

Met een grof model worden zowel de krachtsverdeling als de vervormingen al heel betrouwbaar weergegeven. Bovendien wordt een indicatie gegeven van de scheurwijdten bij de hoofdwapening.

De berekende bezwijkbelasting is voornamelijk aan de veilige kant. De manier van bezwijken wordt nog niet altijd correct voorspeld.

Bij het wapenen van constructies van gewapend beton is het aan te bevelen om eerst de verdeelde wapening te kiezen en vervolgens te berekenen welke hoofdwapening extra benodigd is.

Door zijn eenvoud en flexibiliteit lijkt het staaf-paneel-model een veelbelovend ontwerpgereedschap voor de constructeur.

Literatuur

Asin M, "Behaviour of statically indeterminate deep beams", Progress in Concrete Research, Annual Report, Vol.3, 1992, Delft University of Technology, Faculty of Civil Engineering, Section "Concrete Structures", p.45-48.

Blaauwendraad J., "Numerical Methods in Structural Mechanics, Approximating Models for Beams and Plates", collegedictaat TU Delft, 1989

Braam dr.ir.C.R., "Control of crack width in deep reinforced concrete beams", proefschrift, Delft 1990.

Bruggeling prof.dr.ir.S.G., "Van staafwerkmodel naar knooppunt", Cement, 1988, nr.11, p.31-35.

Collins, Michael P., Denis Mitchell, "Prestressed Concrete Structures", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1991.

ENV 1992-1-1: 1991 Eurocode 2 part 1, "Design of concrete structures in Nederland", Nederlandse voornorm, concept januari 1993.

Lourenço, Paulo B., "Novas Metodologias Para o Dimensionamento De Estruturas de Betâo Armado", Escola de Engenharia, Universidade do Minho, Afstudeerverslag, Portugal, 1992.

Schlaich, Dr.-Ing.Jörg, Dr.-Ing.Kurt Schäfer, Dipl.-Ing. Mattias Jennewein, "Toward a Consistent Design of Structural Concrete", PCI Journal, 1987, vol.32, no.3,

Vecchio Frank J., Michael P. Collins, "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear", ACI Journal, Proceedings V.83, No.2, March-April 1986, p.219-231.

Walraven prof.dr.ir.J.G., "Staafwerkmodellen als basis voor het detailleren van betonconstructies", Cement, 1988, nr.11, p.24-30

Bijlage 1

De modified compression field theory[1]

Bij een paneel van gewapend beton dat in het vlak wordt belast geeft de modified compression field theory het verband tussen de rekken ϵ_x, ϵ_y, γ en de homogene spanningen f_x, f_y, v.[2] Als drie van deze zes grootheden bekend zijn kunnen de resterende drie grootheden worden berekend. Voor het staaf-paneel-model is slechts het verband tussen de schuifspanning v en de afschuifhoek γ van belang.

$$G = \frac{v}{\gamma}$$

Gekozen is om de schuifspanning als functie van de afschuifhoek en als functie van de rekken ϵ_x, ϵ_y te berekenen.

$$v = v(\gamma, \epsilon_x, \epsilon_y)$$

De modified compression field theory gaat uit van gemiddelde spanningen in het wapeningsstaal en in het beton. De totale spanning is gesplitst in de bijdragen van het staal en het beton. Voor het beton is door middel van een groot aantal experimenten een constitutieve relatie bepaald. De theorie is weergegeven in het onderstaande schema.

rekken	hoofdrekken	hoofdspanningen	spanningen in beton	
ϵ_x	ϵ_1	f_{c1}	f_{cx}	
ϵ_y	ϵ_2	f_{c2}	f_{cy}	
γ	θ	θ_c	v	totale spanningen

constitutieve relatie
van "cracked concrete"

f_x
f_y
v

rekken	spanningen in staal
ϵ_x	f_{sx}
ϵ_y	f_{sy}

constitutieve relatie van de wapening

---

[1] Vecchio

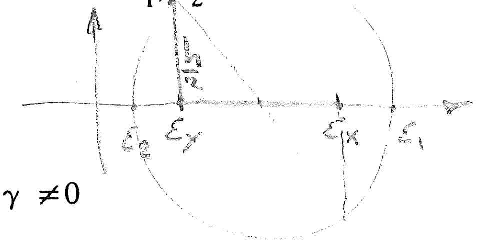
[2] De notaties zijn volgens Vecchio en Collins. Ze worden verklaart in de lijst die achter in deze bijlage staat.

Hieronder worden de formules gegeven die nodig zijn voor de berekening van de schuifspanning.[1]
De rekken worden omgerekend naar de hoofdrekken ϵ_1, ϵ_2 en de hoofdrekrichting θ.

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2}\left(\epsilon_x + \epsilon_y + \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + \gamma^2}\right)$$

$$\epsilon_2 = \epsilon_x + \epsilon_y - \epsilon_1 \qquad (3)(4)$$

$$\mathrm{tg}\theta = 2\,\frac{\epsilon_x - \epsilon_2}{\gamma} \qquad \gamma \neq 0$$



Uit de experimenten blijkt dat de hoofdspanningsrichting van het beton θ_c minder dan tien graden afwijkt van de hoofdrekrichting θ. Daarom wordt de volgende benadering toegepast.

$$\theta_c = \theta \qquad (17)$$

Vecchio en Collins stellen de volgende relatie voor, tussen de kleinste hoofdrek ϵ_2 en de kleinste hoofdspanning f_{c2} (drukspanning)

$$\frac{f_{c2}}{f_{c2max}} = 2\frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c} - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon'_c}\right)^2 \qquad (18a)$$

Uit de experimenten is de volgende relatie voor de extreme hoofdspanning f_{c2max} afgeleid.

$$\frac{f_{c2max}}{f'_c} = \frac{1}{0{,}8 - 0{,}34\,\frac{\epsilon_1}{\epsilon'_c}} \leq 1{,}0 \qquad E_c = 2\,\frac{f'_c}{\varepsilon'_c} \qquad (18b)$$

Hiermee wordt de invloed van de rek in de dwarsrichting op de sterkte van het beton tot uitdrukking gebracht.
Bij het bepalen van de grootste hoofdspanning f_{c1} (trekspanning) wordt onderscheid gemaakt tussen gescheurd en ongescheurd beton.

$$E_c = \frac{f_{cr}}{\varepsilon_{cr}}$$

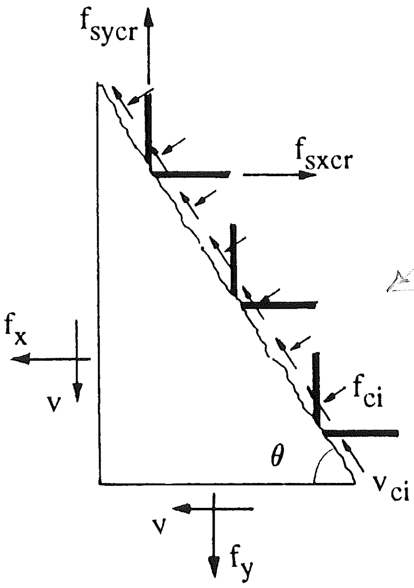
$$\frac{f_{c1}}{f_{cr}} = \begin{cases} \dfrac{\epsilon_1}{\epsilon_{cr}} & \epsilon_1 \leq \epsilon_{cr} \\[2ex] \dfrac{1}{1 + \sqrt{500\,\epsilon_1}} & \epsilon_1 > \epsilon_{cr} \end{cases} \qquad (19)(20)$$

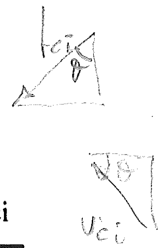
Deze relatie vertoont een slechte correlatie met de experimenten, maar heeft tevens weinig invloed omdat in veel gevallen de berekende trekspanning f_{c1} niet door de scheur kan worden opgenomen.

[1] De nummering van de formules verwijst naar het artikel van Vecchio en Collins

In dat geval wordt f_{c1} gereduceerd totdat wel aan het evenwicht in de scheur kan worden voldaan.

$$\rho_{sy}\,(f_{sycr} - f_{sy}) \geq f_{c1} + f_{ci} \mp v_{ci}\,\mathrm{tg}\theta$$
$$\rho_{sx}\,(f_{sxcr} - f_{sx}) \geq f_{c1} + f_{ci} \pm \frac{v_{ci}}{\mathrm{tg}\theta} \qquad (23)(24)$$





Hierin kan de drukspanning in de scheur $f_{ci}(v_{ci})$ worden bepaald met:

$$\frac{f_{ci}}{v_{cimax}} \geq 1 - \sqrt{1{,}22\left(1 - \frac{v_{ci}}{v_{cimax}}\right)} \qquad 1 \geq \frac{v_{ci}}{v_{cimax}} \geq 0{,}18 \qquad (28)$$
$$\frac{f_{ci}}{v_{cimax}} \geq 0 \qquad 0{,}18 > \frac{v_{ci}}{v_{cimax}} \geq 0$$

v_{cimax} volgt uit de scheurwijdte.

Uit de hoofdspanning wordt vervolgens de schuifspanning in de richting van de assen bepaald.

$$v = (f_{c1} - f_{c2})\,\frac{\mathrm{tg}\theta_c}{\mathrm{tg}^2\theta_c + 1} \qquad (13)$$

$f_x = f_{sx} + f_{ci} - \frac{v}{\mathrm{tg}\theta}$

$f_y = f_{sy} + f_{ci} - v\,\mathrm{tg}\theta$

Hiermee is de glijdingsmodulus bekend.

$$G = \frac{v}{\gamma}$$

Opvallend is dat de berekening slechts wordt beïnvloed door de wapening als niet in eerste instantie aan het evenwicht in de scheur wordt voldaan. Bovendien kan worden afgeleid dat indien in het evenwicht in de scheur maatgevend is, de spanning in de wapening gelijk is aan de vloeispanning.

symbolen

a	maximale afmeting toeslagmateriaal
f'_c	maximum cilinder druksterkte (negatieve grootheid)
f_{c1}	grootste hoofdspanning in beton
f_{c2}	kleinste hoofdspanning in beton (negatieve grootheid)
f_{ci}	drukspanning op het scheuroppervlak (positieve grootheid)
f_{cx}	spanning in beton in x-richting
f_{cy}	spanning in beton in y-richting
f_{sx}	gemiddelde spanning in de wapening in de x-richting
f_{sy}	gemiddelde spanning in de wapening in de y-richting
f_{sxcr}	spanning in de x-wapening ter plaatse van een scheur
f_{sycr}	spanning in de y-wapening ter plaatse van een scheur
f_x	belasting op het element in de x-richting
f_y	belasting op het element in de y-richting
v_{ci}	schuifspanning op het scheuroppervlak
v_{cimax}	maximale schuifspanning in een scheur van een bepaalde wijdte
ϵ_1	grootste hoofdrek van het beton
ϵ_2	kleinste hoofdrek van het beton (negatieve grootheid)
ϵ'_c	rek in betoncilinder bij de maximale spanning f'_c
ϵ_{cr}	rek in beton bij scheuren
ϵ_x	rek in de x-richting
ϵ_y	rek in de y-richting
γ	afschuifhoek
θ	hoek tussen de hoofdrekrichting en de x-as
θ_c	hoek tussen de hoofdspanningsrichting in het beton en de x-as
ρ_{sx}	wapeningspercentage in de x-richting
ρ_{sy}	wapeningspercentage in de y-richting

Bijlage 2

De afleiding van de constitutieve relatie van de staaf

afleiding integratieregel (9)

$$\int_0^l f(x)\,dx \approx \frac{f(0)+f(\frac{l}{10})}{2}\frac{l}{10}+\frac{f(\frac{l}{10})+f(\frac{3}{10}l)}{2}\frac{2}{10}l+\frac{f(\frac{3}{10}l)+f(\frac{5}{10}l)}{2}\frac{2}{10}l+$$
$$+\frac{f(\frac{5}{10}l)+f(\frac{7}{10}l)}{2}\frac{2}{10}l+\frac{f(\frac{7}{10}l)+f(\frac{9}{10}l)}{2}\frac{2}{10}l+\frac{f(\frac{9}{10}l)+f(l)}{2}\frac{l}{10}$$

$$\int_0^l f(x)\,dx \approx \frac{l}{5}[\tfrac{1}{4}f(0)+\tfrac{3}{4}f(\tfrac{1}{10}l)+f(\tfrac{3}{10}l)+f(\tfrac{5}{10}l)+f(\tfrac{7}{10}l)+\tfrac{3}{4}f(\tfrac{9}{10}l)+\tfrac{1}{4}f(l)] \qquad (9)$$

afleiding formule (11)

$$u(x) = u_1 + \int_{\bar{x}=0}^{x} \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x} \qquad u_3 = u(l) \qquad (10)$$

$$u_2 = \frac{1}{l}\int_{x=0}^{l} u(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l u_1\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l\int_0^x \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,dx = u_1 + \frac{1}{l}\int_0^l\int_0^x \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,dx$$

$$e_1 = u_2 - u_1 = \frac{1}{l}\int_0^l\int_0^x \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,dx \qquad (11)$$

afleiding formule (12)

$$f(x) = \int_0^x \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}$$

$$e_1 \approx \tfrac{1}{5}[\tfrac{1}{4}\int_0^0 \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x} + \tfrac{3}{4}\int_0^{\frac{l}{10}} \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x} + \int_0^{\frac{3}{10}l} \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x} + \ldots + \tfrac{1}{4}\int_0^l \underline{\varepsilon}(\bar{x})\,d\bar{x}\,]$$

$$\int_0^0 \underline{\varepsilon}(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^{\frac{l}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \frac{\underline{\varepsilon}(0)+\underline{\varepsilon}(\frac{l}{10})}{2}\frac{l}{10} = \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0)+\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10})]$$

$$\int_0^{\frac{3}{10}l} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \int_0^{\frac{l}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{\underline{\varepsilon}(\frac{l}{10}) + \underline{\varepsilon}(\frac{3}{10}l)}{2}\,\frac{2}{10}l \approx \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + 2\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l)]$$

$$\int_0^{\frac{5}{10}l} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \int_0^{\frac{3}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{\underline{\varepsilon}(\frac{3}{10}l) + \underline{\varepsilon}(\frac{5}{10}l)}{2}\,\frac{2}{10}l$$
$$\approx \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l) + 2\underline{\varepsilon}(\tfrac{5}{10}l)]$$

$$\int_0^{\frac{7}{10}l} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \int_0^{\frac{5}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{\underline{\varepsilon}(\frac{5}{10}l) + \underline{\varepsilon}(\frac{7}{10}l)}{2}\,\frac{2}{10}l$$
$$\approx \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{5}{10}l) + 2\underline{\varepsilon}(\tfrac{7}{10}l)]$$

$$\int_0^{\frac{9}{10}l} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \int_0^{\frac{7}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{\underline{\varepsilon}(\frac{7}{10}l) + \underline{\varepsilon}(\frac{9}{10}l)}{2}\,\frac{2}{10}l$$
$$\approx \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{5}{10}l) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{7}{10}l) + 2\underline{\varepsilon}(\tfrac{9}{10}l)]$$

$$\int_0^{l} \underline{\varepsilon}(x)\,dx \approx \int_0^{\frac{9}{10}} \underline{\varepsilon}(x)\,dx + \frac{\underline{\varepsilon}(\frac{9}{10}l) + \underline{\varepsilon}(l)}{2}\,\frac{1}{10}l$$
$$\approx \frac{l}{20}[\underline{\varepsilon}(0) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{5}{10}l) + 4\underline{\varepsilon}(\tfrac{7}{10}l) + 3\underline{\varepsilon}(\tfrac{9}{10}l) + \underline{\varepsilon}(l)]$$

$$e_1 \approx \frac{l}{100}[\tfrac{19}{4}\underline{\varepsilon}(0) + \tfrac{51}{4}\underline{\varepsilon}(\tfrac{l}{10}) + \tfrac{56}{4}\underline{\varepsilon}(\tfrac{3}{10}l) + \tfrac{40}{4}\underline{\varepsilon}(\tfrac{5}{10}l) + \tfrac{24}{4}\underline{\varepsilon}(\tfrac{7}{10}l) + \tfrac{9}{4}\underline{\varepsilon}(\tfrac{9}{10}l) + \tfrac{1}{4}\underline{\varepsilon}(l)]$$

$$N = N_1\,(1 - \frac{x}{l}) + N_2\,\frac{x}{l}$$

$$\underline{\varepsilon}(x) = \varepsilon(N)$$

$$e_1 \approx \frac{l}{400}[19\varepsilon(N_1) + 51\varepsilon(\tfrac{9}{10}N_1 + \tfrac{1}{10}N_2) + 56\varepsilon(\tfrac{7}{10}N_1 + \tfrac{3}{10}N_2) + 40\varepsilon(\tfrac{5}{10}N_1 + \tfrac{5}{10}N_2) + 24\varepsilon(\tfrac{3}{10}N_1 + \tfrac{7}{10}N_2) + 9\varepsilon(\tfrac{1}{10}N_1 + \tfrac{9}{10}N_2) + \varepsilon(N_2)] \tag{12}$$