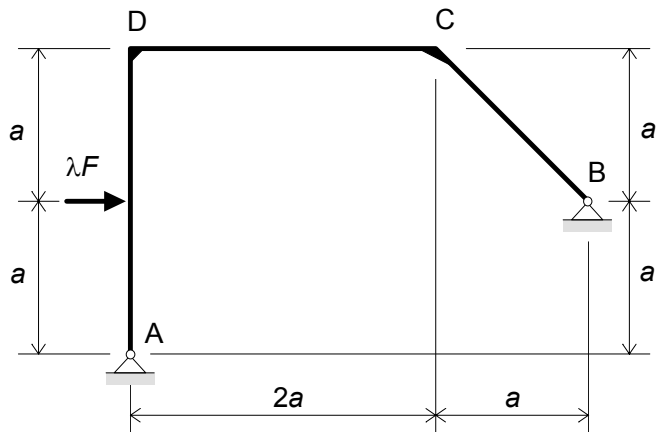


Tentamen Plasticiteitsleer CTme4150
Vrijdag 30 augustus 2002, 14.00 – 17.00 uur

Opgave 1

Een raamwerk is opgebouwd uit vier balken, die stijf met elkaar verbonden zijn (figuur 1). Het raamwerk is in de punten A en B scharnierend opgelegd. De constructie wordt belast door een puntlast λF . Voor alle balken geldt de vloeicontour getekend in figuur 2. Tussen het volplastisch moment M_p en de volplastische normaalkracht N_p bestaat het volgende verband:

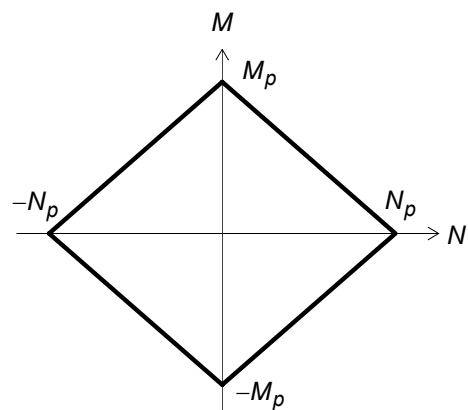
$$N_p = \beta \frac{M_p}{a}$$



Figuur 1. Raamwerk

De invloed van dwarskracht op de vloeicontour wordt verwaarloosd en knik blijft buiten beschouwing.

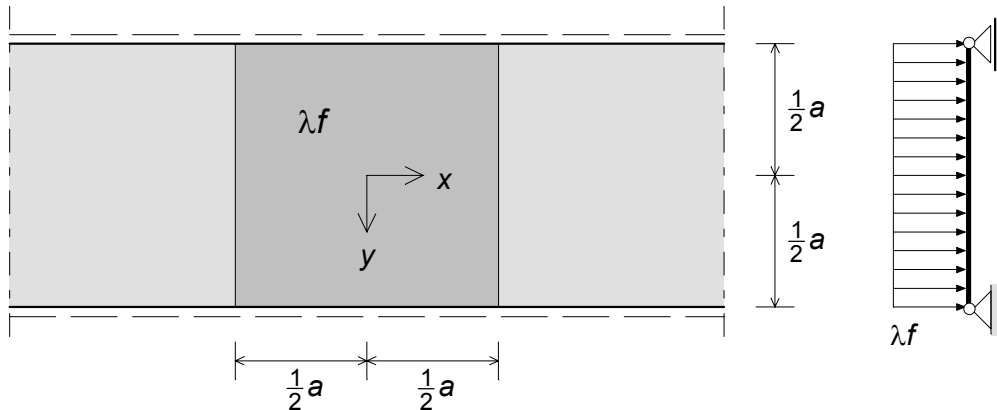
- a $\beta \rightarrow \infty$ Bepaal voor elk mogelijk mechanisme de bezwijkbelasting λF , uitgedrukt in M_p en a . Welk mechanisme is maatgevend? Hoe groot is de werkelijke bezwijkbelasting? (1,5 punt)
- b $\beta \rightarrow \infty$ Teken voor de gehele constructie de momentenlijn en de normaalkrachtenlijn op het ogenblik van bezwijken. (1 punt)
- c $\beta = 2$ U kunt naar keuze één van de volgende opdrachten uitvoeren. Gebruik hierbij het maatgevende mechanisme van vraag a. (2,5 punt)
 - Bepaal een zo hoog mogelijke ondergrens van λF .
 - Bepaal een zo laag mogelijke bovengrens van λF .



Figuur 2. Vloeicontour

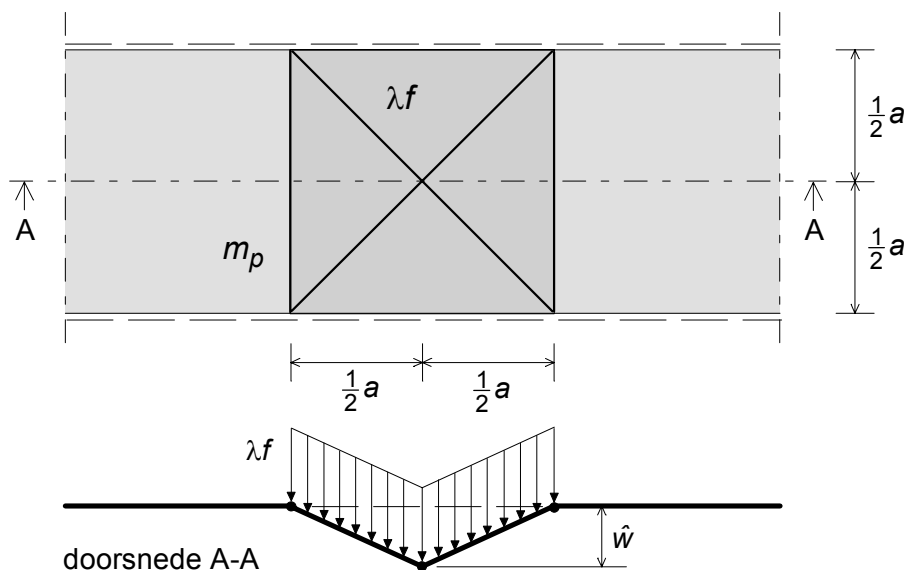
Opgave 2

Een plaat met overspanning a is langs de randen $y = \pm \frac{1}{2}a$ vrij opgelegd (figuur 3). Een gelijkmatig verdeelde last λf [kN/m²] werkt over een strook met breedte a . De plaat is heel lang zodat de korte randen geen invloed hebben op de krachtswerking. De plaat is homogeen en isotroop met een vloeimoment m_p .



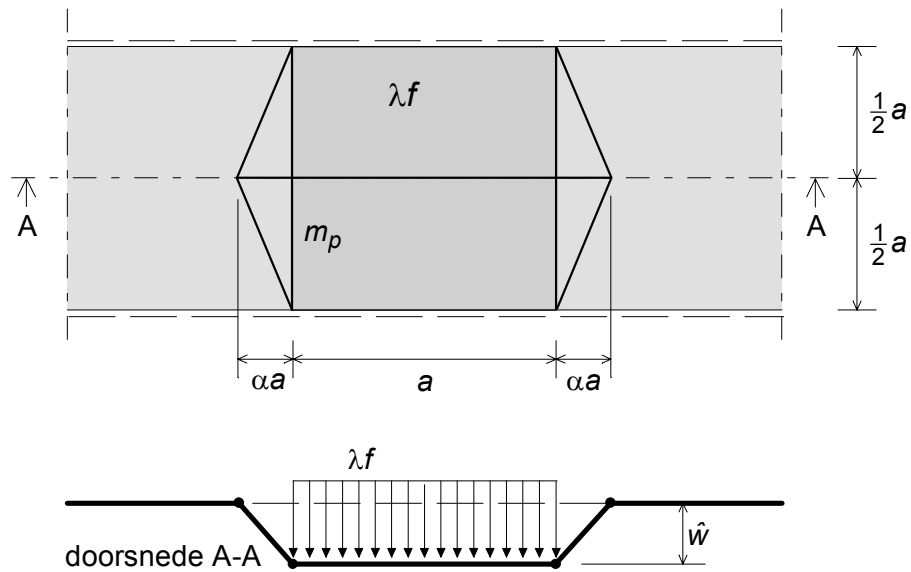
Figuur 3. Lange plaat

- a We beschouwen het vloeilijnenpatroon van figuur 4. Bepaal een bovengrens van λf uitgedrukt in m_p en a . (1 punt)



Figuur 4. Vloeilijnenpatroon van opgave 2a

- b We beschouwen het vloeilijnenpatroon van figuur 5. Bepaal een bovengrens van λf uitgedrukt in α . Bepaal de optimale waarde van α en de bijbehorende grootte van λf . (1,5 punt)

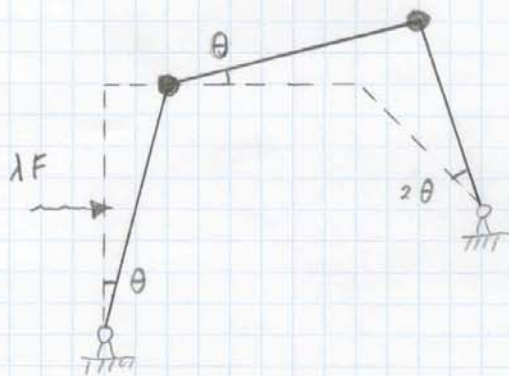
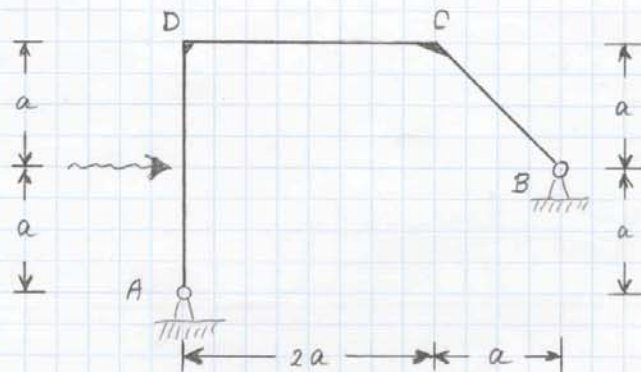


Figuur 5. Vloeilijnenpatroon van opgave 2b

- c Bepaal een zo hoog mogelijke ondergrens van λf door de belasting te dragen met wringingsloze balken ($m_{xy} = 0$) in de x -richting en y -richting. (2,5 punt)

Opgave 1

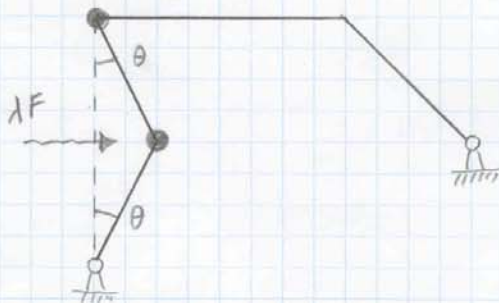
(a)



$$A = \lambda F a \theta$$

$$E = M_p (2\theta + 3\theta) = 5 M_p \theta$$

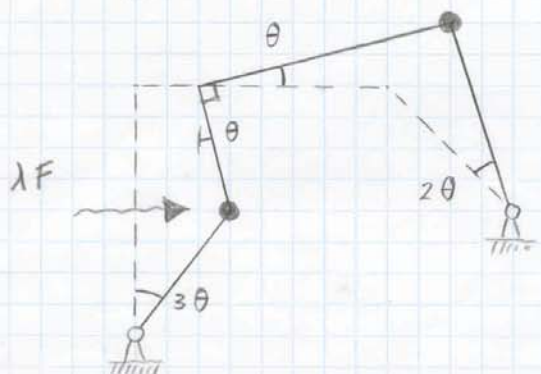
$$\lambda F = 5 \frac{M_p}{a}$$



$$A = \lambda F a \theta$$

$$E = M_p (2\theta + \theta) = 3 M_p \theta$$

$$\lambda F = 3 \frac{M_p}{a}$$

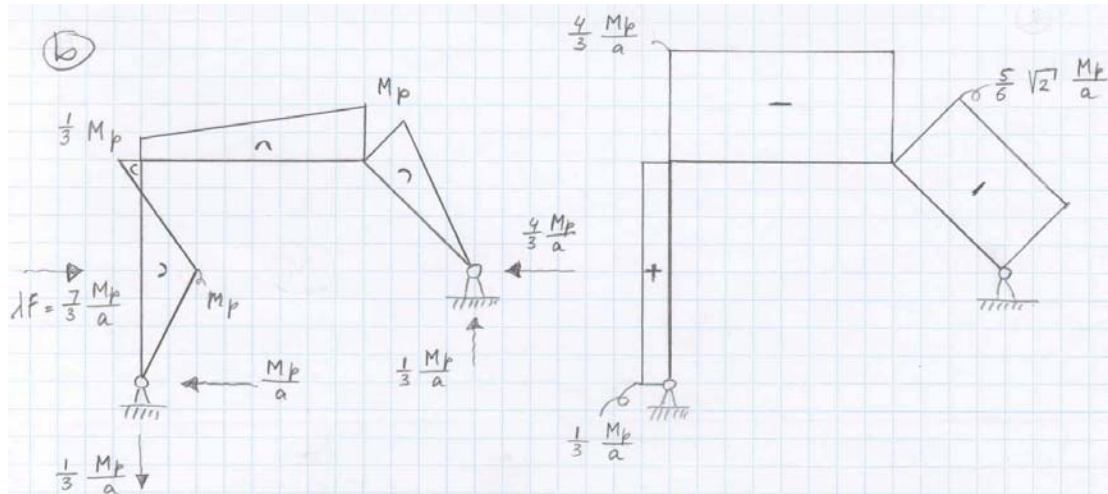


$$A = \lambda F 3a \theta$$

$$E = M_p (4\theta + 3\theta) = 7 M_p \theta$$

$$\lambda F = \frac{7}{3} \frac{M_p}{a}$$

↑ maatgevend

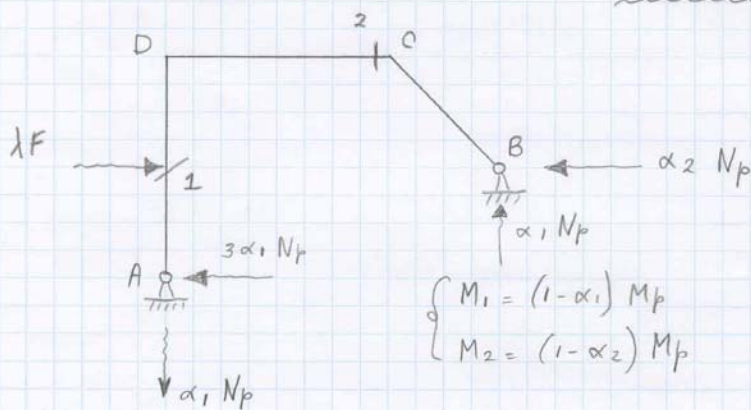


N.B.: bij ondergrensberekening aangeven, dat één van de plastische scharnieren optreedt bij punt C in de staaf CD.

(c1)

Ondergrensberekening

Kies $\beta = 2$



Uitgangspunt: punten 1 en 2 op vloeicontour

$$M_1 = (1 - \alpha_1) M_p = 3\alpha_1 \cdot 2 \frac{M_p}{a} a$$

$$1 - \alpha_1 = 6\alpha_1 \rightarrow 7\alpha_1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{7}$$

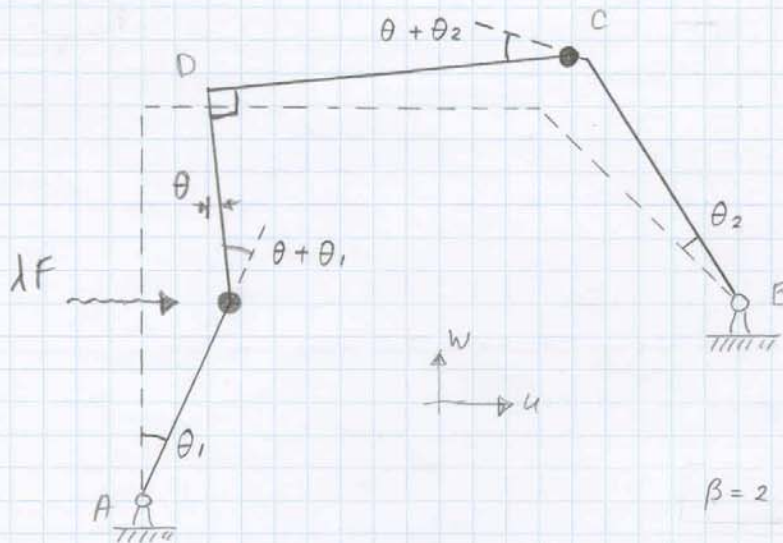
$$M_2 = (1 - \alpha_2) M_p = \alpha_2 \cdot 2 \frac{M_p}{a} a - \alpha_1 \cdot 2 \frac{M_p}{a} a$$

$$1 - \alpha_2 = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 \rightarrow 3\alpha_2 = 1 + 2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3}{7}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \lambda F = 3\alpha_1 \cdot 2 \frac{M_p}{a} + \alpha_2 \cdot 2 \frac{M_p}{a} = \left(\frac{6}{7} + \frac{6}{7} \right) \frac{M_p}{a} = \frac{12}{7} \frac{M_p}{a}$$

C2

Boven grens berekening



Eerst met 2 geometrisch vergelijkingen θ_1 en θ_2 in θ uitdrukken :

$$u_D = a\theta_1 - a\theta = a\theta_2 + \frac{1}{2}a(\theta + \theta_2)$$

$$2\theta_1 - 2\theta = 2\theta_2 + \theta + \theta_2$$

$$2\theta_1 - 3\theta_2 = 3\theta \quad \text{--- (1)}$$

$$w_D = \frac{1}{2}a(\theta + \theta_1) = a\theta_2 - 2a\theta$$

$$\theta + \theta_1 = 2\theta_2 - 4\theta$$

$$-\theta_1 + 2\theta_2 = 5\theta \quad \text{--- (2)}$$

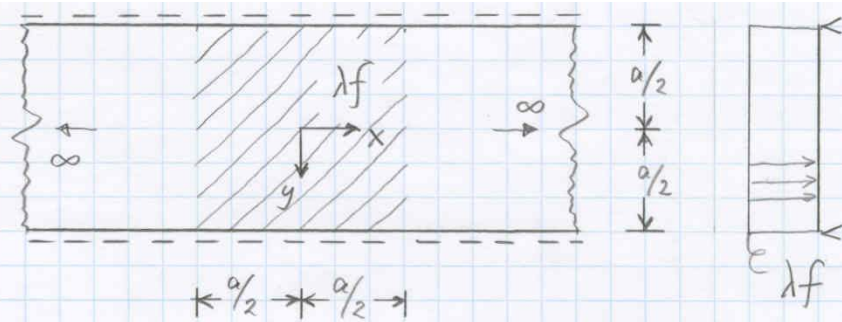
$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \rightarrow \theta_2 = 13\theta \rightarrow \theta_1 = 21\theta$$

Arbeidsbeschouwing :

$$A = \lambda F a \theta_1 = 21 \lambda F a \theta$$

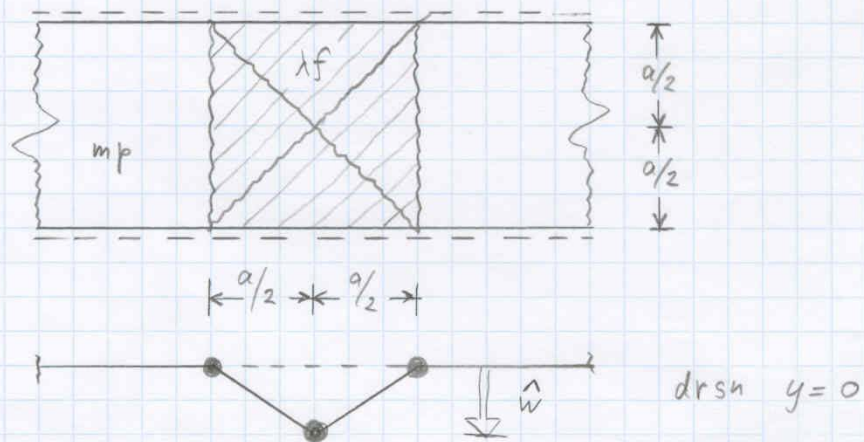
$$E = M_p (22\theta + 14\theta) = 36 M_p \theta$$

$$A = E \rightarrow \boxed{\lambda F = \frac{36}{21} \frac{M_p}{a} = \frac{12}{7} \frac{M_p}{a}} \leftarrow \text{klopt}$$



(a)

Vloeilijnen patroon 1 :



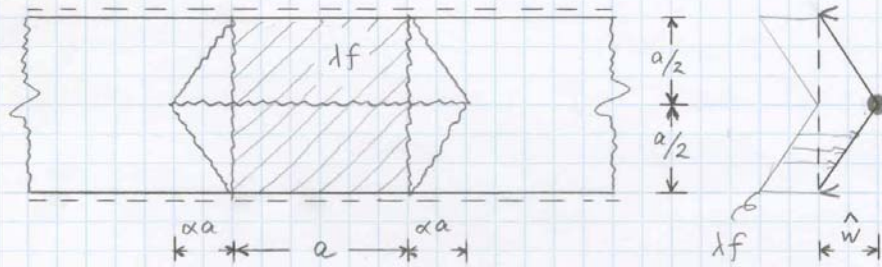
$$A = \lambda f a^2 \frac{1}{3} \hat{w} = \frac{1}{3} \lambda f a^2 \hat{w}$$

$$E = 6 a m_p \frac{\hat{w}}{\frac{1}{2} a} = 12 m_p \hat{w}$$

$$A = E \rightarrow \boxed{\lambda f = 36 \frac{m_p}{a^2}}$$

6

Vloei lijnen patroon 2 :



$$A = lf a^2 \frac{1}{2} \hat{w}$$

$$E = 4a m_p \frac{\hat{w}}{\alpha a} + (2a + 8\alpha a) \frac{\hat{w}}{\frac{1}{2}a}$$

$$E = \left(\frac{4}{\alpha} + 4 + 16\alpha \right) m_p \cdot \hat{w}$$

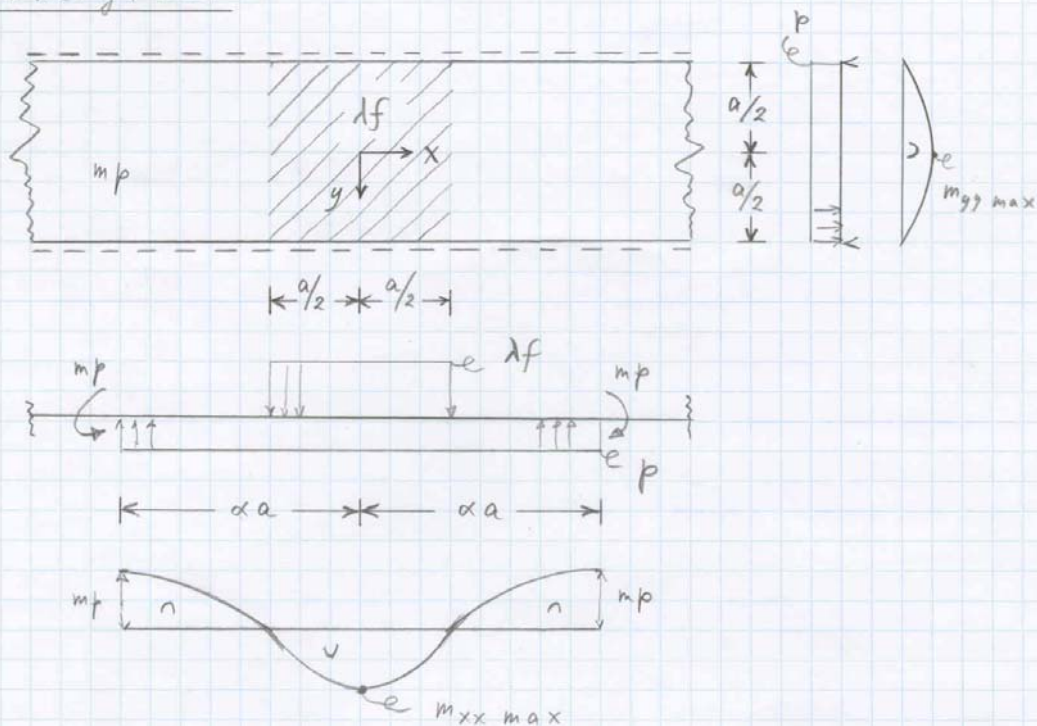
$$A = E \rightarrow \underline{lf = \left(8 + \frac{8}{\alpha} + 32\alpha \right) \frac{m_p}{a^2}}$$

$$\frac{d lf}{d \alpha} = \frac{-8}{\alpha^2} + 32 = 0 \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{lf = (8 + 16 + 16) \frac{m_p}{a^2} = 40 \frac{m_p}{a^2}}$$

C

Ondergrens



Vertikaal evenwicht : $p \cdot 2\alpha a = \lambda f a \rightarrow p = \frac{1}{2\alpha} \lambda f$

$m_{yy \max} = \frac{1}{8} p a^2 \leq m_p \rightarrow \frac{1}{8} \frac{1}{2\alpha} \lambda f a^2 \leq m_p \rightarrow \lambda f \leq 16\alpha \frac{m_p}{a^2}$

$m_{xx \max} = p \alpha a \cdot \frac{1}{2} \alpha a - m_p - \frac{1}{2} a \lambda f \frac{1}{4} a \leq m_p$
 $\lambda f \left(\frac{\alpha}{4} - \frac{1}{8} \right) \leq 2 \frac{m_p}{a^2} \rightarrow \lambda f \leq \frac{16}{2\alpha - 1} \frac{m_p}{a^2}$

$\lambda f = 16\alpha \frac{m_p}{a^2} = \frac{16}{2\alpha - 1} \frac{m_p}{a^2} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2\alpha - 1} \rightarrow 2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

Oplossing : $\alpha = 1$

$\lambda f = 16 \frac{m_p}{a^2}$