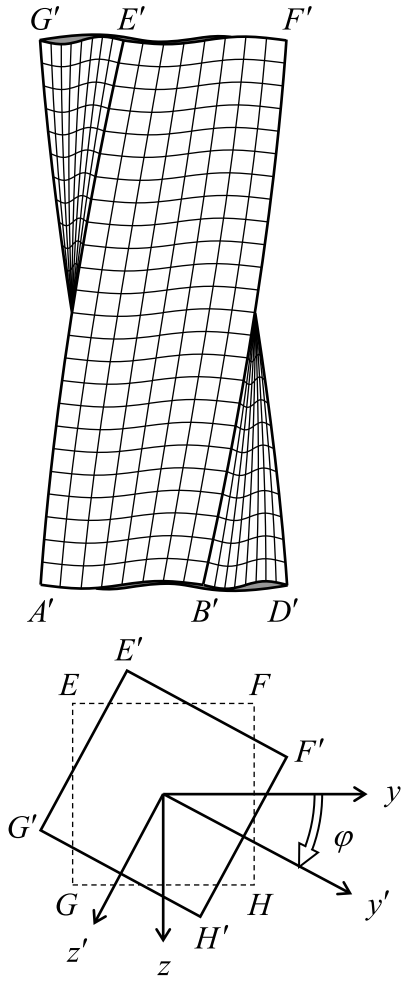
Aantekeningen over wringing



Pierre Hoogenboom

Voorwoord

Vroeger werd weinig met wringing gerekend voor draagconstructies. Wringing was meer het domein van de werktuigkundige die machines ontwierp met assen die wringende momenten overdragen. Tegenwoordig doen we veel rekenwerk met computers. De software probeert de werkelijkheid zo goed mogelijk te benaderen en brengt naast extensie, buiging en afschuiving ook wringing in rekening. We ontdekken dat wringing extra mogelijkheden biedt om te voldoen aan de wensen van architecten, aannemers en installateurs.

Belangrijk is natuurlijk dat we de computerresultaten kunnen interpreteren: Welk deel van de werkelijkheid is in rekening gebracht en welk deel niet? Is de benadering veilig of moeten we in bepaalde situaties corrigeren? Belangrijk is ook dat we de begrippen kunnen benoemen zodat we met anderen hierover kunnen overleggen. Tenslotte is belangrijk dat we de software kunnen controleren door eenvoudige gevallen met de hand na te rekenen. Ik hoop dat dit dictaat hieraan bijdraagt. Wellicht ook dat een software-ontwikkelaar die deze tekst leest ideeën opdoet om onze software nog beter te maken.

Als u aan- of opmerkingen hebt dan verneem ik die graag. Het is de bedoeling dat ze in een volgende druk worden verwerkt.

Pierre Hoogenboom
Hoogmade, 3 augustus 2008
p.c.j.hoogenboom@tudelft.nl

2de verbeterde druk, 7 september 2010

3de verbeterde druk, 30 januari 2012

4de verbeterde druk, 26 oktober 2014

5de verbeterde druk, 18 oktober 2019

De afbeelding op de omslag is getekend door Cox Sitters [4]. De originele tekening is van Aldémar Barré de Saint Venant uit 1853 [3].

Inhoud

Overzicht 1
Geavanceerd 1
Leerdoelen 1
Definitie 2
Geschatte wringstijfheid 2
Verwaarlozing van wringstijfheid 2
Gewapend beton 3
Spanningsverdeling 3
Tabellen 4
Controle van de spanningen 4
Welving 4
Theorie van Saint-Venant 5
Verplaatsingsmethode 5
Krachtenmethode 6
Inwendige rand 7
Exacte oplossingen 8
Eindige-elementenmethode 9
Voorbeeld rechthoekige doorsnede 9
Interpretatie van de ϕ-heuvel 13
Geschatte wringstijfheid 2 13
Dunwandige open doorsneden 13
Voorbeeld balustrade 14
Formules van Bredt 15
Membraananalogie 15
Membraananalogie voor kokers 16
Toepassing membraananalogie 17
Nabla-ligger 17
Kanaalplaat 17
Zandheuvelanalogie 18
Spanningsconcentraties 18
Dwarskrachtencentrum 19
Rotatie 19
Orthotrope plaat 20
Voorbeeld wringstijfheid brugdek 21
Oefening kist 21
Plooi 22
Volume-elementen 22
Gehinderde welving 23
Theorie van Vlasov 23
Interpretatie van het bi-moment 24
Randvoorwaarden van de Vlasov-theorie 25
Voorbeeld kokerbrug 25
Interpretatie van de momentenlijn 26
Overeenkomst met de dwarskrachtenlijn 26
De bocht om 27
Kopplaat 27
Spanningen volgens Vlasov 27
Spanning in een I-profiel 28

Voorbeeld, spanningen in een kokerbrug 28
Distorsie 30
Schaalelementen 30
Voorbeeld, uitkragende ligger 30
Misverstand 32
Toekomst 32
Karakteristieke lengte 32
Foefje 33
Veilig of onveilig 33
Torsieknik en kip 34
Dankwoord 34
Literatuur 35
Bijlage 1. Formules voor wringeigenschappen 37
Bijlage 2. Berekening wringeigenschappen van een meercellige koker 43
Bijlage 3. Berekening nabla-ligger 46
Bijlage 4. Berekening kanaalplaat 49
Bijlage 5. Wringeigenschappen van open dunwandige doorsneden 52
Bijlage 6. Maple-berekening van een kokerbrug met de Vlasov-theorie 54
Bijlage 7. Maple-berekening van een uitkragende ligger met de Vlasov-theorie 56
Bijlage 8. Berekening van wringspanningen in een I-profiel 58
Bijlage 9. Stijfheidsmatrix van een raamwerkelement 62
Bijlage 10. Afleiding van de Vlasov-theorie 65

Overzicht

Driedimensionale raamwerkprogramma's brengen de invloed van wringing in de elementen in rekening. Hiertoe moeten de wringstijfheden van de elementen bekend zijn. Wanneer het programma de krachtswerking heeft uitgerekend worden de spanningen in de elementen gecontroleerd. In het vak wringing staan daarom twee zaken centraal:

1. De wringstijfheid GI_w van doorsneden van prismatische constructie-elementen zoals liggers en kolommen.

$$GI_w = ?$$

2. De verdeling van wringspanningen over een doorsnede en met name de grootste schuifspanning $\tau_{\max}$ in een doorsnede ten gevolge van het wringend moment M_w.

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{?}$$

In tweedimensionale raamwerkprogramma's speelt wringing geen rol omdat deze vervorming dan niet mogelijk is. In tweedimensionale balkroosters kan wel wringing optreden.

Geavanceerd

De manier waarop liggeruiteinden zijn bevestigd kan een belangrijke invloed hebben op de vervorming en spanningen door wringing. Geavanceerde raamwerk-programma's kunnen deze invloed in rekening brengen. Hierbij speelt de welvings-stijfheid EC_w van de doorsnede een rol. Deze programma's tekenen niet alleen de wringend-momentenlijn M_w maar ook de bi-momentenlijn *B*. Hier zal op in gegaan worden aan het einde van het vak.

Leerdoelen

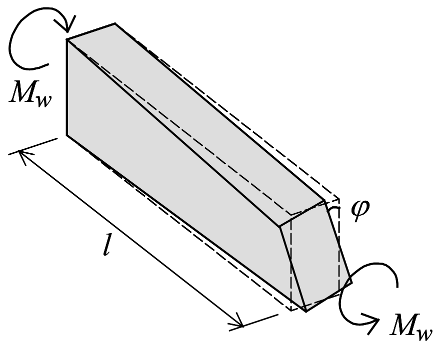
1. Formules van veelvoorkomende doorsneden
2. Berekenen van kokerprofielen
3. Gebruiken van software
4. Begrijpen van de spanningsverdeling en beperkingen van de theorie
5. Vertrouwd raken met de wetenschappelijke aanpak

De eerste drie leerdoelen zijn direct van belang voor toepassing in de constructiepraktijk. Het vierde leerdoel is van belang om rekenresultaten te kunnen beoordelen. Het laatste leerdoel is van belang om zelfstandig problemen te kunnen oplossen gebruikmakend van internationale vakliteratuur.

Definitie

De wringstijfheid GI_w is gedefinieerd met de volgende vergelijking $M_w = GI_w \frac{\varphi}{l}$.

Hierin is *l* de lengte van de ligger, φ de rotatie van de liggeruiteinden ten opzichte van elkaar en M_w het wringend moment (figuur 1).[1]



Figuur 1. Vervorming van een ligger door een wringend moment

Geschatte wringstijfheid

Voor de berekening van de wringstijfheid GI_w wordt vaak het polair traagheidmoment I_p gebruikt. Dit is gedefinieerd als

$$I_p = \int_A r^2 dA = I_x + I_y .$$

Hierin is *A* het oppervlak van de doorsnede en *r* de afstand van een punt in de doorsnede tot het zwaartepunt. Echter, alleen voor ronde doorsneden en ronde buizen geldt

$$GI_w = GI_p .$$

Hierin is $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ de glijdingsmodulus. *E* is de elasticiteitsmodulus en ν is de dwarscontractiecoëfficiënt.[2] Voor andere doorsnedevormen geldt

$$GI_w < GI_p .$$

Verwaarlozing van wringstijfheid

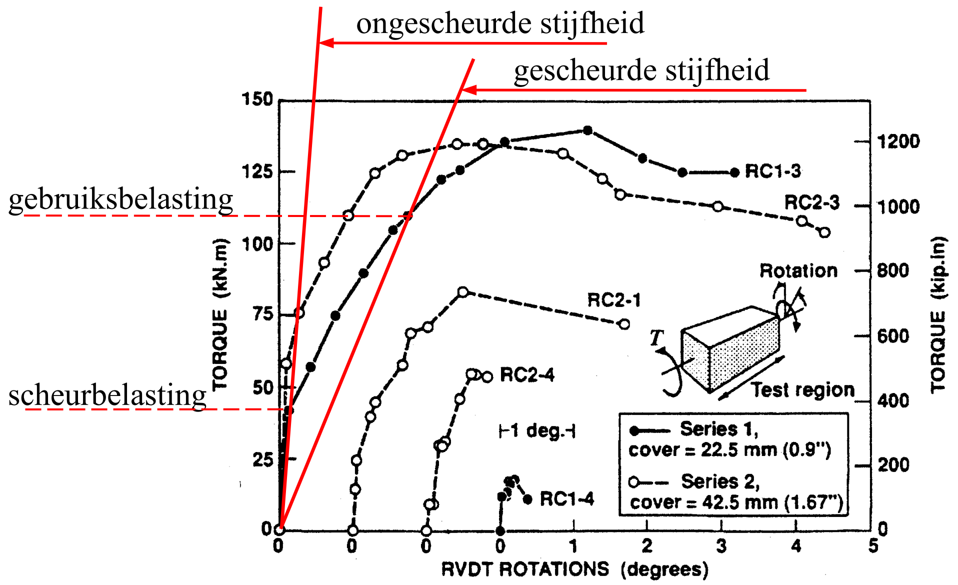
Vaak draagt wringing weinig bij aan de krachtswerking. Het ligt dan voor de hand om de wringstijfheid gelijk aan nul te stellen. Dit kan een terechte keuze zijn. Echter, het kan zijn dat een element weinig bijdraagt aan de krachtswerking maar wel dezelfde vervormingen moet ondergaan als de constructie. Wringing die hierbij ontstaat noemen we compatibiliteitswringing. Hierdoor kan een aanzienlijk wringend moment

[1] spreek uit: φ = fie
[2] spreek uit: ν = nie, veel mensen zeggen ν = nu

ontstaan in het element, wat alleen correct wordt berekend als een realistische wringstijfheid wordt gebruikt.

Gewapend beton

Gewapend betonnen liggers zonder voorspanning verliezen veel van hun wringstijfheid wanneer het beton scheurt. In figuur 2 is de gescheurde stijfheid van proefstuk RC1-3 slechts 18% van de ongescheurde stijfheid.

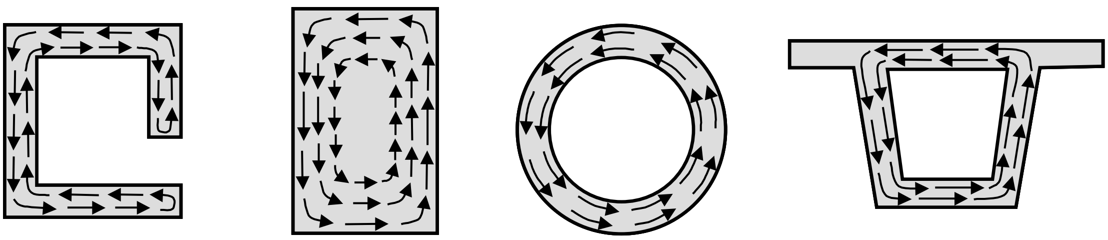


Figuur 2. Experimentele $M_w - \varphi -$ diagrammen van gewapend betonnen liggers [1]

Bijvoorbeeld, als een rooster van funderingsbalken wordt uitgerekend met ongescheurde wringstijfheid dan zal een deel van de belasting worden gedragen door wringende momenten en een deel door buigende momenten. Echter, als met de gescheurde wringstijfheid wordt gerekend dan zullen slechts kleine wringende momenten optreden en zal vrijwel alle belasting door buigende momenten worden gedragen. In het laatste geval moeten we meer langswapening toepassen maar kunnen we volstaan met veel minder beugels.

Spanningsverdeling

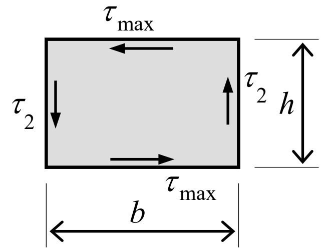
Dunwandige gesloten doorsneden zijn heel geschikt om een wringend moment op te nemen omdat al het materiaal wordt aangesproken. Massieve en dunwandige open doorsneden zijn hiervoor minder geschikt (figuur 3). De spanningsverdeling wordt vaak schuifstroom genoemd.



open massief gesloten gesloten

Figuur 3. Wringspanningen in verschillende doorsneden

Tabellen



In veel tabellenboeken staan formules voor de wringstijfheid GI_w en de grootste schuifspanning τ_{max}.[3] Bijzonder uitgebreid is "Roark's Formulas for Stress & Strain" [2] (bijlage 1). Tabel 1 is samengesteld door de auteur gebruikmakend van een programma voor doorsnede-berekeningen.

Tabel 1. Wringeigenschappen van rechthoekige doorsneden

$\frac{b}{h}$	$\frac{I_w}{bh^3}$	$\frac{I_p}{bh^3}$	$\frac{M_w}{\tau_{max} bh^2}$	$\frac{M_w}{\tau_2 bh^2}$	$1000\frac{C_w}{b^3h^3}$	$\frac{100\,B}{\sigma_{max} b^2h^2}$
1,0	0,141	0,167	0,210	0,210	0,134	0,368
1,2	0,166	0,203	0,221	0,237	0,352	0,565
1,4	0,187	0,247	0,230	0,262	0,838	0,987
1,6	0,204	0,297	0,237	0,281	1,418	1,37
1,8	0,218	0,353	0,243	0,299	2,000	1,69
2,0	0,229	0,417	0,249	0,314	2,540	1,94
2,5	0,250	0,604	0,261	0,342	3,640	2,35
3,0	0,264	0,833	0,271	0,362	4,416	2,59
4,0	0,281	1,417	0,288	0,388	5,354	2,82
5,0	0,292	2,167	0,299	0,398	5,865	2,90
10,0	0,314	8,417	0,323	0,400	6,642	2,94
50,0	0,331	208,417	0,329	0,400	6,931	2,82
∞	$\frac{1}{3}$	∞	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1000}{144}$	$\frac{100}{36}$

Bijvoorbeeld, voor een doorsnede die twee keer zo breed is als hoog geldt $I_w = 0,229\,bh^3$ en $\tau_{max} = \dfrac{M_w}{0,249\,bh^2}$. Merk op dat I_p veel groter is dan I_w. Daarom kan I_p niet worden gebruikt om I_w te benaderen. (Zegt het voort. Zegt het voort.)

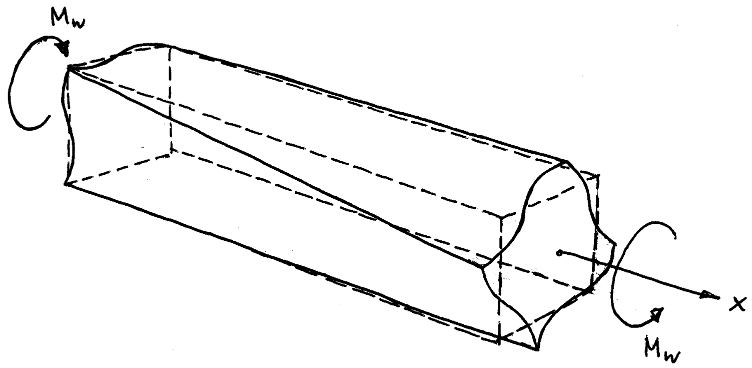
Controle van de spanning

Vaak is wringspanning niet de enige spanning die in een doorsnede optreedt. Andere spanningen ontstaan door extensie, buiging en afschuiving. De combinatie van deze spanningen mag niet tot bezwijken leiden. Dit wordt behandeld bij het vak Materiaalmodellen.

Welving

Welving is de vervorming van een initieel vlakke normaaldoorsnede. In het Engels heet dit "warping". Het treedt op door een wringend moment en ook door een dwarskracht.

[3] spreek uit τ = taf, veel mensen zeggen τ = tau



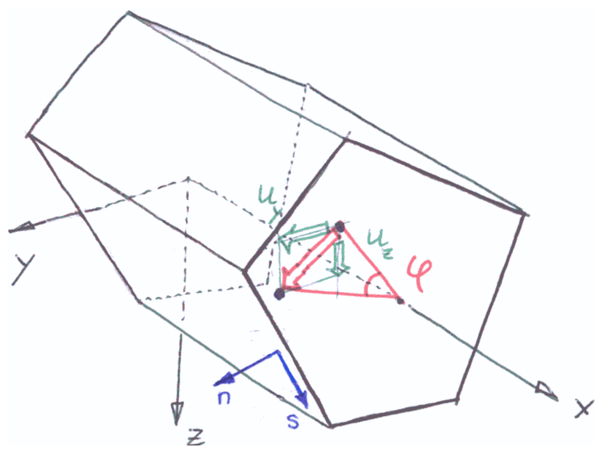
Figuur 4. Welving van een vierkante doorsnede door wringing

Theorie van Saint-Venant

In 1856 publiceerde Aldémar Barré de Saint-Venant [4] een theorie voor wringing [3]. Uitgangspunt hiervan is dat een doorsnede roteert en welft (figuur 5):

$$u_y = -xz\,\theta$$
$$u_z = xy\,\theta$$
$$u_x = \psi(y,z)\,\theta$$

Hierin is $\theta = \frac{\varphi}{l}$ de specifieke verwringing en ψ de welvingsfunctie die de vervorming van de doorsnede beschrijft.[5] Dit uitgangspunt is alleen realistisch als θ klein is.



Figuur 5. Verplaatsing van een punt door een kleine rotatie van de doorsnede

Verplaatsingsmethode

In de verplaatsingsmethode wordt de welving als onbekende gekozen. Het resultaat van de afleiding [4] is de differentiaalvergelijking

[4] A.J.C. Barré de Saint-Venant (1797 – 1886) was een Franse civiel ingenieur. Later in zijn leven was hij wiskunde-docent aan de École des Ponts et Chaussées [wikipedia].

[5] spreek uit: θ = tetta, φ = fie, ψ = psie

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0$$

met de randvoorwaarde

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=z\cos\alpha-y\sin\alpha\ .$$

Hierin is α de hoek tussen de positieve y-as en de naar buiten gerichte normaalvector op de rand in het beschouwde punt.[6] Als ψ is opgelost kunnen we de spanningen berekenen met

$$\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-z\right)\theta$$

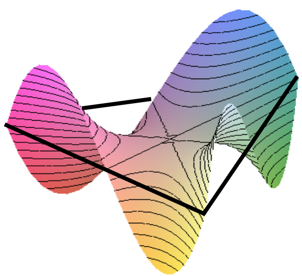
$$\tau_{xz}=G\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right)\theta$$

en het wringend moment met

$$M_w=\int_A(y\,\tau_{xz}-z\,\tau_{xy})dA\,.$$

De wringstijfheid is

$$GI_w=\frac{M_w}{\theta}\,.$$



Figuur 6. Welvingsfunctie $\psi(y,z)$ van een driehoekige doorsnede

Krachtenmethode

In de krachtenmethode worden de spanningen als onbekenden gekozen. Het resultaat van de afleiding [4] is de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-G2\theta$$

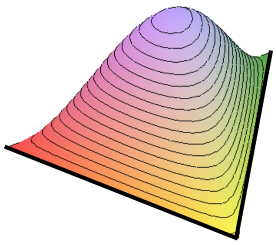
met de randvoorwaarde

[6] spreek uit α = alfa

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 .$$

De functie $\phi(y, z)$ heeft geen directe fysische betekenis.[7] Deze functie heeft altijd de vorm van een heuvel en wordt daarom ϕ-heuvel genoemd (figuur 7).[8] Als ϕ is opgelost kunnen we de wringspanningen berekenen met

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$
$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$



Figuur 7. ϕ-heuvel van een driehoekige doorsnede

De spanning in willekeurige loodrechte richtingen *n* en *s* kunnen op dezelfde manier worden berekend:

$$\tau_{xn} = \frac{\partial \phi}{\partial s}$$
$$\tau_{xs} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

en het wringend moment met

$$M_w = 2 \int_A \phi \, dA .$$

De wringstijfheid is

$$GI_w = \frac{M_w}{\theta} .$$

Inwendige rand

Een doorsnede van een gesloten koker heeft niet alleen een uitwendige rand maar ook één of meer inwendige randen. Het kan worden bewezen dat voor elk van de inwendige randen geldt [4, blz. 186]

[7] spreek uit: ϕ = fie (Griekse hoofdletter)
[8] spreek uit: fie-heuvel

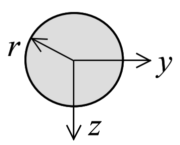
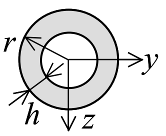
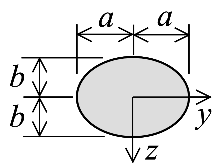
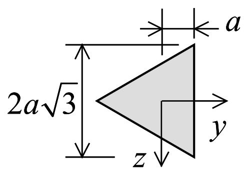
$$\int_s \sigma_{xs} ds = -2GA_g\theta \, .$$

Hierin is s de betreffende inwendige rand en A_g het oppervlak van de bijbehorende openingsdoorsnede. Dit resultaat is nodig bij de berekening van meercellige kokers.

Exacte oplossingen

De differentiaalvergelijkingen kunnen analytisch worden opgelost voor enkele bijzondere doorsnedevormen (tabel 2). Merk op dat de ronde doorsneden niet welven.

Tabel 2. Exacte oplossingen van de differentiaalvergelijkingen

	$\psi = 0$ $\phi = \frac{1}{2} G\theta(r^2 - y^2 - z^2)$	$I_w = I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ $C_w = 0$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\frac{1}{2} Ar}$ $\sigma_{\max} = 0$
	$\psi = 0$ $\phi = \frac{1}{2} G\theta(r^2 - y^2 - z^2)$	$I_w = I_p = \frac{1}{2}\pi(r^4 - (r-h)^4)$ $C_w = 0$ $\tau_{\max} = \dfrac{r\,M_w}{I_w}$ $\sigma_{\max} = 0$
	$\psi = zy\dfrac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$ $\phi = G\theta\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}(1 - \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2})$	$I_w = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ $I_p = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$ $C_w = \dfrac{\pi a^3 b^3}{24}\dfrac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\frac{1}{2}\pi ab^2}$ $\sigma_{\max} = \dfrac{\pi a^2 b^2}{12}\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}B$
	$\psi = \dfrac{z}{6a}(3y^2 - z^2)$ $\phi = \dfrac{G\theta}{6a}(a-y)(2a + y - z\sqrt{3})(2a + y + z\sqrt{3})$	$I_w = \frac{9}{5}\sqrt{3}\,a^4$ $I_p = 3\sqrt{3}\,a^4$ $C_w = \frac{3}{70}\sqrt{3}\,a^6$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\frac{6}{5}\sqrt{3}a^3}$ $\sigma_{\max} = \dfrac{B}{\frac{9}{70}\sqrt{3}a^4}$

Eindige-elementenmethode

De eindige-elementenmethode kan worden gebruikt om de differentiaalvergelijkingen met ψ of ϕ op te lossen voor elke doorsnedevorm.[9] Daartoe wordt de doorsnede opgedeeld in een groot aantal vierhoekige en driehoekige elementen. Er bestaan vele programma's die deze berekening kunnen uitvoeren. Voorbeelden zijn

ShapeDesigner	http://mechatools.com
ShapeBuilder 3.0	http://www.iesweb.com

De programmagebruiker kan de grootte van de elementen instellen. Hiermee kan de nauwkeurigheid van de berekening worden gecontroleerd: Herhaal daartoe de berekening met elementen van ongeveer halve grootte. Als de rekenresultaten weinig veranderen dan is de berekening voldoende nauwkeurig. Als de rekenresultaten te veel veranderen dan zijn de gebruikte elementen te groot. We hoeven niet zuinig te zijn met het aantal elementen want zelfs een net met 10 000 elementen wordt binnen een minuut uitgerekend op een moderne PC.

De meeste raamwerkprogramma's hebben bibliotheken van standaard profielen waarin ondermeer de wringtraagheidsmomenten I_w zijn opgenomen. Deze hoeven dus niet te worden uitgerekend. Echter, als we zelf een profieldoorsnede ontwerpen dan moet I_w wel worden uitgerekend. SCIA Engineer heeft een module die automatisch het wringtraagheidsmoment I_w van een willekeurige profieldoorsnede kan berekenen met de eindige-elementenmethode. De constructeur moet aangeven dat deze berekening moet plaatsvinden. Als hij of zij dat niet doet rekent het programma met het polair traagheidsmoment I_p. Dit zou volledig verkeerde resultaten geven (vergelijk I_w met I_p in tabel 1).

Voorbeeld rechthoekige doorsnede

We beschouwen een houten ligger met een rechthoekige doorsnede.

hoogte = 400 mm	
breedte = 200 mm	
elasticiteitsmodulus	$E = 10\,000$ MPa
dwarscontractiecoëfficiënt	$\nu = 0{,}1$
wringend moment	$M_w = 100$ kNm
glijdingsmodulus	$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = \dfrac{10000}{2(1+0{,}1)} = 4545$ MPa

[9] De ontwikkeling van de eindige-elementenmethode kwam van de grond in 1960. In dit jaar schreven de civiel ingenieurs Ray Clough (1920 – 2016) en Edward Wilson (1931 –) een computerprogramma dat de spanningen in een dam kon berekenen. Ze werkte bij University of California at Berkeley. Dit programma werd toegepast op de Norfork dam waarmee een stuwmeer wordt beheerd in Arkansas, USA. In het midden van deze dam was een grote verticale scheur ontstaan. De elementenberekening liet zien dat de dam veilig is ondanks de scheur. De dam hoefde niet te worden vervangen [21]. Het succes trok de aandacht van wiskundigen. Zij ontwikkelde de methode verder om willekeurige differentiaalvergelijkingen op te lossen.
Je zou kunnen zeggen dat de wiskundigen aan de haal zijn gegaan met onze eindige-elementen-methode, deze onherkenbaar hebben verbouwd en vervolgens hebben teruggegeven zodat wij ermee de differentiaalvergelijkingen van Saint-Venant kunnen oplossen.

We gebruiken **tabel 1**. Hierin geldt dat h altijd kleiner is dan b. Dus h = 200 en b = 400.

$$GI_w = 0,229bh^3G = 0,229 \times 400 \times 200^3 \times 4545 = 333 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{0,249bh^2} = \frac{100 \times 10^6}{0,249 \times 400 \times 200^2} = 25,1 \text{ MPa}$$

Oefening: Wat gebeurt er als je per ongelijk h en b verwisseld?

We kunnen dit ook op een andere manier bepalen. Volgens **Roark's formulas** (bijlage 1) is

a = 400/2 = 200
b = 200/2 =100

$$GI_w = Gab^3\left[\tfrac{16}{3} - 3,36\frac{b}{a}\left(1 - \frac{b^4}{12a^4}\right)\right]$$

$$= 4545 \times 200 \times 100^3\left[\tfrac{16}{3} - 3,36\frac{100}{200}\left(1 - \frac{100^4}{12 \times 200^4}\right)\right] = 333 \times 10^{10} \text{ Nmm}^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{3M_w}{8ab^2}\left[1 + 0,6095\frac{b}{a} + 0,8865\frac{b^2}{a^2} - 1,8023\frac{b^3}{a^3} + 0,9100\frac{b^4}{a^4}\right]$$

$$= \frac{3 \times 100 \times 10^6}{8 \times 200 \times 100^2}\left[1 + 0,6095\frac{100}{200} + 0,8865\frac{100^2}{200^2} - 1,8023\frac{100^3}{200^3} + 0,9100\frac{100^4}{200^4}\right]$$

$$= 25,46 \text{ MPa}$$

De derde en laatste manier is met de eindige-elementenmethode. Volgens het programma **SCIA Engineer** volgt (zie figuren 8, 9, 10 en 11):

$$I_w = 730175100 \text{ mm}^4$$

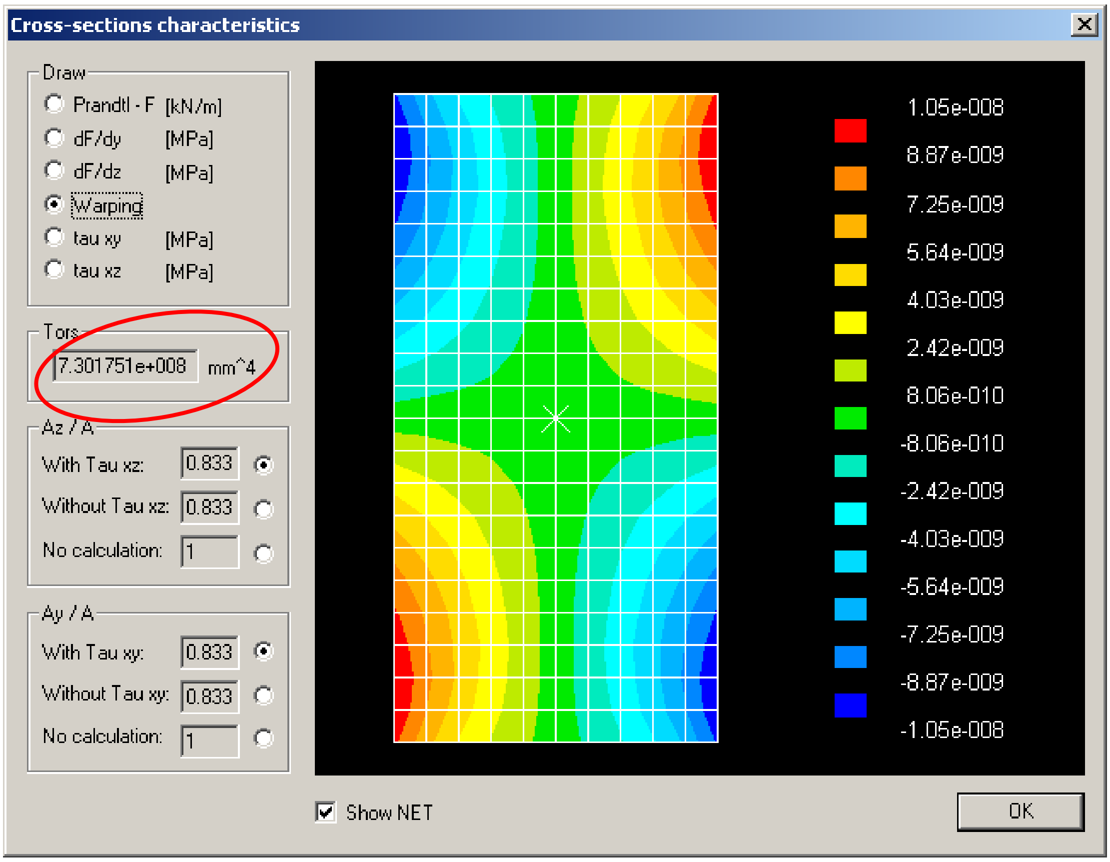
$$GI_w = 4545 \times 730175100 = 331,9 \times 10^{10}$$

$$\tau_{\max} = 2,55 \times 10^{-4} \text{ MPa}$$

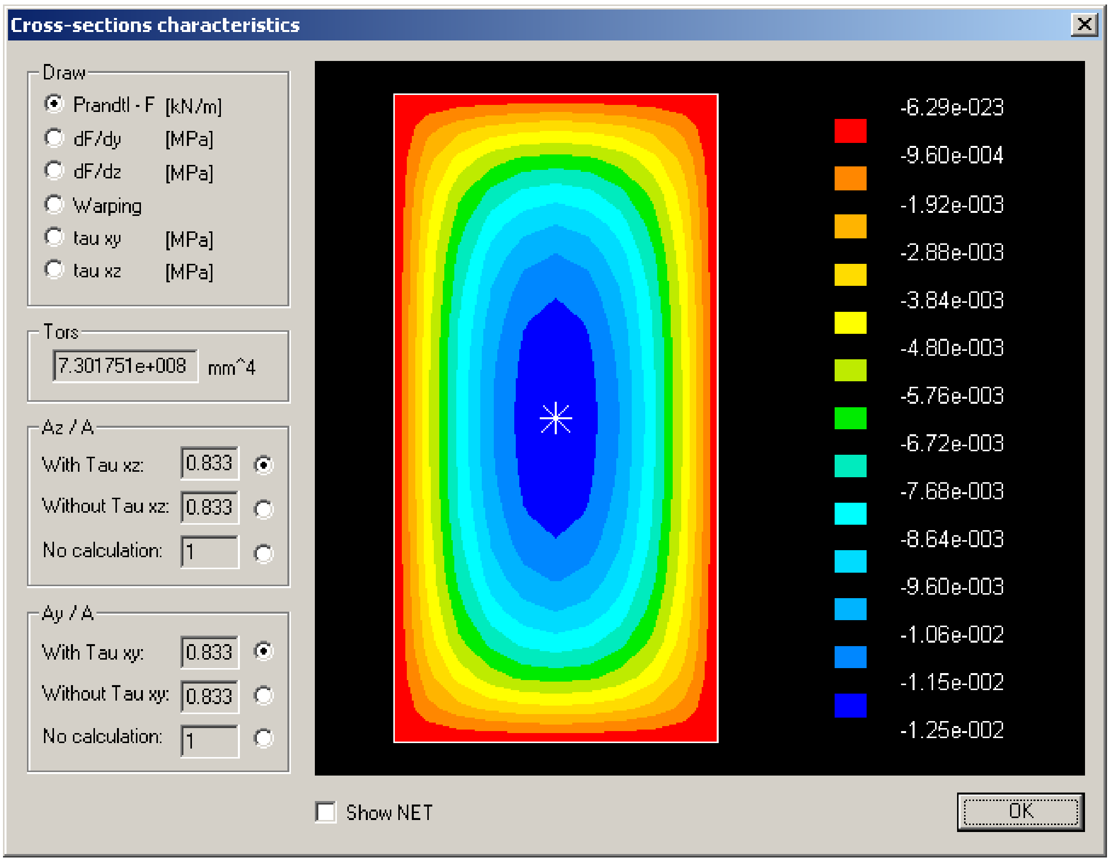
De wringstijfheden die met de drie methoden zijn berekend komen goed overeen. De grootste spanningen die zijn berekend met tabel 1 en Roark's formulas komen ook overeen. De grootste spanning die SCIA Engineer berekent is veel te klein. Blijkbaar moet deze spanning nog worden vermenigvuldigd met $10^{-3}M_w$. Dit komt door de filosofie van het programma. Immers, in dit stadium van een constructieberekening zijn de momenten nog niet bekend.

Opmerking: In figuur 9 hebben de hoogtelijnen een negatieve waarde. Eigenlijk is hier dus sprake van een ϕ–dal. Voor het principe maakt dit niet uit.

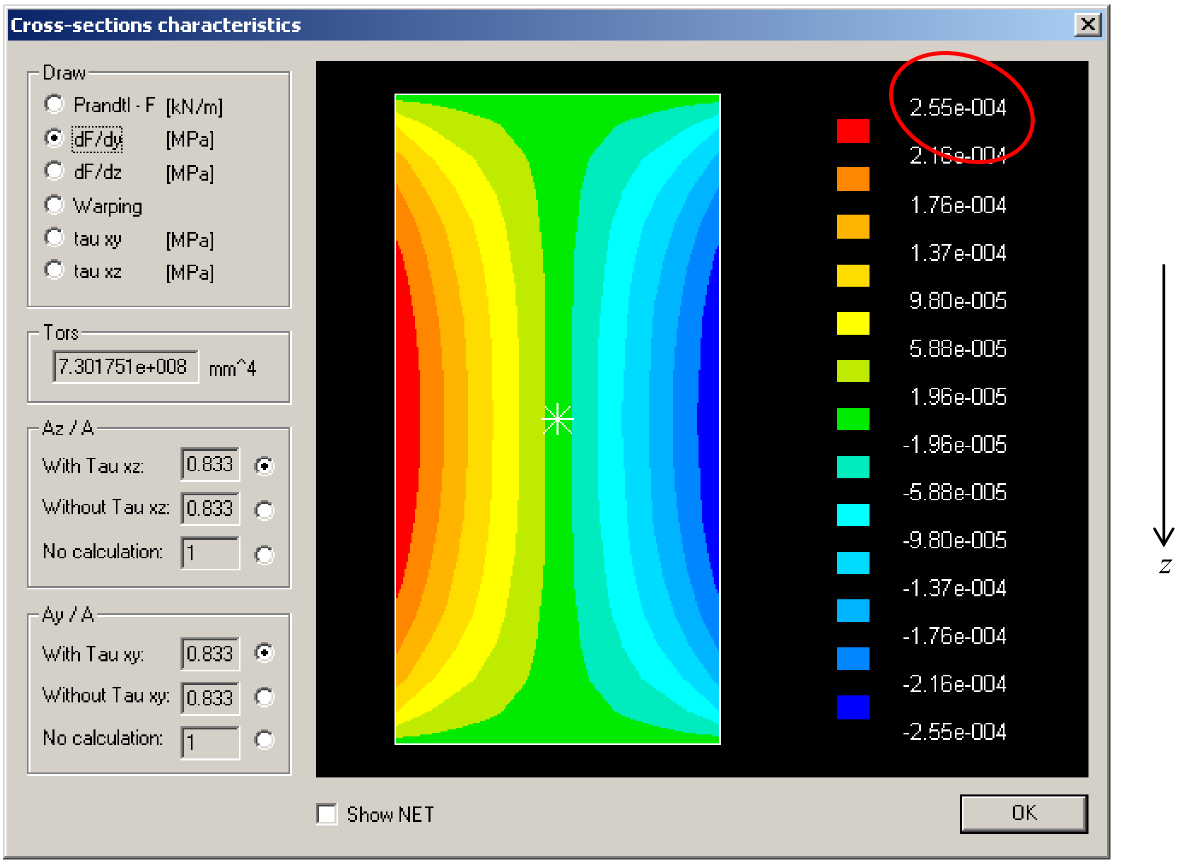
Opmerking: De figuren laten ook knoppen zien die te maken hebben met afschuif-stijfheid en spanningen door dwarskracht. Hier is ook een differentiaalvergelijking voor. Dit onderwerp wordt niet in deze aantekeningen behandeld.



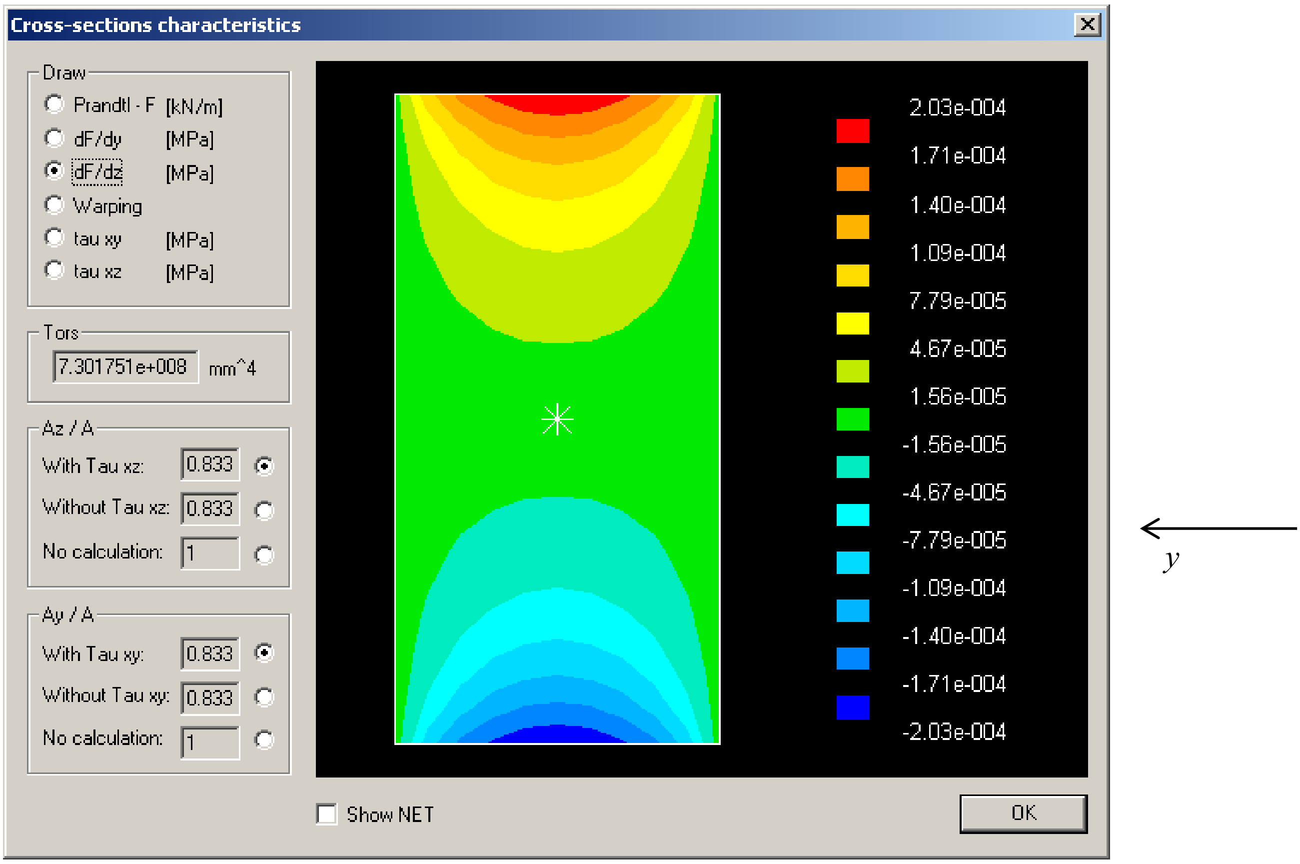
Figuur 8. Elementennet en welving van de doorsnede



Figuur 9. ϕ –heuvel



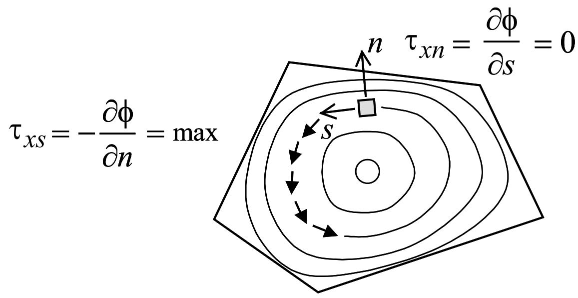
Figuur 10. Schuifspanningen τ_{xz} in z-richting van de doorsnede



Figuur 11. Schuifspanningen τ_{xy} in y-richting van de doorsnede

Interpretatie van de ϕ-heuvel

Het bovenaanzicht van de ϕ–heuvel geeft veel kwalitatieve informatie over de verdeling van de schuifspanningen. In een bepaald punt is de richting van de schuifspanning gelijk aan de richting van de hoogtelijn (figuur 12). De grootte van de schuifspanning is omgekeerd-evenredig met de afstand tussen de hoogtelijnen. De hoogtelijnen zijn dus spanningstrajectoriën. Grote spanningen treden op waar de hoogtelijnen dicht bij elkaar liggen.



Figuur 12. Relatie tussen de spanningen en de hoogtelijnen van de ϕ–heuvel

Geschatte wringstijfheid 2

Een schattingsformule voor de wringstijfheid van gedrongen doorsneden is [5]

$$GI_w \approx \frac{GA^4}{4\pi^2 I_p}.$$

Hierin is A de doorsnedeoppervlakte. Met gedrongen wordt bedoeld dat de doorsnede niet langwerpig is en geen dunne delen of uitsteeksels heeft. Voorbeelden zijn een vierkante doorsnede (8% te groot), een ronde doorsnede (exact) en een doorsnede in de vorm van een gelijkzijdige driehoek (14% te groot). De formule kan worden afgeleid door de oplossing voor een ellipsvormige doorsnede te herschrijven.

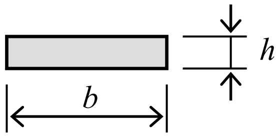
Dunwandige open doorsneden

Voor dunne strippen en dunwandige open doorsneden gelden de volgende benaderingsformules.

Strip

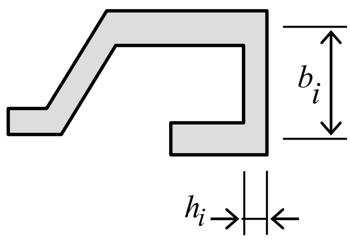
$$GI_w = G\tfrac{1}{3}bh^3$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\tfrac{1}{3}bh^2}$$



Dunwandige open doorsnede

$$GI_w = \sum_i G_i \tfrac{1}{3} b_i h_i^3$$



$$\tau_j = \frac{GI_{wj}}{GI_w} \frac{M_w}{\frac{1}{3} b_j h_j^2}$$

Voor meer nauwkeurigheid kan $\frac{1}{3}$ vervangen worden door getallen uit tabel 1.

Als G hetzelfde is voor alle delen vereenvoudigt de laatstgenoemde formule.

$$\tau_j = \frac{M_w h_j}{I_w}$$

Oefening: Leidt deze laatste formule af.

Voorbeeld balustrade

Een glazen balustrade heeft een houten handrail (zie figuur 13). De verbinding is gelijmd. De glijdingsmodulus van glas is

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{70000}{2(1+0,2)}$ = 29167 N/mm².

De wringstijfheid van het glas is

$GI_w = 29167 \frac{1}{3} 1320 \times 20^3 = 103 \cdot 10^9$ Nmm².

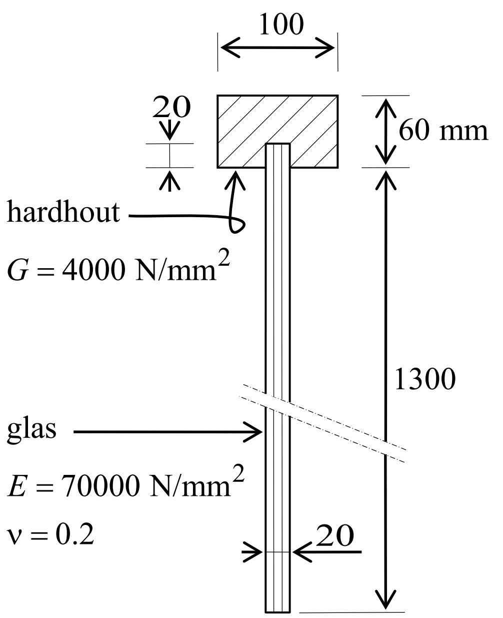
De wringstijfheid van het hout is

$GI_w = 4000 \times 0,207 \times 100 \times 60^3 = 17,9 \cdot 10^9$ Nmm².

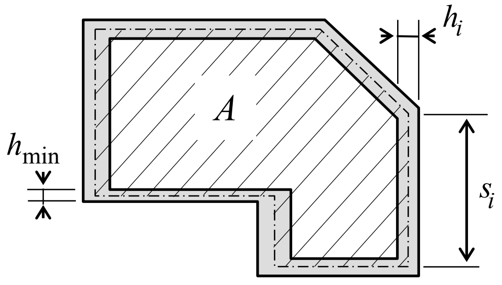
Totaal $GI_w = 121 \cdot 10^9$ Nmm².

De balustrade wordt belast door een wringend moment van 2 kNm. De grootste schuifspanning in het glas is

$\tau = \frac{103}{121} \frac{2 \cdot 10^6}{\frac{1}{3} 1320 \times 20^2}$ = 9,7 N/mm².



Figuur 13. Balustrade met handrail



Figuur 14. Kokerdoorsnede

De grootste schuifspanning in het hout is niet met de hand te berekenen omdat deze beïnvloed wordt door de aansluiting met het glas. In de bovenzijde van de handrail is de schuifspanning ongeveer

$$\tau = \frac{17{,}9}{121} \frac{2 \cdot 10^6}{0{,}239 \times 100 \times 60^2} = 3{,}4 \text{ N/mm}^2.$$

Formules van Bredt

Rudolph Bredt heeft in 1896 twee handige formules afgeleid voor dunwandige ééncellige gesloten kokers [6] (figuur 14). [10]

$$GI_w = \frac{4A^2}{\sum_i \frac{s_i}{G_i h_i}} \qquad \text{(tweede formule van Bredt)}$$

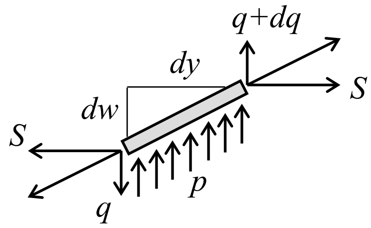
$$\tau_j = \frac{M_w}{2Ah_j} \qquad \text{(eerste formule van Bredt)}$$

Oefening: In gesloten doorsneden treedt de grootste schuifspanning op in de dunste wand, terwijl in open doorsneden de grootste schuifspanning optreedt in de dikste wand. Waardoor komt dit?

Membraananalogie

De differentiaalvergelijking van de krachtenmethode is hetzelfde als die van een zeepvlies. Dit werd voor het eerst gebruikt door Ludwig Prandtl in 1903 [7].[11] Voor een zeepvlies geldt

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{p}{S}.$$



Hierin is S de horizontale spankracht in het vlies en p de overdruk onder het vlies. De randvoorwaarde is $w = 0$ op de rand.

Aldus kunnen we de ϕ-heuvel opvatten als een zeepvlies over een trommel. Het bovenaanzicht van de trommel heeft de vorm van de doorsnede van de ligger. Er heerst een overdruk in de trommel waardoor het zeepvlies bol staat.

[10] Rudolph Bredt (1842 – 1900) was een constructeur. Hij gaf leiding aan het eerste kraanbouwbedrijf van Duitsland gevestigd in Wetter an der Ruhr (DEMAG)[22].
[11] Ludwig Prandtl (1875 – 1953) was hoogleraar in Göttingen, Duitsland. Hij deed ook baanbrekend onderzoek naar stroming rond schepen en vliegtuigen en was actief in beide wereldoorlogen [wikipedia].

Vaak wordt dit aangeduid met “membraananalogie”. Deze naam is niet zo gelukkig gekozen omdat een membraan in verschillende richtingen een andere spankracht kan hebben. Bij een zeepvlies is dit niet het geval.

Wanneer we deze differentiaalvergelijking met die van bladzijde 6 vergelijken zien we dat we de trekspanning S in het zeepvlies kunnen relateren aan de glijdingsmodulus G van het liggermateriaal. De overdruk p in de trommel kan worden gerelateerd aan de specifieke verwringing θ van de ligger.

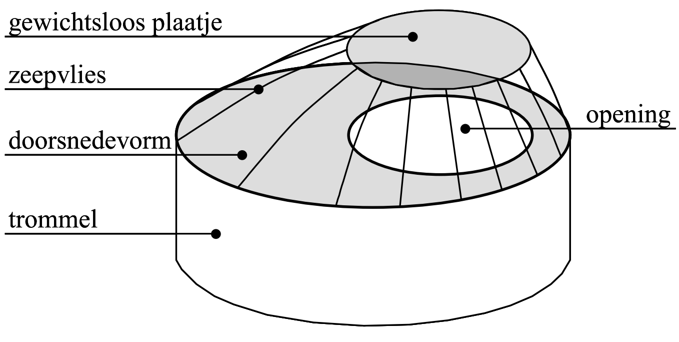
$$w = \phi$$
$$S = \frac{1}{G}$$
$$p = 2\theta$$

Membraananalogie voor kokers

De doorsnede van een gesloten koker heeft niet alleen een uitwendige rand maar ook één of meer inwendige randen. Op elk van de inwendige randen moet gelden voor het zeepvlies

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0$$
$$S \int_s \frac{\partial w}{\partial n} ds = p A_g \,.$$

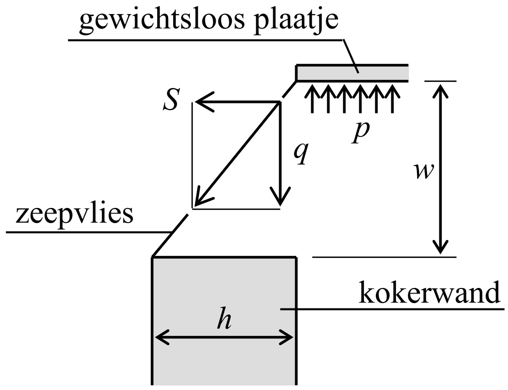
Hierin is s de betreffende inwendige rand en A_g het bijbehorende oppervlak van de openingsdoorsnede. De laatste formule kan worden afgeleid uit de formule op bladzijde 8 bovenaan. Dit betekent dat de waarde van w constant is op een inwendige rand. Bovendien is de verticale resultante van de zeepvlieskracht over de inwendige rand gelijk aan de overdruk p maal het oppervlak A_g van de opening.
We kunnen dit als volgt interpreteren (figuur 15): Een horizontaal gewichtloos plaatje in de vorm van de opening hangt boven de opening. Het zeepvlies zit aan dit plaatje vast en trekt het plaatje naar beneden. De overdruk p drukt het plaatje omhoog.



Figuur 15. Gewichtsloos plaatje als inwendige randvoorwaarde

Toepassing membraananalogie

De membraananalogie is heel geschikt voor handmatige berekening van de ϕ-heuvel van dunwandige meercellige gesloten kokers. Hierbij worden de hoogtes van de gewichtloze plaatjes berekend uit het evenwicht van het geheel. Omdat de wanden dun zijn kan de kromming van het membraan worden verwaarloosd. De kracht q [N/m] waarmee aan de rand van een plaatje wordt getrokken volgt uit de helling van het membraan. Om het rekenwerk te beperken is het gebruikelijk om alle maten ten opzichte van de hartlijnen van de kokerwanden te nemen. De berekening wordt uitgelegd in bijlage 2 aan de hand van een voorbeeld.



$$\frac{q}{S} = \frac{w}{h}$$

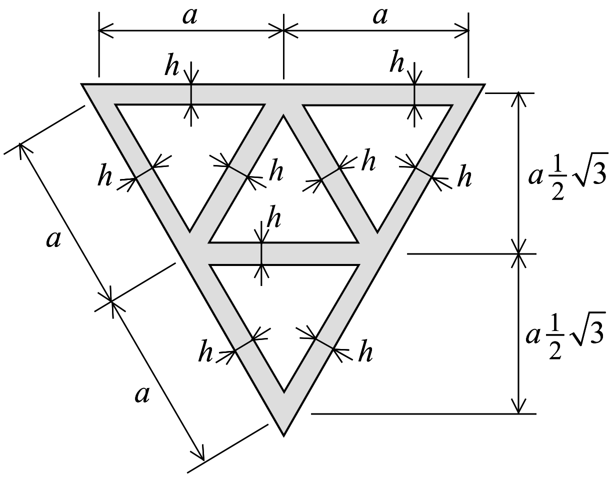
Figuur 16. Krachten op een gewichtloze plaatje

Nabla-ligger [12]

Met de membraananalogie kan de wringstijfheid en de grootste schuifspanning van een nabla-ligger worden berekend (bijlage 3).

$$GI_w = G\,\frac{9}{4}\,a^3 h$$

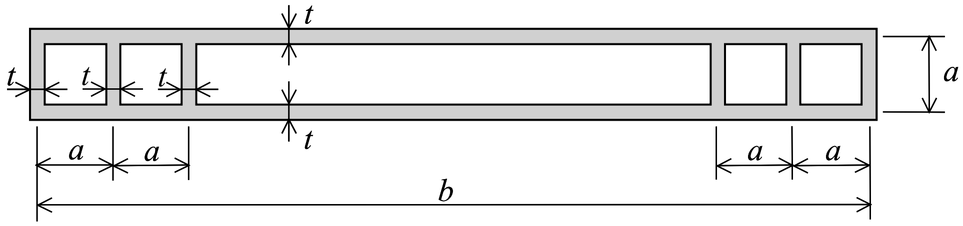
$$\tau_{max} = \frac{4}{27}\sqrt{3}\,\frac{M_w}{a^2 h}$$



Kanaalplaat

Met de membraananalogie kan de wringstijfheid en de grootste schuifspanning in een kanaalplaat worden berekend (bijlage 4). Om een handberekening mogelijk te maken zijn de ronde kanalen vierkant gemodelleerd. De middelste lijven zijn weggelaten uit het model omdat deze verwaarloosbaar bijdragen aan de wringstijfheid. De grootste schuifspanning treedt op in het midden van de onder- en bovenzijde.

[12] Het symbool ∇ wordt uitgesproken als nabla. Het wordt vaak gebruikt in de wiskunde.



$$b \geq 5a$$

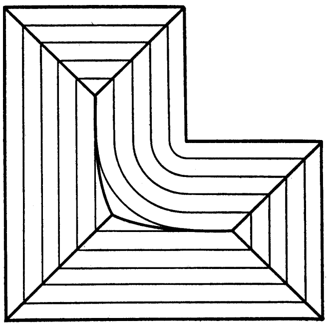
$$GI_w = 6\frac{5b^2 - 20ab + 12a^2}{15b - 49a} Ga^2 t$$

$$\tau_{max} = \frac{5}{6}\frac{3b - 10a}{5b^2 - 20ab + 12a^2}\frac{M_w}{at}$$

Dit model is duidelijk een grove benadering van de werkelijkheid. De werkelijke wringstijfheid zal groter zijn (De auteur schat 60% groter). De werkelijke grootste spanning kan zowel groter als kleiner zijn (De auteur schat 30% groter). Als een nauwkeurige berekening vereist is moet de eindige-elementenmethode worden toegepast.

Zandheuvelanalogie

Voor een plastische berekening van de wringeigenschappen bestaat ook een analogie voor de ϕ–heuvel. De plastische ϕ–heuvel lijkt namelijk op een zandheuvel. Voor een experiment zagen we een plaat uit in de vorm van de doorsnede van de ligger. Vervolgens strooien we droog zand op deze plaat totdat de vorm van de heuvel niet meer verandert (figuur 17).



Figuur 17. Plastische ϕ–heuvel van een L-vormige doorsnede, bovenaanzicht [8]

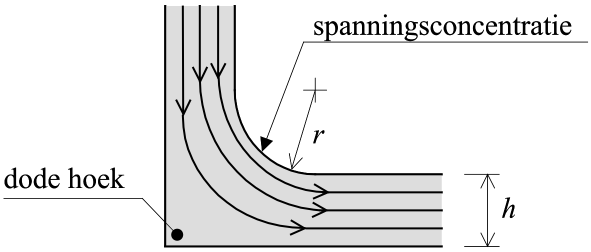
Spanningsconcentraties

Spanningsconcentraties treden op in inwendige hoeken van een doorsnede. Immers, hier zal de ϕ–heuvel een grote helling hebben. Daardoor is het vaak nodig om inwendig hoeken af te ronden. De formule van Trefftz benadert de spanning in een 90°-hoek van een koker (figuur 18) [9]. [13]

[13] Erich Trefftz (1888 – 1937) was hoogleraar mechanica in Dresden. Hij was een goede vriend van Richard von Mises die in 1933 Duitsland moest verlaten doordat hij Joods was [Duitse wikipedia].

$$\tau_{\max} = 1,74 \sqrt[3]{\frac{h}{r}}\,\tau$$

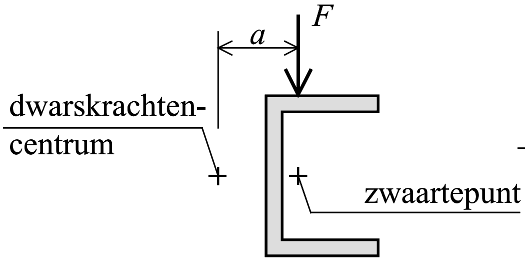
Hierin is r de afrondingsstraal, h de wanddikte en τ de schuifspanning op enige afstand van de afronding. Uit een bacheloreindwerk blijkt dat deze formule niet zo nauwkeurig is maar wel aan de veilige kant [10]. De spanningsconcentratie kan van belang zijn bij vermoeiingsberekeningen.



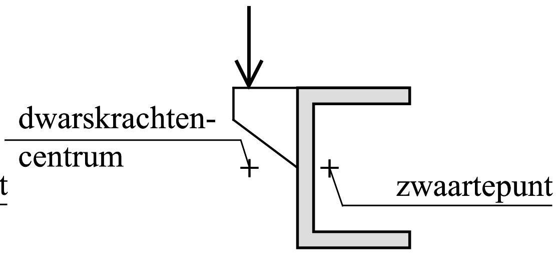
Figuur 18. Spanningsconcentratie in een 90°-hoek

Dwarskrachtencentrum

Het dwarskrachtencentrum of wringmiddelpunt is een punt in de doorsnede van een ligger. Als de belasting aangrijpt in dit punt zal geen wringend moment optreden. Bij doorsneden die dubbelsymmetrisch zijn valt het dwarskrachtencentrum samen met het zwaartepunt, bijvoorbeeld een rechthoekige doorsnede of een I-profiel (bijlage 5). Bij andere doorsneden hoeft dit niet het geval te zijn, bijvoorbeeld een U-profiel (figuur 19 en 20).



Figuur 19. Wringend moment Fa



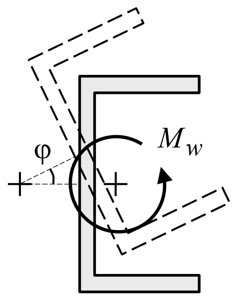
Figuur 20. Geen wringend moment

De plaats van het dwarskrachtencentrum kan worden berekend uit de verdeling van de schuifspanningen door dwarskracht in een doorsnede. Echter, deze berekening is geen onderdeel van dit vak.

Rotatie

In het voorgaande is niet vermeld om welk punt een doorsnede van een ligger roteert. Uit figuur 5 kunnen we de indruk krijgen dat de x-as door het zwaartepunt van de doorsnede gaat. Echter, het kan bewezen worden dat de plaats van deze x-as geen invloed heeft op de berekende wringstijfheid of de berekende wringspanningen. De theorie van Saint-Venant vertelt ons niet om welk punt de doorsnede roteert.

Theorema
Door een wringend moment roteert een dwarsdoorsnede van een ligger om het dwarskrachtencentrum.



Bewijs
Dit kan eenvoudig worden bewezen voor lineair elastische liggers: Een kracht in het dwarskrachtencentrum geeft een rotatie φ = 0 van elk punt in de doorsnede. Hieruit volgt, middels wederkerigheid, dat een wringend moment op een willekeurig punt van de doorsnede een verplaatsing $u = 0$ geeft van het dwarskrachtencentrum. Dus de doorsnede roteert om het dwarskrachtencentrum.

Orthotrope plaat

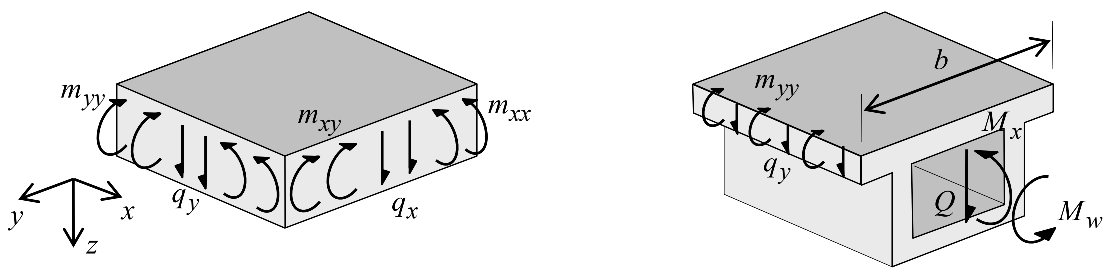
Een brug of vloer opgebouwd uit parallelle liggers wordt vaak gemodelleerd als een orthotrope plaat (figuur 21). Een orthotrope plaat is een plaat met verschillende stijfheden in loodrechte richtingen [11]. De plaatmomenten m_{xx}, m_{yy}, m_{xy} en -dwarskrachten q_x, q_y worden met een eindige-elementenprogramma berekend. Bij het dimensioneren van de liggers worden de liggermomenten en -dwarskracht als volgt berekend.

$$M_x = m_{xx} b$$

$$M_w = -2 m_{xy} b$$

$$Q = q_x b$$

Hierin is b de hart-op-hart afstand van de liggers. Aangenomen is dat de liggers overspannen in de x-richting. Merk op dat in de formule voor het wringend moment M_w een factor 2 voorkomt. Dit komt doordat het wringend moment in de plaat in twee richtingen optreedt terwijl in een ligger hiervoor slechts één richting beschikbaar is.



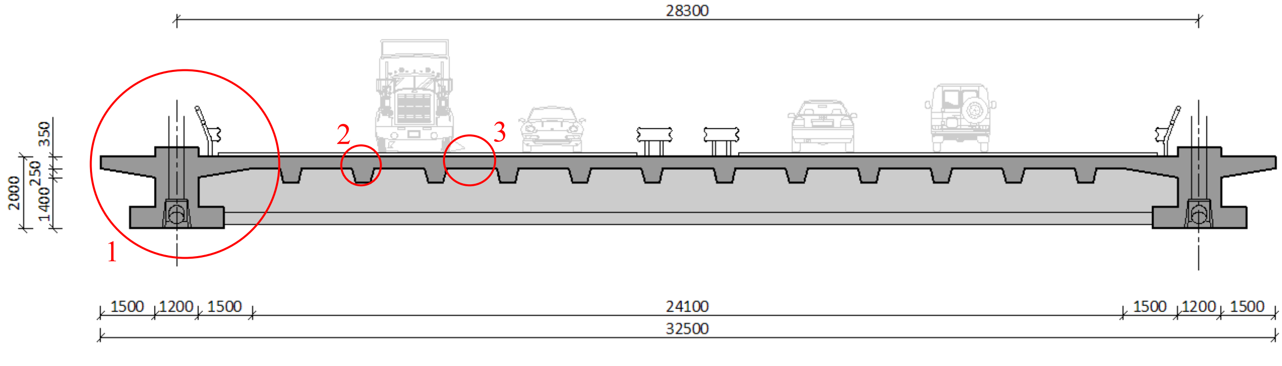
a Deel van een orthotrope plaat (schematisering) **b** Liggerdeel (werkelijkheid)
Figuur 21. Momenten en dwarskrachten

De wringstijfheid van de orthotrope plaat is $\frac{GI_w}{4b}$. (Dus $m_{xy} = \frac{GI_w}{4b} \rho_{xy}$.) Hierin is GI_w de wringstijfheid van een ligger. De factor 4 ontstaat doordat het liggermoment een factor 2 groter is dan het plaatmoment (zie hierboven) en tevens de liggerverwringing een factor 2 kleiner is dan de definitie van plaatverwringing ($\rho_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$).

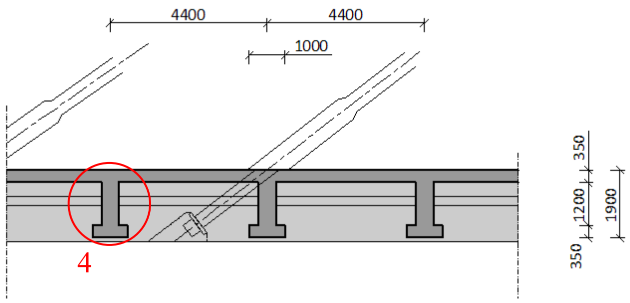
Overigens is een modelering als orthotrope plaat veelal nogal grof, met afwijkingen in momenten en dwarskrachten van meer dan 20%. Veel nauwkeuriger is het om de lijven, onderflens en bovenflens mee te nemen met plaatelementen in het brugmodel.

Voorbeeld wringstijfheid brugdek

Een tuibrug heeft een dek van voorgespannen beton (figuur 22 en 23). De overspanning tussen de pylonen is $l = 237.6$ m. De I_w van de doorsnede is berekend in de onderstaande tabel. Merk op dat de dwarsliggers (4) ook bijdragen aan de wringstijfheid van het dek. Dit komt doordat ze dezelfde specifieke verwringing ondergaan als de andere onderdelen.



Figuur 22. Dwarsdoorsnede van het brugdek van een tuibrug [12 blz. 52]

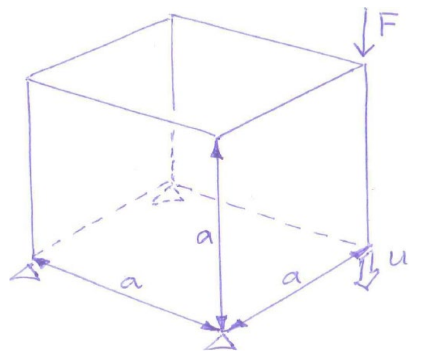


Figuur 23. Langsdoorsnede van het brugdek van een tuibrug [12]

i	I_{wi}	l_i	aantal	$I_{wi} \times l_i \times \text{aantal} / l$	
1	1,0088 m^4	237,6 m	2	2,018 m^4	68 %
2	0,0232 m^4	4,4 m	12×54	0,279 m^4	10 %
3	0,0197 m^4	4,4 m	11×54	0,217 m^4	7 %
4	0,0696 m^4	28,3 m	53	0,439 m^4	15 %
			totaal I_w	2,95 m^4	100 %

Oefening kist

Een open kist wordt in 3 hoeken ondersteund en in 1 hoek belast. Door deze belasting ontstaat voornamelijk wringing in de wanden en de bodem van de kist. Laat zien dat de doorbuiging is $u = \frac{3}{5} a^2 F / G h^3$ en de schuifspanning is $\tau = \frac{3}{5} F / h^2$. Hierin is h de wanddikte. (Dit is geen eenvoudige oefening.)

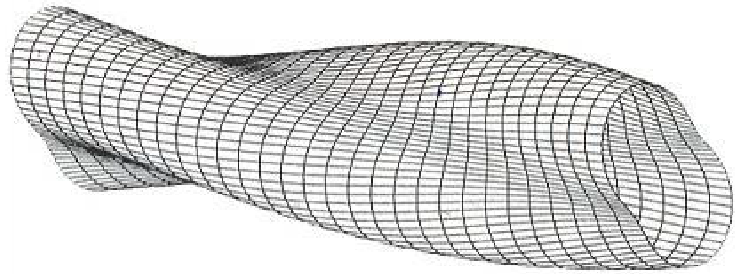


Plooi

Als de wanden van een profiel dun zijn kan plooi optreden door een wringend moment. Bijvoorbeeld het wringend moment waarbij een ronde buis begint te plooien is

$$M_{w,plooi} = \frac{2\pi E\sqrt{r\,h^5}}{3\sqrt{2}(1-\nu^2)^{\frac{3}{4}}}.$$

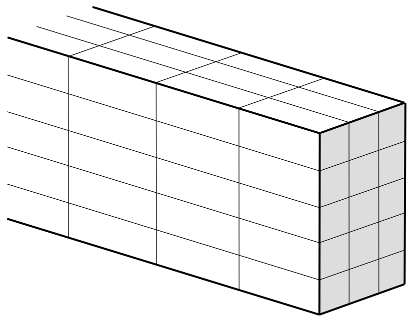
Hierin is h de wanddikte en r de straal tot het hart van de wand [13].



Figuur 24. Plooi van een ronde buis belast op wringing

Volume-elementen

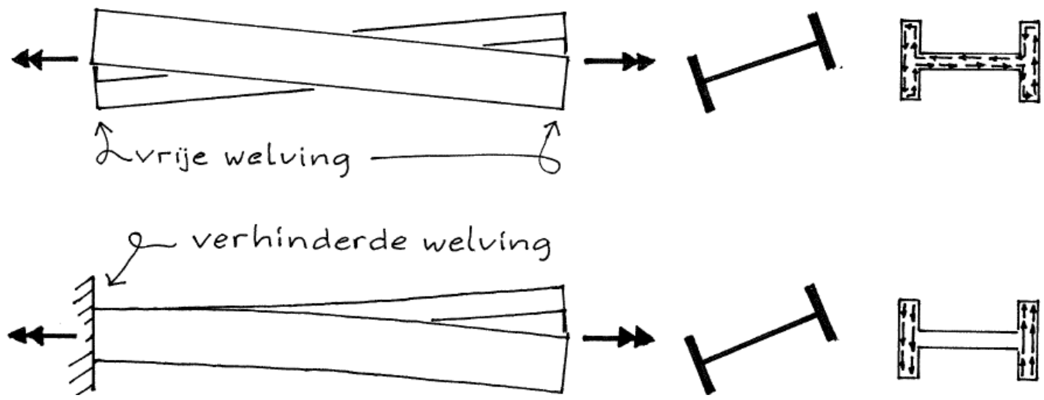
Een ligger kan ook gemodelleerd worden met volume-elementen. We kunnen kiezen uit elementen met 4, 8, 10 en 20 knopen. De 20-knoopselementen zijn de beste daarom wordt hiervan uitgegaan. De wringspanningen worden berekend met een fout kleiner dan 3% als wordt gekozen voor 3 elementen in de dikte (figuur 25). In de hoogte moeten dan zoveel elementen worden gekozen dat de elementen ongeveer vierkant zijn in de dwarsdoorsnede. Een fout kleiner dan 1% wordt bereikt met 5 elementen in de dikte [14].



Figuur 25: Elementverdeling voor berekening van de wringspanningen met een fout kleiner dan 3%

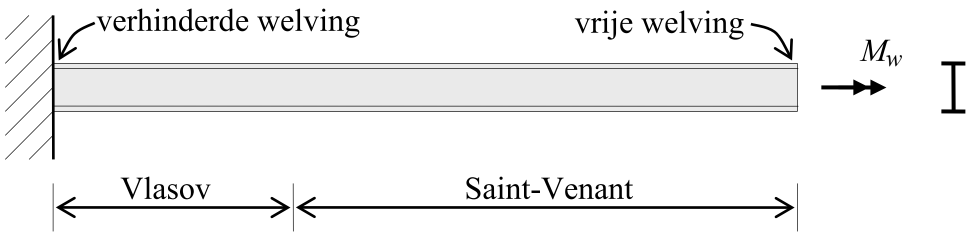
Gehinderde welving

De typische wringspanningen treden alleen op als de welving ongehinderd kan optreden (figuur 26). In de constructiepraktijk is dit vaak niet het geval. Daardoor ontstaan afwijkingen op de ideale wringtheorie. Dit vindt plaats bij opleggingen, daar waar wringende momenten aangrijpen en daar waar de doorsnede verandert.



Figuur 26. Wringvervorming van twee korte I-profielen

Vooral dunwandige open doorsneden zijn gevoelig voor gehinderde welving. Bijvoorbeeld bij een ingeklemd I-profiel is de theorie van Saint-Venant pas geldig op een afstand van ongeveer vijf maal de liggerhoogte vanaf de inklemming (figuur 27).



Figuur 27. Invloed van verhinderde welving

Theorie van Vlasov [14]

In 1933 ontwikkelde Vasiliy Vlasov een wringtheorie waarin gehinderde welving is verwerkt [15]. Deze theorie wordt ook aangeduid met *warping torsion* of *non-uniform torsion*. Daarnaast wordt de wringtheorie van Saint-Venant ook wel aangeduid met *circulatory torsion* of *uniform torsion*. In de theorie van Vlasov is de specifieke verwringing θ niet constant langs de *x*-as. De hoekverdraaiing φ van de liggerdoorsnede volgt uit de differentiaalvergelijking

[14] Вла́сов Васи́лий Заха́рович (1906 – 1958) (Vasily Vlasov) was hoogleraar in Moskou. Hij schreef een boek over dunwandige liggers (1940) waarvoor hij de Stalinprijs eerste klasse ontving. Hij schreef ook een boek over schaalconstructies (1949). [Russische wikipedia]

$$EC_w \frac{d^4\varphi}{dx^4} - GI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2} = m_x \, .$$

Hierin is EC_w de welvingstijfheid, GI_w de wringstijfheid en m_x is een verdeeld wringend moment langs de ligger. De welvingconstante C_w heeft de eenheid m^6 en is gedefinieerd als

$$C_w = \int_A \psi^2 dA \, .$$

Het bi-moment is gedefinieerd als

$$B = -\int_A \sigma_{xx} \psi \, dA \, .$$

Het ontstaat in een doorsnede wanneer welving gehinderd wordt. Het heeft de ongebruikelijke eenheid Nm². Als de differentiaalvergelijking is opgelost kan het bi-moment en het wringend moment berekend worden met

$$B = -EC_w \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

$$M_w = GI_w \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dB}{dx}$$

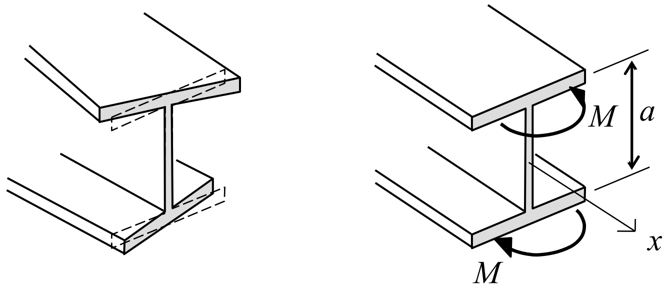
(voor afleiding zie bijlage 10). De theorie van Vlasov reduceert tot de theorie van Saint-Venant als de welvingstijfheid nul is, het verdeelde moment nul is en de welving vrij is.

Interpretatie van het bi-moment

Voor I-profielen kan het bi-moment geïnterpreteerd worden als het moment M in elk van de flenzen maal hun afstand (figuur 28)

$$B = M \, a \, .$$

Hier komt de naam bi-moment vandaan (bi = 2). Voor andere profielen is de interpretatie niet zo eenvoudig. Figuur 28 laat ook zien dat het bi-moment ontstaat als de welving uit de doorsnede wordt getrokken.



Figuur 28. Welving en bi-moment in een I-profiel

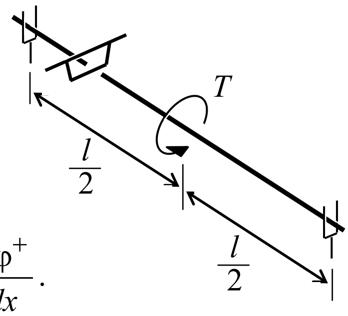
Randvoorwaarden van de Vlasov-theorie

Aan de liggeruiteinden is de rotatie φ of het moment M_w opgelegd. Tegelijkertijd is de welving $\dfrac{d\varphi}{dx}$ of het bi-moment B opgelegd. Voorbeelden van randvoorwaarden zijn:

Inklemming:	Niet roteren en niet welven:	$\varphi = 0$,	$\dfrac{d\varphi}{dx} = 0$
Gaffeloplegging:	Niet roteren en vrij welven:	$\varphi = 0$,	$B = 0$
Kopplaat met hele ruime bouten:	Vrij roteren en niet welven:	$M_w = 0$,	$\dfrac{d\varphi}{dx} = 0$
Vrij uiteinde:	Vrij roteren en vrij welven:	$M_w = 0$,	$B = 0$

Voorbeeld kokerbrug [15]

We beschouwen een kokerbrug met een lengte l = 60 m. De wringstijfheid GI_w is $2690\ 10^8$ Nm^2 en de welvingsstijfheid EC_w is $1183\ 10^9$ Nm^4. Aan weerszijde is de brug opgelegd waarbij welving niet is verhinderd. In het midden wordt de brug belast met een wringend moment $T = 269\ 10^5$ Nm. Deze belasting ontstaat wanneer de brug halverwege is ondersteund door twee tijdelijke kolommen waarvan er één wegvalt. Het wringend moment ontstaat dus door de oplegreactie van de resterende tijdelijke kolom. Wegens symmetrie beschouwen we de helft van de brug.



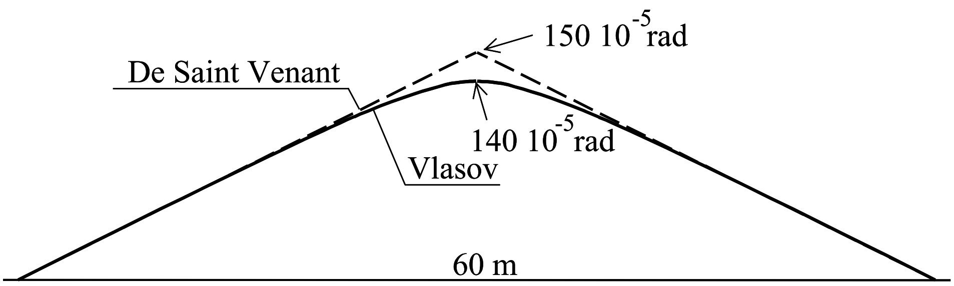
De randvoorwaarden aan de uiteinden x = 0 en x = l zijn

$$\varphi^- = 0, \quad \frac{d^2\varphi^-}{dx^2} = 0, \quad \varphi^+ = 0, \quad \frac{d^2\varphi^+}{dx^2} = 0.$$

De overgangsvoorwaarden in het midden $x = \frac{1}{2}l$ zijn

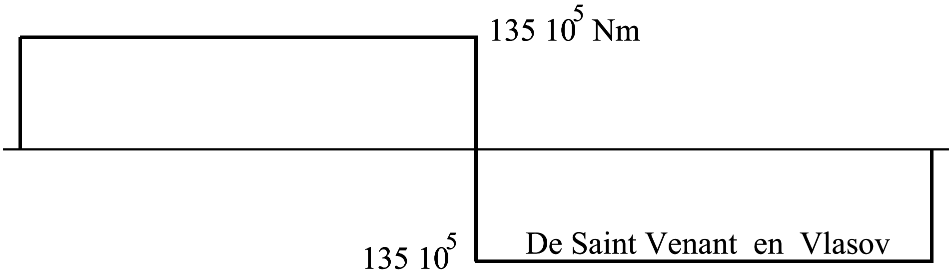
$$GI_w \frac{d\varphi^-}{dx} - EC_w \frac{d^3\varphi^-}{dx^3} = T + GI_w \frac{d\varphi^+}{dx} - EC_w \frac{d^3\varphi^+}{dx^3}, \quad \frac{d\varphi^-}{dx} = \frac{d\varphi^+}{dx}.$$

De differentiaalvergelijking wordt opgelost door Maple (bijlage 6) (figuur 29, 30 en 31).

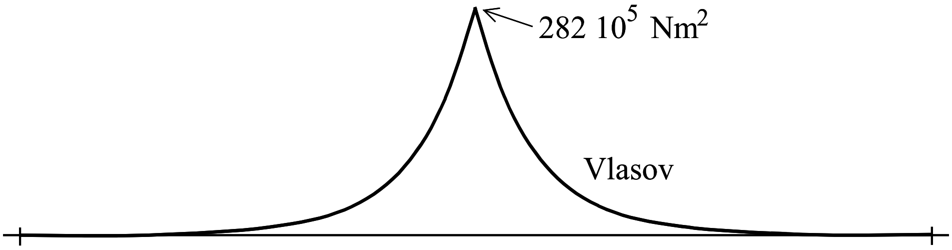


Figuur 29. Hoekverdraaiing φ

[15] De situatie van dit voorbeeld is ontleend aan het collegedictaat van Cor van der Veen [23], docent aan de Technische Universiteit Delft.



Figuur 30. Wringend-momentenlijn M_w



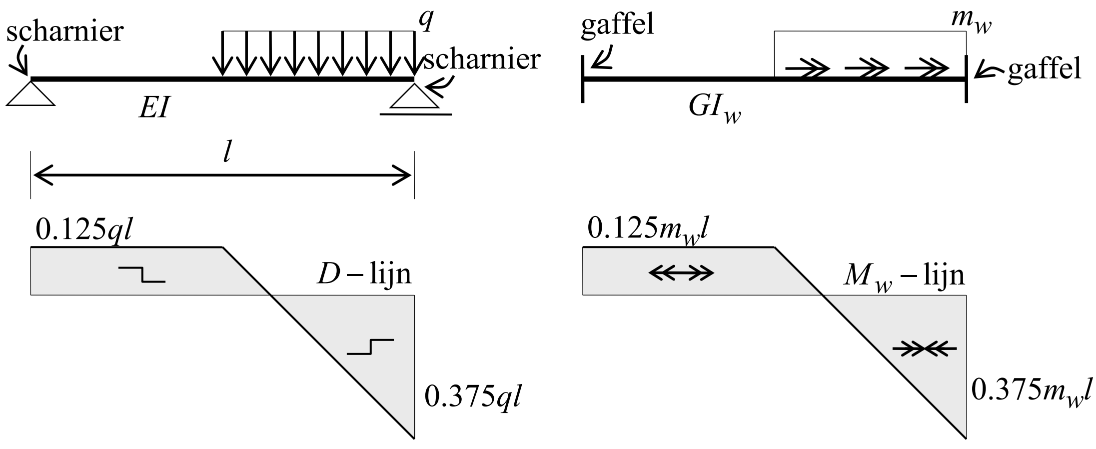
Figuur 31. Bi-momentenlijn B

Interpretatie van de momentenlijn

De wringend-momentenlijn (figuur 30) is eenvoudig te voorspellen: De wringbelasting kan kiezen of het naar de linker oplegging of naar de rechter oplegging gaat. Het heeft voorkeur voor de stijfste weg. Beide liggerhelften hebben dezelfde stijfheid (dezelfde lengte, dezelfde doorsnede). Daarom gaat de helft van de wringbelasting naar links en de andere helft naar rechts.

Overeenkomst met dwarskrachtenlijn

De wringend-momentenlijn in figuur 30 heeft dezelfde vorm als de dwarskrachtenlijn door een puntlast (niet getekend). Dit is in andere situaties ook het geval bij vergelijkbare randvoorwaarden. Figuur 32 laat een ander voorbeeld zien. Omdat de wringend-momentenlijn en de dwarskrachtenlijn op elkaar lijken kan het gebeuren dat ze per ongelijk verwisseld worden. Dit kan bijvoorbeeld gebeuren bij het bekijken van eindige-elementenresultaten. Het is dus belangrijk om dit te controleren.



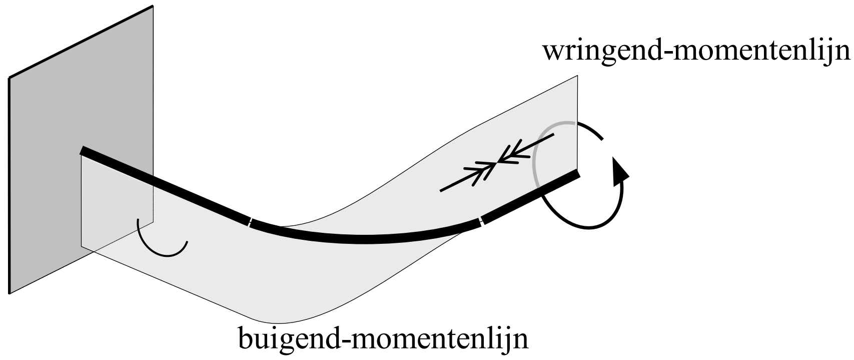
Figuur 32. Overeenkomst tussen de dwarskrachtenlijn en de wringend-momentenlijn

De bocht om

In een ingewikkeld raamwerk is het niet altijd duidelijk hoe wringende momenten ontstaan. De volgende regels kunnen hierbij van pas komen (figuur 33).[16]

Een buigend moment dat de bocht om gaat wordt een wringend moment.

Een wringend moment dat de bocht om gaat wordt een buigend moment.

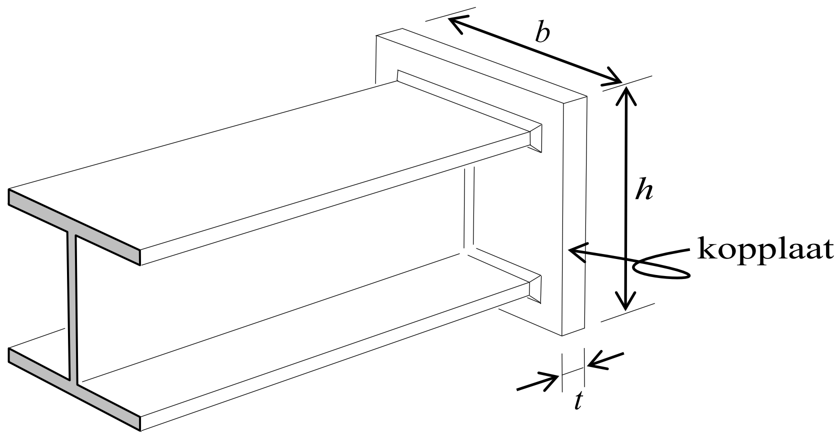


Figuur 33. Momenten in een kromme staaf

Kopplaat

Een kopplaat gelast aan een I-profiel hindert de welving volgens de volgende vergelijking

$$B = \tfrac{1}{3} G t^3 b h \frac{d\varphi}{dx}$$



Figuur 34. Kopplaat gelast aan een I-profiel

Spanningen volgens Vlasov

De spanningsverdeling volgens de wringtheorie van Vlasov bestaat uit drie bijdragen:
1) schuifspanning volgens de theorie van Saint-Venant,
2) schuifspanning door gehinderde welving en
3) normaalspanning door gehinderde welving.

[16] Opgetekend uit de mond van Leo Wagemans (hoogleraar TU Delft).

In het algemeen treden de grootste waarden van de bijdrages op in verschillende punten van de doorsnede. Daarom is software nodig voor het vinden van het maatgevende punt. Dit is nog meer het geval als er ook spanningen optreden door

4) normaalkracht N,

5) moment M_y in de y-richting,

6) moment M_z in de z-richting,

7) dwarskracht D_y in de y-richting en

8) dwarskracht D_z in de z-richting.

Als y en z de hoofdrichtingen van de doorsnede zijn dan berekent de computer de normaalspanning met [17]

$$\sigma_{xx}(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y - \frac{B}{C_w} \psi$$

Voor de schuifspanning in dunwandige doorsneden bestaan ook formules. Echter, deze zijn te omvangrijk om hier te vermelden. Voor zover de auteur weet bestaan geen formules voor de schuifspanningen τ_{xy} en τ_{xz} door gehinderde welving in massieve doorsneden.

Spanning in een I-profiel

Voor I-profielen bestaat een simpele formule voor de grootste normaalspanning in de doorsnede door gehinderde welving.

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\frac{1}{6}(h-t)\,t\,b^2}$$

Hierin is B het bi-moment, t is de flensdikte, b is de flensbreedte en h is de profielhoogte. De spanning $\sigma_{\max}$ treedt op aan de randen van de flenzen.

Voorbeeld, spanningen in een kokerbrug

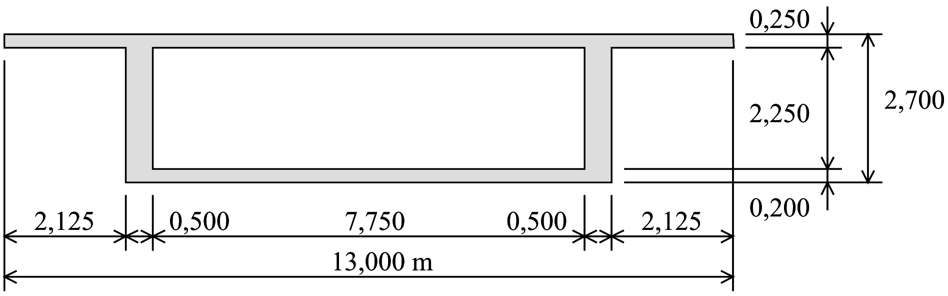
We beschouwen de kokerbrug van het vorige voorbeeld. De afmetingen van de doorsnede zijn vermeld in figuur 35. Met het programma ShapeBuilder kunnen we de welvingfunctie ψ en de wringeigenschappen van de doorsnede berekenen (figuur 36). Een extreme waarde van ψ is $-51100\,\text{cm}^2$ in de linker onderhoek van de koker. Al eerder was berekend dat het grootste bi-moment is $B = 282\ 10^5\ \text{Nm}^2$ (figuur 31). De bijbehorende axiale spanning door welving is derhalve

$$\sigma_{xx} = -\frac{B}{C_w}\psi = -\frac{282\ 10^5\,\text{Nm}^2}{39{,}44\ \text{m}^6}(-5{,}118\ \text{m}^2) = 3{,}66\ 10^6\ \text{N/m}^2 = 3{,}66\ \text{N/mm}^2$$

---

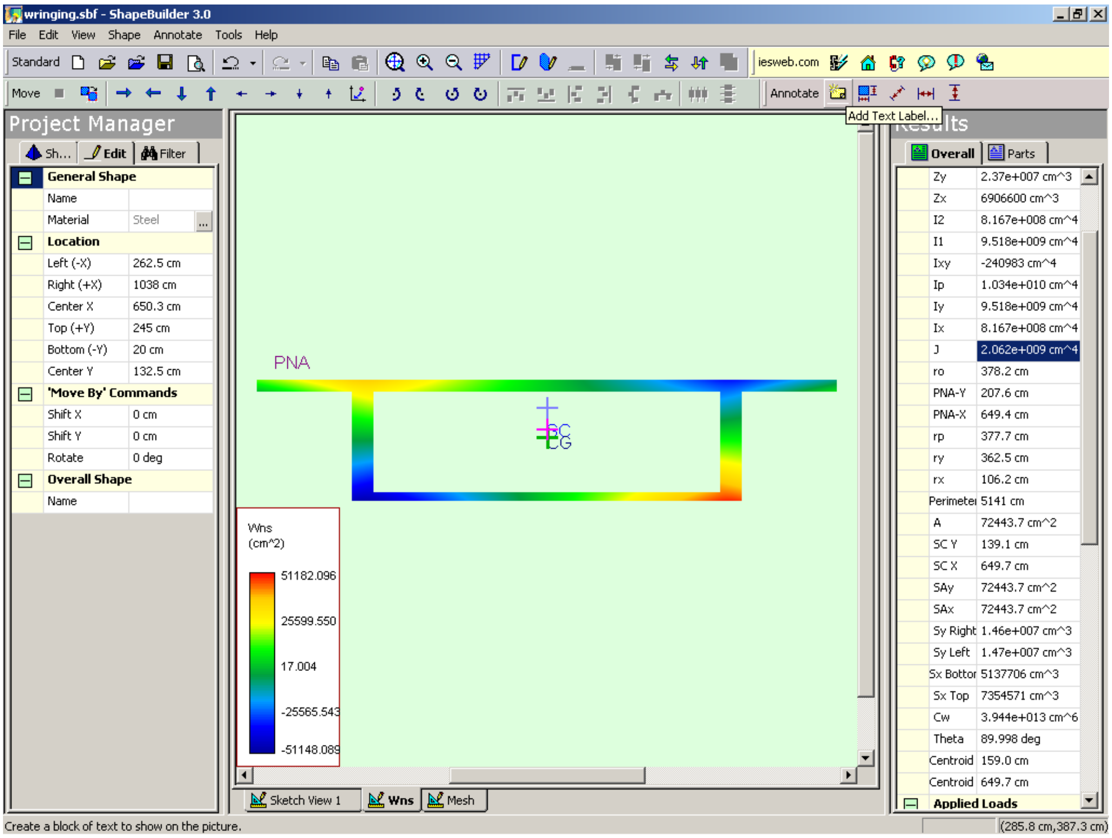
[17] spreek uit σ = sikma

Als de wapening een vloeispanning van 550 N/mm² heeft, is hiervoor 3,66 / 550 = 0,7 % wapening nodig. Ondanks de heel grote belasting is dit niet zoveel. (Gebruikelijke wapeningspercentages liggen tussen 0.1 en 2.0 %). Vaak geldt dat de spanningen door verhinderde welving verwaarloosbaar zijn voor massieve en gesloten doorsneden. Deze spanningen zijn vaak niet verwaarloosbaar in dunwandige open doorsneden.



Figuur 35. Afmetingen van de doorsnede van de kokerbrug

Overigens kan ShapeBuilder alle doorsnede-eigenschappen berekenen, inclusief de afschuifstijfheden, schuifspanningsverdelingen door dwarskracht en de plaats van het dwarskrachtencentrum. Daartoe lost het soortgelijke differentiaalvergelijkingen op als die voor wringing. Dit wordt niet behandeld in dit vak.



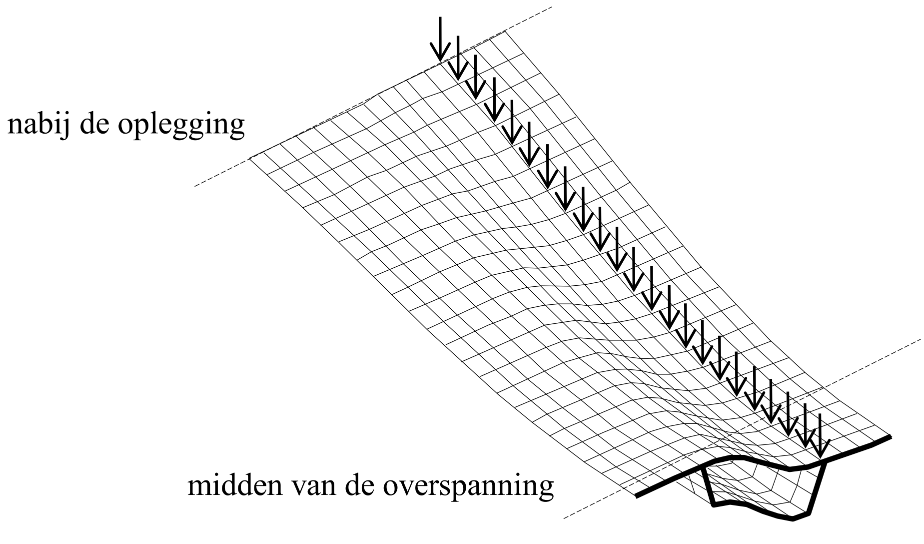
Figuur 36. Welvingsfunctie ψ van de kokerbrug

Distorsie

De theorieën van Saint-Venant en van Vlasov nemen aan dat de dwarsdoorsnede welft maar voor de rest niet van vorm verandert (Zie uitgangspunten bij figuur 5). Voor veel liggers is dit een goede benadering. Echter, soms treedt ook vervorming van de doorsnede op (figuur 37). Dit wordt distorsie genoemd. Om distorsie te berekenen kan een elementenmodel met schaalelementen worden gemaakt.

Schaalelementen

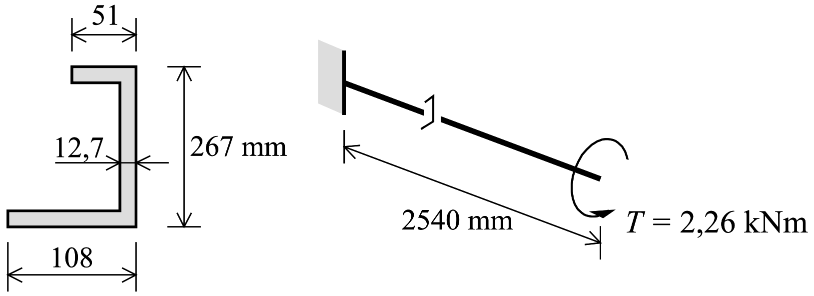
Voordeel van een berekening met schaalelementen (figuur 37) is dat wringing en verhinderde welving automatisch inbegrepen zijn. De doorsnede-eigenschappen GI_w, EC_w en de spanningen $\tau_{\max}, \sigma_{\max}$ hoeven dus niet apart te worden uitgerekend. Ook kan het model worden uitgebreid met bijvoorbeeld dwarsschotten, oplegdetails en voorspankabels. De berekende spanningen zullen nauwkeuriger zijn dan die berekend volgens Saint-Venant of Vlasov. Bovendien kan het model worden gebruikt om kippen en plooien te controleren middels een geometrisch niet-lineaire berekening.
Nadeel van een berekening met schaalelementen is dat het meer werk is om het model te bouwen, en dat snedegrootheden van de ligger, zoals wringende moment en dwarskrachten, niet beschikbaar zijn.
Het gebruik van schaalelementen wordt behandeld bij het vak Elementenmethode voor platen en schijven.



Figuur 37. Distorsie van een kokerbrugdoorsnede [16]
(De helft van de brug is getekend. De vervorming is vergroot weergegeven. Welving treedt niet op in het midden van de brug.)

Voorbeeld, uitkragende ligger

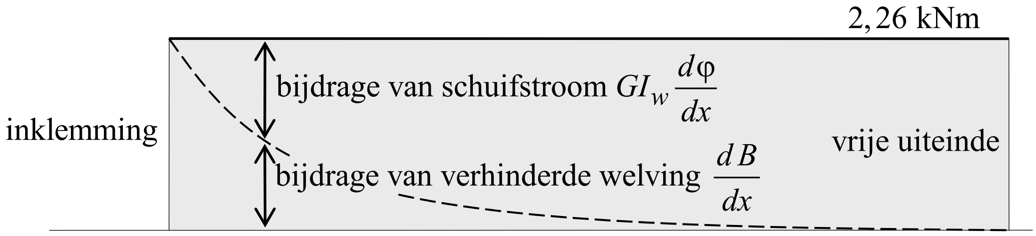
We beschouwen de ligger getekend in figuur 38. De ligger is aan één zijde ingeklemd waarbij welving is verhinderd. Aan de andere zijde is de ligger belast door een wringend moment T waarbij welving vrij kan optreden [17].



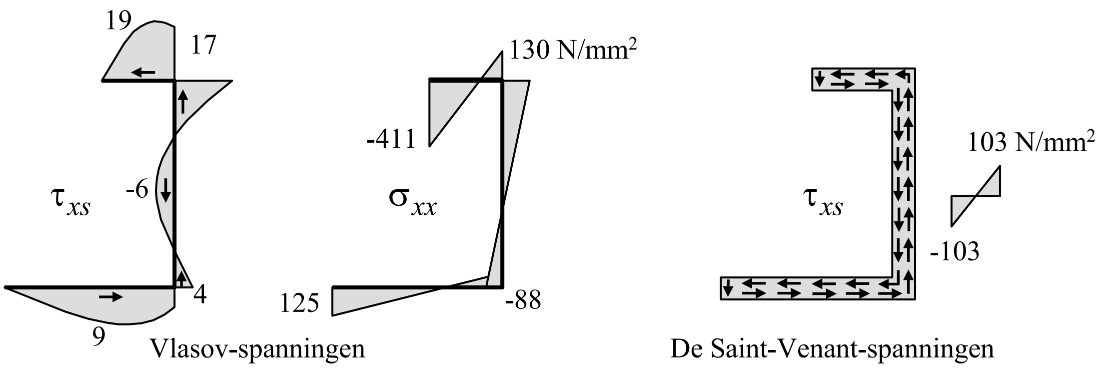
Figuur 38. Uitkragende ligger

De materiaal- en doorsnedegegevens van de ligger zijn
$E = 207000$ N/mm^2, $G = 79300$ N/mm^2,
$I_w = 278000$ mm^4 en $C_w = 191\ 10^8$ mm^6.

In bijlage 7 is de berekening uitgevoerd. Figuur 39 laat de wringend-momentenlijn zien. Bij de inklemming wordt het wringend moment volledig gedragen door verhinderde welving (Vlasov gebied). Bij het vrije uiteinde wordt het wringend moment volledig gedragen door de schuifstroom in de doorsnede (Saint-Venant gebied). In figuur 40 zijn de spanningen bij de inklemming en bij het vrije uiteinde getekend.



Figuur 39. Wringend-momentenlijn M_w



Figuur 40. Spanningen in de uitkragende ligger [17]

Merk op dat de maximale Vlasov normaalspanning σ_{xx} veel groter is dan Saint-Venant schuifspanning τ_{xs} (in absolute zin). Hoewel de Vlasov schuifspanningen τ_{xs} klein zijn, is het moment wat zij leveren gelijk aan de belasting T.

Misverstand

Het is een hardnekkig misverstand dat voor dunwandige open doorsneden de bijdrage van de wringstijfheid GI_w zou kunnen worden verwaarloosd. In tabel 3 zijn de resultaten gegeven van 3 berekeningen. De eerste berekening is dezelfde als hierboven, in de tweede berekening is de wringstijfheid GI_w verwaarloosd en in de derde berekening is de welvingstijfheid EC_w verwaarloosd. De kolom met $\hat{\varphi}$ geeft de rotaties van het liggeruiteinde. Het blijkt dat EC_w niet kan worden verwaarloosd en dat GI_w zeker niet kan worden verwaarloosd voor berekening van de vervorming van deze ligger.

Tabel 3. Gevolg van de verwaarlozing van stijfheden

	GI_w	EC_w	$\hat{\varphi}$
1	$2,205 \cdot 10^{10}$ Nmm^2	$3,954 \cdot 10^{15}$ Nmm^4	$0,217$ rad
2	0	$3,954 \cdot 10^{15}$	3,180
3	$2,205 \cdot 10^{10}$	0	$0,260$

Toekomst

Alle commerciële raamwerkprogramma's die de auteur kent gebruiken de theorie van Saint-Venant en niet die van Vlasov. Het ligt voor de hand dat in de toekomst de programma's worden uitgebreid met de Vlasov-theorie [18]. Daartoe moeten de profielenbibliotheken niet alleen het wringtraagheidsmoment I_w bevatten maar ook de welvingconstante C_w van elk profiel. De programmagebruiker kan dan van een elementuiteinde aangegeven wat de welving is; verhinderd, vrij of doorgekoppeld. Doorgekoppeld wil zeggen dat twee elementen dezelfde welving hebben ter plaatse van hun aansluiting. Vervolgens zal het programma dit in rekening brengen bij het bepalen van de vervormingen en de spanningen. In bijlage 9 is de stijfheidsmatrix gegeven van een raamwerkelement volgens de Vlasov-theorie.

Karakteristieke lengte

De karakteristieke lengte is gedefinieerd als

$$l_c = \sqrt{\frac{EC_w}{GI_w}}$$

Deze geeft de lengte van het "Vlasov-gebied" aan (figuur 27). Ook is het een maat voor de breedte van de piek in de bi-momentenlijn (figuur 31): Op een afstand l_c vanaf de verhinderde welving is het bi-moment 37% van de maximale waarde. Op een afstand van $3\,l_c$ is het bi-moment 5% van de maximale waarde.

Foefje

Alle raamwerkprogramma's maken gebruik van de wringtheorie van Saint-Venant. We kunnen een foefje gebruiken om verhinderde welving hierbij toch in rekening te brengen [18]. Wanneer beide uiteinden van een element niet kunnen welven dient de wringstijfheid vermenigvuldigt te worden met de vergrotingsfactor

$$\frac{l}{l-2l_c}$$

waarin l de liggerlengte is. Wanneer één van beide uiteinden van het element niet kan welven dient de wringstijfheid vermenigvuldigd te worden met de factor

$$\frac{l}{l-l_c}.$$

Vervolgens kan het grootste bi-moment voor beide gevallen berekend worden met

$$\hat{B} \approx \pm\, l_c M_w.$$

Deze treedt vanzelfsprekend op waar de welving verhinderd is.[18] (Het teken hangt af van de richting van de x-as van het element maar het teken is eigenlijk niet van belang.) Voor het bovenstaande geldt dat er geen verdeeld wringend moment aanwezig is $m_x = 0$.

Het foefje is een heel goede benadering als $l \geq 6l_c$ (afwijking < 1%). Voor kleinere lengtes kan tabel 4 worden gebruikt.

Tabel 4. Vergrotingsfactoren voor wringstijfheid door verhinderde welving [18]

ligger lengte l	$0.5\,l_c$	$1\,l_c$	$1.5\,l_c$	$2\,l_c$	$2.5\,l_c$	$3\,l_c$	$4\,l_c$	$5\,l_c$
tweezijdig verhinderd	49.2	13.2	6.53	4.19	3.11	2.52	1.93	1.65
eenzijdig verhinderd	13.2	4.19	2.52	1.93	1.65	1.50	1.33	1.25

Het foefje is handig om te laten zien dat de werkelijke verplaatsingen door wringing kleiner zullen zijn dan een gewone raamwerkberekening voorspelt.

Veilig of onveilig?

Hierboven bleek dat de echte constructie stijver is dan de wringtheorie van Saint-Venant voorspelt. Daarom zullen de echte vervormingen kleiner zijn dan de berekende vervorming. Dus voor de gebruikstoestand is de gewone raamwerkberekening aan de veilige kant.

[18] De exacte formule is

$\hat{B} = \pm\, l_c M_w \tanh \dfrac{l}{2l_c}$ als beide zijden niet kunnen welven

$\hat{B} = \pm\, l_c M_w \tanh \dfrac{l}{l_c}$ als één zijde niet kan welven

Ook bleek dat plaatselijk de werkelijke spanningen veel hoger kunnen zijn dan de wringtheorie van Saint-Venant voorspelt. Echter, dit betekent niet dat het constructiedeel zal bezwijken. Veel constructiematerialen vertonen namelijk enigszins plastisch gedrag (staal, aluminium, hout, gewapend beton). Volgens de plasticiteitstheorie is elk evenwichtsysteem dat de vloeisterkte niet overschrijdt een veilige benadering voor de draagkracht. Een lineair elastische berekening volgens de theorie van Saint-Venant is zo een evenwichtsysteem. Dus ook voor de uiterste grenstoestand is de gewone raamwerkberekening aan de veilige kant.

Een uitzondering is vermoeiing. Bij vermoeiing is het verschil tussen de grootste spanning en de kleinste spanning in een materiaalpunt belangrijk. De grootste spanning wordt sterk gereduceerd als het materiaal vloeit bij de eerste grote belasting. Echter, het spanningsverschil wordt niet kleiner door de vloei en het treedt op bij elke volgende belasting. Daarom is het bij vermoeiing verstandig om ronde buisprofielen te kiezen (deze welven niet). Als open profielen nodig zijn is het verstandig om deze vrij te laten welven. Als welving toch verhinderd wordt, moet de welvingsspanning nauwkeurig worden uitgerekend en gecontroleerd. In bijlage 7 staat een rekenvoorbeeld.

Voor verhinderde welving geldt: Voorkomen is beter dan berekenen.

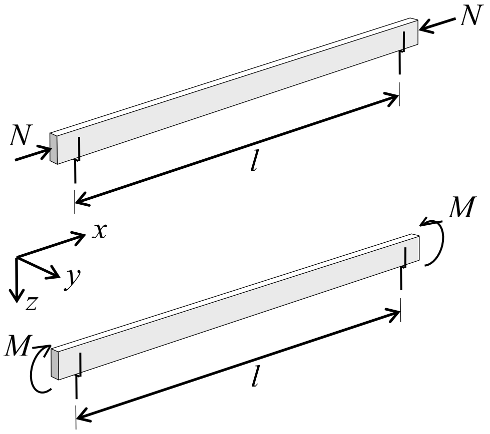
Torsieknik en kip

De grootheden die we in dit vak geleerd hebben worden ook gebruikt bij stabiliteitscontroles. De normaalkracht waarbij een kolom bezwijkt door torsieknik is

$$N = \frac{A}{I_p}\left(GI_w + \frac{\pi^2 EC_w}{l^2}\right).$$

Het buigend moment waarbij een ligger bezwijkt door kip is

$$M = \sqrt{\frac{\pi^2 EI_{yy}}{l^2}\left(GI_w + \frac{\pi^2 EC_w}{l^2}\right)}.$$



Hierin is l de kolom- of liggerlengte en EI_{yy} is de buigstijfheid in de dwarsrichting. Deze formules zijn geldig in de hoofdrichtingen van een profieldoorsnede en bij gaffelopleggingen aan de uiteinden [19].

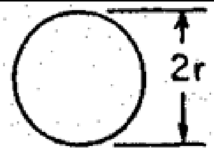
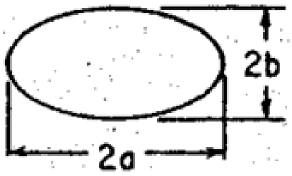
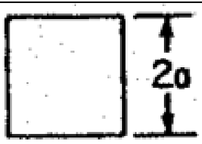
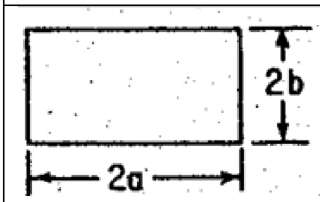
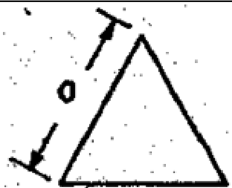
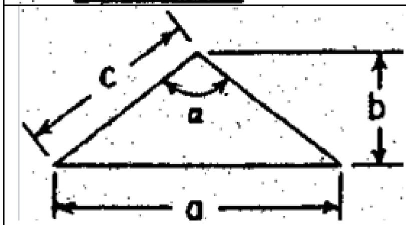
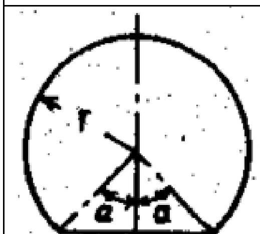
Dankwoord

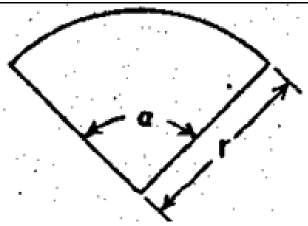
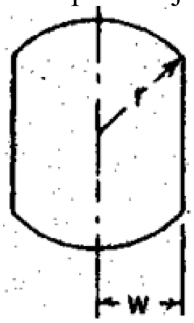
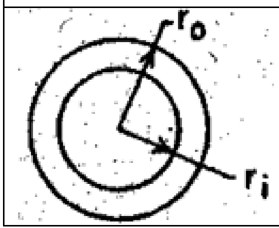
Graag bedank ik hier Rene Braam voor zijn commentaar op de eerste uitgave.

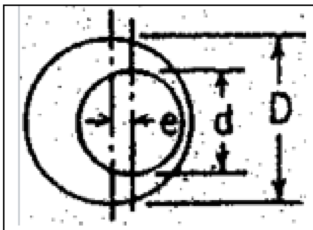
Literatuur

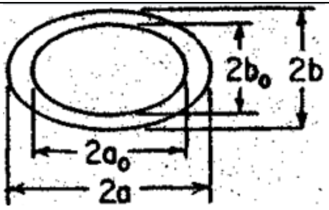
1. K.N. Rahal, M.P. Collins, “Effect of Thickness of Concrete Cover on Shear-Torsion Interaction – An Experimental Investigation”, *ACI Structural Journal*, Vol. 92, No.3, 1995.
2. W.C. Young, "*Roark’s Formulas for Stress & Strain*", 6th edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
3. A.J.C. Barré de Saint-Venant, "Mémoire sur la torsion des prismes", *Mémoires présentés par divers savants a L’Académie des Sciences de L'Institut impérial de France et imprimés par son ordre: Sciences, Mathématiques et Physiques,* Volume 14, pp. 233-560, 1856.
4. J. Blaauwendraad, "Theory of Elasticity", Lecture Book, Delft University of Technology, October 2002.
5. S.P. Timoshenko, J.M. Gere, "*Theory of Elastic Stability*", McGraw-Hill, New York, second edition 1961.
6. R. Bredt, Kritische Bemerkungen zur Drehungselastizität, *Zeitschrift der Vereines deutscher Ingenieure*, Vol. 40, No. 29. pp. 813-817, 1896.
7. L. Prandtl, "Zur Torsion von prismatischen Stäben", *Physikalische Zeitschrift* 4, pp. 758-759, 1903.
8. W. Prager, Ph.G. Hodge, "*Theory of Perfectly Plastic Solids*", Fourth Printing, John Wiley & Sons, New York 1965.
9. J.P. Den Hartog, "*Advanced Strength of Materials*", McGraw-Hill, New York, 1952.
10. O.R. van der Meulen, "Spanningsconcentratie door wringing", Bachelor-eindwerk, TU Delft, oktober 2005.
11. J. Blaauwendraad, “*Plates and FEM*”, Springer, 2010.
12. E. Bosman, “Wind Induced Vibrations of frUHSC Bridge Decks”, afstudeerverslag Technische Universiteit Delft, Faculteit Civiele Techniek, 2012.
13. M. Farshad, "*Design and Analysis of Shell Structures*", Kluwer Academic Publischers, Dordrecht, 1992.
14. S.F. Landers, De nauwkeurigheid van wringspanningen berekend met de 3D eindige-elementenmethode, Bachelor Thesis, Delft University of Technology, oktober 2022, online: http://phoogenboom.nl/BSc_projects/eindrapport_landers.pdf
15. V.Z. Vlasov, "*Thin-Walled Elastic Bars*" (in Russian), 2nd ed., Fizmatgiz, Moscow, 1959.
16. G.A. Rombach, "*Finite element design of concrete structures*", Thomas Telford Publishing, London, 2004.
17. W.F. Chen, T. Atsuta, "*Theory of Beam-Columns*, *Vol. 2: Space Behaviour and Design*", McGraw-Hill, New York, 1977.
18. P.C.J. Hoogenboom, A. Borgart, "Method for Including Restrained Warping in Traditional Frame Analyses", *HERON*, Vol. 50 No. 1 pp. 55-68, 2005
19. H. de Jong, "Instabiliteit, Kip, torsieknik en plooien", Hoofdstuk 2 van het dictaat g12N Staalconstructies II, TU Delft, 1988.
20. P.C.J. Hoogenboom, "Theory of Elasticity, Exam Problems and Answers", reader, Delft University of Technology, November 2002.
21. R.W. Clough, E.L. Wilson, Early finite element research at Berkeley, Fifth US national conference on computational mechanics, 4-6 August 1999, online: https://www.smart-fem.de/media/fe-history.pdf
22. K. E. Kurrer, Rudolph Bredt. Zum 100. Todestag des Altmeisters des deutschen Kranbaus, *Stahlbau*, 2013
23. C. van der Veen, Design Concrete Bridges, dictaat TU Delft, 2017.

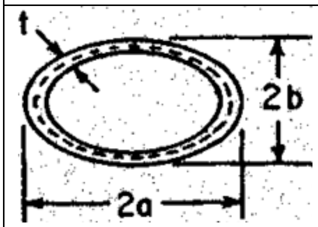
Bijlage 1. Wringeigenschappen [2, tabel 20]

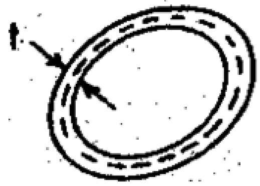
	$I_w = \tfrac{1}{2}\pi r^4$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\tfrac{1}{2}\pi r^3}$
	$I_w = \dfrac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\tfrac{1}{2}\pi a b^2}$
	$I_w = 2,25 a^4$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{1,66\, a^3}$
	$I_w = ab^3\left(\tfrac{16}{3} - 3,36\dfrac{b}{a}(1 - \tfrac{1}{12}\dfrac{b^4}{a^4})\right) \qquad a \geq b$ $\tau_{\max} = \dfrac{3M_w}{8ab^2}\left(1 + 0,6095\dfrac{b}{a} + 0,8865\dfrac{b^2}{a^2} - 1,8023\dfrac{b^3}{a^3} + 0,9100\dfrac{b^4}{a^4}\right)$
	$I_w = \tfrac{1}{80}\sqrt{3}\, a^4$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{\tfrac{1}{20} a^3}$
	$I_w = \dfrac{a^3 b^3}{15 a^2 + 20 b^2} \qquad \tfrac{2}{3} < \dfrac{a}{b} < \sqrt{3}$ $I_w = 0,0915 b^4\left(\dfrac{a}{b} - 0,8592\right) \qquad \sqrt{3} < \dfrac{a}{b} < 2\sqrt{3}$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w b\left(0,200 + 0,309\dfrac{a}{b} - 0,0418\dfrac{a^2}{b^2}\right)}{I_w} \qquad \tfrac{2}{3} < \dfrac{a}{b} < 2\sqrt{3}$
 $h = r(1 - \cos\alpha)$	$I_w = 2r^4\left(0,7854 - 0,0333\dfrac{h}{r} - 2,6183\dfrac{h^2}{r^2} + 4,1595\dfrac{h^3}{r^3} - 3,0769\dfrac{h^4}{r^4} + 0,9299\dfrac{h^5}{r^5}\right)$ $\tau_{\max} = \dfrac{M_w}{r^3}\left(0,6366 + 1,7598\dfrac{h}{r} - 5,4897\dfrac{h^2}{r^2} + 14,062\dfrac{h^3}{r^3} - 14,510\dfrac{h^4}{r^4} + 6,434\dfrac{h^5}{r^5}\right)$ $0 \leq \dfrac{h}{r} \leq 1$

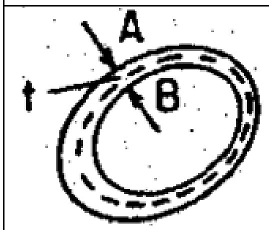
	$I_w = r^4\left(0{,}0034 - 0{,}0697\frac{\alpha}{\pi} + 0{,}5825\frac{\alpha^2}{\pi^2} - 0{,}2950\frac{\alpha^3}{\pi^3} + 0{,}0874\frac{\alpha^4}{\pi^4} - 0{,}0111\frac{\alpha^5}{\pi^5}\right)$ $0{,}1 \le \frac{\alpha}{\pi} \le 2{,}0$ $\tau_{\max} = \frac{M_w}{r^3\left(0{,}0117 - 0{,}2137\frac{\alpha}{\pi} + 2{,}2475\frac{\alpha^2}{\pi^2} - 4{,}6709\frac{\alpha^3}{\pi^3} + 5{,}1764\frac{\alpha^4}{\pi^4} - 2{,}2000\frac{\alpha^5}{\pi^5}\right)}$ $0{,}1 \le \frac{\alpha}{\pi} \le 1{,}0$
twee platte zijden  $h = r - w$	$I_w = 2r^4\left(0{,}7854 - 0{,}4053\frac{h}{r} - 3{,}5810\frac{h^2}{r^2} + 5{,}2708\frac{h^3}{r^3} - 2{,}0772\frac{h^4}{r^4}\right)$ $0 \le \frac{h}{r} \le 0{,}8$ $\tau_{\max} = \frac{M_w}{r^3}\left(0{,}6366 + 2{,}5303\frac{h}{r} - 11{,}157\frac{h^2}{r^2} + 49{,}568\frac{h^3}{r^3} - 85{,}886\frac{h^4}{r^4} + 69{,}849\frac{h^5}{r^5}\right)$ $0 \le \frac{h}{r} \le 0{,}6$
vier platte zijden $h = r - w$	$I_w = 2r^4\left(0{,}7854 - 0{,}7000\frac{h}{r} - 7{,}7982\frac{h^2}{r^2} + 14{,}578\frac{h^3}{r^3}\right)$ $\tau_{\max} = \frac{M_w}{r^3}\left(0{,}6366 + 2{,}6298\frac{h}{r} - 5{,}6147\frac{h^2}{r^2} + 30{,}853\frac{h^3}{r^3}\right)$ $0 \le \frac{h}{r} \le 0{,}293$
	$I_w = \frac{1}{2}\pi(r_o^4 - r_i^4)$ $\tau_{\max} = \frac{r_o M_w}{\frac{1}{2}\pi(r_o^4 - r_i^4)}$

<table>
<tr>
<td>

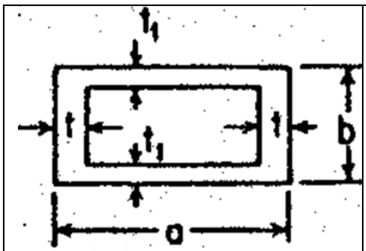
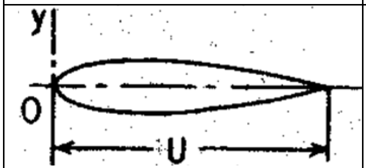
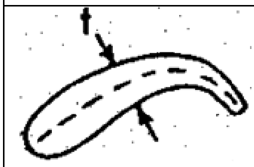
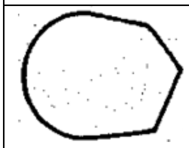
$\lambda = \dfrac{e}{D}$
$n = \dfrac{d}{D}$</td>
<td>$$I_w = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32\left(1 + \dfrac{16n^2}{(1-n^2)(1-n^4)}\lambda^2 + \dfrac{384n^4}{(1-n^2)^2(1-n^4)^4}\lambda^4\right)}$$
$$\tau_{\max} = \frac{16 D M_w}{\pi(D^4 - d^4)}\left(1 + \frac{4n^2}{1-n^2}\lambda + \frac{32n^2}{(1-n^2)(1-n^4)}\lambda^2 + \frac{48n^2(1+2n^2+3n^4+2n^6)}{(1-n^2)(1-n^4)(1-n^6)}\lambda^3 + \frac{64n^2(2+12n^2+19n^4+28n^6+18n^8+14n^{10}+3n^{12})}{(1-n^2)(1-n^4)(1-n^6)(1-n^8)}\lambda^4\right)$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

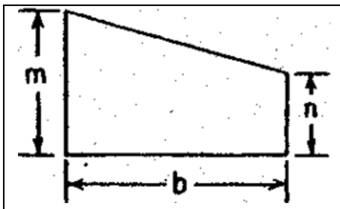
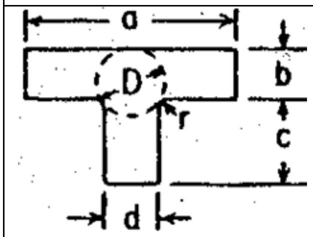
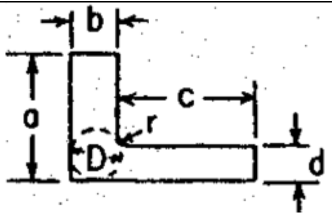
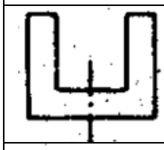
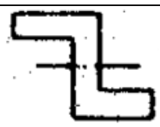
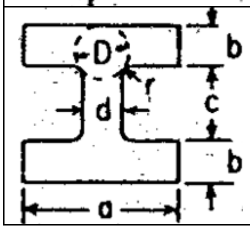
dikte niet constant</td>
<td>$$I_w = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}(1 - q^4)$$
$$\tau_{\max} = \frac{M_w}{\frac{1}{2}\pi a b^2 (1 - q^4)}$$
$$q = \frac{a_o}{a} = \frac{b_o}{b}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

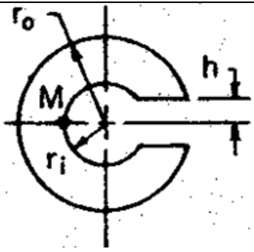
constante dikte</td>
<td>$$I_w = \frac{4\pi^2 t (a - \frac{1}{2}t)^2 (b - \frac{1}{2}t)^2}{\pi(a+b-t)\left(1 + 0,258\dfrac{(a-b)^2}{(a+b-t)^2}\right)}$$
$$\tau_{\text{average}} = \frac{M_w}{2\pi t (a - \frac{1}{2}t)(b - \frac{1}{2}t)}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>

constante dikte</td>
<td>$$I_w = \frac{4A^2 t}{U}$$
$$\tau_{\text{average}} = \frac{M_w}{2At}$$
A is het gemiddelde van de oppervlakken ingesloten door de buiten- en binnen rand.
U is de lengte van de mediaan-rand</td>
</tr>
<tr>
<td>

dikte niet constant</td>
<td>$$I_w = \frac{4A^2}{\int \frac{1}{t}\,dU}$$
$$\tau_{\text{average}} = \frac{M_w}{2At}$$</td>
</tr>
</table>

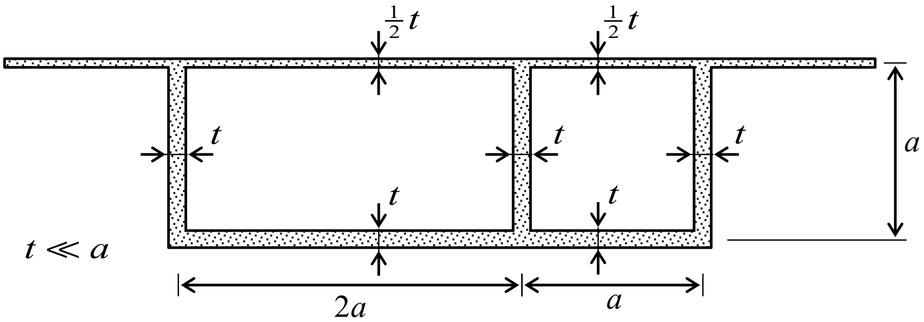
	$I_w = \dfrac{2 t t_1 (a-t)^2 (b-t_1)^2}{t(a-t) + t_1(b-t_1)} \qquad t, t_1 \ll a, b$ $\tau_{\text{gemiddeld}} = \dfrac{M_w}{2t(a-t)(b-t_1)}$ in de korte zijden $\tau_{\text{gemiddeld}} = \dfrac{M_w}{2t_1(a-t)(b-t_1)}$ in de lange zijden Er treden hogere spanningen op in de inwendige hoeken tenzij afrondingen met en redelijk grote straal zijn aangebracht.
 constante dikte	$I_w = \frac{2}{3}\pi r t^3$ $\tau_{\max} = \dfrac{(6\pi r + 1{,}8t)M_w}{4\pi^2 r^2 t^2}$ $t \ll r$
 constante dikte	$I_w = \frac{1}{3} U t^3$ $\tau_{\max} = \dfrac{(3U + 1{,}8t)M_w}{U^2 t^2}$ $t \ll r$ U is de lengte van de mediaanlijn
	$I_w = \dfrac{1}{\dfrac{1}{4I_x} + \dfrac{4}{AU^2}}$ $\tau = \dfrac{M_w D}{I_w} \dfrac{1 + 0.15\left(\dfrac{\pi^2 D^4}{16A^2} - \dfrac{D}{2r}\right)}{1 + \dfrac{\pi^2 D^4}{16A^2}}$ I_x is het traagheidsmoment om de x-as. A is het dwarsdoorsnede-oppervlak. D is de diameter van de grootste ingeschreven cirkel. r is de kromtestraal van de rand ter plaatse van de spanning.
	$I_w = \dfrac{1}{\dfrac{3}{F} + \dfrac{4}{AU^2}} \qquad F = \int_0^U t^3 dU$ A is het dwarsdoorsnede-oppervlak. U is de lengte van de gestreepte mediaanlijn. τ als in voorgaande profiel.
	$I_w = \dfrac{A^4}{40 I_p}$ τ als in voorgaande profiel.

	$I_w = \frac{1}{12} b(m+n)(m^2+n^2) -$ $- m^4\left(0{,}10504 - 0{,}10s + 0{,}0848s^2 - 0{,}06746s^3 + 0{,}0515s^4\right) -$ $- n^4\left(0{,}10504 + 0{,}10s + 0{,}0848s^2 + 0{,}06746s^3 + 0{,}0515s^4\right)$ $s = \frac{m-n}{b}$ $\tau = \frac{M_w D}{I_w} \frac{1}{1+\frac{\pi^2 D^4}{16A^2}}$
	$I_w = ab^3\left(\frac{1}{3} - 0{,}21\frac{b}{a}(1-\frac{b^4}{12a^4})\right) + cd^3\left(\frac{1}{3} - 0{,}105\frac{d}{c}(1-\frac{d^4}{192c^4})\right) +$ $+ D^4\left(0{,}15 + 0{,}10\frac{r}{b}\right)\min(\frac{b}{d},\frac{d}{b})$ $D = \frac{(b+r)^2 + rd + \frac{1}{4}d^2}{2r+b} \qquad d < 2(b+r)$ $\tau = \frac{M_w D}{I_w} \frac{1 + 0{,}0899\ln(1+\frac{D}{2r}) + 0{,}181\frac{D}{2r}}{1+\frac{\pi^2 D^4}{16A^2}}$
	$I_w = ab^3\left(\frac{1}{3} - 0{,}21\frac{b}{a}(1-\frac{b^4}{12a^4})\right) + cd^3\left(\frac{1}{3} - 0{,}105\frac{d}{c}(1-\frac{d^4}{192c^4})\right) +$ $+ D^4\frac{d}{b}\left(0{,}07 + 0{,}076\frac{r}{b}\right)$ $D = 2\left(d + b + 3r - \sqrt{2(2r+b)(2r+d)}\right) \qquad d \le b < 2(d+r)$ τ als in voorgaande profiel
 	Als in voorgaande profiel (optelling van de delen)
	$I_w = 2ab^3\left(\frac{1}{3} - 0{,}21\frac{b}{a}(1-\frac{b^4}{12a^4})\right) + \frac{1}{3}cd^3 + 2D^4\left(0{,}15 + 0{,}10\frac{r}{b}\right)\min(\frac{b}{d},\frac{d}{b})$ τ als in voorgaande profile

	$$I_w = 2r_o^4\left(k_1 + k_2\frac{r_i}{r_o} + k_3\frac{r_i^2}{r_o^2} + k_4\frac{r_i^3}{r_o^3}\right) \qquad \tau_{\max} = \frac{M_w}{r_o^3}\left(h_1 + h_2\frac{r_i}{r_o} + h_3\frac{r_i^2}{r_o^2} + h_4\frac{r_i^3}{r_o^3}\right)$$ $$k_1 = 0,4427 + 0,0064\frac{h}{r_i} - 0,0201\frac{h^2}{r_i^2} \qquad h_1 = 2,0014 - 0,1400\frac{h}{r_i} - 0,3231\frac{h^2}{r_i^2}$$ $$k_2 = -0,8071 - 0,4047\frac{h}{r_i} + 0,1051\frac{h^2}{r_i^2} \qquad h_2 = 2,9047 + 3,0069\frac{h}{r_i} + 4,0500\frac{h^2}{r_i^2}$$ $$k_3 = -0,0469 + 1,2063\frac{h}{r_i} - 0,3538\frac{h^2}{r_i^2} \qquad h_3 = -15,721 - 6,5077\frac{h}{r_i} - 12,496\frac{h^2}{r_i^2}$$ $$k_4 = 0,5023 - 0,9618\frac{h}{r_i} + 0,3639\frac{h^2}{r_i^2} \qquad h_4 = 29,553 + 4,1115\frac{h}{r_i} + 18,845\frac{h^2}{r_i^2}$$ $$0,2 \le \frac{r_i}{r_o} \le 0,6 \qquad 0,1 \le \frac{h}{r_i} \le 1,0$$
In Roark's [2] staan wringformules voor nog 8 doorsneden van machineassen	

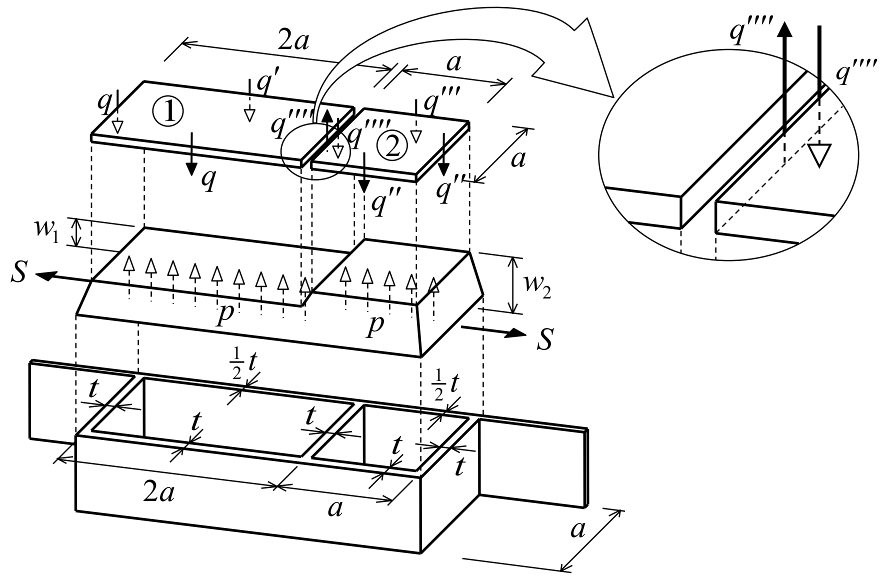
Bijlage 2. Berekening wringeigenschappen van een meercellige koker
[4, deel 1, blz. 196]

In dit voorbeeld worden de wringstijfheid en wringspanningen van een kokerbrug berekend (figuur 41). De dikte van het bovendek ($t/2$) is de helft van de dikte (t) van de andere delen. Omdat $t \ll a$, kunnen we met de hart-op-hart afstand (a en $2a$) van de kokerwanden werken. De eigen bijdrage van de wanden kan dan ook worden verwaarloosd. De uitstekende flenzen van de koker kunnen om die reden eveneens worden genegeerd.



Figuur 41. Dwarsdoorsnede van een kokerbrug

In figuur 42 is een dwarsdoorsnede getekend over het membraan en de twee gewichtloze platen, die in de membraananalogie voorkomen. De linker plaat verplaatst w_1 en de rechter plaat w_2. In de tekening is w_2 groter dan w_1 gekozen. Dit wordt in de berekening consequent aangehouden. Uit de antwoorden zal blijken of dit juist was.



Figuur 42. Evenwicht van membraan en gewichtsloze platen

In het evenwicht van de twee platen spelen membraan-dwarskrachten van verschillende grootte een rol. Als w_2 groter is dan w_1 zullen de getekende dwarskrachten een positieve waarde hebben.

$$q = \frac{w_1}{t} S \quad ; \quad q' = \frac{w_1}{\frac{1}{2}t} S \quad ; \quad q'' = \frac{w_2}{t} S \quad ; \quad q''' = \frac{w_2}{\frac{1}{2}t} S \quad ; \quad q'''' = \frac{w_2 - w_1}{t} S$$

De eerste vier dwarskrachten q, q', q'' en q''' oefenen op de platen neerwaarts gerichte krachten uit. De laatste dwarskracht q'''' werkt op plaat 1 omhoog en op plaat 2 naar beneden (als we w_1 groter hadden getekend dan w_2 dan zou dit net omgekeerd zijn geweest). Het vertikaal evenwicht luidt:

$$q\,a \;+\; q\,2a \;+\; q'\,2a \;-\; q''''\,a \;=\; p\,2a\,a \qquad (plaat\ 1)$$
$$q''\,a \;+\; q''\,a \;+\; q'''\,a \;+\; q''''\,a \;=\; p\,a\,a \qquad (plaat\ 2)$$

Dus

$$\frac{w_1}{t}S\,a \;+\; \frac{w_1}{t}S\,2a \;+\; \frac{w_1}{\frac{1}{2}t}S\,2a \;-\; \frac{w_2-w_1}{t}S\,a \;=\; 2p\,a^2 \qquad (plaat\ 1)$$
$$\frac{w_2}{t}S\,a \;+\; \frac{w_2}{t}S\,a \;+\; \frac{w_2}{\frac{1}{2}t}S\,a \;+\; \frac{w_2-w_1}{t}S\,a \;=\; p\,a^2 \qquad (plaat\ 2)$$

Of wel, na delen door a

$$8\frac{S}{t}w_1 \;-\; \frac{S}{t}w_2 \;=\; 2p\,a \qquad (plaat\ 1)$$
$$-\frac{S}{t}w_1 \;+\; 5\frac{S}{t}w_2 \;=\; p\,a \qquad (plaat\ 2)$$

Uit deze twee vergelijkingen lossen we op

$$w_1 = \frac{11}{39}\frac{p}{S}a\,t \quad ; \quad w_2 = \frac{10}{39}\frac{p}{S}a\,t$$

De verplaatsing w_2 is kleiner dan w_1. Dus de dwarskracht q'''' is juist anders gericht dan is getekend. We maken nu de overgang naar de ϕ-heuvel met $w = \phi$, $p = 2\theta$ en $S = 1/G$. Dat geeft

$$\phi_1 = \frac{22}{39}G\,a\,t\,\theta \quad ; \quad \phi_2 = \frac{20}{39}G\,a\,t\,\theta$$

Het wringend moment is het dubbele volume van de ϕ-heuvel

$$M_w = 2(\phi_1 \cdot 2a \cdot a + \phi_2 \cdot a \cdot a) \quad \rightarrow \quad M_w = \frac{128}{39}G\,a^3\,t\,\theta$$

Het wringtraagheidsmoment is kennelijk

$$I_w = \frac{128}{39}a^3\,t$$

Als we ϕ_1 en ϕ_2 in het moment uitdrukken krijgen we

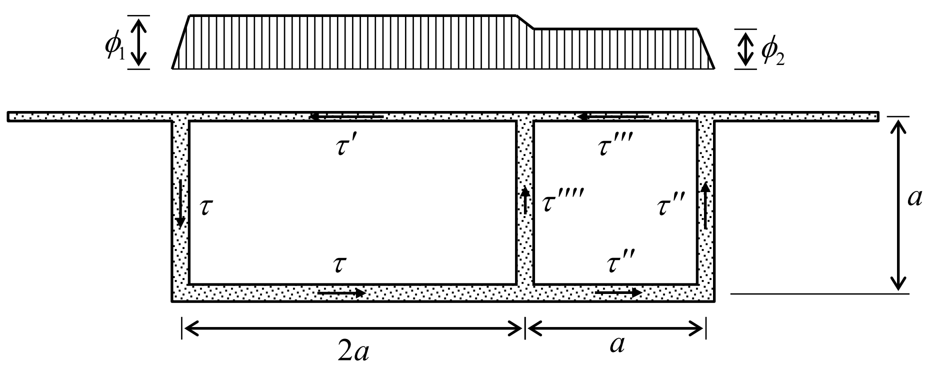
$$\phi_1 = \frac{11}{64}\frac{M_w}{a^2} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{10}{64}\frac{M_w}{a^2}$$

Voor de spanningen vinden we dan (figuur 43)

$$\tau = \frac{\phi_1}{t} = \frac{11}{64}\frac{M_w}{ta^2} \qquad \tau' = \frac{\phi_1}{\frac{1}{2}t} = \frac{22}{64}\frac{M_w}{ta^2} \qquad \tau'' = \frac{\phi_2}{t} = \frac{10}{64}\frac{M_w}{ta^2}$$

$$\tau''' = \frac{\phi_2}{\frac{1}{2}t} = \frac{20}{64}\frac{M_w}{ta^2} \qquad \tau'''' = \frac{\phi_1 - \phi_2}{t} = \frac{1}{64}\frac{M_w}{ta^2}$$

In figuur 43 is de werkelijke richting van de schuifspanningen aangeven. Men kan de eerste kiezen, en verder lettend op het teken van de helling van het membraan aangeven hoe ze in alle andere wanddelen verlopen. Het tussenschot heeft dezelfde helling als het recht lijf, zodat τ'''' in dezelfde richting loopt als τ'' .



Figuur 43. Schuifspanningen in de doorsnede

Oefeningen

Controleer of de resulterende horizontale en vertikale dwarskrachten nul zijn in de besproken tweecellige koker.

Controleer of de berekende verticale spanningen een wringend moment $M_w/2$ leveren . Doe dit eveneens voor de horizontale spanningen.

Bereken met de formules van Bredt de I_w en de spanningen τ als het tussenschot wordt weggelaten. Bereken de verhouding van de I_w's en de maximale τ's voor de situatie met tussenschot en zonder tussenschot. Wat kunt u vaststellen?

Bijlage 3. Berekening nabla-ligger

De voorgespannen betonnen koker van dit voorbeeld is in Nederland bekend als nabla-ligger toegepast in de Deltawerken bij de afsluiting van het Haringvliet. Deze kokerligger werd beschouwd in een tentamen elasticiteitstheorie aan de TU Delft in 1998 [20]. De onderstaande opgave en uitwerking zijn hieruit overgenomen.

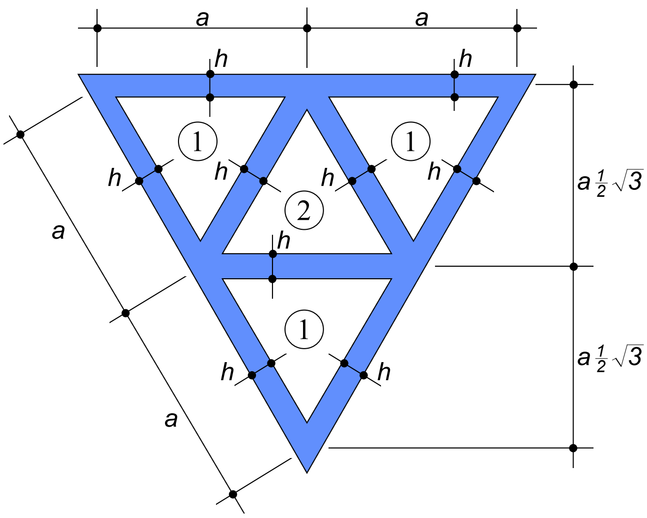
Een kokerligger wordt belast op wringing. De dikten van alle wanden is h zoals is aangegeven in de figuur. We berekenen de koker met de membraan-analogie. De gewichtloze platen in de hoeken van de koker zullen dezelfde verplaatsing ondergaan omdat de koker rotatie-symmetrisch is.

a Bereken de verplaatsingen w_1 en w_2 van de gewichtloze platen.

b Bereken de wringstijfheid GI_w van de doorsnede.

c Bereken de schuifspanningen in de doorsnede en teken ze in de juiste richting.

d Stel dat de welving van de koker plaatselijk wordt verhinderd door inklemming. Wordt de wringstijfheid van de koker hierdoor groter, kleiner of blijft deze ongewijzigd?



Uitwerking

a Gewichtloze platen
We kiezen w_2 van het middelste gat groter dan w_1 van de hoekgaten.

Evenwicht van de gewichtloze plaat boven de hoekgaten geeft

$$p\,\frac{1}{2}a\,a\,\frac{1}{2}\sqrt{3} = a\,S\,\frac{w_1}{h} + a\,S\,\frac{w_1}{h} - a\,S\,\frac{w_2 - w_1}{h}$$

Evenwicht van de gewichtloze plaat boven het middengat geeft

$$p\,\frac{1}{2}a\,a\,\frac{1}{2}\sqrt{3} = a\,S\,\frac{w_2 - w_1}{h} + a\,S\,\frac{w_2 - w_1}{h} + a\,S\,\frac{w_2 - w_1}{h}$$

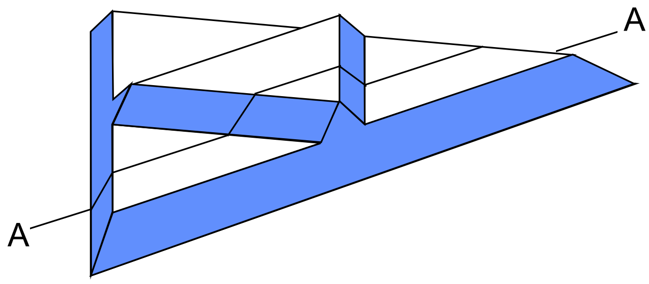
Dit kunnen we vereenvoudigen tot

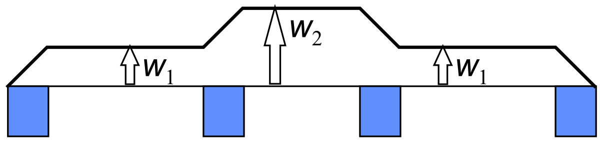
$$p\tfrac{1}{4}a\sqrt{3}=\frac{S}{h}(3\,w_1-w_2)$$

$$p\tfrac{1}{4}a\sqrt{3}=\frac{S}{h}3\,(w_2-w_1)$$

waaruit w_1 en w_2 kunnen worden opgelost.

$$\boxed{\begin{aligned}w_1&=\tfrac{1}{6}\sqrt{3}\,\frac{p}{S}ah\\ w_2&=\tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\frac{p}{S}ah\end{aligned}}$$





doorsnede A-A

b <u>Wringstijfheid</u>

Van het membraan gaan we over naar de ϕ-heuvel met de volgende substituties.

$$w=\phi$$

$$p=2\theta$$

$$S=\frac{1}{G}$$

Dus

$$\phi_1=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,\theta G\,ah$$

$$\phi_2=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\theta G\,ah$$

Het wringend moment is twee maal de inhoud van de ϕ-heuvel.

$$M_w=2\left(\tfrac{1}{2}a\,a\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\phi_1+\tfrac{1}{2}a\,a\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\phi_1+\tfrac{1}{2}a\,a\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\phi_1+\tfrac{1}{2}a\,a\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\phi_2\right)$$

$$=a^2\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,(3\,\phi_1+\phi_2)$$

Substitutie van de vorige relaties hierin geeft

$$\mathrm{M_w}=a^2\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(3\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,\theta G\,ah+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\theta G\,ah\right)$$

$$=a^2\,\tfrac{1}{2}3(1+\tfrac{1}{2})\,\theta G\,ah$$

$$=G\tfrac{9}{4}a^3h\;\theta$$

Voor een draadmodel van een balk geldt

$$M_w=GI_w\,\theta$$

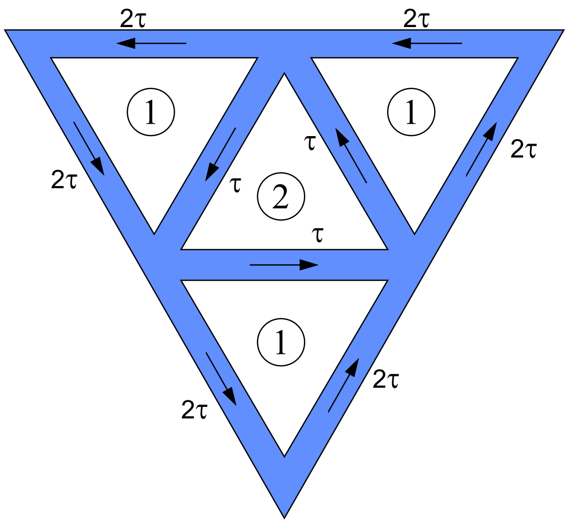
Dus de wringstijfheid is

$$\boxed{GI_w = G\,\tfrac{9}{4}\,a^3 h}$$

c Schuifspanning

De schuifspanning is de helling van de ϕ-heuvel. We herschrijven eerst de relatie voor het wringend moment

$$\theta G\,ah = \tfrac{4}{9}\frac{M_w}{a^2}$$



en drukken ϕ_1 en ϕ_2 uit in het wringend moment

$$\phi_1 = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,\tfrac{4}{9}\frac{M_w}{a^2}$$

$$\phi_2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\tfrac{4}{9}\frac{M_w}{a^2}$$

In de buitenwanden van de koker is de schuifspanning

$$\frac{\phi_1}{h} = \tfrac{4}{27}\sqrt{3}\,\frac{M_w}{a^2 h} = 2\tau$$

In de binnenwanden is de schuifspanning

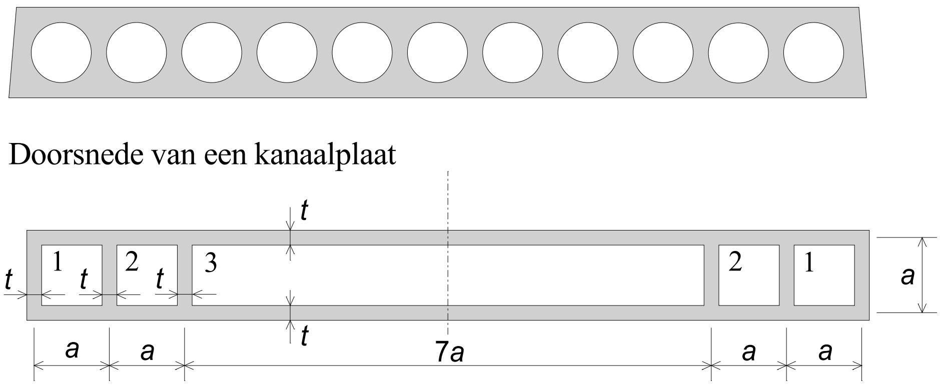
$$\frac{\phi_2 - \phi_1}{h} = \frac{\tfrac{2}{9}\sqrt{3}\,\frac{M_w}{a^2} - \tfrac{4}{27}\sqrt{3}\,\frac{M_w}{a^2}}{h} = \tfrac{2}{27}\sqrt{3}\,\frac{M_w}{a^2 h} = \tau$$

d Welving

Als welving plaatselijk wordt verhinderd zal de koker ter plaatse stijver zijn dan hiervoor berekend.

Bijlage 4. Berekening kanaalplaat

De kanaalplaat van dit voorbeeld was een tentamenopgaven elasticiteitstheorie aan de TU Delft in 2001 [20]. De kanaalplaat heeft 11 kanalen en wordt gemodelleerd als een dunwandige doorsnede. Slecht zes lijven zijn in rekening gebracht in het model. Alle wanden hebben dezelfde dikte *t*.



Model van de kanaalplaat voor berekening van de wringeigenschappen

a Waarom zijn de binnenste lijven weggelaten uit het model?

b Stel de vergelijkingen op voor berekening van de wringstijfheid volgens de membraananalogie. Maak gebruik van symmetrie. (U hoeft de vergelijkingen niet uit te werken.)

c De vergelijkingen zijn voor u opgelost met het volgende resultaat.

$$w_1 = \frac{85}{232}\frac{pat}{S} \qquad w_2 = \frac{108}{232}\frac{pat}{S} \qquad w_3 = \frac{115}{232}\frac{pat}{S}$$

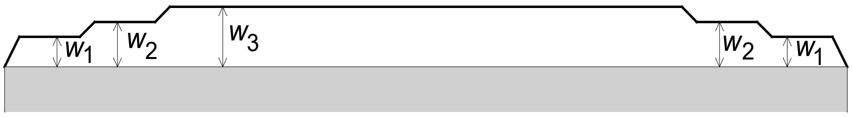
Hierin is w_1 de verplaatsing van de plaat boven gat 1, w_2 die van gat 2 en w_3 die van gat 3. Verder is S de membraanspanning en p is de druk onder de gewichtloze platen. Bereken hiermee de wringstijfheid GI_w van de doorsnede.

d Bereken de schuifspanningen in de doorsnede als functie van het wringend moment en teken ze in de juiste richting.

Uitwerking

a <u>Binnenste lijven</u>
De binnenste lijven zijn weggelaten om twee redenen. 1) Ze dragen waarschijnlijk weinig bij aan de wringeigenschappen. 2) Het aantal vergelijkingen dat moet worden opgelost is hierdoor veel minder.

b <u>Vergelijkingen</u>



Evenwicht van de plaat boven gat 1: $pa^2 = 3a\,S\dfrac{w_1}{t} - a\,S\dfrac{w_2 - w_1}{t}$

Plaat 2: $pa^2 = a\,S\dfrac{w_2 - w_1}{t} + 2a\,S\dfrac{w2}{t} - a\,S\dfrac{w_3 - w_2}{t}$

Plaat 3: $pa\,7a = 2a\,S\dfrac{w_3 - w_2}{t} + 2(7a)S\dfrac{w_3}{t}$

c Wringstijfheid

Van het membraan gaan we over naar de ϕ-heuvel met de volgende substituties.

$$w = \phi \qquad p = 2\theta \qquad S = \frac{1}{G}$$

Dus

$$\phi_1 = \frac{85}{232}2\theta Gat \qquad \phi_2 = \frac{108}{232}2\theta Gat \qquad \phi_3 = \frac{115}{232}2\theta Gat$$

Het wringend moment is twee maal de inhoud van de ϕ-heuvel.

$$M_w = 2\left(2\phi_1\,a^2 + 2\phi_2\,a^2 + \phi_3\,a(7a)\right)$$

$$M_w = 2\left(2\frac{85}{232}2\theta Gat\,a^2 + 2\frac{108}{232}2\theta Gat\,a^2 + \frac{115}{232}2\theta Gat\,a(7a)\right)$$

$$M_w = \frac{1191}{58}\theta Ga^3t$$

Voor een draadmodel van de balk geldt

$$M_w = GI_w\theta$$

Dus de wringstijfheid is

$$GI_w = \frac{1191}{58}Ga^3t$$

d Schuifspanningen

De schuifspanning is de helling van de ϕ-heuvel. We herschrijven eerst de vergelijking voor het wringend moment

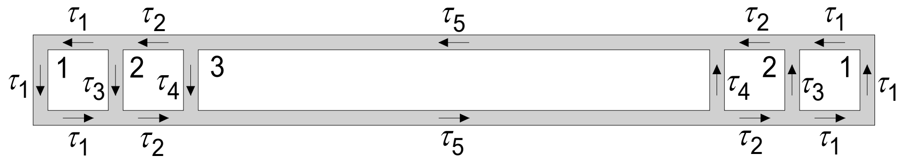
$$\theta Gat = \frac{M_w}{a^2}\frac{58}{1191}$$

en drukken ϕ_1, ϕ_2 en ϕ_3 uit in het wringend moment.

$$\phi_1 = \frac{85}{232}2\frac{M_w}{a^2}\frac{58}{1191} \qquad \phi_2 = \frac{108}{232}2\frac{M_w}{a^2}\frac{58}{1191} \qquad \phi_3 = \frac{115}{232}2\frac{M_w}{a^2}\frac{58}{1191}$$

$$\phi_1 = \frac{85}{2382}\frac{M_w}{a^2} \qquad \phi_2 = \frac{108}{2382}\frac{M_w}{a^2} \qquad \phi_3 = \frac{115}{2382}\frac{M_w}{a^2}$$

De schuifspanningen worden nu



$$\tau_1 = \frac{\phi_1}{t} = \frac{85}{2382}\frac{M_w}{a^2 t}$$

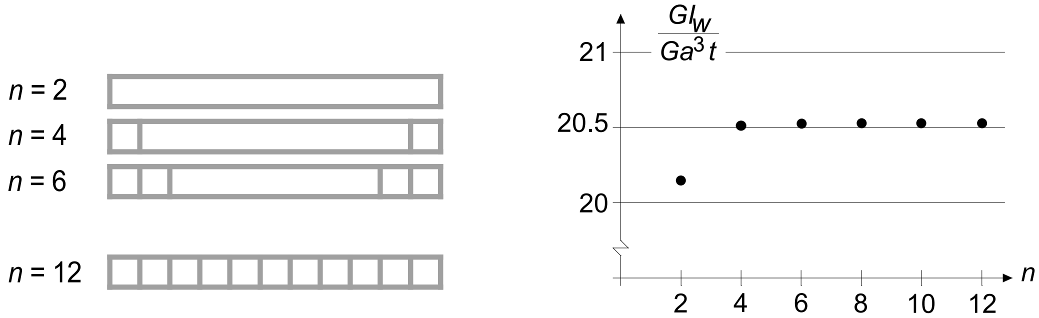
$$\tau_2 = \frac{\phi_2}{t} = \frac{108}{2382}\frac{M_w}{a^2 t}$$

$$\tau_3 = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t} = \frac{23}{2382}\frac{M_w}{a^2 t}$$

$$\tau_4 = \frac{\phi_3 - \phi_2}{t} = \frac{7}{2382}\frac{M_w}{a^2 t}$$

$$\tau_5 = \frac{\phi_3}{t} = \frac{115}{2382}\frac{M_w}{a^2 t}$$

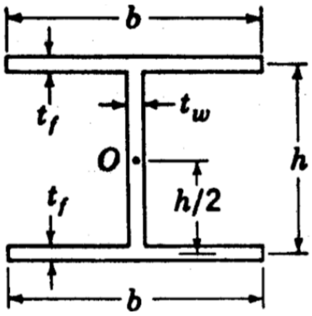
<u>Toegift</u> (geen tentamenvraag)
In de onderstaande figuur is de wringstijfheid uitgezet als functie van het aantal lijven *n* in het model. Het blijkt dat een model met 4 lijven voldoende nauwkeurig is voor het berekenen van de wringstijfheid.



De grootste schuifspanning convergeert minder snel met toenemende *n* (niet geplot). Maar het model met 6 lijven is ruim voldoende nauwkeurig. De grootste schuifspanning in het model met 12 lijven is namelijk $\tau_{max} = \frac{225}{4624}\frac{M_w}{a^2 t}$ wat slechts 0,8% groter is dan die van het model met 6 lijven.

Bijlage 5. Wringeigenschappen van open dunwandige doorsneden [5]

De plaats van het dwarskrachtencentrum is aangegeven met *O*.

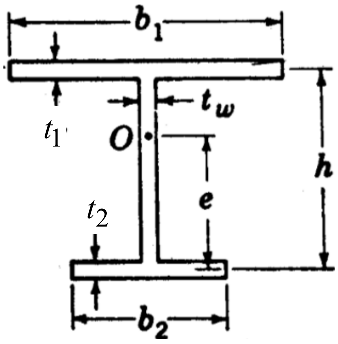


$$I_w = \tfrac{1}{3}(2bt_f^3 + ht_w^3)$$

$$C_w = \tfrac{1}{24} t_f b^3 h^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{t M_w}{I_w} \qquad t = \max(t_f, t_w)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\tfrac{1}{6} b^2 h t_f}$$

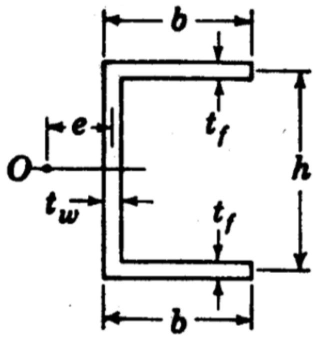


$$e = h \frac{b_1^3 t_1}{b_1^3 t_1 + b_2^3 t_2}$$

$$I_w = \tfrac{1}{3}\left(b_1 t_1^3 + b_2 t_2^3 + h t_w^3\right)$$

$$C_w = \tfrac{1}{12} h^2 \frac{b_1^3 t_1 b_2^3 t_2}{b_1^3 t_1 + b_2^3 t_2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\tfrac{1}{6} b_2^2 h t_2} \qquad \text{or} \qquad \sigma_{\max} = \frac{B}{\tfrac{1}{6} b_1^2 h t_1}$$

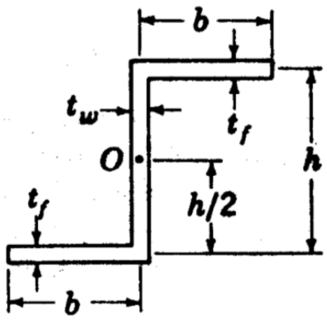


$$e = \frac{3b^2 t_f}{6bt_f + ht_w}$$

$$I_w = \tfrac{1}{3}(2bt_f^3 + ht_w^3)$$

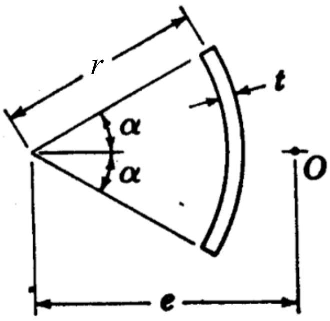
$$C_w = \tfrac{1}{12} b^3 h^2 t_f \frac{3bt_f + 2ht_w}{6bt_f + ht_w}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\tfrac{1}{6} b^2 h t_f \dfrac{3bt_f + 2ht_w}{3bt_f + ht_w}}$$

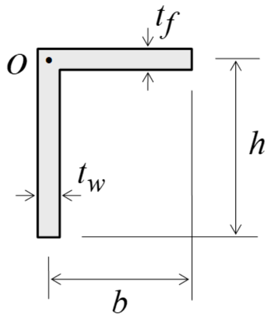


$$I_w = \tfrac{1}{3}(2bt_f^3 + ht_w^3)$$

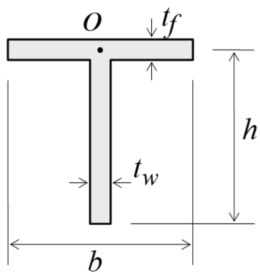
$$C_w = \tfrac{1}{12} b^3 h^2 \frac{2t_f(b^2 + bh + h^2) + 3bht_w}{(2b+h)^2}$$



$$e = 2r\frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$
$$I_w = \tfrac{2}{3} r\,\alpha\, t^3$$
$$C_w = \tfrac{2}{3} r^5 t(\alpha^3 - 6\frac{(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)^2}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha})$$



$$I_w = \tfrac{1}{3}(b\,t_f^3 + h\,t_w^3)$$
$$C_w = \tfrac{1}{36}(b^3 t_f^3 + h^3 t_w^3)$$



$$I_w = \tfrac{1}{3}(b\,t_f^3 + h\,t_w^3)$$
$$C_w = \tfrac{1}{36}(\tfrac{1}{4} b^3 t_f^3 + h^3 t_w^3)$$

Meer dwarsdoorsneden staan in Roark’s [2] tabel 21.

Bijlage 6. Maple-berekening van een kokerbrug met de Vlasov-theorie

```
> restart:
> l:=60:          # [m]
> ECw:=1183e9:    # [Nm4]
> GIw:=2690e8:    # [Nm2]
> mx:=0:          # [Nm/m]
> T:=269e5:       # [Nm]
>
> with(DEtools):
> ODE:=ECw*diff(phi(x),x,x,x,x)-GIw*diff(phi(x),x,x)=mx;
```

$$ODE := .1183\ 10^{13} \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4}\phi(x)\right) - .2690\ 10^{12}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x)\right) = 0$$

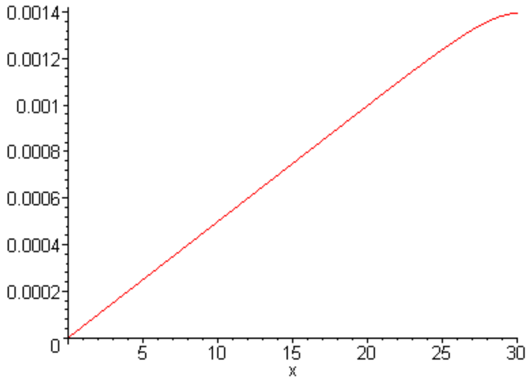
```
> bound_con:= phi(0)=0,  (D@@2)(phi)(0)=0,  GIw*D(phi)(l/2)-
ECw*(D@@3)(phi)(l/2)=T/2,  D(phi)(l/2)=0;
```

$$bound\_con := \phi(0) = 0,\ (D^{(2)})(\phi)(0) = 0,$$
$$.2690\ 10^{12}\ D(\phi)(30) - .1183\ 10^{13}\ (D^{(3)})(\phi)(30) = .1345000000\ 10^{8},\ D(\phi)(30) = 0$$

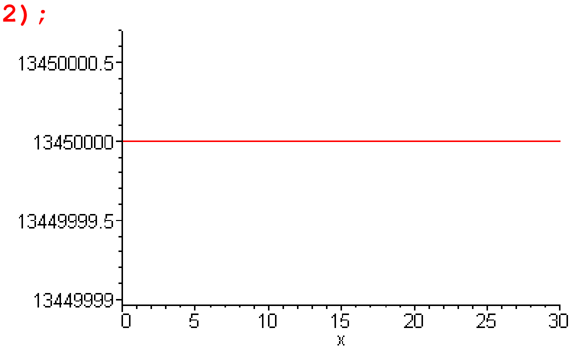
```
> evalf(dsolve({ODE,bound_con},{phi(x)}));
```

$$\phi(x) = .00005000000000\ x + .6423299796\ 10^{-10}\ \mathbf{e}^{(-.4768521749\ x)} - .6423299796\ 10^{-10}\ \mathbf{e}^{(.4768521749\ x)}$$

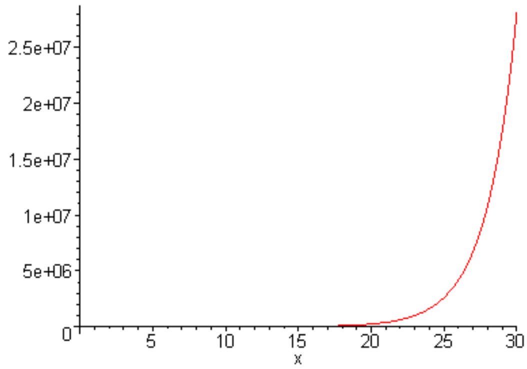
```
> phi:=0.5000000000e-4*x-0.6423299796e-
10*exp(0.4768521749*x)+0.6423299796e-10*exp(-0.4768521749*x):
> B:=-ECw*diff(phi,x,x):
> Mw:=Re(GIw*diff(phi,x)+diff(B,x)):
> plot(phi(x),x=0..l/2);
```




```
> plot(Mw,x=0..l/2);
```




```
> plot(B,x=0..l/2);
```




```
> x:=1/2: simplify(B); simplify(phi);
```

$$.2820580643\ 10^{8}$$

$$.001395145701$$

Bijlage 7. Maple-berekening van een uitkragende ligger met de Vlasov-theorie

```
> restart:
> l:=2540:              # [mm]
> ECw:=207000*191e8:    # [Nmm4]
> GIw:=79300*278000:    # [Nmm2]
> mx:=0:                # [Nmm/mm]
> T:=2.26e6:            # [Nmm]
>
> with(DEtools):
> ODE:=ECw*diff(phi(x),x,x,x,x)-GIw*diff(phi(x),x,x)=mx;
```

$$ODE := 0.39537000\,10^{16}\left(\frac{d^4}{dx^4}\phi(x)\right) - 22045400000\left(\frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right) = 0$$

```
> bound_con:= phi(0)=0, D(phi)(0)=0, GIw*D(phi)(l)-
ECw*(D@@3)(phi)(l)=T, (D@@2)(phi)(l)=0;
```

$$bound\_con := \phi(0) = 0,\ \mathrm{D}(\phi)(0) = 0,$$

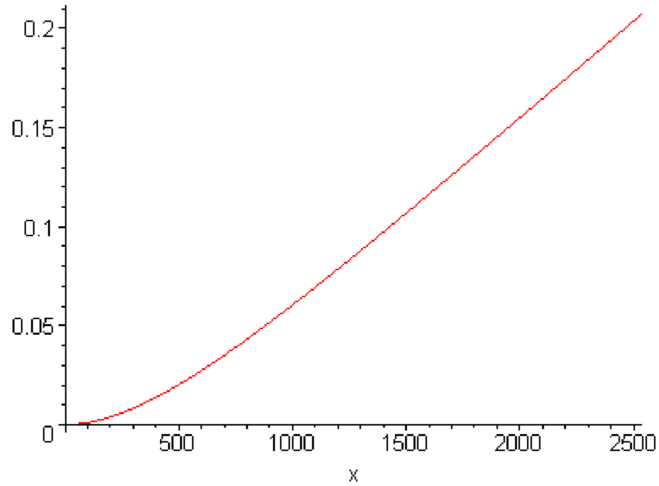
$$22045400000\,\mathrm{D}(\phi)(2540) - 0.39537000\,10^{16}\,(\mathrm{D}^{(3)})(\phi)(2540) = 0.226\,10^{7},$$

$$(\mathrm{D}^{(2)})(\phi)(2540) = 0$$

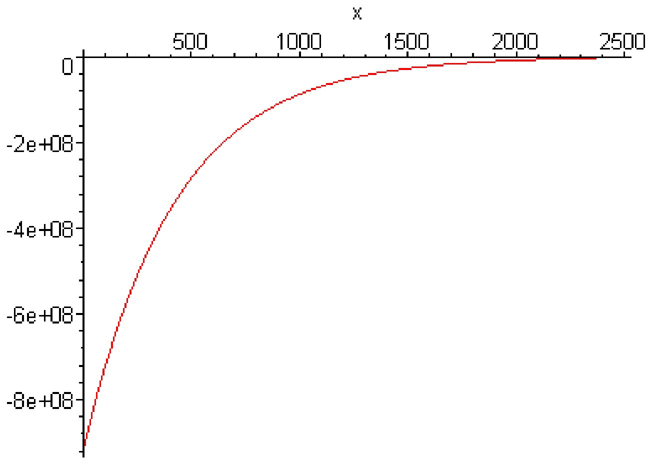
```
> evalf(dsolve({ODE,bound_con},{phi(x)}));
```

$$\phi(x) = -0.04341381587 + 0.0001025157176\,x - 0.2679299633\,10^{-6}\,\mathbf{e}^{(0.002361332449\ x)} + 0.04341408381\,\mathbf{e}^{(-0.002361332449\ x)}$$

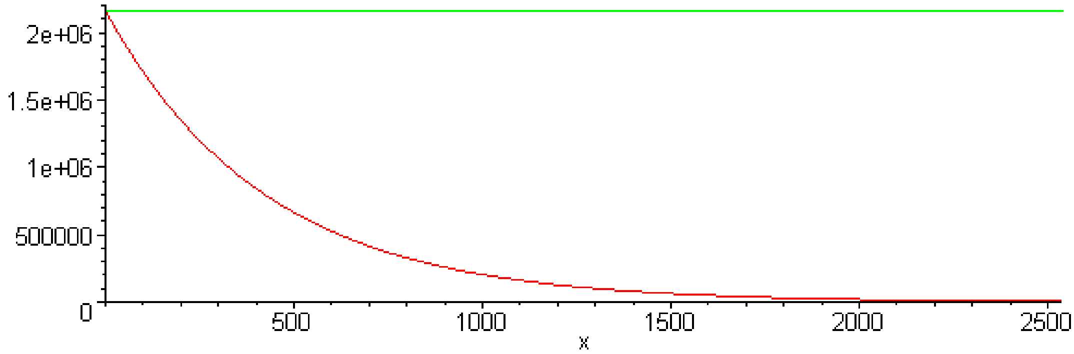
```
> phi:=-.4154442895e-1+.9810141906e-4*x-.2563929731e-
6*exp(.2361332449e-2*x)+.4154468535e-1*exp(-.2361332449e-2*x):
> B:=-ECw*diff(phi,x,x):
> Mw1:=GIw*diff(phi,x):
> Mw2:=diff(B,x):
> plot(phi,x=0..l);
```



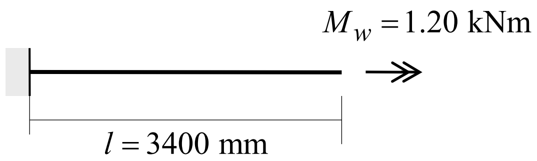

```
> plot(B,x=0..l);
```



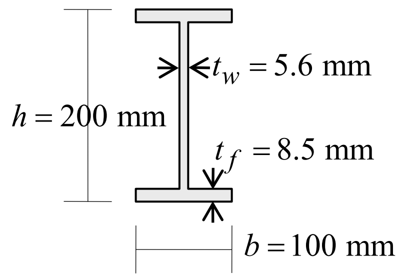

```
> plot({Mw2,Mw1+Mw2},x=0..l);
```



Bijlage 8. Berekening van wringspanningen in een I-profiel



Uitkragende ligger op wringing belast



Dwarsdoorsnede, IPE 200

elastiteitsmodulus	$E = 2.1\ 10^5$ N/mm²
dwarscontractiecoefficient	$\nu = 0.35$
glijdingsmodulus	$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 77777$ N/mm²
wringtraagheidsmoment	$I_w = \frac{1}{3}(h - t_f)\,t_w^3 + \frac{2}{3} b t_f^3 = 52152$ mm^4
welvingsconstante	$C_w = \frac{1}{24} t_f\,(h - t_f)^2 b^3 = 1299\ 10^7$ mm^6
karakteristieke lengte	$l_c = \sqrt{\dfrac{E\,C_w}{G\,I_w}} = 820{,}0$ mm

In een dwarsdoorsnede die vrij kan welven ontstaan slechts schuifspanningen. Dit gebeurt in het vrije uiteinde van de ligger. De grootste schuifspanning is

$$\tau_{\max} = \frac{M_w t_f}{I_w} = 196 \text{ N/mm}^2.$$

De Von Mises spanning is $\sqrt{3\tau_{\max}^2} = 339$ N/mm².

In dwarsdoorsneden die niet kunnen welven ontstaan voornamelijk normaalspanningen. Dit gebeurt in het ingeklemde uiteinde van de ligger.
Het bi-moment aldaar is

$$B = l_c M_w = 9840\ 10^5 \text{ Nmm}^2.$$

Deze formule is nauwkeuring als $l_c < \frac{1}{3} l$, waar aan voldaan is.
De grootste normaalspanning in de inklemming is

$$\sigma_{\max} = \frac{B}{\frac{1}{6}(h - t_f)\,t_f\,b^2} = 363 \text{ N/mm}^2.$$

Deze spanning treedt op links en rechts in de flenzen zowel in druk als in trek.

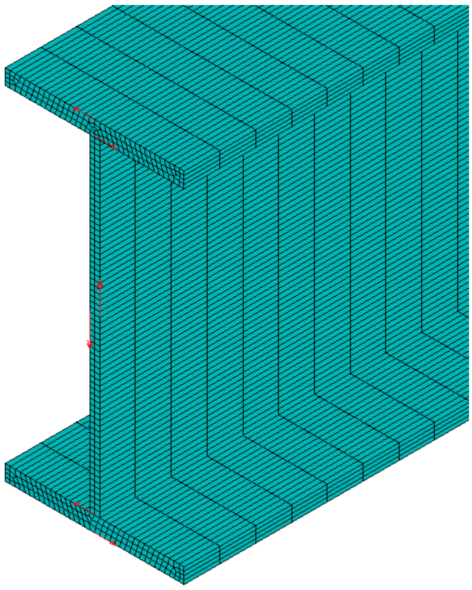
De rotatie van het vrije uiteinde is

$$\varphi = \frac{M_w}{GI_w}\left(l - l_c \tanh \frac{l}{l_c} \right) = 0{,}763 \text{ rad.}$$

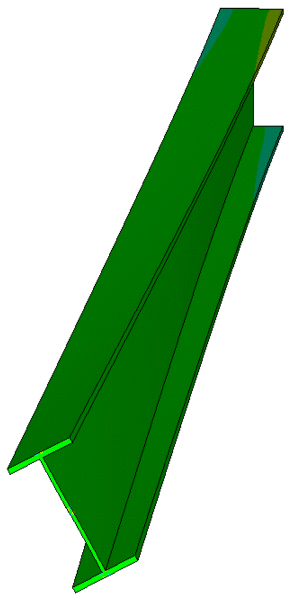
Het moet opgemerkt worden dat uit plastisch oogpunt, de spanningen door het bi-moment kunnen worden genegeerd omdat de schuifspanningen volgens Vlasov een evenwichtssysteem vormen wat de belasting kan dragen.

Controle

Een eindige-elementenberekening is gemaakt met ANSYS 11. Toegepast zijn 20-knoops baksteenvormige elementen (solid95). Op het ingeklemde uiteinde zijn alle vrijheidsgraden vastgezet. Op het vrije uiteinde is een wringend moment aangebracht met zes krachten. Het model heeft 959820 vrijheidsgraden. Een lineair elastische berekening is gemaakt (31 minuten op een Pentium 4 PC).



Figuur. Elementennet en wringbelasting (rode pijlen) op het vrije uiteinde van de uitkragende ligger

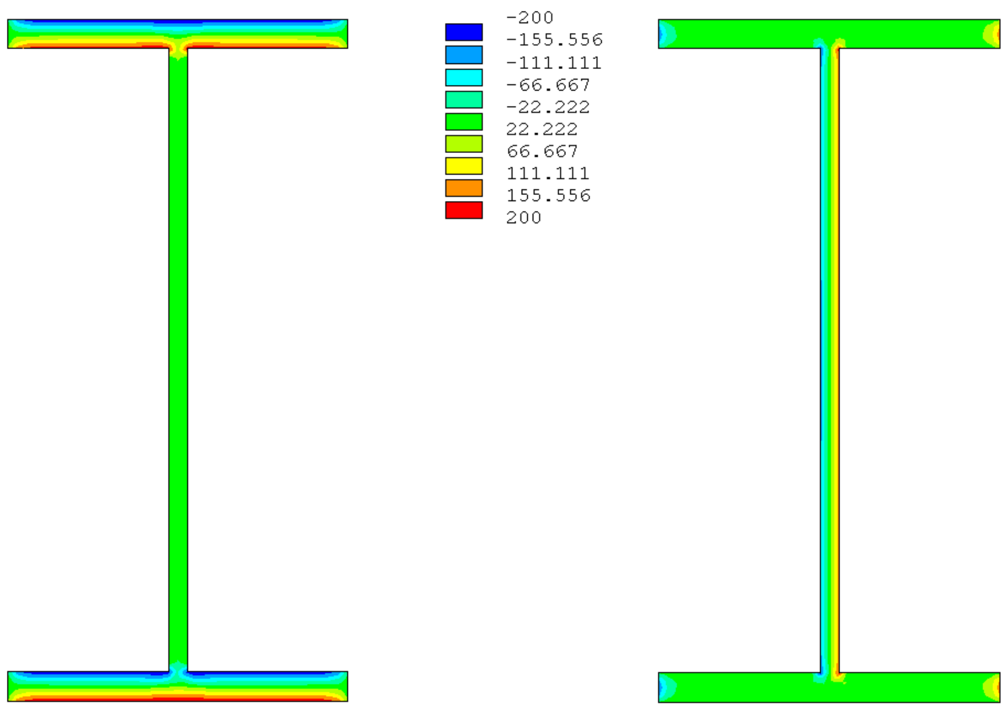


Figuur. Wringvervorming

De horizontale verplaatsing van knopen in de vrije uiteinden van flenzen zijn –87,3 mm en 87,3 mm. Derhalve is de rotatie

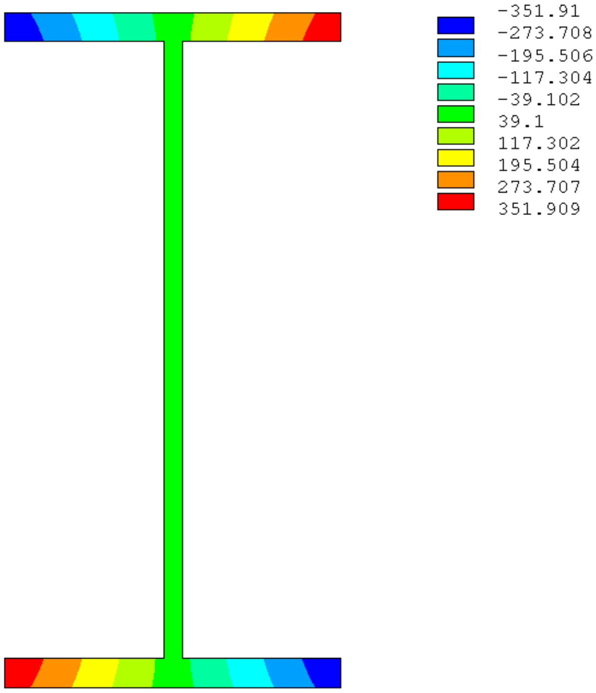
$$\varphi = \frac{87,3 + 87,3}{200} = 0,873 \text{ rad}.$$

Het resultaat van de handberekening is 13% kleiner. Dit kan veroorzaakt worden door afschuifvervorming van de flenzen.



Figuur. Horizontale en verticale schuifspanningen op 300 mm van het vrije uiteinde

De spanningen in de inwendige hoeken van de dwarsdoorsnede zijn genegeerd. (In theorie hebben deze onafgeronde hoeken oneindig grote spanningen.) De grootste schuifspanning in de doorsnede bij het vrije uiteinde is 200 N/mm². Het resultaat van de handberekening is 2% kleiner.

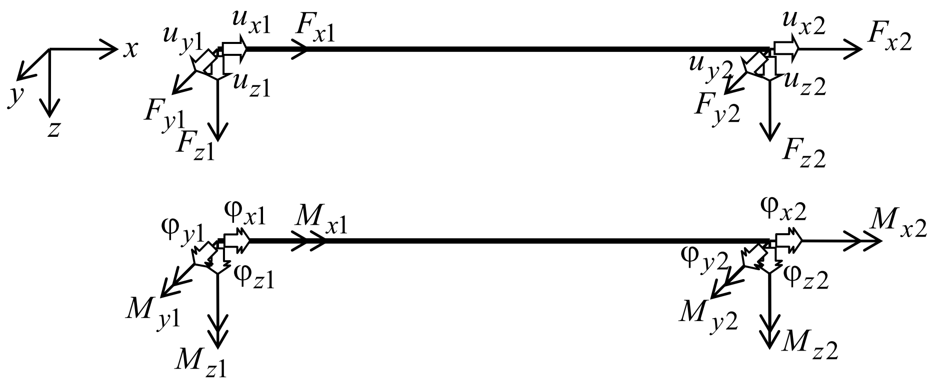


Figuur. Normaalspanning in een doorsnede 50 mm van het ingeklemde einde

De grootste normaalspanning in het ingeklemde einde is 352 N/mm². Het resultaat van de handberekening is 3% groter. De verschillen tussen de resultaten van de handberekening en de eindige-elementenberekening zijn acceptabel voor de meeste toepassingen.

Bijlage 9. Stijfheidsmatrix van een raamwerkelement

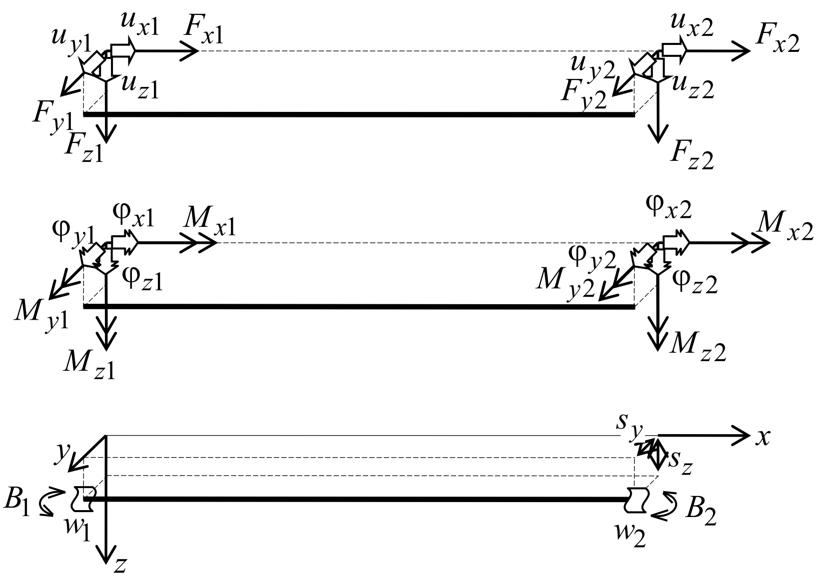
In sommige raamwerkprogramma's zijn de wringeigenschappen niet goed geïmplementeerd. Ten behoeve van softwareontwikkelaars is hieronder de juiste stijfheidsmatrix opgenomen volgens de wringtheorie van Saint-Venant. De *x*-as is in de richting van de ligger of kolom. De *y*- en *z*-as zijn de hoofdtraagheidsrichtingen van de doorsnede. e_y en e_z zijn de coördinaten van het dwarskrachtencentrum. I_{yy} is het traagheidsmoment van de doorsnede in de *y*-richting en I_{zz} is het traagheidsmoment van de doorsnede in de *z*-richting. Afschuifvervorming is verwaarloosd.



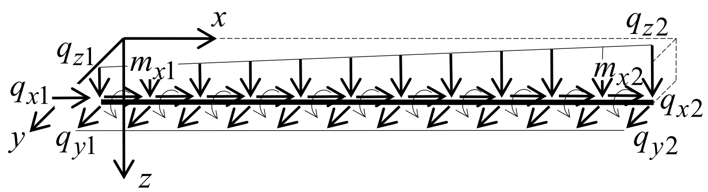
$$
\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & -e_z 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & 6\frac{EI_{yy}}{l^2} & 0 & -12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & e_z 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & 6\frac{EI_{yy}}{l^2} \\
. & . & 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & e_y 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -6\frac{EI_{zz}}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -6\frac{EI_{zz}}{l^2} & 0 \\
. & . & . & \frac{GI_w}{l} + e_z^2 12\frac{EI_{yy}}{l^3} + e_y^2 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -e_y 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & -e_z 6\frac{EI_{yy}}{l^2} & 0 & e_z 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & -e_y 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -\frac{GI_w}{l} - e_z^2 12\frac{EI_{yy}}{l^3} - e_y^2 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & -e_y 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & -e_z 6\frac{EI_{yy}}{l^2} \\
. & . & . & . & 4\frac{EI_{zz}}{l} & 0 & 0 & 0 & 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & e_y 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & 2\frac{EI_{zz}}{l} & 0 \\
. & . & . & . & . & 4\frac{EI_{yy}}{l} & 0 & -6\frac{EI_{yy}}{l^2} & 0 & e_z 6\frac{EI_{yy}}{l^2} & 0 & 2\frac{EI_{yy}}{l} \\
. & . & . & . & . & . & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & \text{sym.} & . & . & . & 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & -e_z 12\frac{EI_{yy}}{l^3} & 0 & -6\frac{EI_{yy}}{l^2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & e_y 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & \frac{GI_w}{l} + e_z^2 12\frac{EI_{yy}}{l^3} + e_y^2 12\frac{EI_{zz}}{l^3} & e_y 6\frac{EI_{zz}}{l^2} & e_z 6\frac{EI_{yy}}{l^2} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 4\frac{EI_{zz}}{l} & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 4\frac{EI_{yy}}{l}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \end{bmatrix}
$$

De matrix kan als volgt worden gecontroleerd: Een rotatie η om het dwarskrachtencentrum bij knoop 2 geeft $\varphi_{x2} = \eta$, $u_{y2} = e_z \eta$, $u_{z2} = -e_y \eta$. De resterende verplaatsingen en rotaties zijn nul. Invullen in de matrix geeft $M_{x1} = -\frac{GI_w}{l}\eta$, $M_{x2} = \frac{GI_w}{l}\eta$. De andere krachten en momenten zijn nul. Dit is het correcte resultaat.

De voorgaande stijfheidsmatrix kan worden uitgebreid met afschuifvervorming en verhinderde welving. Ook hoeven de *y*- en *z*-as niet te wijzen in de hoofdrichtingen en kan het element worden verschoven over afstanden s_y en s_z opzichte van de knopen. Bovendien kunnen lineair verdeelde belastingen q_x, q_y en q_z worden aangebracht en een lineair verdeeld wringend moment m_x worden aangebracht. Het resultaat is hier niet vermeld omdat het niet past op een bladzijde. De onderstaande Maple-berekening produceert de 14×14 elementen van de stijfheidsmatrix. Deze kunnen worden gekopieerd naar Fortran of een andere taal waarin het raamwerkprogramma is geprogrammeerd.



$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \\ M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \\ B_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \\ M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \\ N_9 \\ N_{10} \\ N_{11} \\ N_{12} \\ N_{13} \\ N_{14} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & & & K_{1,14} \\ & K_{2,2} & & & \\ & & K_{3,3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & sym. & & \\ & & & & K_{14,14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ w_1 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \\ w_2 \end{bmatrix}$$



Merk op dat er beperkingen zijn bij het aansluiten van elementen. De welving kan alleen worden aangesloten als de elementen dezelfde doorsnede hebben en in elkaars verlengde liggen. Zo niet dan moet worden gekozen voor geen welving (w = 0) of geen bi-moment (B = 0).

```
> restart: # Frame element stiffness matrix including restrained warping
> # The element has 3 lines: 1) structure line, 2) normal force centre line, 3) shear
> force centre line. The normal force centre line is offset by sy, sz to the structure
> centre line. The shear centre line is offset by ey, ez to the normal force centre
line
> qx:=qx1*(1-x/l)+qx2*x/l:        # load on the normal force centre line
> qy:=qy1*(1-x/l)+qy2*x/l:
> qz:=qz1*(1-x/l)+qz2*x/l:
> mx:=mx1*(1-x/l)+mx2*x/l:
> e:=diff(ux(x),x):               # axial strain of the structure centre line
> phiy:=gy(x)-diff(uy(x),x):      # rotations of a section. g is the shear deformation
> phiz:=gz(x)-diff(uz(x),x):
> Ky:=diff(phiy,x):               # curvatures
> Kz:=diff(phiz,x):
> N:=EA*e+EA*sy*Ky+EA*sz*Kz:      # normal force and moments
> My:=EA*sy*e+EIyy*Ky+EIyz*Kz:
> Mz:=EA*sz*e+EIyz*Ky+EIzz*Kz:
> Vy:=GAy*gy(x):                  # shear forces
> Vz:=GAz*gz(x):
> B:=-ECw*diff(phi(x),x,x):       # bi moment
>                                 # phi is the rotation around the shear centre line
> Mx:=GIw*diff(phi(x),x)+diff(B,x)+Vz*ey-Vy*ez: # torsion moment
> DE1:= diff(N,x)+qx=0:
> DE2:= diff(Vy,x)+qy=0:
> DE3:= diff(Vz,x)+qz=0:
> DE4:= diff(Mx,x)+mx=0:
> DE5:= diff(My,x)-Vy=0:
> DE6:= diff(Mz,x)-Vz=0:
> BC1:= ux1=ux(0), ux2=ux(l):
> BC2:= uy1=uy(0)+phi(0)*(sz+ez), uy2=uy(l)+phi(l)*(sz+ez), phiz1=-gy(0)+D(uy)(0),
phiz2=-gy(l)+D(uy)(l):
> BC3:= uz1=uz(0)-phi(0)*(sy+ey), uz2=uz(l)-phi(l)*(sy+ey), phiy1= gz(0)-D(uz)(0),
phiy2= gz(l)-D(uz)(l):
> BC4:= phix1=phi(0), phix2=phi(l), w1=D(phi)(0), w2=D(phi)(l):
> Opl:=dsolve({DE1,DE2,DE3,DE4,DE5,DE6,
BC1,BC2,BC3,BC4},{ux(x),uy(x),uz(x),phi(x),gy(x),gz(x)}): assign(Opl):
> e:=diff(ux(x),x):
> phiy:=gy(x)-diff(uy(x),x):
> phiz:=gz(x)-diff(uz(x),x):
> Ky:=diff(phiy,x):
> Kz:=diff(phiz,x):
> N:=EA*e+EA*sy*Ky+EA*sz*Kz:
> My:=EA*sy*e+EIyy*Ky+EIyz*Kz:
> Mz:=EA*sz*e+EIyz*Ky+EIzz*Kz:
> Vy:=GAy*gy(x):
> Vz:=GAz*gz(x):
> B:=-ECw*diff(phi(x),x,x):
> Mx:=GIw*diff(phi(x),x)+diff(B,x)+Vz*ey-Vy*ez:
> x:=0: Fx1:=-N: Fy1:=-Vy: Fz1:=-Vz: Mx1:=-Mx: My1:=-Mz: Mz1:=My:  B1:=B:  x:='x':
> x:=l: Fx2:=N:  Fy2:=Vy:  Fz2:=Vz:  Mx2:= Mx: My2:=Mz:  Mz2:=-My: B2:=-B: x:='x':
> K[1,1]:=simplify(diff(Fx1,ux1)):
> K[1,2]:=simplify(diff(Fx1,uy1)):
> K[2,2]:=simplify(diff(Fy1,uy1)):
> K[14,14]:=simplify(diff(B2,w2)):
> # etc.
> ux1:=0: uy1:=0: uz1:=0: phix1:=0: phiy1:=0: phiz1:=0: w1:=0:
> ux2:=0: uy2:=0: uz2:=0: phix2:=0: phiy2:=0: phiz2:=0: w2:=0:
> N[1]:=simplify(Fx1):
> N[2]:=simplify(Fy1):
```

```
> # etc.
>
>
```

Bijlage 10. Afleiding van de Vlasov-theorie

In deze bijlage worden de vergelijkingen van de wringtheorie van Vlasov afgeleid.

Ingrediënten

De volgende definities worden gebruikt.

rek	$\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u_x}{\partial x}$	[4]	(1)
welving	$u_x = \Psi\,\theta$	(blz. 5)	(2)
verwringing	$\theta = \dfrac{d\varphi}{dx}$	(blz. 5)	(3)
schuifspanningen	$\tau_{xy} = \tau_{xyS} + \tau_{xyV}$ $\tau_{xz} = \tau_{xzS} + \tau_{xzV}$		(4)
	$\tau_{xyS} = G(\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} - z)\theta$ $\tau_{xzS} = G(\dfrac{\partial\Psi}{\partial z} + y)\theta$	(blz. 6)	(5)
randvoorwaarde	$\tau_{xy}\dfrac{dz}{dS} - \tau_{xz}\dfrac{dy}{dS} = 0$	[4]	(6)
wringend moment	$M_{wS} = \int_A (y\,\tau_{xzS} - z\,\tau_{xyS})dA$	(blz. 6)	(7)
	$M_{wV} = \int_A (y\,\tau_{xzV} - z\,\tau_{xyV})dA$		(8)
	$M_w = M_{wS} + M_{wV}$		(9)
	$m_x + \dfrac{dM_w}{dx} = 0$		(10)
	$M_{wS} = GI_w\theta$	(blz. 3)	(11)
bi-moment	$B = -\int_A \sigma_{xx}\Psi\,dA$	(blz. 24)	(12)
welvingsconstante	$C_w = \int_A \Psi^2 dA$	(blz. 24)	(13)

Eén van de evenwichtsvergelijkingen van lineair elastische materialen is

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad [4] \qquad (14)$$

Eén van de constitutieve vergelijkingen van lineair elastische materialen is

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \nu\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}. \qquad [4]$$

In liggers zijn de spanningen loodrecht op het langsoppervlak klein en verwaarloosbaar. Dus $\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$. Substitutie in de vorige vergelijking geeft

$$\sigma_{xx} = E\,\varepsilon_{xx}\,. \tag{15}$$

Benadering

Aangenomen wordt dat $\frac{1}{G\theta}\int_A (\tau_{xyS}\tau_{xyV} + \tau_{xzS}\tau_{xzV})dA$ veel kleiner is dan het wringend moment in een liggerdoorsnede.

$$\frac{1}{G\theta}\int_A (\tau_{xyS}\tau_{xyV} + \tau_{xzS}\tau_{xzV})dA \ll M_w \tag{16}$$

Voor dunwandige open doorsneden wordt hieraan voldaan. Dit volgt uit figuur 40: De Saint-Venant-spanning gaat gedeeltelijk met de Vlasov-spanning mee en gedeeltelijk tegen de Vlasov-spanning in. De mee- en tegen-bijdragen aan de integraal heffen elkaar op.

Voor andere doorsneden is de nauwkeurigheid van deze benadering niet duidelijk. Merk op dat de Vlasov-theorie laat zien dat verhinderde welving voor gesloten en massieve doorsneden vaak verwaarloosbaar is. Echter, de bovenstaande onduidelijkheid maakt deze conclusie minder hard. Meer onderzoek is derhalve nodig.

Afleiding

Substitutie van vergelijking 1, 2 en 3 in 15 geeft

$$\sigma_{xx} = E\Psi\frac{d^2\varphi}{dx^2}\,. \tag{17}$$

Substitutie van dit in vergelijking 12 gebruikmakend van vergelijking 13 geeft

$$\boxed{B = -EC_w\frac{d^2\varphi}{dx^2}} \tag{18}$$

Substitutie van dit in vergelijking 17 geeft

$$\boxed{\sigma_{xx} = -\frac{B\Psi}{C_w}} \tag{19}$$

Substitutie van dit in vergelijking 14 geeft

$$\frac{\partial \tau_{xyV}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xzV}}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\Psi}{C_w}.$$

$$\int_A \left(\frac{\partial \tau_{xyV}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xzV}}{\partial z}\right)\Psi \, dA = \int_A \frac{dB}{dx} \frac{\Psi^2}{C_w} dA.$$

Toepassen van de productregel $\frac{\partial \tau_{xyV}\Psi}{\partial y} = \tau_{xyV} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xyV}}{\partial y}\Psi$ en vergelijking 13 geeft

$$\int_A \left(\frac{\partial \tau_{xyV}\Psi}{\partial y} - \tau_{xyV} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xzV}\Psi}{\partial z} - \tau_{xzV} \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dA = \frac{dB}{dx}.$$

De stelling van Green is $\int_A \left(\frac{\partial \tau_{xyV}\Psi}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xzV}\Psi}{\partial z}\right) dA = \oint_S \left(\tau_{xyV}\Psi \frac{dz}{dS} - \tau_{xzV}\Psi \frac{dy}{dS}\right) dS$
wat gelijk nul is vanwege vergelijking 6. (De Saint-Venant-spanningen voldoen al aan de randvoorwaarde daarom moeten de Vlasov-spanningen er ook aan voldoen.) Toepassen hiervan geeft

$$-\int_A \left(\tau_{xyV} \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tau_{xzV} \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dA = \frac{dB}{dx}.$$

Substitutie van vergelijkingen 5 geeft

$$-\int_A \left(\tau_{xyV}\left(\frac{\tau_{xyS}}{G\theta} + z\right) + \tau_{xzV}\left(\frac{\tau_{xzS}}{G\theta} - y\right)\right) dA = \frac{dB}{dx}.$$

Dit kan geschreven worden als

$$\int_A (y\,\tau_{xzV} - z\,\tau_{xyV})\, dA = \frac{1}{G\theta} \int_A (\tau_{xyV}\tau_{xyS} + \tau_{xzV}\tau_{xzS})\, dA + \frac{dB}{dx}.$$

Toepassen van vergelijkingen 8 en 17 geeft

$$M_{wV} = \frac{dB}{dx}.$$

Substitutie van dit en vergelijking 11 in vergelijking 9 geeft

$$\boxed{M_w = GI_w \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dB}{dx}} \qquad (20)$$

Substitutie van vergelijking 18 in 20 en het resultaat in vergelijking 10 geeft

$$\boxed{EC_w \frac{d^4\varphi}{dx^4} - GI_w \frac{d^2\varphi}{dx^2} = m_x} \qquad (21)$$

Q.E.D.